

MEDIDA E INTEGRAÇÃO

Armando Machado

UNIVERSIDADE DE LISBOA
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática
2011

Classificação A.M.S. (2010): 28-01, 28B05

ISBN: 978-972-8394-24-0

ÍNDICE

Introdução	v
Capítulo I. Medidas em σ -álgebras	
§1. Somas e produtos no contexto positivo	1
§2. Medidas em σ -álgebras	11
§3. Medidas em semianéis	20
§4. Prolongamento de medidas em semianéis	31
§5. Aplicações mensuráveis	50
Capítulo II. O integral	
§1. Integração de funções positivas	67
§2. Integração de funções com valores num espaço de Banach	101
§3. Propriedades elementares do integral indefinido	148
§4. Produto de medidas e teorema de Fubini	166
§5. Medida de Lebesgue em dimensões superiores	187
§6. Integrais paramétricos	216
Capítulo III. Espaços funcionais e aplicações	
§1. Aplicações convexas e desigualdades	229
§2. Os espaços L^p	240
§3. Decomposição de Lebesgue e teorema de Radon-Nikodym	268
§4. Medidas de Radon em localmente compactos	277
§5. Translações e produto de convolução em \mathbb{R}^n	310
§6. Aplicações do produto de convolução e derivadas fracas	334
§7. Medidas vetoriais e resultados de dualidade	363
§8. O integral indefinido revisitado	412
§9. Aplicações de variação limitada e medidas de Lebesgue-Stieltjes vetoriais	425
Apêndice 1. Uma versão do teorema de Sard	457
Índice de Símbolos	467
Índice Remissivo	471
Bibliografia	475

INTRODUÇÃO

Este livro concretiza um desejo antigo, o de reformular e completar um texto sobre medida e integração aparecido em 1976 na coleção Textos e Notas do CMAF e que há muito deixou de estar disponível.

A medida e a correspondente integração são assuntos há muito estabilizados pelo que o único objetivo que pode ter um texto como este é o de propor uma exposição que concretize um conjunto coerente de opções de base, eventualmente distintas das que orientam muitos dos livros que se debruçam sobre este assunto. Mais do que descrever sucintamente o conteúdo deste texto, um exame do índice substituirá com vantagem a leitura de uma tal descrição, procuraremos nesta introdução referir as principais opções de base que tomámos e, eventualmente, justificar a escolha de algumas delas. Antes de o fazer, não queremos, no entanto, deixar de referir os textos cuja leitura mais influenciou este texto, nomeadamente os livros de Halmos, Rudin e Lang ([6], [10] e [7] da bibliografia); o primeiro influenciou especialmente a via utilizada para construir as medidas de Lebesgue e de Lebesgue-Stieltjes nos borelianos de \mathbb{R} , o segundo o modo de desenvolver o integral das funções positivas e o estudo dos resultados de derivação do integral indefinido e o terceiro a escolha dos espaços de Banach e de Hilbert como contexto privilegiado para abordar o integral e a medida nos casos não positivos.

Para a construção das medidas mais utilizadas nas aplicações, nomeadamente as medidas de Lebesgue e de Lebesgue-Stieltjes nos borelianos de \mathbb{R} , tal como, posteriormente, para a definição das medidas produto e, através destas, da medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R}^n , a via que preferimos utilizar foi a que resulta do teorema de Hahn sobre a possibilidade de prolongar de modo único à σ -álgebra gerada medidas definidas num semianel (para as primeiras, o semianel dos intervalos semiabertos de \mathbb{R}). A construção dessas medidas fica assim totalmente independente do conhecimento prévio de qualquer teoria da integração de funções de variável real, como a do integral de Riemann. De facto, os únicos integrais que serão considerados no nosso texto serão os integrais no sentido de Lebesgue e abster-nos-emos, em particular, de examinar os resultados que comparam os dois tipos de integral, resultados cuja utilidade não nos parece evidente, uma vez que podem, nas aplicações mais frequentes, ser substituídos pela constatação de que o integral no sentido de Lebesgue também pode ser calculado, para funções suficientemente regulares, pela clássica fórmula de Barrow.

É bem conhecido que, no contexto de um espaço de medida, podem-se considerar tanto propriedades que são verificadas por todos os elementos do espaço, podemos chamá-las universais, como propriedades que são verificadas em quase todos os pontos, isto é, admitindo um conjunto de medida nula de

possíveis pontos excepcionais, chamemo-las quase universais. Muitos teoremas são válidos tanto na versão em que as hipóteses e as conclusões são enunciadas de forma universal como naquela em que ambas são consideradas nas suas contrapartidas quase universais. Formalmente, nenhuma das versões implica automaticamente a outra mas constata-se que é em geral trivial deduzir a versão quase universal da versão universal, quando esta última é verdadeira. Por esse motivo, e porque as versões universais tendem a ter enunciados mais concisos, preferimos, sempre que possível, apresentar as versões universais e não explicitar as versões quase universais que sejam consequências triviais daquelas. O mesmo desejo de permitir a validade de certas versões universais levou-nos a não partilhar a necessidade que muitos autores sentem de trabalhar apenas com medidas completas e, conseqüentemente, de completar aquelas que o não são (veja-se, por exemplo, o que sucede com o teorema de Fubini para subconjuntos de \mathbb{R}^2 , quando se completa a medida produto das medidas de Lebesgue em cada factor). De qualquer modo, é bem conhecido que, nas aplicações aos espaços de funções, em que são as classes de equivalência destas que interessam, é indiferente estar a trabalhar com uma medida ou com a sua completada.

Uma última opção de base que gostaríamos de referir foi a de, feita a construção do integral das funções positivas, passar diretamente para o integral de funções vetoriais, com valores num espaço de Banach, sem passar antes, como se faz frequentemente, pelas funções reais ou complexas. Pensamos, com efeito, que a construção do integral para funções vetoriais não é essencialmente mais complicada que a construção do integral das funções reais, pela via da consideração das respetivas partes positivas e negativas, e obtemos deste modo, sem precisar de novas definições, o integral das funções complexas e o das funções com valores num espaço de Banach. Opções análogas à que acabámos de referir, levaram-nos também a estudar as medidas vetoriais, sem passar previamente pelas medidas reais ou complexas, assim como as aplicações de variação limitada e as absolutamente contínuas com valores num espaço de Banach (ou, nalguns casos, de Hilbert), sem passar previamente por aquelas que tomam valores reais ou complexos.

CAPÍTULO I

Medidas em σ -álgebras

§1. Somas e produtos no contexto positivo.

Na Teoria da Medida associamos aos conjuntos a sua medida, que vai ser, idealmente, um número real maior ou igual a 0, mas que temos necessidade de permitir que possa ser também $+\infty$. Examinamos assim neste parágrafo o modo de trabalharmos, algébrica e analiticamente, no conjunto constituído pelos números reais maiores ou iguais a 0 e pelo elemento extra $+\infty$.

I.1.1 Lembremos que a *reta acabada* $\overline{\mathbb{R}}$ é o conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, sobre o qual se considera uma relação de ordem total, estendendo a relação de ordem total usual de \mathbb{R} e que tem $+\infty$ como máximo e $-\infty$ como mínimo. Lembremos também que a *topologia usual* de $\overline{\mathbb{R}}$ é aquela cujas vizinhanças de $a \in \mathbb{R}$ são os conjuntos que contêm algum intervalo $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, com $\varepsilon > 0$, cujas vizinhanças de $-\infty$ são os conjuntos que contêm algum intervalo $[-\infty, M[$, com $M \in \mathbb{R}$, e cujas vizinhanças de $+\infty$ são os conjuntos que contêm algum intervalo $]M, +\infty]$, com $M \in \mathbb{R}$. Relembremos ainda que esta topologia induz em \mathbb{R} a topologia usual de \mathbb{R} e que \mathbb{R} é um subconjunto aberto de $\overline{\mathbb{R}}$.

I.1.2 Vamos notar \mathbb{R}_+ o intervalo $[0, +\infty[$ de \mathbb{R} .¹ Analogamente, notamos $\overline{\mathbb{R}}_+ \subset \overline{\mathbb{R}}$ o correspondente intervalo fechado em $+\infty$,

$$\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Vamos prolongar a adição e a multiplicação, operações bem definidas em \mathbb{R}_+ , a $\overline{\mathbb{R}}_+$, pondo

$$\begin{aligned}x + (+\infty) &= (+\infty) + x = +\infty, & \text{se } x \in [0, +\infty[, \\(+\infty) + (+\infty) &= +\infty, \\x \times (+\infty) &= (+\infty) \times x = +\infty, & \text{se } x \in]0, +\infty[, \\(+\infty) \times (+\infty) &= +\infty, \\0 \times (+\infty) &= (+\infty) \times 0 = 0.\end{aligned}$$

¹Note-se que é frequente utilizar-se esta notação para o intervalo aberto $]0, +\infty[$, em vez do intervalo fechado.

A razão por que não tentamos estender estas duas operações à totalidade de $\overline{\mathbb{R}}$ deve-se à dificuldade de definir a soma $(+\infty) + (-\infty)$ sem abrir mão das propriedades usuais das operações (comutatividade, associatividade e distributividade). O problema não é o facto de termos um dos casos usuais de indeterminação, porque o mesmo acontece com $0 \times (+\infty)$ e, como veremos, o facto de termos dado uma definição para esse produto não vai comprometer as propriedades desejadas e revela-se ser a opção importante no que respeita às aplicações à Teoria da Medida.²

1.1.3 (Propriedades das operações em $\overline{\mathbb{R}}_+$) As operações de adição e multiplicação em $\overline{\mathbb{R}}_+$ têm 0 e 1 como elementos neutros, respetivamente, são comutativas e associativas e verificam a propriedade distributiva usual. Mais precisamente, dados $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 + x &= x + 0 = x, & 1 \times x &= x \times 1 = x, \\ x + y &= y + x, & x \times y &= y \times x, \\ (x + y) + z &= x + (y + z), & (x \times y) \times z &= x \times (y \times z), \\ x \times (y + z) &= x \times y + x \times z, & (y + z) \times x &= y \times x + z \times x. \end{aligned}$$

Valem também as *propriedades de monotonia*: Para $x, x', y, y' \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$(x \geq x' \wedge y \geq y') \Rightarrow (x + y \geq x' + y' \wedge x \times y \geq x' \times y'),$$

em particular, $x + y \geq x$ e $x + y \geq y$, quaisquer que sejam $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Dem: As afirmações relativas aos elementos neutros e à comutatividade das operações decorrem imediatamente das definições e do facto de as propriedades análogas para os números reais serem conhecidas. Também por esta última razão, só temos que justificar as associatividades e a distributividade no caso em que algum dos três elementos envolvidos seja $+\infty$. A associatividade da soma resulta de que, se algum dos três elementos envolvidos for $+\infty$, ambos os membros da igualdade são $+\infty$. A associatividade do produto resulta de que, se algum dos três elementos envolvidos for 0, ambos os membros da igualdade são 0 e de que, se nenhum deles for 0 mas algum for $+\infty$, ambos os membros da igualdade são $+\infty$. Quanto à distributividade, basta justificar a primeira igualdade enunciada, tendo em conta a comutatividade da multiplicação. Reparámos então que: Se $x = 0$, ambos os membros da igualdade são 0; se $y = 0$, ambos os membros da igualdade são iguais a $x \times z$, e, se $z = 0$, ambos os membros da igualdade são iguais a $x \times y$; se nenhum dos três elementos envolvidos é 0 e algum deles é $+\infty$, ambos os membros da igualdade são $+\infty$. As propriedades de monotonia são também bem conhecidas no caso dos elementos de \mathbb{R}_+ . No caso geral, relativamente à soma, atendemos a que, se um dos quatro elementos envolvidos é $+\infty$, então $x = +\infty$ ou $y = +\infty$, e portanto $x + y = +\infty$. No caso geral, relativamente ao produto, começamos por

²Intuitivamente, podemos dizer que estamos a dar ao 0 mais força que ao $+\infty$, no que respeita à multiplicação.

reparar que, se um dos quatro elementos envolvidos é 0, então $x' = 0$ ou $y' = 0$, e portanto $x' \times y' = 0$ e, em seguida, supondo que nenhum dos quatro elementos envolvidos é 0, reparamos que, se um dos quatro elementos envolvidos é $+\infty$, então $x = +\infty$ ou $y = +\infty$, e portanto $x \times y = +\infty$. \square

I.1.4 (Nota topológica) Consideremos as aplicações $\overline{\varphi}, \overline{\psi}: \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$\overline{\varphi}(x, y) = x + y, \quad \overline{\psi}(x, y) = x \times y.$$

Dos resultados sobre a “álgebra dos limites de sucessões de números reais” que se estudam em cursos de introdução à Análise Real, incluindo aqueles que fazem intervir limites infinitos, deduz-se facilmente, tendo em conta a definição da continuidade pelas vizinhanças e raciocinando por absurdo, que:

a) A aplicação $\overline{\varphi}$ é contínua em todos os pontos de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Em particular, podemos afirmar, sem qualquer restrição sobre a finitude dos termos das sucessões e dos limites, que, se $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$, então $x_n + y_n \rightarrow x + y$.

b) A aplicação $\overline{\psi}$ é contínua em todos os pontos de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$, com excepção dos pares $(0, +\infty)$ e $(+\infty, 0)$ (as indeterminações...). Em particular, podemos afirmar, sem qualquer restrição sobre a finitude dos termos das sucessões e dos limites para além das referidas adiante, que, se $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ e não se tem, nem $x = 0$ e $y = +\infty$, nem $x = +\infty$ e $y = 0$, então $x_n \times y_n \rightarrow x \times y$.

I.1.5 (Somatórios finitos) Como sucede sempre que estamos na presença de uma operação num conjunto, que seja comutativa, associativa e com elemento neutro, faz sentido referirmo-nos à soma de uma família finita $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$, que se nota $\sum_{i \in I} x_i$. Estas somas podem ser definidas, por recursão no número de elementos do conjunto de índices I , pela exigência de se ter

$$\sum_{i \in \emptyset} x_i = 0$$

e, para cada $i_0 \in I$,

$$\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} x_i. \quad 3$$

Estes somatórios finitos gozam das propriedades “familiares”⁴ que enunciamos em seguida, onde, em cada caso, é dada uma família finita $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$:

³Propomos, como exercício no fim do capítulo (cf. o exercício I.1.1), a verificação de que esta definição é legítima (independência da escolha de i_0 em I), assim como a verificação das propriedades “familiares” dos somatórios finitos explicitadas a seguir.

⁴No sentido que já foram, sem dúvida, utilizadas, porventura sem terem sido explicitamente enunciadas, no contexto dos números reais.

a) No caso em que I tem um único elemento i_0 , tem-se $\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0}$ e, no caso em que I tem dois elementos, i_0 e i_1 , $\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + x_{i_1}$. No caso em que $x_i = 0$, para todo o $i \in I$, tem-se $\sum_{i \in I} x_i = 0$; mais geralmente, se $x_i = x$, para todo o $i \in I$, e I tem k elementos, então $\sum_{i \in I} x_i = kx$.

b) (Mudança de índices) Seja I' outro conjunto de índices e $\varphi: I' \rightarrow I$ uma aplicação bijetiva. Tem-se então

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in I'} x_{\varphi(j)}.$$

c) (Associatividade dos somatórios) No caso em que $I = I_1 \cup I_2$, com $I_1 \cap I_2 = \emptyset$,

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_2} x_i.$$

Em particular, tem lugar a *primeira propriedade de monotonia*: Se $I' \subset I$, então

$$\sum_{i \in I'} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

d) (Associatividade mais geral dos somatórios) No caso em que o conjunto finito de índices I é união finita de uma família de subconjuntos I_α , $\alpha \in A$, disjuntos dois a dois,

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{i \in I_\alpha} x_i \right).$$

e) (Linearidade) Para cada $y \in \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se

$$y \times \left(\sum_{i \in I} x_i \right) = \sum_{i \in I} (y \times x_i), \quad \left(\sum_{i \in I} x_i \right) \times y = \sum_{i \in I} (x_i \times y).$$

Além disso, se $(y_i)_{i \in I}$ é outra família de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se

$$\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \left(\sum_{i \in I} x_i \right) + \left(\sum_{i \in I} y_i \right).^5$$

f) (Segunda propriedade de monotonia) Se, para cada $i \in I$, $y_i \leq x_i$, então

$$\sum_{i \in I} y_i \leq \sum_{i \in I} x_i.$$

⁵Esta última igualdade também pode resultar da associatividade referida em d) e as primeiras também são conhecidas pelo nome de propriedades distributivas.

Nas aplicações à Teoria da Medida teremos necessidade de considerar também somas de famílias de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ indexadas em conjuntos não necessariamente finitos. Será cómodo não nos limitarmos ao contexto das séries, em que o conjunto dos índices é usualmente \mathbb{N} , pelo que, tirando partido da propriedade de monotonia das somas finitas, apresentamos uma definição alternativa, que se revela equivalente no caso das séries.

I.1.6 (Somatórios arbitrários) Seja J um conjunto arbitrário de índices e seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Define-se então a sua soma $\sum_{j \in J} x_j$ como sendo o supremo em $\overline{\mathbb{R}}_+$ do conjunto das *somas parciais* $\sum_{j \in I} x_j$, com I parte finita de J .

Daqui decorre imediatamente que, se, para cada j , $x_j = 0$, então $\sum_{j \in J} x_j = 0$ e que, se existir j tal que $x_j = +\infty$, então $\sum_{j \in J} x_j = +\infty$. Daqui decorre também que, se, para cada j , $x_j = x \neq 0$ e o conjunto J é infinito, então $\sum_{j \in J} x_j = +\infty$.

Repare-se que, no caso em que J é finito, esta soma coincide com a já conhecida, tendo em conta a propriedade de monotonia referida na alínea c) de I.1.5, que implica que o supremo é, neste caso, um máximo, igual à soma no sentido finito.

I.1.7 (Mudança de índices) Sejam $(x_j)_{j \in J}$ uma família, finita ou infinita, de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$, J' outro conjunto de índices e $\varphi: J' \rightarrow J$ uma aplicação bijetiva. Tem-se então

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{i \in J'} x_{\varphi(i)}.$$

Dem: Basta atender a que, tendo em conta o referido na alínea b) de I.1.5, o conjunto das somas parciais finitas cujo supremo define o primeiro membro coincide com o conjunto das somas parciais finitas cujo supremo define o segundo membro. \square

I.1.8 (Comparação com as séries) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ e consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma finita $S_n = \sum_{p=1}^n x_p$. Tem-se então que a soma infinita $\sum_{p \in \mathbb{N}} x_p$, no sentido da definição em I.1.6, é o limite em $\overline{\mathbb{R}}_+$ da sucessão de elementos S_n .

Em particular, no caso em que os x_n são finitos, a série $\sum_{p=1}^{\infty} x_p$ é convergente se, e só se, $\sum_{p \in \mathbb{N}} x_p < +\infty$ e, quando isso acontecer,

$$\sum_{p=1}^{\infty} x_p = \sum_{p \in \mathbb{N}} x_p.$$

Dem: Começamos por notar que, uma vez que S_n é a soma finita parcial da definição de $\sum_{p \in \mathbb{N}} x_p$ que corresponde ao conjunto finito $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, tem-se $S_n \leq \sum_{p \in \mathbb{N}} x_p$. Notamos então que, para cada $M < \sum_{p \in \mathbb{N}} x_p$, podemos considerar $I \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\sum_{p \in I} x_p > M$ e, sendo então n_0 maior ou igual a todos os elementos de I , tem-se, para cada $n \geq n_0$, $\{1, 2, \dots, n\} \supset I$, donde $S_n \geq \sum_{p \in I} x_p > M$. No caso em que $\sum_{p \in I} x_p = +\infty$, o que acabamos de ver mostra que a sucessão dos S_n tem limite $+\infty$ e, no caso em que $\sum_{p \in I} x_p$ é finito, podemos concluir que, para cada $\delta > 0$, existe n_0 tal que, para cada $n \geq n_0$, $S_n > \sum_{p \in I} x_p - \delta$, tendo-se também $S_n \leq \sum_{p \in I} x_p < \sum_{p \in I} x_p + \delta$, o que mostra que a sucessão dos S_n tem limite $\sum_{p \in I} x_p$. \square

I.1.9 (Primeira propriedade de monotonia) Seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família, finita ou infinita, de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Para cada $J' \subset J$, vem então $\sum_{j \in J'} x_j \leq \sum_{j \in J} x_j$.

Dem: Tendo em conta a definição do primeiro membro como um supremo, basta mostrarmos que, para cada $I \subset J'$ finito, $\sum_{j \in I} x_j \leq \sum_{j \in J} x_j$ e isso é uma consequência de I ser também uma parte finita de J . \square

I.1.10 (Segunda propriedade de monotonia) Seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família, finita ou infinita, de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ e seja, para cada $j \in J$, $y_j \leq x_j$. Tem-se então

$$\sum_{j \in J} y_j \leq \sum_{j \in J} x_j.$$

Dem: Tendo em conta a definição do primeiro membro como um supremo, basta mostrarmos que, para cada $I \subset J$ finito, $\sum_{j \in I} y_j \leq \sum_{j \in J} x_j$. Ora, isso resulta do que referimos na alínea f) de I.1.5, visto que podemos escrever

$$\sum_{j \in I} y_j \leq \sum_{j \in I} x_j \leq \sum_{j \in J} x_j. \quad \square$$

I.1.11 (Propriedade associativa) Seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família, finita ou infinita, de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Suponhamos que o conjunto de índices J é união, finita ou infinita, de subconjuntos J_β , onde $\beta \in B$, disjuntos dois a dois. Tem-se então

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right).$$

Dem: 1) Vamos começar por mostrar que $\sum_{j \in J} x_j \leq \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right)$. Para isso, e tendo em conta a definição do primeiro membro como um supremo, bastará mostrar que, para cada $I \subset J$ finito, se tem $\sum_{j \in I} x_j \leq \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right)$. Fixemos então $I \subset J$ finito. Seja A a parte finita de B constituída pelos β tais que $I \cap J_\beta \neq \emptyset$ (no máximo um β para cada elemento de I). Tem-se então que o conjunto finito I é a união finita dos conjuntos $I \cap J_\beta$, com $\beta \in A$, que são disjuntos dois a dois, pelo que, tendo em conta o referido nas alíneas d) e f) de I.1.4, podemos escrever

$$\sum_{j \in I} x_j = \sum_{\beta \in A} \left(\sum_{j \in I \cap J_\beta} x_j \right) \leq \sum_{\beta \in A} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right) \leq \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right),$$

como queríamos.

2) Vamos mostrar agora a desigualdade oposta $\sum_{j \in J} x_j \geq \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right)$, para o que podemos já supor que o primeiro membro é finito, em particular que cada x_j é finito e cada $\sum_{j \in J_\beta} x_j$ é finito. Para isso, e tendo em conta a definição do segundo membro como um supremo, bastará provar que, fixado $A \subset B$ finito, se tem

$$\sum_{j \in J} x_j \geq \sum_{\beta \in A} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right).$$

Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia, portanto que, para um certo A finito com k elementos, $\sum_{j \in J} x_j < \sum_{\beta \in A} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right)$. Sendo $\delta > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j \in J} x_j \right) + \delta < \sum_{\beta \in A} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right),$$

podemos, para cada $\beta \in A$, considerar $I_\beta \subset J_\beta$ finito tal que

$$\sum_{j \in I_\beta} x_j \geq \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right) - \frac{\delta}{k}$$

e, sendo I o conjunto finito união dos I_β , com $\beta \in A$, obtemos, tendo em conta a associatividade finita referida na alínea d) de I.1.5,

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in A} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right) &\leq \sum_{\beta \in A} \left(\left(\sum_{j \in I_\beta} x_j \right) + \frac{\delta}{k} \right) = \left(\sum_{\beta \in A} \left(\sum_{j \in I_\beta} x_j \right) \right) + \delta = \\ &= \left(\sum_{j \in I} x_j \right) + \delta \leq \left(\sum_{j \in J} x_j \right) + \delta < \sum_{\beta \in A} \left(\sum_{j \in J_\beta} x_j \right), \end{aligned}$$

o que é o absurdo procurado. \square

I.1.12 (Propriedade de Fubini para somatórios) Sejam J e K dois conjuntos, finitos ou infinitos, de índices e $(x_{j,k})_{(j,k) \in J \times K}$ uma família de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Tem-se então

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} x_{j,k} \right) = \sum_{(j,k) \in J \times K} x_{j,k} = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} x_{j,k} \right).$$

Em particular, sendo J um conjunto, finito ou infinito, de índices e $(x_j)_{j \in J}$ e $(y_j)_{j \in J}$ duas famílias de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se

$$\sum_{j \in J} (x_j + y_j) = \left(\sum_{j \in J} x_j \right) + \left(\sum_{j \in J} y_j \right).$$

Dem: A primeira afirmação é uma consequência da propriedade associativa em I.1.11 e da propriedade de mudança de índices em I.1.7. Com efeito, a primeira igualdade resulta de considerarmos $J \times K$ como a união disjunta dos subconjuntos $\{j\} \times K$, com $j \in J$, e a segunda de considerarmos $J \times K$ como a união disjunta dos subconjuntos $J \times \{k\}$, com $k \in K$. Quanto à segunda afirmação, ela é uma consequência da primeira, se considerarmos $K = \{1, 2\}$ e definirmos $z_{j,1} = x_j$ e $z_{j,2} = y_j$. \square

I.1.13 (Distributividade) Sejam $(x_j)_{j \in J}$ uma família, finita ou infinita de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ e $y \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Tem-se então

$$y \times \left(\sum_{j \in J} x_j \right) = \sum_{j \in J} (y \times x_j), \quad \left(\sum_{j \in J} x_j \right) \times y = \sum_{j \in J} (x_j \times y).$$

Dem: Justificamos apenas a primeira igualdade, uma vez que a segunda resulta daquela, tendo em conta a comutatividade da multiplicação. Para cada parte finita I de J , tem-se

$$\sum_{j \in I} (y \times x_j) = y \times \left(\sum_{j \in I} x_j \right) \leq y \times \left(\sum_{j \in J} x_j \right),$$

pelo que, tendo em conta a definição da soma indexada em J como um supremo, tem-se

$$\sum_{j \in J} (y \times x_j) \leq y \times \left(\sum_{j \in J} x_j \right).$$

Resta-nos mostrar que se tem também

$$y \times \left(\sum_{j \in J} x_j \right) \leq \sum_{j \in J} (y \times x_j),$$

desigualdade que é verdadeira, por o primeiro membro ser igual a 0, quer no caso em que $y = 0$ quer naquele em que todos os x_j são iguais a 0 e que é também verdadeira, por o segundo membro ser $+\infty$, no caso em que $y = +\infty$ e nem todos os x_j são iguais a 0. Resta-nos verificar esta desigualdade no caso em que y é diferente de 0 e de $+\infty$. Ora, aplicando a desigualdade já demonstrada com $\frac{1}{y}$ no lugar de y e $y \times x_j$ no lugar de x_j , obtemos

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{j \in J} \left(\frac{1}{y} \times y \times x_j \right) \leq \frac{1}{y} \times \left(\sum_{j \in J} (y \times x_j) \right)$$

e multiplicando ambos os membros desta desigualdade por y , obtemos

$$y \times \left(\sum_{j \in J} x_j \right) \leq \sum_{j \in J} (y \times x_j),$$

como queríamos. □

I.1.14 (Produto de dois somatórios) Sejam $(x_j)_{j \in J}$ e $(y_k)_{k \in K}$ duas famílias, finitas ou infinitas, de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Tem-se então

$$\left(\sum_{j \in J} x_j \right) \times \left(\sum_{k \in K} y_k \right) = \sum_{(j,k) \in J \times K} (x_j \times y_k).$$

Dem: Tendo em conta I.1.12 e I.1.13, vem

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in J} x_j \right) \times \left(\sum_{k \in K} y_k \right) &= \sum_{j \in J} \left(x_j \times \sum_{k \in K} y_k \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} (x_j \times y_k) \right) = \\ &= \sum_{(j,k) \in J \times K} (x_j \times y_k). \end{aligned} \quad \square$$

O resultado seguinte mostra que, apesar de o conjunto J dos índices de um somatório de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ ser arbitrário, quando a soma for finita, o subconjunto dos índices que “verdadeiramente interessam” é sempre contável.

I.1.15 Seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ tal que $\sum_{j \in J} x_j < +\infty$. Existe

então um conjunto contável $J_0 \subset J$ tal que $x_j = 0$, para cada $j \in J \setminus J_0$.

Dem: Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto J_n , dos $j \in J$ tais que $x_j \geq \frac{1}{n}$, é finito, sem o que

$$\sum_{j \in J} x_j \geq \sum_{j \in J_n} x_j \geq \sum_{j \in J_n} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Podemos então considerar o conjunto contável J_0 união de todos os J_n e, para cada $j \in J \setminus J_0$, tem-se $x_j < \frac{1}{n}$, para todo o n , portanto $x_j = 0$. \square

Exercícios

Ex I.1.1 (**Exercício com sabor algébrico**) Verificar que a definição, por recursão, das somas de famílias finitas de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$, sugerida em I.1.5, é legítima, isto é, que o segundo membro da fórmula

$$\sum_{i \in I} x_i = x_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} x_i,$$

no caso em que I tem $n + 1$ elementos, não depende da escolha do elemento $i_0 \in I$, supondo que esse facto já é conhecido para o caso em que o conjunto de índices tem um número de elementos menor ou igual a n . Constatar, em particular, onde é que a comutatividade e a associatividade jogam o seu papel e qual a importância de 0 ser elemento neutro.

Justificar também as afirmações feitas nas alíneas a) a f) de I.1.5.

Ex I.1.2 Seja $0 < x < 1$. Lembrando a fórmula para a soma dos termos de uma série geométrica, calcular de duas maneiras distintas o somatório

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} x^{p+q}$$

para deduzir que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (n-1)x^n = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2.$$

Ex I.1.3 Seja $\alpha > 1$ um número real. Verificar que se tem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2},$$

em particular que a série no primeiro membro é convergente.

Sugestão: Reparar que, para cada $k \geq 3$, a soma

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^\alpha}$$

verifica

$$S_k \leq 1 + \sum_{p=1}^k \frac{1}{(2p)^\alpha} + \sum_{p=1}^k \frac{1}{(2p+1)^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} S_k + \frac{1}{2^\alpha} S_k.$$

Ex I.1.4 Provar, por absurdo, que se tem $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty$ (divergência da série harmónica), mostrando que, se fosse $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = a < +\infty$, vinha

$$a = \sum_{n \text{ par}} \frac{1}{n} + \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n} = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{2p} + \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{2p-1} > \frac{a}{2} + \frac{a}{2}.$$

Ex I.1.5 Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{k-1} < n \leq 2^k\}$$

(um conjunto com 2^{k-1} elementos) e reparemos que os conjuntos A_k são disjuntos dois a dois e de união $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

a) (De novo a divergência da série harmónica) Reparar que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} \right) \geq 1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in A_k} \frac{1}{2^k} \right) \geq 1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} = +\infty.$$

b) Adaptar o raciocínio feito em a) para deduzir de a) a divergência da série de Bertrand:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)} = +\infty.$$

§2. Medidas em σ -álgebras.

Quando pensamos intuitivamente em medidas, pensamos em algo como a noção de área no contexto de subconjuntos do plano e esperamos que certas propriedades naturais sejam verificadas, como o facto de o conjunto vazio ter área 0 e o de a área da união de dois conjuntos disjuntos ser a soma das áreas destes. Esta última propriedade arrasta facilmente, por indução, que a área de uma união finita de conjuntos disjuntos dois a dois é ainda a soma das áreas destes e isso leva-nos a pensar se esta última propriedade não será válida, mais geralmente para uniões de famílias arbitrárias, finitas ou infinitas, de conjuntos disjuntos dois a dois. Tal não é decerto o caso, como se reconhece facilmente se notarmos que qualquer conjunto é união de conjuntos com um único elemento, os quais têm área igual a 0, e que uma soma de parcelas todas iguais a 0 é igual a 0. Pelo

contrário, a experiência mostra que faz sentido considerar a propriedade referida desde que nos limitemos a considerar uniões finitas ou numeráveis de conjuntos, e esse facto vai ser de grande importância nas aplicações. Aparece, no entanto, uma contrariedade. Para muitas medidas importantes, um dos exemplos das quais é precisamente o da área, constata-se a impossibilidade de considerar a medida de um subconjunto arbitrário, de modo que se verifiquem as propriedades desejadas (cf. o exercício I.2.1, no fim do capítulo, para o caso análogo do comprimento no contexto de \mathbb{R}). Uma solução de compromisso é supor que a medida está apenas definida para uma certa classe de subconjuntos, que se espera que seja suficientemente ampla e fechada para as operações usuais que envolvem subconjuntos.

I.2.1 Seja X um conjunto. Diz-se que uma classe \mathcal{M} de subconjuntos de X é uma σ -álgebra⁶ se se verificam as seguintes propriedades:

- 1) O conjunto vazio \emptyset pertence a \mathcal{M} ;
- 2) Se $A \in \mathcal{M}$, então o complementar $X \setminus A$ também pertence a \mathcal{M} ;
- 3) Se J é um conjunto finito ou numerável de índices e se, para cada $j \in J$, $A_j \in \mathcal{M}$, então $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{M}$.⁷

I.2.2 Daqui em diante encontraremos com frequência a condição de um certo conjunto ser finito ou numerável, o que torna útil encontrar uma expressão mais simples de enunciar essa condição. Diremos que um conjunto é *contável* se for finito ou numerável. Falaremos também de *famílias contáveis* para nos referirmos a famílias cujo conjunto de índices seja contável. Analogamente, uma *família finita* é uma família cujo conjunto de índices seja finito e uma *família não vazia* é uma família cujo conjunto de índices seja não vazio.⁸

I.2.3 (**Outras propriedades das σ -álgebras**) Se \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X , então verificam-se também as seguintes propriedades:

- 4) Se J é um conjunto contável, não vazio⁹, de índices e se, para cada $j \in J$,

⁶É natural interrogarmo-nos sobre a razão da utilização da letra grega σ . Ela destina-se a sublinhar que, na condição 3) adiante se consideram uniões finitas ou numeráveis, e não apenas uniões finitas. Se apenas se exigisse a condição 3) para uniões finitas (e bastava então referir apenas as uniões de dois conjuntos de \mathcal{M}), obtinha-se o conceito de *álgebra*, que não teremos ocasião de utilizar.

⁷No caso em que $J = \emptyset$, a união é considerada como sendo o conjunto vazio pelo que quem aceitar o conceito de união da família vazia poderia dispensar o enunciado da propriedade 1).

⁸Esta última definição poderá considerada estranha por algumas pessoas que têm como implícito que o conjunto dos índices de uma família nunca é o conjunto vazio, mas apresentamo-la em atenção àqueles para quem estas últimas não devem ser afastadas *a priori*.

⁹Quando se trabalha no contexto dos subconjuntos de um conjunto fixado X , é comum considerar a intersecção da família vazia de partes de X como sendo o próprio X , pelo que, nesse contexto, a exigência $J \neq \emptyset$ seria dispensável.

$A_j \in \mathcal{M}$, então $\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{M}$;

5) $X \in \mathcal{M}$;

6) Se $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{M}$, então a diferença

$$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

também pertence a \mathcal{M} .

Dem: A conclusão de 4) resulta de que se pode escrever

$$\bigcap_{j \in J} A_j = X \setminus \left(\bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j) \right).$$

A conclusão de 5) resulta de se ter $X = X \setminus \emptyset$ e a de 6) de se poder escrever $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$. \square

I.2.4 (Exemplos de σ -álgebras) a) Se X é um conjunto, a classe $\mathcal{P}(X)$, de todos os subconjuntos de X , é uma σ -álgebra, que é máxima, no sentido de conter qualquer σ -álgebra de subconjuntos de X .

b) Se X é um conjunto, a classe $\{\emptyset, X\}$, é uma σ -álgebra, que é mínima, no sentido de estar contida em qualquer σ -álgebra de partes de X .

I.2.5 (A σ -álgebra restrição) Sejam X um conjunto e \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X . Se $Y \subset X$ é um subconjunto pertencente a \mathcal{M} , então a classe $\mathcal{M}_{|Y}$ dos conjuntos pertencentes a \mathcal{M} , que estão contidos em Y , é uma σ -álgebra de partes de Y , a que damos o nome de *restrição* da σ -álgebra \mathcal{M} a Y e que é a que se considera implicitamente em Y quando outra não for referida.

Dem: As propriedades 1) e 3) da definição em I.2.1 são triviais e a propriedade 2) resulta da propriedade 6) em I.2.3, uma vez que estamos a supor que $Y \in \mathcal{M}$. \square

O resultado a seguir dá-nos outro método útil de explicitar σ -álgebras, cujo único senão é não nos dar em geral nenhum método efetivo para decidir em todos os casos se um dado conjunto pertence ou não a essa σ -álgebra.

I.2.6 Sejam X um conjunto e \mathcal{C} uma classe arbitrária de partes de X . Existe então uma σ -álgebra \mathcal{M} contendo \mathcal{C} , que é mínima, no sentido de estar contida em qualquer σ -álgebra que contenha \mathcal{C} . A esta σ -álgebra, que é necessariamente única, dá-se o nome de *σ -álgebra gerada* pela classe \mathcal{C} .

Dem: Seja \mathcal{M} a classe de todos os subconjuntos de X que pertencem a qualquer σ -álgebra que contenha \mathcal{C} , por outras palavras, \mathcal{M} é a intersecção de todas as σ -álgebras que contêm \mathcal{C} (há pelo menos uma σ -álgebra nessas condições, nomeadamente a σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$). Constata-se imediatamente que \mathcal{M} é uma σ -álgebra que contém \mathcal{C} e, por construção, a classe \mathcal{M} está contida em qualquer σ -álgebra que contém \mathcal{C} . A unicidade de uma σ -álgebra

nestas condições resulta de que, se \mathcal{M} e \mathcal{M}' fossem duas σ -álgebras com esta propriedade, tinha que se ter $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ e $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. \square

Um exemplo de σ -álgebra gerada, que para nós será de grande importância, é o da σ -álgebra dos borelianos dum espaço topológico. Por exemplo, o comprimento em \mathbb{R} , a área em \mathbb{R}^2 e o volume em \mathbb{R}^3 vão ser medidas que, como veremos adiante, não estando definidas para subconjuntos arbitrários, estão definidas nas σ -álgebras dos borelianos dos espaços em questão.

I.2.7 Se X é um espaço topológico, chamam-se *borelianos* de X os subconjuntos que pertencem à σ -álgebra gerada pela classe dos conjuntos abertos de X , σ -álgebra \mathcal{B}_X a que se dá naturalmente o nome de σ -álgebra dos borelianos de X .

I.2.8 (Exemplos de borelianos) **a)** Se X é um espaço topológico, os abertos de X são borelianos, e os fechados também o são, uma vez que são complementares de conjuntos abertos.

b) No caso em que o espaço topológico X é separado, os conjuntos contáveis são borelianos, uma vez que são uniões de famílias contáveis de conjuntos com um único elemento, que são fechados; em consequência, também os complementares de conjuntos contáveis são borelianos.

c) Em \mathbb{R} , todos os intervalos são borelianos, uma vez que são conjuntos abertos ou conjuntos fechados ou interseções de um aberto com um fechado; por exemplo, $]a, b]$ é a intersecção do conjunto aberto $]a, +\infty[$ com o conjunto fechado $]-\infty, b]$.

Como complemento, que não justificamos, ao que referimos atrás, podemos dizer que o difícil é definir explicitamente um subconjunto de \mathbb{R} (ou de \mathbb{R}^n) que não seja boreliano, ou sequer um subconjunto que não consigamos verificar que é boreliano. Esta observação é, de certo modo, uma “boa notícia”, visto que, como já referimos, as medidas importantes de \mathbb{R}^n vão estar definidas nos borelianos e os conjuntos para os quais a medida está definida vão ser os mais interessantes.

I.2.9 (Borelianos de um subespaço topológico) Sejam X um espaço topológico e \mathcal{B}_X a σ -álgebra dos borelianos de X . Se $Y \subset X$ e $Y \in \mathcal{B}_X$, então a σ -álgebra \mathcal{B}_Y dos borelianos de Y , com a topologia induzida, coincide com a σ -álgebra restrição $\mathcal{B}_{X/Y}$.

Dem: Se V é aberto em Y , então $V = Y \cap U$, para um certo aberto U de X , em particular V é um boreliano de X , contido em Y , isto é, V pertence à σ -álgebra restrição $\mathcal{B}_{X/Y}$. Uma vez que a σ -álgebra \mathcal{B}_Y , dos borelianos de Y , é a mais pequena σ -álgebra de partes de Y que contém os abertos de Y , concluímos que $\mathcal{B}_Y \subset \mathcal{B}_{X/Y}$.

Consideremos agora

$$\mathcal{M} = \{A \subset X \mid A \cap Y \in \mathcal{B}_Y\}.$$

Tendo em conta as igualdades $\emptyset \cap Y = \emptyset$, $(X \setminus A) \cap Y = Y \setminus (A \cap Y)$ e $(\bigcup_{j \in J} A_j) \cap Y = \bigcup_{j \in J} (A_j \cap Y)$, concluímos que \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X , a qual vai conter os abertos U de X , para os quais $U \cap Y$ é aberto em Y , em particular pertence a \mathcal{B}_Y . Concluímos assim que $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{M}$, e portanto, se $A \in \mathcal{B}_{X/Y}$, vem $A \in \mathcal{B}_X \subset \mathcal{M}$ donde $A = A \cap Y \in \mathcal{B}_Y$, o que mostra que $\mathcal{B}_{X/Y} \subset \mathcal{B}_Y$. \square

I.2.10 (Medida numa σ -álgebra) Sejam X um conjunto e \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X . Chama-se *medida* na σ -álgebra \mathcal{M} a uma aplicação $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ verificando as seguintes propriedades:

1) $\mu(\emptyset) = 0$;

2) (**Aditividade**) Qualquer que seja a família contável $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos disjuntos dois a dois, pertencentes a \mathcal{M} ,

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sum_{j \in J} \mu(A_j).$$

Diz-se que a medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é *finita* se verifica $\mu(X) < +\infty$ e que é uma *probabilidade* se verifica $\mu(X) = 1$.

O lema seguinte, cujo enunciado é quase maior que a demonstração, será utilizado várias vezes ao longo deste texto.

I.2.11 (Lema) Sejam X um conjunto e $(A_j)_{j \in J}$ uma família contável de partes de X . Existe então uma família de partes de X , $(A'_j)_{j \in J}$, disjuntas duas a duas, com $A'_j \subset A_j$ e $\bigcup_{j \in J} A'_j = \bigcup_{j \in J} A_j$, onde cada A'_j é da forma

$$A'_j = A_j \setminus A''_j = A_j \cap (X \setminus A''_j),$$

com A''_j união de um número finito dos A_k , $k \in J$.

Em particular, no caso em que \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X com $A_j \in \mathcal{M}$, para cada $j \in J$, tem-se também $A'_j \in \mathcal{M}$, para cada $j \in J$.

Dem: O facto de J ser contável permite-nos, por composição com uma bijeção de \mathbb{N} , ou de um conjunto do tipo $\{1, 2, \dots, N\}$, sobre J , examinar apenas os casos em que $J = \mathbb{N}$ ou $J = \{1, 2, \dots, N\}$. Ora, nesses casos, basta definirmos $A'_1 = A_1$ e, para cada $j > 1$,

$$A'_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{k < j} A_k\right),$$

uma vez que cada $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$ vai pertencer a um único A'_j , nomeadamente o correspondente ao menor dos j tais que $x \in A_j$. \square

I.2.12 (Outras propriedades das medidas) Sejam X um conjunto, \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Tem-se então:

3) (Monotonia) Se $A, B \in \mathcal{M}$, com $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$ e, no caso em que $\mu(B) < +\infty$

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A);$$

Em particular, se μ é uma medida finita, μ toma valores em \mathbb{R}_+ e, se μ é uma probabilidade, μ toma valores em $[0, 1]$.

4) (Subaditividade) Qualquer que seja a família contável $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos pertencentes a \mathcal{M} , não necessariamente disjuntos dois a dois,

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu(A_j).$$

5) Sendo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de subconjuntos pertencentes a \mathcal{M} (isto é, supondo que $A_n \subset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), tem-se

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mu(A_n).$$

6) Se $A, B \in \mathcal{M}$, então

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

7) Sendo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão decrescente de subconjuntos pertencentes a \mathcal{M} (isto é, supondo que $A_n \supset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), e supondo que $\mu(A_1) < +\infty$, tem-se

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mu(A_n).$$

Dem: As afirmações de 3) resultam de que se tem $B = A \cup (B \setminus A)$, com $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, portanto $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Para justificarmos 4), atendemos ao lema I.2.11, para concluirmos que se tem $\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} A'_j$, com

$A'_j \in \mathcal{M}$, $A'_j \subset A_j$ e os A'_j disjuntos dois a dois, tendo-se então $\mu(A'_j) \leq \mu(A_j)$, portanto

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j \in J} A'_j\right) = \sum_{j \in J} \mu(A'_j) \leq \sum_{j \in J} \mu(A_j).$$

Examinemos agora a conclusão de 5). Consideremos os conjuntos $B_p \in \mathcal{M}$, onde $p \in \mathbb{N}$, disjuntos dois a dois, definidos por $B_1 = A_1$ e $B_{p+1} = A_{p+1} \setminus A_p$, reparando que $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} B_p = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p$ e que $\bigcup_{p \leq n} B_p = A_n$.

Tem-se assim, lembrando I.1.8,

$$\mu\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p\right) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \mu(B_p) = \lim \sum_{p=1}^n \mu(B_p) = \lim \mu(A_n).$$

Quanto a 6), reparamos que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, com $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, e que $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, com $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$, e deduzimos daqui que

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \\ &= \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

Quanto a 7), reparamos que os conjuntos $A_1 \setminus A_n \in \mathcal{M}$ constituem uma sucessão crescente cuja união é $A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, pelo que, tendo em conta as conclusões de 3) e 5),

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mu(A_1 \setminus A_n) = \\ &= \lim (\mu(A_1) - \mu(A_n)), \end{aligned}$$

donde

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_1) - \lim (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \lim \mu(A_n). \quad \square$$

I.2.13 (Restrição de uma medida) Sejam X um conjunto, \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Se $Y \subset X$, com $Y \in \mathcal{M}$, e se considerarmos em Y a σ -álgebra restrição $\mathcal{M}_{/Y}$, obtemos uma medida $\mu_{/Y}: \mathcal{M}_{/Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, a que damos o nome de *restrição* de μ a Y , definida por $\mu_{/Y}(A) = \mu(A)$, para cada $A \in \mathcal{M}_{/Y}$.

I.2.14 (Exemplo de medida) Sejam X um conjunto arbitrário e $(\alpha_x)_{x \in X}$ uma família de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Tem então lugar uma medida μ definida na σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$ de todos os subconjuntos de X por

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \alpha_x.$$

Dizemos que esta é a *medida associada* à família $(\alpha_x)_{x \in X}$.¹⁰

Dem: A propriedade 1) da definição de medida em I.2.10 resulta da definição por recursão dos somatórios finitos e a propriedade 2) é uma consequência imediata de I.1.11. \square

¹⁰Estas medidas gozam de duas propriedades que se podem considerar atípicas: Em primeiro lugar, estão definidas na σ -álgebra de todos os subconjuntos; em segundo lugar, a propriedade de aditividade é verificada para famílias arbitrárias de subconjuntos de X disjuntos dois a dois, e não só para famílias contáveis.

I.2.15 (Casos particulares das medidas precedentes) a) Seja X um conjunto arbitrário e consideremos a família $(\alpha_x)_{x \in X}$ com $\alpha_x = 1$, para cada $x \in X$. À medida ν na σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$, de todos os subconjuntos de X , associada a esta família, dá-se o nome de *medida de contagem*. A razão deste nome está em que, como decorre do referido na alínea a) de I.1.5 e em I.1.6, para cada $A \subset X$ finito, $\nu(A)$ é o número de elementos de A e, para cada $A \subset X$ infinito, $\nu(A) = +\infty$.

b) Sejam X um conjunto arbitrário e $x_0 \in X$ um elemento fixado. Considerando a família $(\alpha_x)_{x \in X}$ com $\alpha_x = 1$, se $x = x_0$, e $\alpha_x = 0$, se $x \neq x_0$, à medida μ_{x_0} na σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$, de todos os subconjuntos de X , associada a esta família dá-se o nome de *medida de Dirac* correspondente ao ponto x_0 . Repare-se que, como se constata facilmente, para cada $A \subset X$ tem-se $\mu_{x_0}(A) = 1$, se $x_0 \in A$, e $\mu_{x_0}(A) = 0$, se $x_0 \notin A$.

c) Se X é um conjunto arbitrário e considerarmos a família $(\alpha_x)_{x \in X}$ com $\alpha_x = 0$, para cada x , a correspondente medida μ na σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$ de todas as partes de X é a medida identicamente nula, com $\mu(A) = 0$, para cada A .

I.2.16 (Construção trivial de novas medidas) Sejam X um conjunto, \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X , $\mu, \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas e $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Têm então lugar novas medidas $\mu + \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $a\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definidas, naturalmente, por

$$(\mu + \mu')(A) = \mu(A) + \mu'(A), \quad (a\mu)(A) = a\mu(A).$$

Dem: Trata-se de consequências diretas das propriedades das somas não necessariamente finitas em I.1.12 e I.1.13. \square

Exercícios

Ex I.2.1 (Impossibilidade de definir o comprimento de um subconjunto arbitrário de \mathbb{R}) Verificar que não existe nenhuma boa noção de comprimento, definida para todos os subconjuntos de \mathbb{R} , mais precisamente, que não existe nenhuma medida μ , definida na σ -álgebra de todas as partes de \mathbb{R} , que seja invariante por translação (no sentido de se ter $\mu(x + A) = \mu(A)$, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$) e tal que $\mu(]0, 1]) = 1$.

Sugestão: Considerar em \mathbb{R} uma relação de equivalência, definida por $x \sim y$ se, e só se, $x - y$ é um número racional. Escolhamos em $]0, 1]$ um, e um só elemento de cada classe de equivalência para esta relação e seja $B \subset]0, 1]$ o conjunto dos elementos escolhidos. Notando J o conjunto numerável dos racionais do intervalo $] -1, 1[$, mostrar que

$$]0, 1] \subset \bigcup_{z \in J} z + B \subset]-1, 2],$$

com os conjuntos $z + B$ disjuntos dois a dois, deduzindo daí que

$$1 \leq \sum_{z \in J} \mu(z + B) \leq 3,$$

o que é impossível por todos os $\mu(z + B)$ serem iguais a $\mu(B)$, e portanto a sua soma ter que ser 0 ou $+\infty$.

Ex I.2.2 Seja X um conjunto infinito não numerável. Mostrar que a classe \mathcal{M} das partes de X que são contáveis ou de complementar contável é uma σ -álgebra e que se pode definir uma medida μ nesta σ -álgebra, pondo $\mu(A) = 0$, se A é contável, e $\mu(A) = 1$, se $X \setminus A$ é contável.

Ex I.2.3 Se X é um conjunto, o que serão os borelianos de X associados à topologia discreta e os borelianos de X associados à topologia caótica?

Ex I.2.4 Sejam X um conjunto, \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Lembrar que, como se verificou na alínea 7) de I.2.12, sendo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão decrescente de subconjuntos pertencentes a \mathcal{M} e admitindo que $\mu(A_1) < +\infty$, tem-se

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mu(A_n).$$

Dar um contraexemplo que mostre que, sem a hipótese de se ter $\mu(A_1) < +\infty$, a conclusão referida pode falhar. **Sugestão:** Pensar na medida de contagem na σ -álgebra de todas as partes de \mathbb{N} .

Ex I.2.5 Sejam X um conjunto e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos de X . Se $A \subset X$, diz-se que a sucessão tem *limite* A , e escreve-se $A_n \rightarrow A$, se se verificam as duas condições seguintes:

1) Para cada $x \in A$, existe n_0 tal que, para todo o $n \geq n_0$, $x \in A_n$;

2) Para cada $x \notin A$, existe n_0 tal que, para todo o $n \geq n_0$, $x \notin A_n$.

a) Verificar que uma sucessão de subconjuntos pode ter ou não limite mas que este, quando existe, é necessariamente único.

b) Verificar que, se a sucessão de subconjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente ou decrescente, então ela tem limite e dizer, em cada um dos casos, o que é esse limite.

c) Suponhamos que \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X e que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de subconjuntos pertencentes a \mathcal{M} . Verificar que, se a sucessão tem limite A , então $A \in \mathcal{M}$.

Ex I.2.6 **a)** Sejam X um conjunto, \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X e $\mu, \hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas, com $\hat{\mu}(X) < +\infty$, tais que, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}(A) = 0$. Mostrar que, para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $B \in \mathcal{M}$, $\mu(B) < \varepsilon \Rightarrow \hat{\mu}(B) < \delta$.

Sugestão: Supondo que a conclusão é falsa, considerar $\delta > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in \mathcal{M}$ com $\mu(B_n) < \frac{1}{2^n}$ e $\hat{\mu}(B_n) \geq \delta$. Considerar a sucessão decrescente de conjuntos $A_m \in \mathcal{M}$ definida por

$$A_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} B_n$$

e o conjunto $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m$ e mostrar, tendo em conta a conclusão da alínea 7) de I.2.12, que $\mu(A) = 0$ e $\widehat{\mu}(A) \geq \delta$.

b) Considerando na σ -álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, de todas as partes de \mathbb{N} , a medida de contagem ν e a medida finita μ associada à família $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ (cf. I.2.15 e I.2.14), concluir que a hipótese, na alínea precedente, de a segunda medida ser finita é essencial para a validade da respetiva conclusão.

§3. Medidas em semianéis.

O nosso objetivo principal para esta, e a próxima, secção é construir a primeira medida de importância fundamental, a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} , que estende a noção de comprimento de um intervalo, sendo possível obter, sem acréscimo significativo de trabalho, generalizações desta, as medidas de Lebesgue-Stieltjes. Por uma questão técnica, ligada à facilidade de decompor conjuntos como uniões de intervalos disjuntos, será cómodo começarmos por considerar de início apenas intervalos de um tipo muito particular, abertos à esquerda e fechados à direita. Começamos, nesta secção, por examinar as propriedades de que goza a classe dos intervalos desse tipo e a noção de comprimento e mostraremos na próxima secção que, sempre que estamos em presença de uma situação desse tipo, é possível construir uma medida na σ -álgebra gerada.

I.3.1 Dado um conjunto não vazio \mathcal{E} de números reais, vamos chamar \mathcal{E} -*intervalos semiabertos* (ou, simplesmente, *intervalos semiabertos*, no caso em que $\mathcal{E} = \mathbb{R}$) aos subconjuntos de \mathbb{R} da forma

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$

onde $a, b \in \mathcal{E}$. Repare-se que não fazemos nenhuma restrição sobre a relação de ordem entre os reais a e b mas, se $a \geq b$, tem-se $]a, b] = \emptyset$.

Qualquer \mathcal{E} -intervalo semiaberto pode assim ser escrito na forma $]a, b]$ com $a \leq b$ em \mathcal{E} e uma tal representação é única, no caso dos intervalos semiabertos não vazios, visto que então b tem que ser o máximo do intervalo e a o seu ínfimo. É claro que o conjunto vazio admite infinitas representações daquele tipo; essas representações são exatamente as do tipo $]a, a]$, com $a \in \mathcal{E}$ arbitrário.

I.3.2 (Propriedades dos intervalos semiabertos) Dado um conjunto não vazio $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$, a classe \mathcal{S} dos \mathcal{E} -intervalos semiabertos de \mathbb{R} , que tem o conjunto vazio \emptyset como um dos seus elementos, verifica a seguinte propriedade:

Se $A \in \mathcal{S}$ e $B \in \mathcal{S}$, então $A \cap B \in \mathcal{S}$ e existem $C \in \mathcal{S}$ e $D \in \mathcal{S}$, com $C \cap D = \emptyset$, tais que $A \setminus B = C \cup D$.

Dem: Ponhamos

$$A =]a_1, b_1], \quad B =]a_2, b_2],$$

onde podemos já supor $a_2 \leq b_2$. Tem-se então

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid a_1 < x \leq b_1 \wedge a_2 < x \leq b_2\} =]a, b],$$

com $a = \max\{a_1, a_2\}$ e $b = \min\{b_1, b_2\}$ e

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid a_1 < x \leq b_1 \wedge (x \leq a_2 \vee x > b_2)\} =]a_1, b'] \cup]a', b_1]$$

onde $b' = \min\{b_1, a_2\}$ e $a' = \max\{a_1, b_2\}$, tendo-se então

$$b' \leq a_2 \leq b_2 \leq a',$$

o que implica que $]a_1, b'] \cap]a', b_1] = \emptyset$. □

I.3.3 Seja X um conjunto. Diz-se que uma classe \mathcal{S} de partes de X é um *semianel* se se verificam as propriedades:

1) $\emptyset \in \mathcal{S}$;

2) Se $A \in \mathcal{S}$ e $B \in \mathcal{S}$, então $A \cap B \in \mathcal{S}$;

3) Se $A \in \mathcal{S}$ e $B \in \mathcal{S}$, então existe uma família finita $(C_i)_{i \in I}$ de conjuntos pertencentes a \mathcal{S} , disjuntos dois a dois, tal que

$$A \setminus B = \bigcup_{i \in I} C_i.$$

I.3.4 Uma σ -álgebra \mathcal{M} de subconjuntos de X é, em particular, um semianel, uma vez que, para a condição 3), podemos considerar uma família formada pelo único conjunto $A \setminus B$. O que vimos atrás mostra-nos que, se $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ é não vazio, a classe dos \mathcal{E} -intervalos semiabertos de \mathbb{R} é um semianel, que, evidentemente, não é uma σ -álgebra.

I.3.5 Sejam X um conjunto e \mathcal{S} um semianel de partes de X . Se $(C_i)_{i \in I}$ é uma família finita não vazia de conjuntos pertencentes a \mathcal{S} , então $\bigcap_{i \in I} C_i \in \mathcal{S}$.

Dem: Trata-se de uma consequência da propriedade 2) da definição de semianel, por indução no número de elementos, maior ou igual a 1, do conjunto de índices. □

I.3.6 (**O anel associado**) Sejam X um conjunto e \mathcal{S} um semianel de partes de X . Notemos \mathcal{A} a classe dos subconjuntos de X que são união de alguma família finita de conjuntos $(C_i)_{i \in I}$ disjuntos dois a dois e pertencentes a \mathcal{S} . Tem-se então que a classe \mathcal{A} contém \mathcal{S} e goza das seguintes propriedades:

1) Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família finita não vazia de conjuntos pertencentes a \mathcal{A} , então $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$;

2) Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$, então $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

3) Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família finita de elementos de \mathcal{A} , então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Dizemos que a classe \mathcal{A} é o *anel associado* ao semianel \mathcal{S} .

Dem: O facto de \mathcal{A} conter \mathcal{S} resulta de que cada $A \in \mathcal{S}$ pode ser olhado como a união de uma família constituída por um único conjunto A . Reparemos também que da definição da classe \mathcal{A} resulta imediatamente que, se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família finita de elementos de \mathcal{A} , disjuntos dois a dois, então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, o que é menos do que o afirmado em 3), uma vez que aí

não estamos a exigir que os conjuntos sejam disjuntos dois a dois.

A propriedade 1) resulta por indução no número de elementos, maior ou igual a 1, do conjunto de índices I , desde que se mostre que, se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$, então $A \cap B \in \mathcal{A}$. Ora, sendo $A = \bigcup_{i \in I} C_i$ e $B = \bigcup_{j \in J} D_j$, onde $(C_i)_{i \in I}$ e $(D_j)_{j \in J}$ são duas famílias finitas de conjuntos de \mathcal{S} , em ambos os casos disjuntos dois a dois, tem-se

$$A \cap B = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (C_i \cap D_j),$$

onde os conjuntos $C_i \cap D_j$ pertencem a \mathcal{S} e são disjuntos dois a dois.

Para provarmos 2), comecemos por examinar o caso particular em que $A \in \mathcal{S}$ e $B \in \mathcal{A}$. Ora, afastando já o caso trivial em que $B = \emptyset$, e portanto $A \setminus B = A$, podemos escrever $B = \bigcup_{j \in J} D_j$, onde $(D_j)_{j \in J}$ é uma família finita

não vazia de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois e tem-se então

$$A \setminus B = \bigcap_{j \in J} (A \setminus D_j),$$

onde, pela propriedade 3) dos semianéis, cada $A \setminus D_j$ pertence a \mathcal{A} , e portanto, tendo em conta a propriedade 1) já demonstrada, vem $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Suponhamos agora que $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$. Podemos então escrever $A = \bigcup_{i \in I} C_i$,

onde $(C_i)_{i \in I}$ é uma família finita de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois e portanto $A \setminus B = \bigcup_{i \in I} (C_i \setminus B)$, com os $C_i \setminus B$ disjuntos dois a dois e, como

vimos no caso particular já estudado, cada $C_i \setminus B \in \mathcal{A}$. Como referimos no início, daqui decorre que $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Uma vez que $\emptyset \in \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, podemos provar 3) por indução no número de elementos, maior ou igual a 1, do conjunto de índices I . Para isso, basta mostrarmos que, se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$, então $A \cup B \in \mathcal{A}$. Ora, isso resulta mais uma vez do que se disse no início, uma vez que se tem

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A),$$

onde os conjuntos A e $B \setminus A$ pertencem a \mathcal{A} e são disjuntos. \square

No caso do seminanel \mathcal{S} dos intervalos semiabertos de \mathbb{R} , podemos associar a cada intervalo $]a, b]$, com $a \leq b$, o elemento $b - a \in \mathbb{R}_+$. Se quisermos ter esperanças de que esta aplicação de \mathcal{S} em $\overline{\mathbb{R}}_+$ possa ser prolongada a uma medida numa σ -álgebra contendo \mathcal{S} (o que, como veremos, vai efetivamente acontecer), o mínimo que se pode exigir é que, ao nível de \mathcal{S} já se tenha uma medida no sentido seguinte.

I.3.7 Sejam X um conjunto e \mathcal{S} um seminanel de partes de X . Diz-se que uma aplicação $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma *medida* se se verificam as propriedades seguintes:

1) $\mu(\emptyset) = 0$;

2) (Aditividade) Qualquer que seja a família contável $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos disjuntos dois a dois, pertencentes a \mathcal{S} , tal que $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{S}$,

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sum_{j \in J} \mu(A_j).$$

É claro que, no caso em que o seminanel é uma σ -álgebra, reencontramos a definição de medida em I.2.10, a única diferença estando em que, naquele caso, não era necessário explicitar em 2) a hipótese, verificada automaticamente, de se ter $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{S}$.

Provamos em seguida algumas propriedades das medidas em semianéis, que decorrem das que já conhecemos no caso em que o seminanel é uma σ -álgebra, mas que necessitam aqui de argumentos mais completos. Apenas nos debruçamos sobre propriedades que serão utilizadas no processo de prolongamento das medidas à σ -álgebra gerada, uma vez que, obtido um tal prolongamento, as restantes propriedades decorrem do que se conhece para as σ -álgebras.

I.3.8 (Algumas propriedades das medidas num seminanel) Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um seminanel de partes de X e $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Tem-se então:

3) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família de conjuntos em \mathcal{S} disjuntos dois a dois, se $B \in \mathcal{S}$ e se $\bigcup_{j \in J} A_j \subset B$, então

$$\sum_{j \in J} \mu(A_j) \leq \mu(B).$$

4) (Monotonia) Se $A, B \in \mathcal{S}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

5) Se $A \in \mathcal{S}$ e $(B_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos de \mathcal{S} (não necessariamente disjuntos dois a dois) tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} B_j$, então

$$\mu(A) \leq \sum_{j \in J} \mu(B_j).$$

Dem: Atendendo a que uma soma arbitrária é o supremo de todas as somas parciais finitas, para demonstrar 3) basta examinar o caso em que o conjunto dos índices J é finito. Ora, nesse caso, deduzimos das alíneas 2) e 3) de I.3.6 que $B \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)$ pertence ao anel gerado \mathcal{A} , isto é,

$$B \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcup_{k \in K} C_k,$$

para uma certa família finita $(C_k)_{k \in K}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois. Então B vai ser a união dos conjuntos A_j e C_k de \mathcal{S} , todos disjuntos dois a dois, pelo que, aplicando a propriedade associativa das somas finitas,

$$\mu(B) = \left(\sum_{j \in J} \mu(A_j)\right) + \left(\sum_{k \in K} \mu(C_k)\right),$$

e portanto $\sum_{j \in J} \mu(A_j) \leq \mu(B)$.

A propriedade 4) é o caso particular de 3) em que consideramos para $(A_j)_{j \in J}$ uma família com um único elemento A .

Passemos agora à demonstração de 5). Tem-se $A = \bigcup A_j$, com $A_j = A \cap B_j$, em particular $A_j \subset B_j$ e $A_j \in \mathcal{S}$. Tendo em conta o lema I.2.11, podemos escrever também $A = \bigcup A'_j$, com $A'_j \subset A_j$ e os A'_j disjuntos dois a dois, onde cada A'_j , apesar de poder não pertencer a \mathcal{S} , pertence, por I.3.6, à classe \mathcal{A} referida nesse resultado, isto é,

$$A'_j = \bigcup_{k_j \in K_j} C_{j,k_j},$$

para certas famílias finitas $(C_{j,k_j})_{k_j \in K_j}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois. Pela alínea 3), já demonstrada,

$$\sum_{k_j \in K_j} \mu(C_{j,k_j}) \leq \mu(B_j).$$

De se ter

$$A = \bigcup_{j \in J} A'_j = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{k_j \in K_j} C_{j,k_j}\right),$$

com os conjuntos C_{j,k_j} , $j \in J$ e $k_j \in K_j$, disjuntos dois a dois, concluímos

finalmente, tendo em conta a propriedade associativa em I.1.11, que

$$\mu(A) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k_j \in K_j} \mu(C_{j,k_j}) \right) \leq \sum_{j \in J} \mu(B_j). \quad \square$$

I.3.9 (Generalidades sobre funções crescentes) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita,¹¹ e $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente (no sentido lato). Relembremos que, para cada $a \in J$, a função g admite limites laterais esquerdo e direito finitos, notados $g(a^-)$ e $g(a^+)$, que são respetivamente iguais ao supremo dos $g(x)$ com $x < a$ e ao ínfimo dos $g(x)$ com $x > a$, e que se tem

$$g(a^-) \leq g(a) \leq g(a^+).$$

Analogamente, g admite limite à direita $g(c^+)$, finito ou $-\infty$, e limite à esquerda $g(d^-)$, finito ou $+\infty$, iguais respectivamente ao ínfimo e ao supremo dos $g(x)$.

Uma propriedade importante, que teremos ocasião de utilizar, é que, se $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente então o conjunto dos pontos $x \in]c, d[$ onde g não é contínua, isto é, onde $g(x^-) \neq g(x^+)$, é contável.

Dem: Para cada x onde g não é contínua, podemos considerar um número racional r_x que verifique $g(x^-) < r_x < g(x^+)$ e então a função que a x associa r_x é uma função injectiva do conjunto dos pontos de descontinuidade para o conjunto numerável dos números racionais. \square

I.3.10 (Lema — A importância de um conjunto de índices ser contável)

Sejam \bar{I} um conjunto contável de índices e $\delta > 0$. Existe então uma família $(\delta_j)_{j \in \bar{I}}$ de números $\delta_j > 0$ tal que $\sum_{j \in \bar{I}} \delta_j \leq \delta$.¹²

Dem: Por uma mudança do conjunto de índices, podemos já supor que $\bar{I} = \mathbb{N}$ ou $\bar{I} = \{1, 2, \dots, N\}$. Basta então definirmos $\delta_j = \delta/2^j$, lembrando a caracterização da soma dos termos de uma série geométrica. \square

I.3.11 (A medida de Lebesgue-Stieltjes nos intervalos semiabertos)

Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita, e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente (no sentido lato). Tem então lugar uma medida λ_g , no semianel \mathcal{S} dos J -intervalos semiabertos, definida por

$$\lambda_g(]a, b]) = g(b^+) - g(a^+),$$

sempre que $a \leq b$.¹³

¹¹O conjunto \mathcal{E} pode assim ser, além do próprio \mathbb{R} , um intervalo de um dos tipos $]a, b[$, com $a < b$ em \mathbb{R} , $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$, com $a \in \mathbb{R}$.

¹²Reparar que, por I.1.15, se J não é contável é impossível existir uma tal família.

¹³Repare-se que, no caso em que a função crescente g é contínua à direita, podemos escrever, mais simplesmente, $\lambda_g(]a, b]) = g(b) - g(a)$. É frequente fazer-se esta exi-

Dizemos que esta é a *medida de Lebesgue-Stieltjes* associada à função g . No caso particular em que $J = \mathbb{R}$ e $g(x) = x$, a correspondente medida λ , que está definida por $\lambda([a, b]) = b - a$, se $a \leq b$, toma o nome de *medida de Lebesgue*.

Dem: Para uma melhor sistematização, dividimos a prova em várias partes.

1) O facto de a aplicação λ_g estar bem definida e verificar $\lambda_g(\emptyset) = 0$ resulta de que, como referido em I.3.1, qualquer intervalo semiaberto pode ser escrito na forma $]a, b]$ com $a \leq b$, sendo então vazio se, e só se, $a = b$ e, no caso em que ele não é vazio, uma tal representação é única. Resta-nos provar a propriedade de aditividade em I.3.7.

2) Vamos provar a seguinte propriedade de “superaditividade finita”: Se $A =]a, b]$ contém a união de uma família finita de conjuntos $A_j =]a_j, b_j]$, onde $j \in I$, disjuntos dois a dois, então

$$\lambda_g(A) \geq \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j).$$

Subdem: Sem alterar a união nem o segundo membro da igualdade a estabelecer, podemos já retirar de I os índices para os quais $A_j = \emptyset$. Podemos também afastar o caso trivial em que o conjunto de índices assim obtido é vazio, caso em que a união é \emptyset e e o segundo membro da desigualdade é 0. Fazemos então a demonstração por indução no número de elementos do conjunto de índices I . Se I tem apenas um elemento j , tem-se $A \supset A_j$, donde $a \leq a_j$ e $b \geq b_j$ e obtemos

$$\lambda_g(A) = g(b^+) - g(a^+) \geq g(b_j^+) - g(a_j^+) = \lambda_g(A_j).$$

Suponhamos que a desigualdade se verifica quando I tem n elementos e provemo-la quando I tem $n + 1$ elementos. Seja j_0 o índice j para o qual b_j é máximo e reparemos que $b_{j_0} \leq b$, $a \leq a_{j_0}$ e, para cada $j \neq j_0$, $b_j \leq a_{j_0}$, sem o que b_j pertencia a $A_j \cap A_{j_0}$. Concluimos daqui que $]a, a_{j_0}]$ contém a união dos A_j , com $j \neq j_0$, donde, tendo em conta a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \lambda_g(A) &= g(b^+) - g(a^+) \geq g(b_{j_0}^+) - g(a_{j_0}^+) + g(a_{j_0}^+) - g(a^+) = \\ &= \lambda_g(A_{j_0}) + \lambda_g(]a, a_{j_0}]) \geq \lambda_g(A_{j_0}) + \sum_{j \neq j_0} \lambda_g(A_j) = \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j). \end{aligned}$$

3) Vamos provar agora a seguinte propriedade de “subaditividade finita”: Se $A =]a, b]$ está contido na união de uma família finita de conjuntos $A_j =]a_j, b_j]$, onde $j \in I$, não necessariamente disjuntos dois a dois, então

gência suplementar sobre a função g o que não diminui a classe das medidas de Lebesgue-Stieltjes (cf. o exercício I.3.4 adiante). Preferimos não fazer essa exigência para não introduzir uma assimetria artificial esquerda-direita.

$$\lambda_g(A) \leq \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j).$$

Subdem: Sem alterar a união nem o segundo membro da igualdade a estabelecer, podemos já retirar de I os índices j para os quais $A_j = \emptyset$. Podemos também afastar o caso trivial em que $A = \emptyset$, caso em que o primeiro membro da desigualdade é 0. Façamos a demonstração por indução no número de elementos do conjunto de índices I . Se I tem apenas um elemento j , tem-se $A \subset A_j$, o que implica que $b \leq b_j$ e $a_j \leq a$, donde

$$\lambda_g(A) = g(b^+) - g(a^+) \leq g(b_j^+) - g(a_j^+) = \lambda_g(A_j).$$

Suponhamos que a desigualdade se verifica quando I tem n elementos e provemo-la quando I tem $n + 1$ elementos. Uma vez que $b \in A$, existe j_0 tal que $b \in A_{j_0} =]a_{j_0}, b_{j_0}]$, em particular $b \leq b_{j_0}$. Se fosse $a_{j_0} \leq a$, tinha-se trivialmente

$$\lambda_g(A) = g(b^+) - g(a^+) \leq g(b_{j_0}^+) - g(a_{j_0}^+) = \lambda_g(A_{j_0}) \leq \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j).$$

Caso contrário, ou $a_{j_0} \geq b$ e o intervalo $]a, b]$ está também contido na união dos A_j , com $j \neq j_0$, donde, pela hipótese de indução,

$$\lambda_g(A) \leq \sum_{j \neq j_0} \lambda_g(A_j) \leq \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j),$$

ou $a_{j_0} < b$ e podemos aplicar a hipótese de indução ao intervalo $]a, a_{j_0}]$, que está contido na união dos A_j , com $j \neq j_0$, tendo-se ainda

$$\begin{aligned} \lambda_g(A) &= g(b^+) - g(a^+) \leq g(b_{j_0}^+) - g(a_{j_0}^+) + g(a_{j_0}^+) - g(a^+) = \\ &= \lambda_g(A_{j_0}) + \lambda_g(]a, a_{j_0}]) \leq \lambda_g(A_{j_0}) + \sum_{j \neq j_0} \lambda_g(A_j) = \\ &= \sum_{j \in I} \lambda_g(A_j). \end{aligned}$$

4) Provemos, enfim, que, se $A =]a, b]$ é a união de uma família contável de conjuntos $A_j =]a_j, b_j]$, onde $j \in \bar{I}$ disjuntos dois a dois, então tem-se

$$\lambda_g(A) = \sum_{j \in \bar{I}} \lambda_g(A_j),$$

o que terminará a demonstração.

Subdem: Podemos já afastar o caso trivial em que A , e portanto cada um dos A_j , é vazio. Para cada $I \subset \bar{I}$ finito, A contém a união dos A_j , com $j \in I$ pelo que, tendo em conta o que vimos em 2), $\sum_{j \in I} \lambda_g(A_j) \leq \lambda_g(A)$.

Tendo em conta a definição da soma, para $j \in \bar{I}$, como supremo de todas as

somas finitas, concluímos assim que

$$\sum_{j \in \bar{I}} \lambda_g(A_j) \leq \lambda_g(A).$$

Para provar a igualdade vamos supor, por absurdo, que se tinha

$$\sum_{j \in \bar{I}} \lambda_g(A_j) < \lambda_g(A).$$

Sendo

$$\delta = \lambda_g(A) - \sum_{j \in \bar{I}} \lambda_g(A_j) > 0,$$

podemos aplicar o lema I.3.10 para considerar uma família $(\delta_j)_{j \in \bar{I}}$ de reais $\delta_j > 0$ tais que $\sum_{j \in \bar{I}} \delta_j \leq \frac{\delta}{2}$ e fixar $a' \in J$, onde a função g seja contínua, com

$a < a' < b$ e $g(a') < g(a^+) + \frac{\delta}{2}$, assim como, para cada $j \in \bar{I}$, $b'_j \in J$ onde a função g seja contínua, com $b_j < b'_j$ e $g(b'_j) < g(b_j^+) + \delta_j$. Como o compacto $[a', b]$ de \mathbb{R} , está contido em $]a, b] = \bigcup_{j \in \bar{I}}]a_j, b_j]$, e portanto também na união

dos abertos $]a_j, b'_j]$, $j \in \bar{I}$, a propriedade das coberturas dos compactos¹⁴ garante a existência de uma parte finita I de \bar{I} tal que $[a', b] \subset \bigcup_{j \in I}]a_j, b'_j]$ e

portanto, por maioria de razão, $A' =]a', b]$ está contido na união, com $j \in I$, dos $A'_j =]a_j, b'_j]$. Podemos assim aplicar o que vimos em 3) para deduzir que

$$\begin{aligned} \lambda_g(A) &= g(b^+) - g(a^+) < g(b^+) - g(a') + \frac{\delta}{2} = \mu_g(A') + \frac{\delta}{2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j \in I} \lambda_g(A'_j) \right) + \frac{\delta}{2} = \left(\sum_{j \in I} g(b'_j) - g(a_j^+) \right) + \frac{\delta}{2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j \in I} g(b_j^+) - g(a_j^+) \right) + \left(\sum_{j \in I} \delta_j \right) + \frac{\delta}{2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j \in \bar{I}} \lambda_g(A_j) \right) + \delta = \lambda_g(A), \end{aligned}$$

o que é o absurdo procurado. □

A principal razão pela qual nos limitámos no resultado precedente a considerar apenas intervalos abertos para domínio J da função crescente g , a partir da qual a medida de Lebesgue-Stieltjes foi construída, está em que não é especialmente interessante estar a construir explicitamente medidas em semianéis que resultem trivialmente, por restrição, a partir de

¹⁴Também conhecida por *teorema de Borel-Lebesgue*, no contexto da Análise Real.

medidas que se conhecem em semianéis que contenham aqueles. Ora, se partíssemos, por exemplo, de uma função crescente $g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, podíamos considerar o prolongamento, com as mesmas propriedades, $\bar{g}:]-\infty, b[\rightarrow \mathbb{R}$, que toma o valor constante $g(a)$ em $]-\infty, a[$ e que já está definido num intervalo aberto e obter, a partir desse prolongamento uma medida de Lebesgue-Stieltjes no semianel dos intervalos semiabertos com extremidades em $]-\infty, b[$, que contém o semianel dos intervalos semiabertos com extremidades em $[a, b[$. A mesma razão nos levou a enunciar as generalidades sobre funções crescentes em I.3.9 apenas no caso em que o domínio é um intervalo aberto.

Pelo contrário, a importância de não nos limitarmos a funções definidas na totalidade de \mathbb{R} resulta de que, por exemplo, a função crescente e contínua $x \mapsto \tan(x)$, com domínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ não pode ser prolongada a \mathbb{R} como função crescente.

O resultado a seguir, que identifica a σ -álgebra gerada pelo semianel dos intervalos semiabertos, vai ser-nos útil mais adiante.

I.3.12 Seja J um intervalo aberto não vazio de \mathbb{R} (por exemplo $J = \mathbb{R}$) e consideremos o semianel \mathcal{S} dos J -intervalos semiabertos. Tem-se então que a σ -álgebra de partes de J gerada por \mathcal{S} é a σ -álgebra \mathcal{B}_J dos borelianos de J .

Dem: Notemos \mathcal{M} a σ -álgebra de partes de J gerada por \mathcal{S} .

Começemos por notar que cada conjunto $]a, b[$ pertencente a \mathcal{S} é a intersecção do aberto $]a, +\infty[$ de \mathbb{R} com o fechado $]-\infty, b[$ de \mathbb{R} , pelo que é um boreliano de \mathbb{R} e, por estar contido no boreliano J de \mathbb{R} , é também um boreliano de J (cf. I.2.9). Tem-se assim $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_J$ pelo que, por \mathcal{M} ser a mais pequena σ -álgebra de partes de J que contém \mathcal{S} , vem $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_J$.

Verifiquemos agora que, para cada U aberto em J (e portanto também em \mathbb{R}), existe uma família contável de J -intervalos semiabertos cuja união é U , e portanto que $U \in \mathcal{M}$. Para isso, consideramos a família contável de todos os intervalos semiabertos $]a, b[$, com a e b racionais, que estão contidos em U . É claro que a sua união está contida em U . Por outro lado, dado $y \in U$ arbitrário, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset U$ e escolher então racionais a e b tais que $y - \varepsilon < a < y < b < y + \varepsilon$, o que implica que $y \in]a, b[\subset U$, ou seja, que y pertence a um dos intervalos da família. Uma vez que \mathcal{B}_J é a mais pequena σ -álgebra de partes de J que contém cada aberto U de J e que, como verificámos, \mathcal{M} é uma σ -álgebra nessas condições, concluímos que $\mathcal{B}_J \subset \mathcal{M}$.

Tem-se assim $\mathcal{M} = \mathcal{B}_J$, como queríamos. □

Exercícios

Ex I.3.1 Reparar que, se \mathcal{S} é um semianel de partes de X e $X \subset Y$, então \mathcal{S} é também um semianel de partes de Y . Será que se pode fazer uma afirmação análoga com a palavra “ σ -álgebra” no lugar da de “semianel”?

Ex I.3.2 Seja \mathcal{S} o semianel de partes de \mathbb{R} constituído pelos \mathbb{Z} -intervalos semiabertos (cf. a definição em I.3.1). Determinar explicitamente quais os conjuntos que pertencem à σ -álgebra de partes de \mathbb{R} gerada por \mathcal{S} .

Sugestão: Essa σ -álgebra vai estar em correspondência biunívoca natural com a σ -álgebra de todos os subconjuntos de \mathbb{Z} .

Ex I.3.3 Verificar que as seguintes classes de subconjuntos de \mathbb{R} têm, como σ -álgebra gerada a σ -álgebra dos borelianos de \mathbb{R} .

a) A classe dos intervalos $]-\infty, a]$, com $a \in \mathbb{R}$.

b) A classe dos intervalos $] -\infty, a[$, com $a \in \mathbb{R}$.

Ex I.3.4 Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Mostrar que se pode definir uma nova função crescente $\hat{g}:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ por $\hat{g}(x) = g(x^+)$ e que esta função tem em cada $x \in]c, d[$ os mesmos limites laterais que g nesse ponto, em particular é contínua à direita em cada ponto. Verificar ainda que as medidas de Lebesgue-Stieltjes λ_g e $\lambda_{\hat{g}}$ coincidem. **Sugestão:** Utilizando I.3.9, reparar que cada $x \in]c, d[$ é limite de duas sucessões de pontos de $]c, d[$ onde g é contínua, uma constituída por pontos menores que x e outra por pontos maiores que x .

Ex I.3.5 Seja \mathcal{S} o semianel dos intervalos semiabertos de \mathbb{R} , seja $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado e seja $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a restrição a \mathcal{S} da medida de Dirac μ_{x_0} correspondente ao ponto x_0 (cf. I.2.15). Encontrar uma função crescente e contínua à direita $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que μ seja a medida de Lebesgue-Stieltjes λ_g .

Ex I.3.6 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com extremidades finitas ou infinitas, e \mathcal{S} o semianel dos J -intervalos semiabertos.

a) Seja $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e suponha que fica definida uma medida λ_g no semianel \mathcal{S} por $\lambda_g(]a, b]) = g(b) - g(a)$, sempre que $a \leq b$ em J . Mostrar que a função g é crescente e contínua à direita (comparar com I.3.11).

Sugestão: Dado $a \in J$, escolher $\varepsilon > 0$ tal que $a + \varepsilon \in J$ e considerar os intervalos semiabertos

$$]a + \frac{\varepsilon}{n+1}, a + \frac{\varepsilon}{n}],$$

onde $n \in \mathbb{N}$, reparando que eles são disjuntos dois a dois e determinando a respetiva união.

b) Seja $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida no semianel \mathcal{S} (tomando, por hipótese,

valores finitos nos conjuntos $A \in \mathcal{S}$). Verificar que existe um função crescente e contínua à direita $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu = \lambda_g$, em particular μ é necessariamente uma das medidas de Lebesgue-Stieltjes.

Sugestão: Fixar $x_0 \in J$ e definir uma função $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \mu(]x_0, x]), & \text{se } x \geq x_0 \\ -\mu(]x, x_0]), & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

Ex I.3.7 Em I.3.11, provou-se que a medida de Lebesgue-Stieltjes, no semianel dos intervalos semiabertos de um intervalo aberto J , é efetivamente uma medida. Mostrar que, neste caso, é válida uma propriedade mais forte, a saber, que se $(A_j)_{j \in \bar{I}}$ uma família, não necessariamente contável, de intervalos semiabertos, disjuntos dois a dois, então

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \bar{I}} A_j\right) = \sum_{j \in \bar{I}} \mu(A_j).$$

Sugestão: Mostrar que este aumento de generalidade é só aparente, no sentido que, retirando a \bar{I} os índices j tais que $A_j = \emptyset$, o que não altera nenhum dos dois membros da igualdade, o conjunto de índices \bar{I} que resta é necessariamente contável, por existir uma aplicação injetiva de \bar{I} para \mathbb{Q} .

§4. Prolongamento de medidas em semianéis.

I.4.1 Seja X um conjunto. Chama-se *medida exterior* em X a uma aplicação $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ que verifique as seguintes condições:

- 1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- 2) Se $A \subset B$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- 3) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de subconjuntos de X , então

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu^*(A_j).$$

É claro que uma medida que esteja definida na σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$ de todos os subconjuntos de X é, em particular, uma medida exterior em X (cf. as propriedades 3) e 4) de I.2.12). No entanto, em geral, uma medida exterior não será uma medida e, tal como acontecia com as medidas em semianéis, as medidas exteriores apenas terão para nós um interesse provisório, como auxiliares para a construção de medidas em σ -álgebras.

O nosso próximo passo é mostrar como, partindo de uma medida num semianel de partes de X , conseguimos construir uma medida exterior associada em X .

I.4.2 Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de X e $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Para cada conjunto $A \subset X$, chamamos \mathcal{S} -cobertura contável de A a uma família contável $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos pertencentes a \mathcal{S} tal que $A \subset \bigcup_{j \in J} A_j$. Definindo então, para cada $A \subset X$, $\mu^*(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ como sendo o

ínfimo das somas $\sum_{j \in J} \mu(A_j)$, para as diferentes \mathcal{S} -coberturas contáveis $(A_j)_{j \in J}$ de A , se estas existirem, e como sendo $+\infty$ se A não admite nenhuma \mathcal{S} -cobertura contável¹⁵, obtemos uma medida exterior $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, que prolonga μ , no sentido de se ter $\mu^*(A) = \mu(A)$, para cada $A \in \mathcal{S}$.

Dizemos que μ^* é a *medida exterior* em X associada à medida μ no semianel \mathcal{S} .

Dem: Suponhamos que $A \in \mathcal{S}$. Tendo em conta a alínea 5) de I.3.8, para cada \mathcal{S} -cobertura contável $(A_j)_{j \in J}$ de A , tem-se $\mu(A) \leq \sum_{j \in J} \mu(A_j)$ e daqui

resulta, pela definição de ínfimo, que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Mas uma das \mathcal{S} -coberturas contáveis de A é a constituída pelo único conjunto A e daqui resulta que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$, e portanto $\mu^*(A) = \mu(A)$. Em particular, por ser $\emptyset \in \mathcal{S}$, tem-se $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Sejam agora A e B subconjuntos de X com $A \subset B$. Uma vez que toda a \mathcal{S} -cobertura contável de B é também uma \mathcal{S} -cobertura contável de A , concluímos que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Consideremos, enfim, $(A_j)_{j \in J}$ família contável de partes de X , e mostremos que

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu^*(A_j),$$

para o que podemos já supor que o segundo membro não é $+\infty$, em particular, para cada $j \in J$, $\mu^*(A_j) < +\infty$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Pelo lema I.3.10, podemos considerar, para cada $j \in J$, $\delta_j > 0$ de modo que $\sum_{j \in J} \delta_j \leq \delta$.

Para cada $j \in J$, consideremos uma \mathcal{S} -cobertura contável $(B_{j,\gamma_j})_{\gamma_j \in \Gamma_j}$ de A_j tal que

$$\sum_{\gamma_j \in \Gamma_j} \mu(B_{j,\gamma_j}) \leq \mu^*(A_j) + \delta_j.$$

Tem-se então que a família de todos os B_{j,γ_j} , com $j \in J$ e $\gamma_j \in \Gamma_j$, constitui uma \mathcal{S} -cobertura contável de $\bigcup_{j \in J} A_j$, de onde deduzimos, tendo em conta a

propriedade associativa dos somatórios, que

¹⁵Quem não tenha dificuldade em pensar no ínfimo do conjunto vazio, no contexto de $\overline{\mathbb{R}}_+$, como sendo $+\infty$, considerará esta última explicitação dispensável.

$$\begin{aligned}
 \mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) &\leq \sum_{j \in J} \left(\sum_{\gamma_j \in \Gamma_j} \mu(B_{j, \gamma_j}) \right) \leq \sum_{j \in J} (\mu^*(A_j) + \delta_j) = \\
 \text{(1)} \quad &= \left(\sum_{j \in J} \mu^*(A_j) \right) + \left(\sum_{j \in J} \delta_j \right) \leq \left(\sum_{j \in J} \mu^*(A_j) \right) + \delta,
 \end{aligned}$$

em particular o primeiro membro também é menor que $+\infty$. Tendo em conta a arbitrariedade de $\delta > 0$, deduzimos daqui que se tem, como queríamos,

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu^*(A_j),$$

visto que, se isso não acontecesse, podíamos escolher $\delta > 0$ com

$$\delta < \mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) - \sum_{j \in J} \mu^*(A_j),$$

o que, substituído em (1), conduzia ao absurdo $\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) < \mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)$. \square

I.4.3 Apesar de isso não ter sido necessário para a definição da medida exterior associada no resultado precedente, são especialmente cómodos, e nalguns casos essenciais, os semianéis \mathcal{S} de partes dum conjunto X para os quais o próprio X , e portanto qualquer parte de X , admite uma \mathcal{S} -cobertura contável. Vamos assim dizer que um semianel \mathcal{S} de partes de X é σ -total se existir uma família contável $(X_j)_{j \in J}$ de conjunto de \mathcal{S} tal que $X = \bigcup X_j$.

Uma das vantagens dos semianéis σ -totais é que, na caracterização da medida exterior de um conjunto, feita em I.4.2, não é preciso tratar separadamente o caso em que não existe \mathcal{S} -cobertura contável.

Por exemplo, se $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita, o semianel de partes de J constituído pelos intervalos semiabertos $]a, b]$, com $a, b \in J$ (cf. I.3.2) é um semianel σ -total, já que a classe daqueles intervalos para os quais a e b são racionais constitui uma classe contável cuja união é J (para cada $x \in J$, podemos considerar racionais a e b com $c < a < x$ e $x < b < d$ e então $x \in]a, b]$, um dos intervalos da classe).

I.4.4 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente (no sentido lato) e consideremos a correspondente medida de Lebesgue-Stieltjes λ_g no semianel dos J -intervalos semiaberto (cf. I.3.11). À medida exterior $\lambda_g^*: \mathcal{P}(J) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ associada à medida λ_g dá-se o nome de *medida exterior de Lebesgue-Stieltjes* associada a g . No caso particular em que $J = \mathbb{R}$ e $g(x) = x$, obtemos a medida exterior $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ associada à medida de Lebesgue, a que se dá naturalmente o nome de *medida exterior de Lebesgue*.

O resultado a seguir mostra-nos como, a partir de uma medida exterior definida no conjunto X , não necessariamente a associada a uma medida

num semianel, se pode obter, por restrição, uma autêntica medida, definida numa σ -álgebra.

I.4.5 Sejam X um conjunto e $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida exterior em X . Dizemos que um conjunto $A \subset X$ é μ^* -mensurável se, qualquer que seja $B \subset X$,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A). \quad 16$$

Tem-se então:

a) Sendo $\widehat{\mathcal{M}}$ a classe dos conjuntos μ^* -mensuráveis, $\widehat{\mathcal{M}}$ é uma σ -álgebra de partes de X e a restrição de μ^* a $\widehat{\mathcal{M}}$ é uma medida.

b) Mais geralmente, quaisquer que sejam a família contável $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos de $\widehat{\mathcal{M}}$ disjuntos dois a dois e $B \subset X$,

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j\right) = \sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j).$$

Dem: Para uma melhor sistematização, vamos dividir a demonstração em várias partes, cada uma com a sua justificação:

1) Seja A um conjunto tal que, para cada $B \subset X$,

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B).$$

Então A é μ^* -mensurável.

Subdem: Atender a que a desigualdade

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

é uma consequência de se ter $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ e de μ^* ser uma medida exterior.

2) Tem-se $\emptyset \in \widehat{\mathcal{M}}$ e, se $A \in \widehat{\mathcal{M}}$, também $X \setminus A \in \widehat{\mathcal{M}}$.

Subdem: A primeira afirmação resulta de se ter $B \cap \emptyset = \emptyset$ e $B \setminus \emptyset = B$, onde $\mu^*(\emptyset) = 0$. A segunda resulta de que $B \cap (X \setminus A) = B \setminus A$ e $B \setminus (X \setminus A) = B \cap A$.

3) Se $A \in \widehat{\mathcal{M}}$ e $A' \in \widehat{\mathcal{M}}$, então $A \cap A' \in \widehat{\mathcal{M}}$.

Subdem: Para cada $B \subset X$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \mu^*(B \cap (A \cap A')) + \mu^*(B \setminus (A \cap A')) = \\ & = \mu^*(B \cap A \cap A') + \mu^*((B \setminus (A \cap A')) \cap A) + \mu^*((B \setminus (A \cap A')) \setminus A) = \\ & = \mu^*((B \cap A) \cap A') + \mu^*((B \cap A) \setminus A') + \mu^*(B \setminus A) = \\ & = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B). \end{aligned}$$

4) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família finita não vazia de conjuntos μ^* -mensuráveis,

¹⁶Os conjuntos μ^* -mensuráveis são assim aqueles que dividem qualquer subconjunto B de X em dois subconjuntos onde μ^* é aditiva.

então $\bigcap_{j \in J} A_j$ é também μ^* -mensurável.¹⁷

Subdem: Temos uma consequência direta de 3), por indução no número de elementos do conjunto finito J de índices.

5) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família finita de conjuntos μ^* -mensuráveis, então $\bigcup_{j \in J} A_j$

é também μ^* -mensurável.

Subdem: Trata-se de uma consequência de 2) e 4), uma vez que \emptyset é μ^* -mensurável e que se pode escrever

$$\bigcup_{j \in J} A_j = X \setminus \left(\bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j) \right).$$

6) Seja $(A_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos μ^* -mensuráveis disjuntos dois a dois. Tem-se então, para cada $B \subset X$,

$$\mu^* \left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j \right) = \sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j).$$

Subdem: Fazemos a demonstração por indução no número de elementos do conjunto finito J de índices. Se $J = \emptyset$ a igualdade reduz-se a $\mu^*(\emptyset) = 0$ e a igualdade é também trivial quando J tem um único elemento. Supondo a afirmação válida quando o conjunto de índices tem n elementos, vemos que, se J tem $n + 1$ elementos e $j_0 \in J$ é um elemento escolhido, sai

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j \right) &= \mu^* \left(\left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j \right) \cap A_{j_0} \right) + \mu^* \left(\left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j \right) \setminus A_{j_0} \right) = \\ &= \mu^*(B \cap A_{j_0}) + \mu^* \left(\bigcup_{j \in J \setminus \{j_0\}} B \cap A_j \right) = \\ &= \mu^*(B \cap A_{j_0}) + \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \mu^*(B \cap A_j) = \sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j). \end{aligned}$$

7) Seja, mais geralmente, $(A_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos μ^* -mensuráveis, disjuntos dois a dois. Tem-se então que $\bigcup_{j \in J} A_j$ é μ^* -mensurável e, para cada $B \subset X$,

$$\mu^* \left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j \right) = \sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j).$$

Em particular, tomando $B = X$, temos a aditividade contável

$$\mu^* \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) = \sum_{j \in J} \mu^*(A_j).$$

¹⁷Quem não tiver dificuldade em pensar na intersecção de uma família vazia de subconjuntos de X como sendo o próprio X , reconhecerá que não é necessária a restrição “não vazia” na afirmação, uma vez que $X = X \setminus \emptyset$ é mensurável, pelo que vimos em 2).

Subdem: Para cada $I \subset J$ finito, tem-se $\bigcup_{j \in I} B \cap A_j \subset \bigcup_{j \in J} B \cap A_j$,
 donde, tendo em conta 6),

$$\sum_{j \in I} \mu^*(B \cap A_j) = \mu^*\left(\bigcup_{j \in I} B \cap A_j\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j\right).$$

Uma vez que $\sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j)$ é o supremo de todas as somas parciais finitas, deduzimos do anterior que $\sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j\right)$, portanto

$$\sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j) = \mu^*\left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j\right),$$

já que a desigualdade oposta, $\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} B \cap A_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j)$ é uma consequência de μ^* ser uma medida exterior. Para mostrarmos que $\bigcup_{j \in J} A_j$ é μ^* -mensurável, basta, tendo em conta 1), mostrar que, para cada conjunto $B \subset X$,

$$\mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)\right) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)\right) \leq \mu^*(B),$$

para o que basta examinar o caso em que $\mu^*(B) < +\infty$. Ora, para cada $I \subset J$ finito, o facto de, por 5), $\bigcup_{j \in I} A_j$ ser mensurável permite-nos escrever, tendo em conta 6) e a inclusão $B \setminus \left(\bigcup_{j \in I} A_j\right) \subset B \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)$,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)\right) &\leq \\ &\leq \mu^*\left(B \cap \left(\bigcup_{j \in I} A_j\right)\right) + \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j \in I} A_j\right)\right) = \mu^*(B), \end{aligned}$$

donde

$$\sum_{j \in I} \mu^*(B \cap A_j) \leq \mu^*(B) - \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)\right),$$

o que, tendo em conta a definição das somas como supremo das somas parciais finitas, implica que

$$\sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j) \leq \mu^*(B) - \mu^*\left(B \setminus \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)\right),$$

donde, lembrando que μ^* é uma medida exterior e reparando que $B \cap \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)$ é a união dos $B \cap A_j$, $j \in J$,

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap (\bigcup_{j \in J} A_j)) + \mu^*(B \setminus (\bigcup_{j \in J} A_j)) &\leq \\ &\leq \sum_{j \in J} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \setminus (\bigcup_{j \in J} A_j)) \leq \mu^*(B), \end{aligned}$$

como queríamos.

8) A classe $\widehat{\mathcal{M}}$ é uma σ -álgebra de partes de X e a restrição de μ^* a $\widehat{\mathcal{M}}$ é uma medida.

Subdem: Já verificámos, em 2), que $\emptyset \in \widehat{\mathcal{M}}$ e que $X \setminus A \in \widehat{\mathcal{M}}$, para cada $A \in \widehat{\mathcal{M}}$, em 3), que a intersecção de dois conjuntos em $\widehat{\mathcal{M}}$ ainda está em $\widehat{\mathcal{M}}$, em 5), que a união de uma família finita de conjuntos em $\widehat{\mathcal{M}}$ ainda pertence a $\widehat{\mathcal{M}}$ e, em 7), que a união de uma família contável de conjuntos em $\widehat{\mathcal{M}}$ disjuntos dois a dois ainda pertence a $\widehat{\mathcal{M}}$. Para verificarmos que $\widehat{\mathcal{M}}$ é uma σ -álgebra, resta-nos mostrar que, se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos em $\widehat{\mathcal{M}}$, não necessariamente disjuntos dois a dois, a união $\bigcup_{j \in J} A_j$

ainda pertence a $\widehat{\mathcal{M}}$. Ora, isso resulta do lema I.2.11, que garante que se tem $\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} A'_j$, com os A'_j disjuntos dois a dois e, pelo que referimos atrás, $A'_j \in \widehat{\mathcal{M}}$. O facto de a restrição a $\widehat{\mathcal{M}}$ da medida exterior μ^* ser uma medida resulta de que $\mu^*(\emptyset) = 0$ e da aditividade contável, provada em 7). \square

O resultado precedente, apesar de profundo, corria o risco de ser de pouca utilidade, uma vez que, apesar de garantir a obtenção de uma medida numa σ -álgebra de partes de X , nada nos diz sobre a quantidade de conjuntos que pertence a essa σ -álgebra; na situação limite até podia acontecer que apenas \emptyset e X fossem μ^* -mensuráveis, o que era claramente pouco interessante (cf. o exercício I.4.2 no fim do capítulo). O resultado que apresentamos em seguida mostra que, no caso em que a medida exterior é a associada a uma medida num semianel, pelo menos os conjuntos do semianel são μ^* -mensuráveis.

I.4.6 Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de X e $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Sendo $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida exterior associada (cf. I.4.2), tem-se então que qualquer conjunto $A \in \mathcal{S}$ é μ^* -mensurável, ou seja, $\mathcal{S} \subset \widehat{\mathcal{M}}$, onde $\widehat{\mathcal{M}}$ é a σ -álgebra dos conjuntos μ^* -mensuráveis.

Dem: Suponhamos que $A \in \mathcal{S}$.

Começemos por supor que $B \in \mathcal{S}$. Sabemos então que $B \cap A \in \mathcal{S}$ e que existe uma família finita $(C_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois tal que $B \setminus A = \bigcup_{i \in I} C_i$ e, uma vez que B é a união dos conjuntos de \mathcal{S} , $B \cap A$ e

C_i , $i \in I$, que são disjuntos dois a dois, obtemos

$$\mu^*(B) = \mu(B) = \mu(B \cap A) + \sum_{i \in I} \mu(C_i) = \mu^*(B \cap A) + \sum_{i \in I} \mu^*(C_i)$$

donde, por μ^* ser uma medida exterior e portanto $\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{i \in I} \mu^*(C_i)$,

$$(1) \quad \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B).$$

Vamos agora mostrar que a desigualdade (1) continua a ser válida para um conjunto $B \subset X$ arbitrário, para o que se pode já supor que $\mu^*(B) < +\infty$. Seja então $(B_j)_{j \in J}$ uma \mathcal{S} -cobertura contável arbitrária de B . Pelo que vimos no início, tem-se, para cada j ,

$$\mu^*(B_j \cap A) + \mu^*(B_j \setminus A) \leq \mu^*(B_j) = \mu(B_j)$$

donde, por ser $B \cap A \subset \bigcup_{j \in J} (B_j \cap A)$ e $B \setminus A \subset \bigcup_{j \in J} (B_j \setminus A)$ e por μ^* ser uma medida exterior,

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) &\leq \left(\sum_{j \in J} \mu^*(B_j \cap A) \right) + \left(\sum_{j \in J} \mu^*(B_j \setminus A) \right) = \\ &= \sum_{j \in J} (\mu^*(B_j \cap A) + \mu^*(B_j \setminus A)) \leq \sum_{j \in J} \mu(B_j), \end{aligned}$$

o que, pela definição da medida exterior $\mu^*(B)$ como um ínfimo, implica que se tem efetivamente

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B).$$

Uma vez que, por se ter $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$ e por μ^* ser uma medida exterior, tem-se também $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$, concluímos que $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$, ou seja, que A é efetivamente μ^* -mensurável. \square

I.4.7 (Teorema de extensão de Hahn) Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de X e $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Sendo \mathcal{M} a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} , fica definida uma medida $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, cuja restrição a \mathcal{S} é μ , pela condição de, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\hat{\mu}(A)$ ser o ínfimo das somas $\sum_{j \in J} \mu(A_j)$, com $(A_j)_{j \in J}$

\mathcal{S} -cobertura contável de A , se tais coberturas existirem, e, caso contrário, $\hat{\mu}(A) = +\infty$.

Dizemos que a medida $\hat{\mu}$ é o *prolongamento de Hahn* da medida μ .

Dem: Tendo em conta I.4.2, pode-se definir uma medida exterior μ^* em X , definindo, para cada $A \subset X$, $\mu^*(A)$ pela caracterização de $\hat{\mu}(A)$ referida no enunciado e tem-se, para cada $A \in \mathcal{S}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$. Tendo em conta I.4.5 e I.4.6 a restrição de μ^* a uma certa σ -álgebra $\hat{\mathcal{M}}$, que contém \mathcal{S} , é uma medida, e então por definição de σ -álgebra gerada, tem-se $\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$, o que implica trivialmente que a restrição $\hat{\mu}$ de μ^* à σ -álgebra \mathcal{M} é ainda uma medida cuja restrição a \mathcal{S} é μ . \square

I.4.8 (Caracterização alternativa do prolongamento de Hahn) Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de X , $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida e $\widehat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ o respetivo prolongamento de Hahn à σ -álgebra \mathcal{M} gerada por \mathcal{S} . Para cada $A \in \mathcal{M}$, $\widehat{\mu}(A)$ é também o ínfimo das somas $\sum_{j \in J} \mu(A_j)$, com

$(A_j)_{j \in J}$ \mathcal{S} -cobertura contável de A constituída por conjuntos disjuntos dois a dois, se essas coberturas existirem, e, caso contrário, é $+\infty$ (essas coberturas existem sempre no caso em que o semianel \mathcal{S} é σ -total).

Dem: Uma vez que as \mathcal{S} -coberturas aqui consideradas são algumas das utilizadas para a definição de $\widehat{\mu}(A)$, o resultado ficará provado se mostrarmos que, para cada \mathcal{S} -cobertura contável $(B_k)_{k \in K}$ de A , existe uma outra \mathcal{S} -cobertura contável $(A_j)_{j \in J}$ de A , esta com os conjuntos disjuntos dois a dois, tal que $\sum_{j \in J} \mu(A_j) \leq \sum_{k \in K} \mu(B_k)$. Ora, tendo em conta I.2.11, existem

conjuntos disjuntos dois a dois $B'_k \subset B_k$, com $\bigcup B'_k = \bigcup B_k$, onde cada B'_k , apesar de poder não pertencer a \mathcal{S} é, por I.3.6, união de uma família finita $(A_{k,i})_{i \in I_k}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois e podemos então considerar a família contável de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois constituída pelos $A_{k,i}$, com $k \in K$ e $i \in I_k$, para a qual se tem

$$A \subset \bigcup_k B_k = \bigcup_k B'_k = \bigcup_{k,i} A_{k,i}$$

e

$$\sum_{k,i} \mu(A_{k,i}) = \sum_{k,i} \widehat{\mu}(A_{k,i}) = \sum_k \widehat{\mu}(B'_k) \leq \sum_k \widehat{\mu}(B_k) = \sum_k \mu(B_k),$$

como queríamos. □

A situação seria especialmente interessante se pudéssemos afirmar que o prolongamento da medida $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ à σ -álgebra gerada \mathcal{M} , referido no teorema de extensão de Hahn, é o único prolongamento possível a essa σ -álgebra. Veremos a seguir que, com uma hipótese suplementar, verificada em muitos casos importantes, é esse efetivamente o caso.

I.4.9 Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de X e $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Diz-se que μ é σ -finita se existir uma família contável $(X_j)_{j \in J}$, de conjuntos de \mathcal{S} com $\mu(X_j) < +\infty$, tal que $\bigcup_{j \in J} X_j = X$. É claro que, quando

isso acontecer, o semianel \mathcal{S} é, em particular, σ -total (cf. I.4.3).

Uma vez que uma σ -álgebra é, em particular, um semianel, a noção de medida σ -finita faz naturalmente também sentido para medidas em σ -álgebras.

I.4.10 Por exemplo, se $J =]c, d[$ é um intervalo aberto não vazio de \mathbb{R} , com extremidades finitas ou infinitas, e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente (no

sentido lato), então a medida de Lebesgue-Stieltjes λ_g , no semianel \mathcal{S} dos J -intervalos semiabertos (cf. I.3.11), é σ -finita, uma vez que o semianel é σ -total (cf. I.4.3) e a medida é finita nos conjuntos do semianel.

Já vimos em I.3.12 que a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} é a σ -álgebra \mathcal{B}_J , dos borelianos de J .

I.4.11 Outro exemplo simples, é aquele em que \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma medida σ -finita e consideramos a classe \mathcal{S} dos $A \in \mathcal{M}$ tais que $\mu(A) < +\infty$. A classe \mathcal{S} é um semianel tal que a restrição de μ a \mathcal{S} é ainda σ -finita e a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} é \mathcal{M} .

Dem: O facto de \mathcal{S} ser um semianel resulta de que uma parte mensurável dum conjunto de medida finita ainda tem medida finita, o facto de a restrição de μ a \mathcal{S} ser σ -finita é trivial e o facto de a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} ser \mathcal{M} resulta de que, sendo $(X_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} com $\mu(X_j) < +\infty$ e $X = \bigcup X_j$, cada $A \in \mathcal{M}$ é a união contável dos conjuntos $A \cap X_j$, que pertencem a \mathcal{S} . \square

I.4.12 (**Teorema de extensão de Hahn precisado**) Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de X e $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida σ -finita. Sendo \mathcal{M} a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} , tem-se então que o prolongamento de Hahn $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, que é trivialmente ainda uma medida σ -finita, é a única medida na σ -álgebra \mathcal{M} cuja restrição a \mathcal{S} é μ .

Tendo em conta este facto, é frequente utilizarmos o mesmo símbolo μ para designar a medida σ -finita no semianel e o seu prolongamento de Hahn à σ -álgebra gerada.

Dem: Suponhamos que $\mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma medida cuja restrição a \mathcal{S} seja μ . Começemos por verificar que, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu'(A) \leq \hat{\mu}(A)$, para o que podemos já supor que $\hat{\mu}(A) < +\infty$. Ora, se $(A_j)_{j \in J}$ é uma \mathcal{S} -cobertura contável de A arbitrária, vem

$$\mu'(A) \leq \mu' \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \leq \sum_{j \in J} \mu'(A_j) = \sum_{j \in J} \mu(A_j),$$

donde, tendo em conta a definição de $\mu^*(A)$ como um ínfimo,

$$\mu'(A) \leq \mu^*(A) = \hat{\mu}(A).$$

Consideremos agora $A \in \mathcal{M}$, para o qual exista um conjunto $B \in \mathcal{S}$ com $A \subset B$ e $\mu(B) < +\infty$. Uma vez que se tem $B = A \cup (B \setminus A)$, com $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu'(A) + \mu'(B \setminus A) &= \mu'(B) = \mu(B) = \hat{\mu}(B) = \\ &= \hat{\mu}(A) + \hat{\mu}(B \setminus A), \end{aligned}$$

onde ambos os membros são finitos e, como já vimos,

$$\mu'(A) \leq \hat{\mu}(A), \quad \mu'(B \setminus A) \leq \hat{\mu}(B \setminus A),$$

pelo que concluímos que se tem necessariamente $\mu'(A) = \hat{\mu}(A)$.

Seja agora $A \in \mathcal{M}$ arbitrário. O facto de termos partido de uma medida σ -finita, permite-nos considerar uma família contável $(X_j)_{j \in J}$, de conjuntos de \mathcal{S} com $\mu(X_j) < +\infty$, tal que $X = \bigcup_{j \in J} X_j$. Tem-se assim $A = \bigcup_{j \in J} A_j$, com

$A_j = A \cap X_j \in \mathcal{M}$ e, tendo em conta o lema I.2.11, existem conjuntos $B_j \subset A_j \subset X_j$, disjuntos dois a dois e com $B_j \in \mathcal{M}$, tais que $A = \bigcup_{j \in J} B_j$.

Uma vez que os B_j estão nas condições já estudadas anteriormente, e verificam portanto $\mu'(B_j) = \hat{\mu}(B_j)$, obtemos

$$\mu'(A) = \sum_{j \in J} \mu'(B_j) = \sum_{j \in J} \hat{\mu}(B_j) = \hat{\mu}(A).$$

Ficou assim provado que $\mu' = \hat{\mu}$. □

Como aplicação dos resultados precedentes, obtemos as medidas de Lebesgue-Stieltjes nos borelianos de um intervalo aberto e, em particular, a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} , que joga um papel especialmente importante no contexto da medida.

I.4.13 (Medida de Lebesgue-Stieltjes) Sejam $J =]c, d[$ um intervalo aberto não vazio de \mathbb{R} , com extremidades finitas ou infinitas, e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente (no sentido lato). Existe então na σ -álgebra \mathcal{B}_J , dos borelianos de J , uma, e uma só medida λ_g tal que, para cada J -intervalo semiaberto $]a, b[$, com $a \leq b$ em J , se tenha $\lambda_g(]a, b[) = g(b^+) - g(a^+)$, isto é, cuja restrição ao semianel \mathcal{S} , dos J -intervalos semiabertos, seja a medida de Lebesgue-Stieltjes definida em I.3.11.

Dizemos que λ_g , que é uma medida σ -finita, é a *medida de Lebesgue-Stieltjes* nos borelianos de J associada à função g .¹⁸

Dem: Temos uma consequência de I.4.12, aplicado à medida de Lebesgue-Stieltjes no semianel \mathcal{S} , uma vez que, como vimos em I.4.10, temos uma medida σ -finita e a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} é a dos borelianos de J . □

Para trabalhar com a medida de Lebesgue-Stieltjes, será útil podermos determinar facilmente a medida de outros tipos de intervalos contidos em $J =]c, d[$, nomeadamente, daqueles cuja extremidade esquerda seja c , ou cuja extremidade direita seja d , e daqueles que sejam fechados à esquerda, ou sejam abertos à direita. Tendo em conta a aditividade das medidas, as medidas dos dois últimos tipos referidos podem ser determinadas se conhecemos as medidas dos conjuntos unitários $\{a\}$, com $a \in J$. O resultado que apresentamos em seguida dá-nos os instrumentos que nos permitem efetuar facilmente as determinações referidas.

¹⁸Esta caracterização da medida de Lebesgue-Stieltjes encerra uma aparente assimetria entre os papéis da “esquerda” e da “direita”. Ver o exercício I.5.6 adiante para constatar que esta assimetria, que resultou do semianel utilizado à partida, é apenas aparente.

I.4.14 Sejam $J =]c, d[$ um intervalo aberto não vazio de \mathbb{R} , com extremidades finitas ou infinitas, e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente (no sentido lato) e consideremos a correspondente medida de Lebesgue-Stieltjes λ_g na σ -álgebra dos borelianos de J . Tem-se então:

a) Para cada $a \in J$,

$$\lambda_g(\{a\}) = g(a^+) - g(a^-).^{19}$$

b) Para cada $a \in J$,

$$\lambda_g(]a, d]) = g(d^-) - g(a^+),$$

se $g(d^-)$ for finito e $\lambda_g(]a, d]) = +\infty$, caso contrário.

c) Para cada $b \in J$,

$$\lambda_g(]c, b]) = g(b^+) - g(c^+),$$

se $g(c^+)$ for finito, e $\lambda_g(]c, b]) = +\infty$, caso contrário.

d) Tem-se

$$\lambda_g(]c, d]) = g(d^-) - g(c^+),$$

se ambos os limites laterais forem finitos, e $\lambda_g(]c, d]) = +\infty$, caso contrário.

Dem: a) Consideremos uma sucessão estritamente crescente de elementos $a_n \in J$ onde g seja contínua (cf. I.3.9) com $a_n \rightarrow a$ e reparemos que se pode considerar a sucessão decrescente de borelianos $A_n =]a_n, a]$ cuja intersecção é $\{a\}$. Tendo em conta a alínea 7) de I.2.12, vem, por ser $\lambda_g(A_1) < +\infty$,

$$\lambda_g(\{a\}) = \lim \lambda_g(A_n) = \lim (g(a^+) - g(a_n)) = g(a^+) - g(a^-).$$

b) Consideremos uma sucessão crescente de elementos $b_n \in J$ onde g seja contínua, com $a \leq b_n$ e $b_n \rightarrow d$. Tem-se então que $]a, d[$ é a união da sucessão crescente de borelianos $]a, b_n]$ pelo que, tendo em conta a alínea 5) de I.2.12, vem

$$\lambda_g(]a, d]) = \lim \lambda_g(]a, b_n]) = \lim (g(b_n) - g(a^+)),$$

que não é mais do que o valor referido no enunciado.

c) Consideremos uma sucessão decrescente de elementos $a_n \in J$ onde g seja contínua, com $a_n \leq b$ e $a_n \rightarrow c$. Tem-se então que $]c, b]$ é a união da sucessão crescente de borelianos $]a_n, b]$ pelo que, tendo em conta a alínea 5) de I.2.12, vem

$$\lambda_g(]c, b]) = \lim \lambda_g(]a_n, b]) = \lim (g(b^+) - g(a_n)),$$

que não é mais do que o valor referido no enunciado.

d) Temos uma consequência de b) e de c) uma vez que, escolhido $a \in J$, tem-se $]c, d[=]c, a] \cup]a, d[$, com $]c, a] \cap]a, d[= \emptyset$. \square

¹⁹A este valor também se dá o nome de *salto* de g no ponto a .

I.4.15 (Medida de Lebesgue) Como caso particular das medidas de Lebesgue-Stieltjes, temos a *medida de Lebesgue* nos borelianos de \mathbb{R} , que notaremos λ : Trata-se da medida de Lebesgue-Stieltjes associada à função $g(x) = x$, portanto a única medida nos borelianos de \mathbb{R} para a qual, para cada $a \leq b$, $\lambda([a, b]) = b - a$, e vai corresponder à ideia intuitiva que temos de comprimento.

I.4.16 (Outras propriedades da medida de Lebesgue) Como consequência das propriedades da medida de Lebesgue-Stieltjes apontadas em I.4.14, podemos dizer que, sendo $\lambda: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} , tem-se $\lambda(\{a\}) = 0$, para cada $a \in \mathbb{R}$ e, sempre que A é um intervalo de extremidade esquerda a e extremidade direita $b \geq a$, aberto ou fechado em cada extremidade finita, $\lambda(A) = b - a$, no caso em que a e b são finitos, e $\lambda(A) = +\infty$, no caso em que alguma das extremidades é infinita.

O resultado que examinamos a seguir, e que teremos ocasião de utilizar mais adiante, ilustra outra aplicação dos teoremas de extensão de Hahn.

I.4.17 Sejam X um conjunto e \mathcal{S} um semianel de partes de X e seja \mathcal{M} a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} . Sejam $\mu, \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas, cujas restrições a \mathcal{S} sejam medidas σ -finitas e tais que, para cada $A \in \mathcal{S}$, $\mu(A) \leq \mu'(A)$. Tem-se então, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) \leq \mu'(A)$.

Dem: Tendo em conta I.4.12, as medidas μ e μ' em \mathcal{M} são os prolongamentos de Hahn das respectivas restrições ao semianel \mathcal{S} . Dado $A \in \mathcal{M}$ tem-se então, para cada \mathcal{S} -cobertura contável $(A_j)_{j \in J}$ de A ,

$$\mu(A) \leq \sum_{j \in J} \mu(A_j) \leq \sum_{j \in J} \mu'(A_j),$$

donde deduzimos, tendo em conta a definição de $\mu'(A)$ como um ínfimo, que $\mu(A) \leq \mu'(A)$. \square

Exercícios

Ex I.4.1 Seja $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida exterior no conjunto X . Mostrar que, se $A \subset X$ verifica $\mu^*(A) = 0$, então A é μ^* -mensurável.

Ex I.4.2 Seja X um conjunto e consideremos uma aplicação $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $\mu^*(\emptyset) = 0$ e $\mu^*(A) = 1$, para cada $A \neq \emptyset$. Verificar que μ^* é uma medida exterior em X e que os únicos conjuntos μ^* -mensuráveis são \emptyset e X .

Ex I.4.3 (Não unicidade do prolongamento) Seja X um conjunto infinito não numerável e seja \mathcal{S} a classe de todos os subconjuntos finitos de X .

a) Verificar que \mathcal{S} é um semianel de partes de X e que se pode considerar uma medida $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $\mu(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{S}$. Reparar que o semianel \mathcal{S} não é σ -total.

b) Verificar que o anel associado a \mathcal{S} (cf. I.3.6) é o próprio \mathcal{S} .

c) Verificar como está definida a medida exterior $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ associada à medida μ no semianel \mathcal{S} e mostrar que a σ -álgebra dos conjuntos μ^* -mensuráveis é a σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$.

d) Verificar que a σ -álgebra \mathcal{M} gerada por \mathcal{S} é a σ -álgebra referida no exercício I.2.2 e determinar o prolongamento de Hahn $\hat{\mu}$ de μ a \mathcal{M} .

e) Concluir que o prolongamento de Hahn não é a única medida na σ -álgebra \mathcal{M} gerada por \mathcal{S} cuja restrição a \mathcal{S} é μ .

Ex I.4.4 Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de X e $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Sejam $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida exterior associada a μ , \mathcal{M} a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} e $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ o prolongamento de Hahn, que é uma medida na σ -álgebra \mathcal{M} , restrição de μ^* .

a) Mostrar que, para cada $B \subset X$, $\mu^*(B)$ é o mínimo dos $\hat{\mu}(A)$, com $B \subset A \in \mathcal{M}$. **Sugestão:** Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerar $A_n \in \mathcal{M}$ (união contável de conjuntos em \mathcal{S}) com $B \subset A_n$ e $\hat{\mu}(A_n) < \mu^*(B) + \frac{1}{n}$ e tomar $A = \bigcap A_n$.

b) Lembrando que a σ -álgebra \mathcal{M} é, em particular, um semianel, podemos também considerar a medida exterior $\hat{\mu}^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ associada a $\hat{\mu}$. Mostrar que $\hat{\mu}^* = \mu^*$.

c) Seja $(B_j)_{j \in J}$ uma família contável de partes de X tal que exista uma família $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e com $B_j \subset A_j$. Mostrar que se tem então

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \sum_{j \in J} \mu^*(B_j).$$

Sugestão: Ter em conta a alínea b) de I.4.5, tomando $B = \bigcup_{j \in J} B_j$.

Ex I.4.5 Verificar que não existe nenhum boreliano $A \subset \mathbb{R}$ que “divida ao meio todos os intervalos”, no sentido de se ter, sempre que $a \leq b$,

$$\lambda(A \cap]a, b]) = \frac{1}{2} \lambda(]a, b]),$$

onde λ é a medida de Lebesgue. **Sugestão:** Se existisse, considerar uma nova medida μ nos borelianos de \mathbb{R} , definida por $\mu(B) = \lambda(A \cap B)$, e utilizar a precisão do teorema de extensão de Hahn em I.4.12 para garantir que se teria então $\mu(B) = \frac{1}{2} \lambda(B)$, para todo o boreliano B , verificando o que acontece para $B = A \cap]0, 1]$.

Ex I.4.6 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita, e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e consideremos as correspondentes medidas de Lebesgue-Stieltjes λ_g , no semianel \mathcal{S}_J

dos J -intervalos semi-abertos e na σ -álgebra gerada, que sabemos ser a σ -álgebra \mathcal{B}_J dos borelianos de J . Seja ainda $\lambda_g^*: \mathcal{P}(J) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida exterior de Lebesgue-Stieltjes em J .

a) Verificar que, se $]a, b]$, com $a \leq b$, é um J -intervalo semiaberto, e se $\delta > 0$, então existe um aberto U de J , com $]a, b] \subset U$, tal que

$$\lambda_g(U) < \lambda_g(]a, b]) + \delta.$$

b) Deduzir de a) que, para cada conjunto $A \subset J$, $\lambda_g^*(A)$ é o ínfimo dos $\lambda_g(U)$, com U aberto de J contendo A , em particular, se $A \in \mathcal{B}_J$, $\lambda_g(A)$ coincide com o ínfimo referido. **Sugestão:** Para cada \mathcal{S}_J -cobertura contável $(A_j)_{j \in \bar{I}}$ de A , ter em conta o lema I.3.10 e aplicar a conclusão de a) a cada A_j .

Ex I.4.7 Sejam $J =]c, d[$ um intervalo aberto não vazio de \mathbb{R} , com extremidades finitas ou infinitas, $g, h: J \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções crescentes (no sentido lato) e $a \geq 0$ em \mathbb{R}_+ . Reparar que são ainda crescentes as funções $g + h: J \rightarrow \mathbb{R}$ e $ag: J \rightarrow \mathbb{R}_+$ e que se tem

$$\lambda_{g+h} = \lambda_g + \lambda_h, \quad \lambda_{ag} = a\lambda_g$$

(cf. I.2.16).

Ex I.4.8 Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de X e $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Sejam $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida exterior associada, $\widehat{\mathcal{M}}$ a σ -álgebra dos conjuntos μ^* -mensuráveis e $\mathcal{M} \subset \widehat{\mathcal{M}}$ a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} e lembremos que a restrição de μ^* a $\widehat{\mathcal{M}}$ é uma medida e que a sua restrição a \mathcal{M} é, por definição, o prolongamento de Hahn de μ .

O objetivo deste exercício é encontrar argumentos no sentido de mostrar que, pelo menos quando $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é σ -finita, não se perde muito ao considerar o prolongamento de Hahn definido apenas em \mathcal{M} e não na totalidade de $\widehat{\mathcal{M}}$.

a) Concluir da alínea a) do exercício I.4.4 que, se $A \in \widehat{\mathcal{M}}$ verifica $\mu^*(A) < +\infty$, então existe $B \in \mathcal{M}$ com $A \subset B$ e $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

b) No caso em que a medida $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é σ -finita, mostrar, mais geralmente, que, para cada $A \in \widehat{\mathcal{M}}$, existe $B \in \mathcal{M}$ com $A \subset B$ e $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

Sugestão: Construir uma família contável de conjuntos $A_j \in \widehat{\mathcal{M}}$, $j \in J$, com $\mu^*(A_j) < +\infty$ e $A = \bigcup_{j \in J} A_j$ e aplicar a cada A_j a conclusão de a).

c) Ainda no caso em que a medida $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é σ -finita, mostrar que, para cada $A \in \widehat{\mathcal{M}}$, existem $B, C \in \mathcal{M}$ com $C \subset A \subset B$ e $\mu^*(B \setminus C) = 0$.

Sugestão: Aplicar b) ao conjunto A , para construir B , e ao conjunto $X \setminus A$, para construir C , a partir do seu complementar.

Ex I.4.9 (**Semianel associado a uma partição**) Sejam X um conjunto e $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de subconjuntos de X , não vazios, disjuntos dois a dois e de união X (uma *partição* de X por conjuntos não vazios).

a) Verificar que tem lugar um semianel \mathcal{S} de partes de X , constituído pelo conjunto vazio \emptyset , pelos conjuntos X_j , $j \in J$, e pelo conjunto X (o *semianel associado à partição*)²⁰.

b) Verificar que se pode definir uma medida finita $\mu: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$, pondo $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X_j) = 1$ e $\mu(X)$ igual ao número de elementos de J .

c) Verificar o que é a medida exterior $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ associada a μ e qual a σ -álgebra dos conjuntos μ^* -mensuráveis, reparando que ela é, neste caso, igual à σ -álgebra gerada por \mathcal{S} .

Ex I.4.10 (**Conjuntos magros e conjuntos de medida nula**)²¹ A resolução deste exercício pressupõe o conhecimento do *teorema de Baire*, no contexto dos números reais, que afirma que, se $(C_j)_{j \in J}$ é uma família contável de subconjuntos fechados de \mathbb{R} com $\text{int}(C_j) = \emptyset$, então

$$\text{int}\left(\bigcup_{j \in J} C_j\right) = \emptyset.^{22}$$

Neste contexto, chamam-se *magros* os subconjuntos de \mathbb{R} que estão contidos nalguma união contável de conjuntos fechados de interior vazio.

Recordemos também que, notando λ a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} e $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida exterior de Lebesgue um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ verifica $\lambda^*(B) = 0$ se, e só se, existe um boreliano $A \subset \mathbb{R}$ com $B \subset A$ e $\lambda(A) = 0$ (cf. a alínea a) do exercício I.4.4).

As alíneas a) e b) a seguir mostram que, as noções de conjunto magro e de conjunto de medida exterior 0 gozam de propriedades paralelas que as levam a “competir” pela função de traduzir a noção intuitiva de “pequenez” dum conjunto. As alíneas c) e d) mostram que nenhuma destas noções implica a outra.

a) Mostrar que os conjuntos unitários $\{x\}$ são magros, que uma parte arbitrária de um conjunto magro é magro e que uma união contável de conjuntos magros é magro. Mostrar ainda que um conjunto magro tem sempre interior vazio.

b) Verificar que os resultados enunciados em a) são ainda válidos se, em cada ocorrência, substituirmos conjuntos magros por conjuntos de medida exterior de Lebesgue igual a 0.

c) Seja $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão cujo conjunto dos termos seja o dos racionais do intervalo $[0, 1]$. Para cada $p \in \mathbb{N}$, seja

$$U_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[r_n - \frac{1}{(p+1)2^{n+1}}, r_n + \frac{1}{(p+1)2^{n+1}} \right].$$

²⁰Se considerarmos apenas \emptyset e os conjuntos X_j , também obtemos um semianel.

²¹Os exemplos neste exercício encontram-se no livro de Halmos, [6].

²²Embora, em geral, esta união não seja fechada; pensar por exemplo no conjunto \mathbb{Q} dos números racionais como união contável de conjuntos unitários.

Verificar que U_p é um aberto de \mathbb{R} com $\lambda(U_p) \leq \frac{1}{p+1}$ e que U_p contém todos os racionais do intervalo $[0, 1]$. Deduzir que $C_p = [0, 1] \setminus U_p$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R} com interior vazio, em particular é um conjunto magro, e, no entanto, $\lambda(C_p) > 0$.

d) Continuando com as notações de c), seja

$$A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} U_p.$$

Verificar que A é um boreliano de \mathbb{R} com $\mu(A) = 0$ e, no entanto, A não é magro (em particular A não é contável). **Sugestão:** Reparar que $[0, 1]$, que não é magro por ter interior não vazio, é a união de A com os conjuntos magros C_p , $p \in \mathbb{N}$.

Ex I.4.11 (O conjunto de Cantor e a função singular de Cantor-Lebesgue)

a) (Generalidades sobre a escrita na base $N + 1$)²³ Fixemos um natural $N \geq 1$ e consideremos no conjunto $\{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ de todas as sucessões $(p_n)_{n \geq 1}$ a *ordem total lexicográfica*²⁴ definida por $(p_n)_{n \geq 1} < (q_n)_{n \geq 1}$ se, e só se, existe k com $p_k < q_k$ e, para cada $n < k$, $p_n = q_n$. Identifiquemos ainda uma sucessão finita (p_1, \dots, p_k) com o elemento de $\{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ que se obtém por prolongamento com os restantes termos iguais a 0.

Mostrar que tem lugar uma aplicação $\Psi_N: \{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ sobrejetiva e crescente (no sentido lato) definida por

$$\Psi_N((p_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{(N+1)^n}.$$

Verificar ainda a seguinte propriedade²⁵: Se $(p_n)_{n \geq 1} < (q_n)_{n \geq 1}$, então tem-se $\Psi_N((p_n)_{n \geq 1}) < \Psi_N((q_n)_{n \geq 1})$ se, e só se, existe $k \geq 1$ verificando as três condições: *i)* Para cada $n < k$, $p_n = q_n$; *ii)* $p_k + 1 = q_k$; *iii)* Para cada $n > k$, $p_n = N$ e $q_n = 0$ (por outras palavras, os elementos são, respetivamente, da forma

$$(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k, N, N, \dots), \quad (p_1, \dots, p_{k-1}, p_k + 1).$$

Sugestão: Para provar a sobrejetividade, dado $x \in [0, 1]$ construir recursivamente os termos de uma sucessão $(p_n)_{n \geq 1}$ de modo que, para cada k , a sucessão finita (p_1, \dots, p_k) seja a maior sucessão de k termos (ordem lexicográfica) cuja imagem por Ψ_N seja menor ou igual a x .

b) Utilizar a conclusão de a) para mostrar que a restrição da aplicação $\Psi_2: \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ a $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ é uma aplicação estritamente crescente, em particular injetiva, $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$. Esta restrição é assim um isomorfismo

²³Para este exercício vão-nos interessar os casos $N = 1$ e $N = 2$. O caso $N = 9$ corresponde à escrita habitual na base 10.

²⁴É essencialmente o que conhecemos sob o nome de ordem alfabética.

²⁵Que, de certo modo, controla, tanto quanto possível, a não injetividade da aplicação.

de ordem de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ sobre o subconjunto $C = \Psi_2(\{0, 2\}^{\mathbb{N}})$ de $[0, 1]$, a que damos o nome de *conjunto de Cantor*.²⁶ Reparar que se tem, em particular, $0 \in C$ e $1 \in C$ (imagens, naturalmente, do mínimo e do máximo de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$).

c) Verificar que o conjunto de Cantor C não é contável, por ter a cardinalidade do conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todas as partes de \mathbb{N} .

d) Para cada $k \geq 0$ e cada sequência p_1, \dots, p_k de k elementos de $\{0, 2\}$, notemos J_{p_1, \dots, p_k}^k o intervalo aberto

$$J_{p_1, \dots, p_k}^k =]\Psi_2(p_1, \dots, p_k, 1), \Psi_2(p_1, \dots, p_k, 2)[$$

(em particular, para $k = 0$, temos um único $J^0 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$). Mostrar que as extremidades deste intervalo são elementos do conjunto de Cantor e que J_{p_1, \dots, p_k}^k não contém nenhum elemento do conjunto de Cantor.

Sugestão: Lembrar que Ψ_2 tem restrição estritamente crescente a $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ e reparar que

$$\Psi_2(p_1, \dots, p_k, 1) = \Psi_2(p_1, \dots, p_k, 0, 2, 2, \dots).$$

e) Verificar que os intervalos J_{p_1, \dots, p_k}^k constituem uma família contável de conjuntos disjuntos dois a dois e de união $[0, 1] \setminus C$ e que as respetivas medidas de Lebesgue são $\lambda(J_{p_1, \dots, p_k}^k) = \frac{1}{3^{k+1}}$ e deduzir que o conjunto de Cantor é compacto e verifica $\lambda(C) = 0$.

Sugestão: 1) Mostrar que, dados intervalos abertos $]a, b[$ e $]c, d[$ de intersecção não vazia e com $b < d$, tem que ser $b \in]c, d[$; 2) Se $x \in [0, 1] \setminus C$, então $x = \Psi_2((p_n)_{n \geq 1})$ onde, para um certo $k \geq 0$, $p_{k+1} = 1$ e $p_n \neq 1$ para todo o $n < k + 1$ e então

$$x \in]\Psi_2(p_1, \dots, p_k, 1), \Psi_2(p_1, \dots, p_k, 2)[.$$

f) (cf. Rudin [10]) Sendo $C \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor, mostrar que $C + C = [0, 2]$, onde $C + C$ é, naturalmente, o conjunto das somas $y + z$, com $y, z \in C$. Mostrar ainda que, para cada $x \in C$, $1 - x \in C$ (simetria relativamente ao ponto $\frac{1}{2} \in [0, 1]$) e deduzir que se tem $C - C = [-1, 1]$.

Sugestão: Para a primeira propriedade, dado $x \in [0, 2]$, considerar $(r_n)_{n \geq 1}$ em $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ tal que $\frac{x}{2} = \Psi_2((r_n)_{n \geq 1})$ e escolher então $(p_n)_{n \geq 1}$ e $(q_n)_{n \geq 1}$ em $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ tais que, para cada n , $2r_n = p_n + q_n$.

g) Sendo $C \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor, verificar que se pode definir uma aplicação sobrejetiva e crescente, no sentido lato, $f_0: C \rightarrow [0, 1]$ pela condição de, para cada $x \in C$, com $x = \Psi_2((p_n)_{n \geq 1})$ e $(p_n)_{n \geq 1} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, vir $f_0(x) = \Psi_1((\frac{p_n}{2})_{n \geq 1})$. Verificar que, para cada um dos intervalos abertos J_{p_1, \dots, p_k}^k definidos em d), a função f_0 toma um mesmo valor nas suas duas extremidades e deduzir que a função f_0 admite um único prolongamento

²⁶Para sermos mais precisos, este é apenas o exemplo mais simples de uma família de subconjuntos de \mathbb{R} a que se dá o nome de conjuntos de Cantor, mas não vamos ter necessidade dessa generalidade.

crescente $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, prolongamento esse que vai ser constante em cada intervalo J_{p_1, \dots, p_k}^k . Mostrar que este prolongamento $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, a *função singular de Cantor-Lebesgue*, é uma função contínua, crescente, sobrejetiva e com derivada igual a 0 em cada ponto de $[0, 1] \setminus C$.

Sugestão: Lembrar que uma função crescente, definida num intervalo, cujo contradomínio seja um intervalo é necessariamente contínua.

Ex I.4.12 (**Aplicações topológicas do conjunto de Cantor**) Para a resolução deste exercício vamos supor conhecimentos mais profundos de Topologia, nomeadamente o teorema de Tychonoff, sobre a compacidade de um produto infinito de compactos.

a) Seja $N \geq 1$ um inteiro fixado e consideremos em $\{0, \dots, N\}$ a topologia discreta e em $\{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ a topologia produto infinito de Tychonoff. Mostrar que a aplicação $\Psi_N: \{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$, definida na alínea a) do exercício I.4.11, é contínua. **Sugestão:** Dados $(p_n)_{n \geq 1} \in \{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ e $\delta > 0$, fixar $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{(N+1)^k} < \delta$ e mostrar que se tem

$$|\Psi_N((q_n)_{n \geq 1}) - \Psi_N((p_n)_{n \geq 1})| < \delta$$

sempre que $q_n = p_n$ para todo o $n \leq k$.

b) Deduzir de a) que a restrição da aplicação contínua $\Psi_2: \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ é um homeomorfismo de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ sobre o conjunto de Cantor $C \subset [0, 1]$.

c) Utilizar o homeomorfismo referido em b) para construir um homeomorfismo $\hat{\Theta}: C \rightarrow C \times C$, do conjunto de Cantor C sobre o produto cartesiano $C \times C$. **Sugestão:** Considerar a aplicação de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ para $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ que a cada sucessão $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associa o par de sucessões $(p_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(p_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

d) (**Versão trivial do teorema de extensão de Tietze**) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo não vazio, $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e $f_0: A \rightarrow J$ uma função contínua. Mostrar que existe uma função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow J$ cuja restrição a A seja f_0 . **Sugestão:** Reparar que $\mathbb{R} \setminus A$ é uma união de intervalos abertos disjuntos dois a dois, cujas extremidades finitas são pontos de A , e definir o prolongamento nos correspondentes intervalos fechados de modo a este ser constante, quando uma das extremidades for infinita, e ser linear (ou, melhor dito, afim) caso contrário.²⁷

e) Utilizar o homeomorfismo $\hat{\Theta}$, referido em c) e a aplicação contínua sobrejetiva $f_0: C \rightarrow [0, 1]$, referida na alínea g) do exercício I.4.11 (restrição da função singular de Cantor-Lebesgue) para construir uma aplicação contínua e sobrejetiva $h_0: C \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ e deduzir da alínea precedente a

²⁷Repare-se que, apenas com mudanças mínimas na demonstração, o resultado pode ser adaptado ao caso em que se pede apenas que A seja fechado nalgum subconjunto aberto U de \mathbb{R} , obtendo-se então um prolongamento contínuo de f_0 a U . Analogamente, podíamos substituir o intervalo $J \subset \mathbb{R}$ por um subconjunto convexo não vazio de um espaço vetorial normado.

existência de uma aplicação contínua e sobrejetiva $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ (uma *curva de Peano*).

§5. Aplicações mensuráveis.

I.5.1 Chamamos *espaço mensurável* a um par (X, \mathcal{M}) , onde X é um conjunto e \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X . Quando um espaço mensurável se encontra implícito, chamam-se simplesmente *mensuráveis* os conjuntos que pertencem à σ -álgebra.

Quando consideramos um espaço topológico como espaço mensurável, sem explicitar qual a σ -álgebra considerada, fica subentendido que se trata da σ -álgebra \mathcal{B}_X dos borelianos de X (cf. I.2.7).

Dados dois espaços mensuráveis (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) , diz-se que $f: X \rightarrow Y$ é uma *aplicação mensurável* se, para cada $B \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.²⁸

I.5.2 (Propriedades elementares) a) Se (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável, então a aplicação identidade $I_X: X \rightarrow X$ é mensurável;

b) Se (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) são espaços mensuráveis e $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação de valor constante $y_0 \in Y$, então f é mensurável;

c) Se (X, \mathcal{M}) , (Y, \mathcal{N}) e (Z, \mathcal{P}) são espaços mensuráveis e $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ são aplicações mensuráveis, então $g \circ f: X \rightarrow Z$ é uma aplicação mensurável.

Dem: A alínea a) resulta de que, para cada $A \subset X$, $I_X^{-1}(A) = A$. A alínea b) resulta de que, se $B \subset Y$ é mensurável ou não, então $f^{-1}(B) = X$ ou $f^{-1}(B) = \emptyset$, conforme y_0 pertença ou não a B . Quanto a c), se $C \in \mathcal{P}$, vem $g^{-1}(C) \in \mathcal{N}$, donde

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{M}. \quad \square$$

I.5.3 (Subespaços mensuráveis) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $X' \subset X$ um conjunto mensurável (isto é, $X' \in \mathcal{M}$). Como referido em I.2.5, podemos então considerar a σ -álgebra restrição $\mathcal{M}_{/X'}$, de partes de X' , constituída pelos $A \in \mathcal{M}$ tais que $A \subset X'$, e dizemos então que $(X', \mathcal{M}_{/X'})$ é um *subespaço mensurável* de (X, \mathcal{M}) .²⁹

Relembremos que, como se viu em I.2.9, no caso em que X é um espaço

²⁸Não é possível deixar de fazer um paralelo com as funções contínuas entre espaços topológicos: Uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é contínua se, e só se, para cada aberto V de Y , $f^{-1}(V)$ é um aberto de X .

²⁹Mais uma vez, impõe-se naturalmente um paralelo com o que se passa num espaço topológico X : Se $X' \subset X$ é um aberto (o que corresponde, para os espaços mensuráveis à exigência de que X' seja mensurável), então os abertos de X' são exatamente os abertos de X que estão contidos em X' .

topológico e a σ -álgebra de X é a dos borelianos, então a σ -álgebra do subespaço mensurável é também a dos borelianos.

I.5.4 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $X' \subset X$, com $X' \in \mathcal{M}$. Tem-se então que a inclusão $\iota: (X', \mathcal{M}_{/X'}) \rightarrow (X, \mathcal{M})$, definida por $\iota(x) = x$, é uma aplicação mensurável. Em consequência, se (Y, \mathcal{N}) é um espaço mensurável e $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação mensurável, então $f_{/X'}: X' \rightarrow Y$ é também uma aplicação mensurável.

Dem: A primeira afirmação vem de que, se $A \in \mathcal{M}$, então $\iota^{-1}(A) = A \cap X'$ é um conjunto de \mathcal{M} contido em X' , e portanto um conjunto de $\mathcal{M}_{/X'}$. A segunda resulta da primeira e do facto de $f_{/X'}: X' \rightarrow Y$ ser a composta de $f: X \rightarrow Y$ com a inclusão $\iota: X' \rightarrow X$. \square

I.5.5 Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) espaços mensuráveis, $Y' \subset Y$, com $Y' \in \mathcal{N}$ e $f: X \rightarrow Y'$ uma aplicação. Tem-se então que f é mensurável de (X, \mathcal{M}) para (Y, \mathcal{N}) se, e só se, é mensurável de (X, \mathcal{M}) para $(Y', \mathcal{N}_{/Y'})$.

Dem: Que a primeira condição implica a segunda resulta imediatamente do facto de cada conjunto de $\mathcal{N}_{/Y'}$ pertencer, em particular, a \mathcal{N} . Que a segunda condição implica a primeira resulta de que $f: X \rightarrow Y$ é a composta da inclusão $\iota: Y' \rightarrow Y$ com a aplicação $f: X \rightarrow Y'$. \square

I.5.6 Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) espaços mensuráveis e $(X_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos $X_j \in \mathcal{M}$ tal que $X = \bigcup_{j \in J} X_j$. Se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação tal que, para cada $j \in J$, $f_{/X_j}: X_j \rightarrow Y$ seja uma aplicação mensurável de $(X_j, \mathcal{M}_{/X_j})$ para (Y, \mathcal{N}) , então f é mensurável de (X, \mathcal{M}) para (Y, \mathcal{N}) .³⁰

Dem: Para cada $B \in \mathcal{N}$, tem-se

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{j \in J} (f_{/X_j})^{-1}(B),$$

onde cada $(f_{/X_j})^{-1}(B)$ pertence a $\mathcal{M}_{/X_j}$, e portanto a \mathcal{M} , o que implica que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. \square

I.5.7 (**Condição suficiente de mensurabilidade**) Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) espaços mensuráveis e \mathcal{D} uma classe de partes de Y tal que a σ -álgebra de partes de Y gerada por \mathcal{D} seja \mathcal{N} . Tem-se então que uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é mensurável se, e só se, para cada $B \in \mathcal{D}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

Dem: Se f é mensurável, então, para cada $B \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, e portanto

³⁰Mais uma vez, impõe-se uma comparação com o que se passa no contexto dos espaços topológicos: Para verificar que uma função é contínua, basta verificar que são contínuas as suas restrições aos conjuntos de uma certa cobertura aberta. Aqui, em vez de coberturas abertas arbitrárias, temos coberturas mensuráveis contáveis mas o que “se perde” com a exigência de as coberturas serem contáveis “ganha-se” com o facto de, em geral, os conjuntos mensuráveis serem muito mais “numerosos” que os abertos.

isso acontece, em particular, para cada $B \in \mathcal{D}$. Suponhamos, reciprocamente, que, para cada $B \in \mathcal{D}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. Tendo em conta as identidades e

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, \\ f^{-1}(Y \setminus B) &= X \setminus f^{-1}(B), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) &= \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j), \end{aligned}$$

constatamos que a classe dos $B \subset Y$ tais que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ é uma σ -álgebra de partes de Y que, por hipótese, contém a classe \mathcal{D} . Uma vez que \mathcal{N} é a mais pequena σ -álgebra de partes de Y que contém \mathcal{D} , segue-se que a classe referida contém \mathcal{N} , o que significa precisamente que f é uma aplicação mensurável. \square

I.5.8 (Corolário) Sejam X e Y espaços topológicos, sobre os quais consideramos as σ -álgebras dos borelianos. Se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então f é mensurável.

Dem: Lembrando que a σ -álgebra dos borelianos é a gerada pela classe dos abertos, temos uma consequência do resultado precedente, uma vez que, para cada aberto V de Y , o conjunto $f^{-1}(V)$ é aberto em X , e portanto um boreliano de X . \square

I.5.9 Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) espaços mensuráveis. Diz-se que uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é *bimensurável* se é bijetiva, mensurável e com $f^{-1}: Y \rightarrow X$ também mensurável.

I.5.10 Tendo em conta I.5.8, se X e Y são espaços topológicos, sobre os quais consideramos as σ -álgebras dos borelianos, e se $f: X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então f é uma aplicação bimensurável.

I.5.11 Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dois espaços mensuráveis e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $\mu': \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas. Dizemos que uma aplicação mensurável $f: X \rightarrow Y$ é *compatível com as medidas* se, para cada $B \in \mathcal{N}$,

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu'(B).$$

No caso particular em que $X = Y$, $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ e $\mu = \mu'$ e temos portanto uma aplicação mensurável $f: X \rightarrow X$, dizemos que μ é uma *medida f -invariante* se f for compatível com as medidas.

I.5.12 (Propriedades elementares das medidas compatíveis) a) Se (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável, qualquer medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é I_X -invariante.

b) Sejam (X, \mathcal{M}) , (Y, \mathcal{N}) e (Z, \mathcal{P}) três espaços mensuráveis e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mu': \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $\mu'': \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ três medidas. Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ são compatíveis com as medidas, então $g \circ f: X \rightarrow Z$ é também compatível com as medidas.

c) Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dois espaços mensuráveis e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $\mu': \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas. Se $f: X \rightarrow Y$ é bimensurável e compatível com

as medidas, então $f^{-1}: Y \rightarrow X$ é também compatível com as medidas, ou seja, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\mu'(f(A)) = \mu(A).$$

Dem: A alínea a) é trivial, b) resulta de que, para cada $C \in \mathcal{P}$, vem

$$\mu((g \circ f)^{-1}(C)) = \mu(f^{-1}(g^{-1}(C))) = \mu'(g^{-1}(C)) = \mu''(C)$$

e c) resulta de que, para cada $A \in \mathcal{M}$, tem-se $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$, em particular $f(A) \in \mathcal{N}$, e $f^{-1}(f(A)) = A$, donde

$$\mu'((f^{-1})^{-1}(A)) = \mu'(f(A)) = \mu(f^{-1}(f(A))) = \mu(A). \quad \square$$

1.5.13 (Imagem direta duma medida) Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) espaços mensuráveis e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação mensurável. Dada uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, existe então uma medida $f_*\mu: \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, a que damos o nome de *medida imagem direta* de μ por meio de f , definida por

$$f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)),$$

a qual é a única medida $\mu': \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ para a qual f fica compatível com as medidas.

Dem: Tem-se

$$f_*\mu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$$

e, se $(B_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos em \mathcal{N} , disjuntos dois a dois, os conjuntos $f^{-1}(B_j)$ pertencem a \mathcal{M} e são disjuntos dois a dois pelo que

$$\begin{aligned} f_*\mu\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)\right) = \\ &= \sum_{j \in J} \mu(f^{-1}(B_j)) = \sum_{j \in J} f_*\mu(B_j), \end{aligned}$$

o que mostra que temos efetivamente uma medida $f_*\mu$ na σ -álgebra \mathcal{N} . O facto de, quando se considera esta medida em \mathcal{N} , a aplicação mensurável f ficar compatível com as medidas e o facto de não haver mais nenhuma medida em \mathcal{N} com esta propriedade são consequências diretas da definição de compatibilidade em I.5.11. \square

1.5.14 (Invariância da medida de Lebesgue por translação e simetria) Sejam $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a σ -álgebra dos borelianos de \mathbb{R} e $\lambda: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida de Lebesgue (cf. I.4.15). Têm então lugar aplicações bimensuráveis $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\tau_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\sigma(y) = -y, \quad \tau_x(y) = x + y,$$

(a *simetria* e as *translações*) e a medida de Lebesgue é σ -invariante e, para

cada $x \in \mathbb{R}$, τ_x -invariante.

Dem: O facto de estas aplicações serem bimensuráveis é uma consequência de se tratar de homeomorfismos, cujos inversos são, respetivamente, σ e τ_{-x} . Notemos μ e, para cada $x \in \mathbb{R}$, μ_x as medidas na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ imagens diretas de λ pelas aplicações mensuráveis $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tau_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. O que temos que mostrar é que se tem $\mu = \mu_x = \lambda$. Ora, isso resulta da definição da medida de Lebesgue em I.4.15 e das propriedades desta em I.4.16, visto que, sempre que $a \leq b$ em \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned}\mu([a, b]) &= \lambda(-]a, b]) = \lambda([-b, -a]) = -a - (-b) = b - a, \\ \mu_x([a, b]) &= \lambda(-x +]a, b]) = \lambda([a - x, b - x]) = \\ &= (b - x) - (a - x) = b - a.\end{aligned}\quad \square$$

1.5.15 (Imagem direta de uma σ -álgebra) Sejam X e Y dois conjuntos e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação. Para cada classe \mathcal{C} de partes de X , notamos $f_*\mathcal{C}$ a classe de partes de Y , constituída pelos conjuntos $B \subset Y$ tais que $f^{-1}(B) \in \mathcal{C}$. Se \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X , tem-se então que $f_*\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra de partes de Y , a que se dá o nome de σ -álgebra imagem direta de \mathcal{M} por meio de f , e, quando se consideram os espaços mensuráveis (X, \mathcal{M}) e $(Y, f_*\mathcal{M})$, a aplicação $f: X \rightarrow Y$ é mensurável.

Dem: O facto de $f_*\mathcal{M}$ ser uma σ -álgebra de partes de Y é uma consequência das igualdades $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ e

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

O facto de $f: X \rightarrow Y$ ficar uma aplicação mensurável é uma consequência direta da definição. \square

Um caso particular da situação anterior, especialmente interessante e que será o utilizado mais frequentemente, é aquele em que $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação bijetiva. Relembremos que, nesse caso, para cada $B \subset Y$, a imagem recíproca $f^{-1}(B)$ de B , por meio de f , coincide com a sua imagem direta por meio da aplicação inversa f^{-1} (e portanto a notação não levanta problemas) e tem-se $f(f^{-1}(B)) = B$. Relembremos também que esta última afirmação, aplicada à bijeção inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$, mostra-nos que, para cada $A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Os três resultados seguintes são conclusões que se podem tirar neste caso particular e que teremos ocasião de aplicar.

1.5.16 Sejam X e Y dois conjuntos e $f: X \rightarrow Y$ um aplicação bijetiva. Para cada classe \mathcal{C} de partes de X , a classe $f_*\mathcal{C}$ de partes de Y também pode ser caracterizada como sendo a classe dos conjuntos $f(A)$, com $A \in \mathcal{C}$, e, no caso em que \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X , $f_*\mathcal{M}$ é a única σ -álgebra \mathcal{N} de partes de Y para a qual a aplicação $f: X \rightarrow Y$ é bimensurável.

Dem: Se $A \in \mathcal{C}$, o facto de se ter $f^{-1}(f(A)) = A$ mostra que $f(A) \in f_*\mathcal{C}$.

Reciprocamente, se $B \in f_*\mathcal{C}$, tem-se $B = f(A)$, com $A = f^{-1}(B) \in \mathcal{C}$. Para verificar que, quando \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X e se considera em Y a σ -álgebra $f_*\mathcal{M}$, f é mesmo uma aplicação bimensurável, falta-nos verificar que

$$f^{-1}: (Y, f_*\mathcal{M}) \rightarrow (X, \mathcal{M})$$

também é uma aplicação mensurável e isso resulta de que, se $A \in \mathcal{M}$, tem-se $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \in f_*\mathcal{M}$. Quanto à unicidade, se \mathcal{N} é uma σ -álgebra de partes de Y tal que $f: X \rightarrow Y$ fique bimensurável, então, para cada $B \in \mathcal{N}$, tem-se $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, portanto $B \in f_*\mathcal{M}$, e, para cada $B \in f_*\mathcal{M}$, tem-se $B = f(A)$, para um certo $A \in \mathcal{M}$, donde,

$$B = (f^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{N},$$

o que mostra que $\mathcal{N} = f_*\mathcal{M}$. □

I.5.17 (Corolário) Sejam X um conjunto e \mathcal{M} e \mathcal{M}' duas σ -álgebras de partes de X tais que a aplicação identidade $I_X: X \rightarrow X$ seja bimensurável de (X, \mathcal{M}) para (X, \mathcal{M}') . Tem-se então $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

Dem: Trata-se de uma consequência da afirmação de unicidade no resultado precedente, uma vez que I_X também é bimensurável de (X, \mathcal{M}) para (X, \mathcal{M}) . □

I.5.18 Sejam X um conjunto, \mathcal{C} uma classe de partes de X e \mathcal{M} a σ -álgebra de partes de X gerada por \mathcal{C} (cf. I.2.6). Se Y é um conjunto e $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação bijetiva, então a σ -álgebra de partes de Y gerada por $f_*\mathcal{C}$ é a σ -álgebra imagem direta $f_*\mathcal{M}$. Além disso, se \mathcal{S} é um semianel de partes de X , $f_*\mathcal{S}$ é também um semianel de partes de Y .

Dem: Tendo em conta a caracterização de $f_*\mathcal{C}$ (e, em particular, de $f_*\mathcal{M}$) no resultado precedente, é claro que a classe $f_*\mathcal{C}$ de partes de Y está contida na σ -álgebra $f_*\mathcal{M}$. Seja agora \mathcal{N} uma σ -álgebra de partes de Y que contenha $f_*\mathcal{C}$. Podemos então considerar a σ -álgebra imagem direta $f_*^{-1}\mathcal{N}$, de partes de X , constituída pelos conjuntos $f^{-1}(B)$, com $B \in \mathcal{N}$, a qual contém, em particular, para cada $A \in \mathcal{C}$, o conjunto $f^{-1}(f(A)) = A$, ou seja, contém \mathcal{C} . Uma vez que \mathcal{M} é a σ -álgebra gerada por \mathcal{C} , concluímos que $\mathcal{M} \subset f_*^{-1}\mathcal{N}$. Para cada $A \in \mathcal{M}$ tem-se assim $A = f^{-1}(B)$, para algum $B \in \mathcal{N}$, donde $f(A) = B \in \mathcal{N}$, o que mostra que $f_*\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Fica assim provado que $f_*\mathcal{M}$ é efetivamente a σ -álgebra gerada por $f_*\mathcal{C}$.

Suponhamos agora que \mathcal{S} é um semianel de partes de X . Das igualdades $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ decorre que $\emptyset \in f_*\mathcal{S}$, e que, se $B, B' \in f_*\mathcal{S}$, também $B \cap B' \in f_*\mathcal{S}$. Por outro lado, se $B, B' \in f_*\mathcal{S}$, o facto de $f^{-1}(B)$ e $f^{-1}(B')$ pertencerem a \mathcal{S} implica a existência de uma família finita de conjuntos $A_i \in \mathcal{S}$, disjuntos dois a dois, tal que

$$f^{-1}(B \setminus B') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B') = \bigcup_{i \in I} A_i$$

e daqui resulta, por f ser bijetiva, que

$$B \setminus B' = f(f^{-1}(B \setminus B')) = f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i),$$

com os conjuntos $f(A_i)$ pertencentes a $f_*\mathcal{S}$ e disjuntos dois a dois, o que mostra que $f_*\mathcal{S}$ é efetivamente um semianel de partes de Y . \square

Outra situação que será importante nas aplicações é aquela em que consideramos o produto cartesiano de conjuntos munidos de σ -álgebras.

1.5.19 Sejam X e Y dois conjuntos e \mathcal{C} e \mathcal{D} duas classes de partes de X e Y , respetivamente. Vamos notar $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ a classe das partes de $X \times Y$ da forma $A \times B$, com $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{D}$.³¹ No caso em que \mathcal{C} e \mathcal{D} são semianéis de partes de X e Y , respetivamente, $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um semianel de partes de $X \times Y$.

Dem: Suponhamos que \mathcal{C} e \mathcal{D} são semianéis de partes de X e Y , respetivamente. Tem-se $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Suponhamos que $A, A' \in \mathcal{C}$ e $B, B' \in \mathcal{D}$. Tem-se

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}.$$

Por outro lado, podemos considerar famílias finitas $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{C} , disjuntos dois a dois, e $(B_j)_{j \in J}$, disjuntos dois a dois, tais que

$$A \setminus A' = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad B \setminus B' = \bigcup_{j \in J} B_j$$

e tem-se então

$$\begin{aligned} (A \times B) \setminus (A' \times B') &= ((A \setminus A') \times B) \cup ((A \cap A') \times (B \setminus B')) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} (A_i \times B)\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} (A \cap A') \times B_j\right), \end{aligned}$$

com os conjuntos $A_i \times B$ e os conjuntos $(A \cap A') \times B_j$ disjuntos dois a dois, o que mostra que $(A \times B) \setminus (A' \times B') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Ficou assim provado que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é também um semianel. \square

Pelo contrário, se \mathcal{M} e \mathcal{N} são σ -álgebras de partes de X e Y , respetivamente, não podemos afirmar que $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ seja uma σ -álgebra de partes de $X \times Y$: Uma união de dois conjuntos de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ não será em geral nem sequer um produto cartesiano, e portanto não pertencerá a $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

³¹Trata-se de um abuso de notação, uma vez que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ também designa o conjunto dos pares (A, B) com $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{D}$. O significado que se dá à notação será claro no contexto.

I.5.20 Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dois espaços mensuráveis. Define-se então a σ -álgebra produto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ como sendo a σ -álgebra de partes de $X \times Y$ gerada pela classe $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ de partes de $X \times Y$, σ -álgebra que é a que se considera implicitamente em $X \times Y$ quando outra não é referida. Dizemos que $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ é o *espaço mensurável produto* dos espaços mensuráveis (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) .

O resultado seguinte mostra que o espaço mensurável produto goza das propriedades que se esperam dum produto (comparar com o que se passa com o produto de espaços topológicos, relativamente às aplicações contínuas).

I.5.21 Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dois espaços mensuráveis e consideremos o espaço mensurável produto $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. Tem-se então:

a) As *projeções canónicas* $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$, definidas por

$$\pi_1(x, y) = x, \quad \pi_2(x, y) = y,$$

são aplicações mensuráveis.

b) Sejam (Z, \mathcal{P}) um espaço mensurável, $f: Z \rightarrow X \times Y$ uma aplicação e $f_1: Z \rightarrow X$ e $f_2: Z \rightarrow Y$ as respectivas *componentes*, definidas por

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z)).$$

Tem-se então que f é mensurável se, e só se, f_1 e f_2 são ambas mensuráveis.

Dem: a) Temos uma consequência de que, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\pi_1^{-1}(A) = A \times Y \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$$

e, para cada $B \in \mathcal{N}$,

$$\pi_2^{-1}(B) = X \times B \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}.$$

Se f é mensurável, a conclusão de a) e I.5.2 implicam que f_1 e f_2 são mensuráveis, uma vez que $f_1 = \pi_1 \circ f$ e $f_2 = \pi_2 \circ f$. Suponhamos, reciprocamente, que f_1 e f_2 são aplicações mensuráveis. Para cada $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$, tem-se então $f_1^{-1}(A) \in \mathcal{P}$ e $f_2^{-1}(B) \in \mathcal{P}$, e portanto também

$$f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B) \in \mathcal{P}.$$

Tendo em conta I.5.7, concluímos que f é mensurável.

I.5.22 (**Compatibilidade com as restrições de σ -álgebras**) Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dois espaços mensuráveis e consideremos o espaço mensurável produto $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. Sejam $X' \in \mathcal{M}$ e $Y' \in \mathcal{N}$ e consideremos as σ -álgebras restrição $\mathcal{M}_{/X'}$ e $\mathcal{N}_{/Y'}$, de partes de X' e Y' , respetivamente (cf. I.2.5). Tem-se então que a σ -álgebra produto $\mathcal{M}_{/X'} \otimes \mathcal{N}_{/Y'}$, de partes de

$X' \times Y'$, coincide com a σ -álgebra restrição $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_{/X' \times Y'}$.³²

Dem: Notemos $\mathcal{P} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_{/X' \times Y'}$ e utilizemos I.5.17 para mostrar que as σ -álgebras $\mathcal{M}_{/X'} \otimes \mathcal{N}_{/Y'}$ e \mathcal{P} coincidem. Em primeiro lugar, como as projeções canónicas $X' \times Y' \rightarrow X'$ e $X' \times Y' \rightarrow Y'$ são mensuráveis, quando se considera como σ -álgebras no domínio $\mathcal{M}_{/X'} \otimes \mathcal{N}_{/Y'}$ e nos espaços de chegada $\mathcal{M}_{/X'}$ e $\mathcal{N}_{/Y'}$ (cf. a alínea a) de I.5.21), vemos que elas são também mensuráveis como aplicações $X' \times Y' \rightarrow X$ e $X' \times Y' \rightarrow Y$, quando se considera \mathcal{M} e \mathcal{N} como σ -álgebras nos espaços de chegada (cf. I.5.5), pelo que a inclusão $X' \times Y' \rightarrow X \times Y$ é mensurável, quando se considera no espaço de chegada a σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ (cf. a alínea b) de I.5.21) e portanto, mais uma vez por I.5.5, a identidade de $X' \times Y'$ é mensurável de $\mathcal{M}_{/X'} \otimes \mathcal{N}_{/Y'}$ para \mathcal{P} . Em segundo lugar, tendo em conta os resultados já referidos, assim como I.5.4, vemos que, do facto de as projeções canónicas $X \times Y \rightarrow X$ e $X \times Y \rightarrow Y$ serem mensuráveis, quando se considera como σ -álgebras no domínio $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e nos espaços de chegada \mathcal{M} e \mathcal{N} , podemos deduzir que as suas restrições $X' \times Y' \rightarrow X$ e $X' \times Y' \rightarrow Y$ são também mensuráveis, quando se considera no domínio a σ -álgebra \mathcal{P} e portanto as projeções canónicas $X' \times Y' \rightarrow X'$ e $X' \times Y' \rightarrow Y'$ são mensuráveis, quando se considera nos espaços de chegada as σ -álgebras $\mathcal{M}_{/X'}$ e $\mathcal{N}_{/Y'}$, o que implica que a identidade de $X' \times Y'$ é mensurável de \mathcal{P} para $\mathcal{M}_{/X'} \otimes \mathcal{N}_{/Y'}$. \square

Um paralelo com a situação examinada em I.2.9, leva-nos a perguntarmo-nos se, quando X e Y são espaços topológicos, sobre os quais consideramos a σ -álgebras dos borelianos \mathcal{B}_X e \mathcal{B}_Y , a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ será a σ -álgebra dos borelianos do espaço topológico produto $X \times Y$. De facto, vamos verificar que isso se passa, desde que os espaços topológicos envolvidos verifiquem uma propriedade suplementar, a de terem base contável, propriedade que teremos ocasião de encontrar com frequência daqui em diante. Começamos por apresentar um resultado auxiliar, para o qual uma condição de contabilidade é também necessária.

I.5.23 Sejam X e Y conjuntos, \mathcal{C} uma classe de partes de X e \mathcal{D} uma classe de partes de Y e suponhamos que existem famílias contáveis $(X_i)_{i \in I}$, de conjuntos de \mathcal{C} , e $(Y_j)_{j \in J}$, de conjuntos de \mathcal{D} , tais que $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ e $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$.³³

Sendo \mathcal{M} a σ -álgebra de partes de X gerada por \mathcal{C} e \mathcal{N} a σ -álgebra de partes de Y gerada por \mathcal{D} , tem-se então que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ é a σ -álgebra de partes de $X \times Y$ gerada por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Dem: Uma vez que, para cada $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{D}$, tem-se $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$, donde

³²Felizmente..., senão ficávamos na dúvida sobre qual a σ -álgebra a considerar implicitamente em $X' \times Y'$.

³³É o que acontece, por exemplo, se as classes \mathcal{C} e \mathcal{D} forem semianéis σ -totais (cf. I.4.3).

$$A \times B \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N},$$

concluimos que $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Resta-nos mostrar que, se \mathcal{P} é uma σ -álgebra arbitrária de partes de $X \times Y$ tal que $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, então tem-se necessariamente $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$. Dividimos a prova desse facto em três partes:

1) Vamos mostrar que $\mathcal{C} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$.

Subdem: Fixemos $A \in \mathcal{C}$. Notemos \mathcal{N}_A a classe dos conjuntos $B \subset Y$ tais que $A \times B \in \mathcal{P}$. O facto de se ter $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{P}$ mostra que $\emptyset \in \mathcal{N}_A$. Se $B \in \mathcal{N}_A$, o facto de se ter, para cada $j \in J$, $A \times Y_j \in \mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, e portanto

$$A \times Y = \bigcup_{j \in J} A \times Y_j \in \mathcal{P},$$

implica que

$$A \times (Y \setminus B) = (A \times Y) \setminus (A \times B) \in \mathcal{P},$$

ou seja, $Y \setminus B \in \mathcal{N}_A$. Sendo agora $(B_k)_{k \in K}$ uma família contável de conjuntos em \mathcal{N}_A , o facto de se ter, para cada k , $A \times B_k \in \mathcal{P}$ implica que

$$A \times \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) = \bigcup_{k \in K} (A \times B_k) \in \mathcal{P},$$

ou seja, $\bigcup_{k \in K} B_k \in \mathcal{N}_A$. Acabámos assim de verificar que \mathcal{N}_A é uma σ -álgebra

de partes de Y que, por hipótese, contém a classe \mathcal{D} , o que implica que se tem $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_A$. Concluimos assim que, para cada $B \in \mathcal{N}$ tem-se $A \times B \in \mathcal{P}$, ou seja, $\mathcal{C} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$.

2) Vamos mostrar que $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$.

Subdem: Fixemos $B \in \mathcal{N}$. Notemos \mathcal{M}_B a classe dos conjuntos $A \subset X$ tais que $A \times B \in \mathcal{P}$. O facto de se ter $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{P}$ mostra que $\emptyset \in \mathcal{M}_B$. Se $A \in \mathcal{M}_B$, o facto de se ter, para cada $i \in I$, $X_i \times B \in \mathcal{C} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$, e portanto

$$X \times B = \bigcup_{i \in I} X_i \times B \in \mathcal{P},$$

implica que

$$(X \setminus A) \times B = (X \times B) \setminus (A \times B) \in \mathcal{P},$$

ou seja, $X \setminus A \in \mathcal{M}_B$. Sendo agora $(A_k)_{k \in K}$ uma família contável de conjuntos em \mathcal{M}_B , o facto de se ter, para cada k , $A_k \times B \in \mathcal{P}$ implica que

$$\left(\bigcup_{k \in K} A_k \right) \times B = \bigcup_{k \in K} (A_k \times B) \in \mathcal{P},$$

ou seja, $\bigcup_{k \in K} A_k \in \mathcal{M}_B$. Acabámos assim de verificar que \mathcal{M}_B é uma

σ -álgebra de partes de X que, pelo que vimos em 1), contém a classe \mathcal{C} , o que implica que se tem $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$. Concluimos assim que, para cada $A \in \mathcal{M}$ tem-se $A \times B \in \mathcal{P}$, ou seja, $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$.

3) O facto de se ter $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$ e de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ ser a σ -álgebra gerada por $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ implica que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{P}$, que era o que nos faltava provar. \square

1.5.24 Lembremos que, se X é um espaço topológico, uma *base de abertos* de X é uma classe \mathcal{U} constituída por alguns dos conjuntos abertos de X que tenha a propriedade de qualquer conjunto aberto U de X ser união de alguma família de abertos pertencentes a \mathcal{U} , propriedade que é equivalente à exigência de, para cada conjunto aberto U de X e cada $x \in U$, existir um $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V \subset U$. É claro que um exemplo de base de abertos é a classe de todos os abertos de X .

Diz-se que um espaço topológico X é *de base contável* se ele admitir uma base de abertos \mathcal{U} que seja um conjunto contável.

1.5.25 (**Exemplos e propriedades elementares**) a) Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto, onde se considera a topologia induzida. Se \mathcal{U} é uma base de abertos de X , então a classe \mathcal{U}' dos conjuntos da forma $Y \cap V$, com $V \in \mathcal{U}$, é uma base de abertos de Y . Em particular, se X é de base contável, Y é também de base contável.

b) Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Se \mathcal{U} é uma base de abertos de X , então a classe $f_*\mathcal{U}$ dos abertos de Y da forma $f(V)$, com $V \in \mathcal{U}$, é uma base de abertos de Y . Em particular, se X é de base contável, Y também é de base contável.

c) Sejam X e Y espaços topológicos e consideremos em $X \times Y$ a topologia produto. Se \mathcal{U} uma base de abertos de X e \mathcal{U}' é uma base de abertos de Y , então a classe $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ dos abertos de $X \times Y$ da forma $V \times W$, com $V \in \mathcal{U}$ e $W \in \mathcal{U}'$, é uma base de abertos de $X \times Y$.³⁴ Em particular, se X e Y são de base contável, também $X \times Y$ é de base contável.

d) A reta real \mathbb{R} , com a topologia usual, é de base contável, por admitir como base de abertos a classe contável dos intervalos $]a, b[$ com a e b racionais (se U é um aberto de \mathbb{R} e $x \in U$, existe $\varepsilon > 0$ com $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contido em U e pode então considerar-se números racionais a, b tais que

$$x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon,$$

para os quais se tem então $x \in]a, b[\subset U$).

e) O espaço cartesiano \mathbb{R}^n , com a sua topologia usual, é de base contável. A justificação pode fazer-se por indução em n , partindo de d) e do facto de $\overline{\mathbb{R}^{n+1}}$ ser naturalmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

f) A reta acabada $\overline{\mathbb{R}}$, com a sua topologia usual, é também de base contável.

³⁴Reparar que, mesmo que \mathcal{U} e \mathcal{U}' fossem as classes de todos os abertos, $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ não seria, em geral, a classe de todos os abertos, uma vez que pode haver abertos de $X \times Y$ que não são produtos cartesianos.

Uma base contável de abertos de $\overline{\mathbb{R}}$ é a constituída pelos intervalos $]a, b[$, $[-\infty, b[$ e $]a, +\infty[$, com a e b racionais.

I.5.26 (Importância das bases contáveis) Seja X um espaço topológico admitindo uma base contável de abertos \mathcal{U} . Tem-se então que a σ -álgebra gerada por \mathcal{U} é a σ -álgebra dos borelianos \mathcal{B}_X .

Dem: Uma vez que \mathcal{B}_X contém todos os abertos de X , contém também, em particular, todos os conjuntos pertencentes a \mathcal{U} . Suponhamos agora que \mathcal{M} é uma σ -álgebra de partes de X que contém \mathcal{U} . Uma vez que qualquer aberto de X é uma união de conjuntos pertencentes a \mathcal{U} , portanto uma união de uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} , segue-se que todos os abertos de X pertencem a \mathcal{M} e portanto, por \mathcal{B}_X ser a σ -álgebra gerada por estes últimos, $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{M}$. Fica assim provado que \mathcal{B}_X é efetivamente a σ -álgebra gerada por \mathcal{U} . \square

I.5.27 (Borelianos dum produto) Sejam X e Y dois espaços topológicos de base contável e \mathcal{B}_X e \mathcal{B}_Y as respectivas σ -álgebras dos borelianos. Tem-se então que a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ é a σ -álgebra $\mathcal{B}_{X \times Y}$ dos borelianos de $X \times Y$.

Dem: Sejam \mathcal{U} e \mathcal{U}' bases contáveis de abertos de X e Y , respetivamente e lembremos que, como referido em I.5.25, $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ é uma base contável de abertos de $X \times Y$. Tendo em conta I.5.26, as σ -álgebras geradas por \mathcal{U} , \mathcal{U}' e $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ são, respetivamente, \mathcal{B}_X , \mathcal{B}_Y e $\mathcal{B}_{X \times Y}$. Mas, tendo em conta I.5.23, e uma vez que X e Y , sendo abertos em si mesmos, são uniões contáveis de conjuntos em \mathcal{U} e \mathcal{U}' , respetivamente, a σ -álgebra gerada por $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ é a σ -álgebra $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$. Concluimos assim que $\mathcal{B}_{X \times Y} = \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$. \square

Como aplicação do resultado precedente, estudamos agora a mensurabilidade da adição e da multiplicação, em dois contextos diferentes, instrumento que será utilizado quando quisermos mostrar que a soma e o produto de aplicações mensuráveis é mensurável.

I.5.28 Considerando em \mathbb{R} a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos e em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, são mensuráveis as aplicações $\varphi, \psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(x, y) = x + y, \quad \psi(x, y) = x \times y.$$

Dem: Uma vez que estas aplicações são contínuas, elas são mensuráveis, quando se considera em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a σ -álgebra dos borelianos $\mathcal{B}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$. Mas, por I.5.27, esta σ -álgebra coincide com a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. \square

I.5.29 Considerando em $\overline{\mathbb{R}}_+$ a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ dos borelianos e em $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, as aplicações $\overline{\varphi}, \overline{\psi}: \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$\overline{\varphi}(x, y) = x + y, \quad \overline{\psi}(x, y) = x \times y,$$

são mensuráveis.

Dem: Começemos por reparar que, uma vez que \mathbb{R} e $\overline{\mathbb{R}}_+$ induzem a mesma topologia em $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ (a topologia induzida pela reta acabada $\overline{\mathbb{R}}$), concluímos que as σ -álgebras $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ têm a mesma restrição a \mathbb{R}_+ , nomeadamente a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ dos borelianos de \mathbb{R}_+ (cf. I.2.9). Tendo em conta I.5.22, concluímos que as σ -álgebras $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ têm também a mesma restrição a $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, nomeadamente $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$, pelo que concluímos do resultado precedente que $\overline{\varphi}$ e $\overline{\psi}$ têm restrições mensuráveis ao subconjunto mensurável $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ do seu domínio. Apesar de a ideia ser semelhante, separemos agora o exame dos dois casos:

1) O domínio $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ é união de três subconjuntos mensuráveis, nomeadamente

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \{+\infty\} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ \times \{+\infty\},$$

e a restrição de $\overline{\varphi}$ a cada um deles é mensurável, no primeiro caso como já foi referido e, nos outros dois, por termos aplicações de valor constante $+\infty$. Aplicando I.5.6, concluímos que $\overline{\varphi}$ é mensurável.

2) O domínio $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ é união de cinco subconjuntos mensuráveis, nomeadamente

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \{0\} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ \times \{0\},$$

$$\{+\infty\} \times (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{0\}), \quad (\overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{0\}) \times \{+\infty\},$$

e a restrição de $\overline{\psi}$ a cada um deles é mensurável, no primeiro caso como referimos no início, no segundo e no terceiro por termos aplicações de valor constante 0 e no quarto e quinto por termos aplicações de valor constante $+\infty$. Aplicando, como em 1), I.5.6, concluímos que $\overline{\psi}$ é mensurável. \square

Exercícios

Ex I.5.1 Para cada número racional x , seja $\text{den}(x)$ o menor natural $q \geq 1$ tal que $x = \frac{p}{q}$, para algum $p \in \mathbb{Z}$. Considerando em \mathbb{R} a σ -álgebra dos borelianos, utilizar I.5.6 para mostrar que é mensurável a aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \text{den}(x), & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ \ln(|x|), & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ex I.5.2 Consideremos em \mathbb{R} a σ -álgebra \mathcal{B} dos borelianos e seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação constante. Verificar o que é a σ -álgebra imagem direta $f_*\mathcal{B}$, sobre \mathbb{R} , e concluir que, apesar de f ser mensurável, $f_*\mathcal{B} \neq \mathcal{B}$.

Ex I.5.3 Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dois espaços mensuráveis e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação mensurável. Suponhamos que existe uma *secção mensurável* de f , isto é, uma aplicação mensurável $g: Y \rightarrow X$ tal que, para cada $y \in Y$, $f(g(y)) = y$ (em particular, $f: X \rightarrow Y$ tem que ser sobrejetiva). Verificar que se tem $\mathcal{N} = f_*\mathcal{M}$.

Ex I.5.4 Consideremos em \mathbb{R}^2 o semianel \mathcal{S} associado à partição de \mathbb{R}^2 constituída pelos três conjuntos $]-\infty, 0[\times]-\infty, 0[$, $]-\infty, 0[\times [0, +\infty[$ e $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ (cf. o exercício I.4.9). Sendo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a primeira projeção, definida por $f(x, y) = x$, verificar o que é $f_*\mathcal{S}$ e concluir que não é um semianel de partes de \mathbb{R} (comparar com a última conclusão de I.5.18, no caso em que f é bijetiva).

Ex I.5.5 (**Medida de Lebesgue e homotetias**) Seja $\lambda: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} . Para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mostrar que tem lugar uma bijeção bimensurável $\eta_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\eta_a(x) = ax$ e que, para cada $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\lambda(\eta_a(A)) = |a|\lambda(A)$.

Sugestão: Considerar a medida μ nos borelianos de \mathbb{R} imagem direta da medida $|a|\lambda$ (cf. I.2.16) pela aplicação η_a e verificar, separadamente nos casos $a > 0$ e $a < 0$, que $\mu = \lambda$.

Ex I.5.6 (**Aclarando uma aparente assimetria na definição das medidas de Lebesgue-Stieltjes**) Sejam $J =]c, d[$ um intervalo aberto não vazio e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Lembremos que a medida de Lebesgue-Stieltjes λ_g nos borelianos de J está caracterizada como sendo a única que verifica a condição $\lambda_g(]a, b]) = g(b^+) - g(a^+)$, para cada $a \leq b$ em J (cf. I.4.13), condição que envolve uma certa assimetria entre “esquerda” e “direita”. Lembrando a caracterização das medidas de Lebesgue-Stieltjes de outros tipos de intervalo que decorre de I.4.14, mostrar que λ_g é também a única medida nos borelianos de J que verifica $\lambda_g([a, b[) = g(b^-) - g(a^-)$, para cada $a \leq b$ em J . **Sugestão:** Para a unicidade, pensar na função crescente $h:]-d, -c[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = -g(-x)$ e utilizar o homeomorfismo $x \mapsto -x$ para transportar medidas nos borelianos de $]c, d[$ para medidas nos borelianos de $]-d, -c[$.

Ex I.5.7 (**A medida exterior de Lebesgue**) Seja $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida exterior de Lebesgue, isto é, a associada à medida de Lebesgue no semianel dos intervalos semiabertos (cf. I.4.4).

a) Ter em conta a caracterização alternativa de λ^* na alínea a) do exercício I.4.4 e as propriedades da medida de Lebesgue referidas em I.5.14 e no exercício I.5.5 para mostrar que, se $B \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então

$$\lambda^*(x + B) = \lambda^*(B), \quad \lambda^*(aB) = |a|\lambda^*(B).$$

b) Deduzir de a) que, se $A \subset \mathbb{R}$ é λ^* -mensurável, $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $x + A$ e aA são também λ^* -mensuráveis.

c) Mostrar que o conjunto $B \subset \mathbb{R}$, referido na sugestão do exercício I.2.1, não é λ^* -mensurável, e portanto também não é um boreliano de \mathbb{R} . Mostrar que, para este conjunto, tem-se $0 < \lambda^*(B) \leq 1$.

d) Adaptar o raciocínio feito em c) para mostrar que, se $X \subset \mathbb{R}$ é um boreliano com $\lambda(X) > 0$, então existe $Y \subset X$ que não seja λ^* -mensurável.

Sugestão: Começar por mostrar que se pode já supor $X \subset [-M, M]$, para algum $M > 0$, uma vez que, em qualquer caso, X é a união de uma sucessão crescente de conjuntos nessas condições. Considerando a relação de equivalência \sim referida na sugestão do exercício I.2.1, escolhamos em X um, e um só elemento de cada classe de equivalência para esta relação e seja $Y \subset X$ o conjunto dos elementos escolhidos. Sendo J o conjunto dos racionais do intervalo $[-2M, 2M]$, verificar que

$$X \subset \bigcup_{z \in J} z + Y \subset [-3M, 3M]$$

com os conjuntos $z + Y$ disjuntos dois a dois.

Ex I.5.8 a) Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dois espaços mensuráveis e consideremos em $X \times Y$ e em $Y \times X$ as σ -álgebras produto $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$, respetivamente. Mostrar que a bijeção $f: X \times Y \rightarrow Y \times X$, definida por $f(x, y) = (y, x)$, é bimensurável.

b) Sejam (X, \mathcal{M}) , (Y, \mathcal{N}) e (Z, \mathcal{P}) três espaços mensuráveis e consideremos em $(X \times Y) \times Z$ e em $X \times (Y \times Z)$ as σ -álgebras $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \otimes \mathcal{P}$ e $\mathcal{M} \otimes (\mathcal{N} \otimes \mathcal{P})$, respetivamente. Mostrar que a bijeção

$$f: (X \times Y) \times Z \rightarrow X \times (Y \times Z), \quad f((x, y), z) = (x, (y, z)),$$

é bimensurável.

Ex I.5.9 Consideremos em $\overline{\mathbb{R}}_+$ a σ -álgebra dos borelianos $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ e em $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$. Verificar que são mensuráveis os subconjuntos U, V e $\Delta_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$, definidos por

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \mid x < y\}, \\ V &= \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \mid x > y\}, \\ \Delta_{\overline{\mathbb{R}}_+} &= \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \mid x = y\}. \end{aligned} \quad 35$$

Sugestão: Atendendo a que $x < y$ se, e só se, existe um racional a tal que $x < a < y$, escrever U como uma união numerável de produtos cartesianos de abertos de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

³⁵Uma tentação óbvia seria descrever $\Delta_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ como o conjunto dos pares (x, y) tais que $x - y = 0$, mas isso não é possível, uma vez que não existe subtração no contexto de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Ex I.5.10 Deduzir do exercício I.5.9 que, se (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável e se $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ são duas aplicações mensuráveis, então são mensuráveis os conjuntos

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\},$$

$$B = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}.$$

Ex I.5.11 **a)** Considerando em \mathbb{R} a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos e em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, verificar que tem lugar uma aplicação mensurável $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$d(x, y) = |x - y|$$

(a função distância). **Sugestão:** Adaptar o que foi feito na prova de I.5.28.

b) Considerando em $\overline{\mathbb{R}}_+$ a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ dos borelianos e em $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$, verificar que tem lugar uma aplicação mensurável $\bar{d}: \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por

$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{se } x \in \mathbb{R}_+ \text{ e } y \in \mathbb{R}_+ \\ +\infty, & \text{se } x = +\infty \text{ ou } y = +\infty \end{cases}^{36}$$

(extensão da função distância). **Sugestão:** Adaptar o que foi feito na prova de I.5.29.

Ex I.5.12 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, sobre o qual consideramos a σ -álgebra \mathcal{B}_J dos borelianos, e $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação monótona. Mostrar que f é mensurável.

Sugestão: Utilizar I.5.7, lembrando que a σ -álgebra dos borelianos de \mathbb{R} é gerada pela classe dos intervalos semiabertos $]a, b]$, com $a \leq b$ (cf. I.3.12) e verificando que $f^{-1}(]a, b])$ é necessariamente um intervalo.

Ex I.5.13 (**Aplicações mensuráveis para um subespaço topológico**) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, Y um espaço topológico, onde se considera a σ -álgebra \mathcal{B}_Y dos borelianos e $\hat{Y} \subset Y$ um subespaço topológico, não necessariamente boreliano, onde se considera também a σ -álgebra dos borelianos $\mathcal{B}_{\hat{Y}}$. Verificar que uma aplicação $f: X \rightarrow \hat{Y}$ é mensurável se, e só se, $f: X \rightarrow Y$ é mensurável.

Sugestão: Utilizar I.5.7. Reparar que não se pode aplicar I.5.5 e I.2.9, uma vez que, em ambos os casos, seria necessário que $\hat{Y} \in \mathcal{B}_Y$.

Ex I.5.14 (**Borelianos de um subespaço topológico**) Sejam Y um espaço topológico, onde se considera a σ -álgebra dos borelianos \mathcal{B}_Y e $\hat{Y} \subset Y$ um subespaço topológico, não necessariamente boreliano, onde se considera também a σ -álgebra dos borelianos $\mathcal{B}_{\hat{Y}}$.

³⁶Quem tenha uma preferência por definir $\bar{d}(+\infty, +\infty) = 0$, pode fazê-lo sem alterar a conclusão do exercício, mas a definição que apresentamos ser-nos-á conveniente adiante.

a) Mostrar que, se $A \subset \widehat{Y}$, então $A \in \mathcal{B}_{\widehat{Y}}$ se, e só se, existe $A' \in \mathcal{B}_Y$ tal que $A = \widehat{Y} \cap A'$. Reparar que esta conclusão implica diretamente que, no caso em que $\widehat{Y} \in \mathcal{B}_Y$, $\mathcal{B}_{\widehat{Y}} = \mathcal{B}_Y / \widehat{Y}$. **Sugestão:** Para uma das implicações atender a que a inclusão $\widehat{Y} \rightarrow Y$ é contínua, e portanto mensurável.

b) Sendo $\mu: \mathcal{B}_Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida e $\mu^*: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida exterior associada, verificar que a restrição de μ^* a $\mathcal{B}_{\widehat{Y}}$ é uma medida, que coincide com a medida $\mu_{/\widehat{Y}}$, no caso em que $\widehat{Y} \in \mathcal{B}_Y$. **Sugestão:** Ter em conta a alínea b) de I.4.5 e verificar que, se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos de \mathcal{B}_Y tal que os $\widehat{Y} \cap A_j$ sejam disjuntos dois a dois, então existe uma família contável $(A'_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{B}_Y disjuntos dois a dois e tais que $\widehat{Y} \cap A_j = \widehat{Y} \cap A'_j$.

Ex I.5.15 (Um conjunto λ^* -mensurável não boreliano, cf. [5]) Consideremos a função singular de Cantor Lebesgue $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (cf. a alínea g) do exercício I.4.11) e o conjunto de Cantor $C \subset [0, 1]$ (cf. a alínea b) do exercício I.4.11).

a) Verificar que tem lugar uma aplicação contínua, estritamente crescente e sobrejetiva $g: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$, definida por $g(x) = f(x) + x$ e concluir que g é mesmo um homeomorfismo.

b) Considerando os intervalos abertos J_{p_1, \dots, p_k}^k definidos no exercício I.4.11, cuja união é $[0, 1] \setminus C$, verificar que $g(J_{p_1, \dots, p_k}^k)$ é uma translação de J_{p_1, \dots, p_k}^k e concluir que a medida de Lebesgue do compacto $g(C)$ é $\lambda(g(C)) = 1$.

c) Tendo em conta a alínea d) do exercício I.5.7, podemos considerar um subconjunto $Y \subset g(C)$ que não seja λ^* -mensurável, e portanto também não seja boreliano. Concluir que $g^{-1}(Y) \subset C$ não é boreliano mas, pelo exercício I.4.1, é λ^* -mensurável.

CAPÍTULO II

O integral

§1. Integração de funções positivas.

Nesta secção vamos definir o integral para funções mensuráveis, cujo domínio é um espaço mensurável (X, \mathcal{M}) , munido de uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, e que tomam valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$. Para isso, vamos complementar o estudo das funções mensuráveis que fizemos em I.5 com propriedades especiais que são válidas quando o espaço de chegada é $\overline{\mathbb{R}}_+$, onde consideramos implicitamente a σ -álgebra dos borelianos $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$.

No caso do primeiro resultado, apresentamos simultaneamente uma versão para funções mensuráveis com valores em \mathbb{R} , também implicitamente com a σ -álgebra dos borelianos, aliás com demonstração análoga, porque teremos adiante necessidade de a utilizar.

II.1.1 Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Tem-se então:

a) Se $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ são funções mensuráveis, então são também mensuráveis as funções $f + g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $f \times g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

b) Se $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, então são também mensuráveis as funções $f + g: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \times g: X \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

Em consequência, é também mensurável a função $f - g: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).^{37}$$

Dem: a) Tendo em conta I.5.21, podemos considerar uma aplicação mensurável $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $x \mapsto (f(x), g(x))$, onde se considera em $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$. Basta então repararmos que $f + g$ e $f \times g$ são as compostas desta aplicação mensurável com as aplicações mensuráveis $\overline{\varphi}: \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $\overline{\psi}: \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (adição e multiplicação) referidas em I.5.29.

³⁷Reparar que, no caso da alínea a), não fazia sentido considerar a função $f - g$, uma vez que não se pode definir a diferença de elementos arbitrários de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

b) Tendo em conta I.5.21, podemos considerar uma aplicação mensurável $X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definida por $x \mapsto (f(x), g(x))$, onde se considera em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Basta então repararmos que $f + g$ e $f \times g$ são as compostas desta aplicação mensurável com as aplicações mensuráveis $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (adição e multiplicação) referidas em I.5.28. Quanto à função $f - g$ temos uma consequência do que já verificámos, uma vez que se tem $f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \times g(x)$, onde a função constante -1 é também mensurável. \square

II.1.2 (Lema) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma aplicação. São então equivalentes as propriedades seguintes:

- 1) A aplicação f é mensurável;
- 2) Para cada $a \in \mathbb{R}_+$, é mensurável o conjunto

$$A_a = \{x \in X \mid f(x) \geq a\}.$$

- 3) Para cada $a \in \mathbb{R}_+$, é mensurável o conjunto

$$B_a = \{x \in X \mid f(x) > a\}.$$

Dem: O facto de 1) implicar 2) resulta de se ter $A_a = f^{-1}([a, +\infty])$, onde $[a, +\infty]$ é fechado em $\overline{\mathbb{R}}_+$, e portanto um boreliano. Suponhamos que se verifica 2). Reparando que se tem $f(x) > a$ se, e só se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \geq a + \frac{1}{n}$, concluímos que, para cada $a \in \mathbb{R}_+$,

$$B_a = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{a + \frac{1}{n}},$$

e portanto B_a é mensurável, o que mostra que se verifica 3). Suponhamos, enfim, que se verifica 3) e mostremos que f é mensurável. Começemos por reparar que, se $a < 0$ em \mathbb{R} , o conjunto B_a , definido do mesmo modo que para $a \geq 0$, é igual a X , em particular mensurável. Uma vez que $f(x) = +\infty$ se, e só se, $f(x) > n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, vemos que, sendo $X_\infty = \{x \in X \mid f(x) = +\infty\}$, tem-se

$$X_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n,$$

e portanto X_∞ é mensurável. O domínio X é assim a união dos conjuntos mensuráveis X_∞ e $X \setminus X_\infty$ e a restrição de f a X_∞ é mensurável, por ser constante. Tendo em conta I.5.6, para mostrar que $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável basta assim mostrar que $f|_{X \setminus X_\infty}: X \setminus X_\infty \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável, o que é equivalente a $f|_{X \setminus X_\infty}: X \setminus X_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ser mensurável, quando se considera em \mathbb{R} a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos, uma vez que as restrições das σ -álgebras $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a \mathbb{R}_+ coincidem, já que $\overline{\mathbb{R}}_+$ e \mathbb{R} induzem a mesma topologia em \mathbb{R}_+ (cf. I.2.9). Uma vez que a σ -álgebra dos borelianos de \mathbb{R} é gerada pela classe dos intervalos semiabertos $]a, b]$, com $a \leq b$ (cf. I.3.12), para verificarmos que $f|_{X \setminus X_\infty}: X \setminus X_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável basta verificarmos

que, sempre que $a \leq b$ em \mathbb{R} , $f^{-1}([a, b])$ é mensurável (cf. I.5.7) e isso vai resultar de que

$$f^{-1}([a, b]) = \{x \in X \mid f(x) > a \wedge f(x) \leq b\} = B_a \setminus B_b. \quad \square$$

II.1.3 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis. São então mensuráveis os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}, \\ B &= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\},^{38} \\ C &= \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}. \end{aligned}$$

Dem: Notemos \mathbb{Q}_+ o conjunto numerável dos números racionais em \mathbb{R}_+ . Para cada $a \in \mathbb{Q}_+$, o lema II.1.2 garante-nos que são mensuráveis os conjuntos

$$\begin{aligned} B_a &= \{x \in X \mid f(x) > a\}, \\ B'_a &= \{x \in X \mid g(x) > a\}, \end{aligned}$$

e como se tem $f(x) < g(x)$ se, e só se, existe $a \in \mathbb{Q}_+$ com $f(x) \leq a < g(x)$, podemos escrever

$$B = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}_+} (B'_a \setminus B_a),$$

o que mostra que B é mensurável. Trocando os papéis de f e g , vemos que também é mensurável o conjunto $B' = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$, o facto de A ser mensurável resulta de se ter $A = X \setminus (B \cup B')$ e o facto de C ser mensurável resulta de se ter $C = A \cup B$. \square

II.1.4 (**Supremos e ínfimos de funções mensuráveis**) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $(f_j)_{j \in J}$ uma família contável, não vazia, de aplicações mensuráveis $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. São então mensuráveis as funções $f, F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$f(x) = \inf_{j \in J} f_j(x), \quad F(x) = \sup_{j \in J} f_j(x).^{39}$$

Dem: Para cada $a \in \mathbb{R}_+$, tem-se $f(x) \geq a$ se, e só se, para todo o $j \in J$, $f_j(x) \geq a$, e portanto

³⁸Estas conclusões já foram encontradas por quem resolveu o exercício I.5.10. Tal como referimos a propósito desse exercício, poderíamos ser tentados a transformar a condição $f(x) = g(x)$ em $f(x) - g(x) = 0$, mas isto não é possível, uma vez que não existe subtração no contexto de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

³⁹A restrição $J \neq \emptyset$ é desnecessária para quem aceitar pensar no ínfimo e no supremo de uma família vazia, no contexto de $\overline{\mathbb{R}}_+$, como sendo respetivamente $+\infty$ e 0. É claro que, nesse caso a conclusão é trivial, por f e F serem aplicações constantes.

$$\{x \in X \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_{j \in J} \{x \in X \mid f_j(x) \geq a\}$$

em que os conjuntos no segundo membro são mensuráveis, tendo em conta o lema II.1.2. Concluimos assim que o conjunto do primeiro membro também é mensurável o que, pelo mesmo lema, implica que f é mensurável.

Para cada $a \in \mathbb{R}_+$, tem-se $F(x) > a$ se, e só se, existe $j \in J$ tal que $f_j(x) > a$, e portanto

$$\{x \in X \mid F(x) > a\} = \bigcup_{j \in J} \{x \in X \mid f_j(x) > a\}$$

em que os conjuntos no segundo membro são mensuráveis, tendo em conta o lema referido. Concluimos assim que o conjunto do primeiro membro também é mensurável o que, ainda pelo mesmo lema, implica que f é mensurável. \square

II.1.5 (Limites de funções mensuráveis) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de aplicações mensuráveis $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ em $\overline{\mathbb{R}}_+$. Tem-se então que a aplicação $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, assim definida, é também mensurável.

Mais precisamente, sendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a aplicação definida por

$$g_n(x) = \inf_{m \geq n} f_m(x),$$

tem-se

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x).$$

Dem: Para cada $n \in \mathbb{N}$, a aplicação $g_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável tendo em conta II.1.4. Vamos verificar que se tem $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$ o que, mais uma

vez pelo mesmo resultado, implicará que $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável.⁴⁰ Dividimos essa verificação em duas partes:

1) Vamos começar por verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) \leq f(x)$, isto é, que $f(x)$ é um majorante do conjunto dos $g_n(x)$.

Ora, se isso não acontecesse, existia n_0 tal que $f(x) < g_{n_0}(x)$ e portanto existia n_1 tal que, para todo o $m \geq n_1$, $f_m(x) < g_{n_0}(x)$ e isso era absurdo, visto que, sendo $m = \max\{n_0, n_1\}$, $f_m(x)$ é um dos elementos do conjunto cujo ínfimo é $g_{n_0}(x)$.

⁴⁰Em geral, independentemente de a sucessão dos $f_n(x)$ convergir, podemos definir $g_n(x)$ como acima e pôr $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$ e então $f(x)$ é o que se chama o *limite inferior* da sucessão dos $f_n(x)$, notado $\liminf f_n(x)$. O que vamos fazer é mostrar, para quem não o conheça, que quando existe o limite este coincide com o limite inferior.

2) Vamos verificar que $f(x)$ é o menor dos majorantes do conjunto dos $g_n(x)$, ou seja, que, se $a < f(x)$, a não é majorante, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < g_{n_0}(x)$.

Ora, escolhendo $\delta > 0$ tal que $a + \delta < f(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m \geq n_0$, $a + \delta < f_m(x)$, o que implica, por $g_{n_0}(x)$ ser o ínfimo desses $f_m(x)$, que $a < a + \delta \leq g_{n_0}(x)$. \square

II.1.6 Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Vamos dizer que uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma *função simples* se é mensurável e o conjunto $f(X)$ é finito. Repare-se que, por definição, uma função simples não toma nunca o valor $+\infty$.

II.1.7 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função simples. Existe então uma família finita $(X_j)_{j \in J}$ de partes mensuráveis de X , disjuntas duas a duas e de união X , tal que a restrição de f a cada X_j seja constante. A uma tal família, damos o nome de *partição adaptada* à função simples.

Dem: Basta tomar para J o conjunto finito $f(X)$ e, para cada $j \in J$, tomar

$$X_j = \{x \in X \mid f(x) = j\},$$

imagem recíproca por meio de f do conjunto fechado, em particular boreliano, $\{j\}$. \square

Repare-se que, apesar de termos construído, de modo bem determinado, uma partição adaptada a uma função simples dada, há, em geral outras partições adaptadas possíveis, por exemplo juntando conjuntos vazios à partição ou substituindo um dos conjuntos por uma partição finita desse conjunto por conjuntos mensuráveis. Como veremos em breve, essa indeterminação das partições associadas que se podem considerar é essencial para trabalhar comodamente com as funções simples. Vamos agora verificar como se pode definir o integral de uma função simples, quando é dada uma medida na σ -álgebra do domínio.

II.1.8 Vamos chamar *espaço de medida* a um triplo (X, \mathcal{M}, μ) , onde X é um conjunto, \mathcal{M} uma σ -álgebra de partes de X e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Em particular, (X, \mathcal{M}) é então um espaço mensurável.

II.1.9 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função simples. Sejam $(X_j)_{j \in J}$ e $(X'_k)_{k \in K}$ duas partições adaptadas à função f e sejam $(a_j)_{j \in J}$ e $(b_k)_{k \in K}$ famílias de elementos de \mathbb{R}_+ tais que $f(x) = a_j$, para cada $x \in X_j$, e que $f(x) = b_k$, para cada $x \in X'_k$.⁴¹ Tem-se então

⁴¹Repare-se que os a_j estão bem determinados para os índices j tais que $X_j \neq \emptyset$ mas que, se $X_j = \emptyset$, qualquer $a_j \in \mathbb{R}_+$ verifica a condição referida. Análoga observação vale evidentemente para os b_k .

$$\sum_{j \in J} a_j \mu(X_j) = \sum_{k \in K} b_k \mu(X'_k).$$

Dem: Para cada $j \in J$, X_j é a união da família finita de conjuntos mensuráveis $X_j \cap X'_k$, $k \in K$, que são disjuntos dois a dois, pelo que, tendo em conta a distributividade e a propriedade de Fubini em I.1.12, obtemos

$$\sum_{j \in J} a_j \mu(X_j) = \sum_{j \in J} a_j \left(\sum_{k \in K} \mu(X_j \cap X'_k) \right) = \sum_{(j,k) \in J \times K} a_j \mu(X_j \cap X'_k).$$

Por troca de papéis das duas partições, tem-se também

$$\sum_{k \in K} b_k \mu(X'_k) = \sum_{(j,k) \in J \times K} b_k \mu(X_j \cap X'_k).$$

Para concluir a igualdade do enunciado, basta assim verificar que, para cada par $(j, k) \in J \times K$

$$a_j \mu(X_j \cap X'_k) = b_k \mu(X_j \cap X'_k)$$

e isso é uma consequência de ambos os membros desta igualdade serem 0, no caso em que $X_j \cap X'_k = \emptyset$ e, caso contrário, ter que ser $a_j = b_k$ (iguais a $f(x)$ para um x em $X_j \cap X'_k$). \square

II.1.10 Tendo em conta o resultado precedente, se (X, \mathcal{M}, μ) é um espaço de medida e $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função simples, é legítimo definir o *integral* de f como sendo o elemento de $\overline{\mathbb{R}}_+$

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} a_j \mu(X_j),$$

onde $(X_j)_{j \in J}$ é uma partição adaptada à função f e $f(x) = a_j$, para cada $x \in X_j$.

Repare-se que, apesar de $f(x)$ nunca ser $+\infty$, o integral pode ser $+\infty$, uma vez que, para alguns j , pode ser $\mu(X_j) = +\infty$ e $a_j > 0$. Já no caso em que $\mu(X) < +\infty$, tem-se evidentemente, para cada função simples $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\int f d\mu < +\infty$.

II.1.11 Como exemplo trivial de função simples, temos a função identicamente nula, $0: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, a qual admite a família formada pelo único conjunto X como partição adaptada. É claro que se tem

$$\int 0 d\mu = 0.$$

Outra consequência direta da definição é que, se $\mu(X) = 0$ (ou, o que é equivalente, se $\mu = 0$), então, para cada função simples $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, tem-se

$\int f(x) d\mu(x) = 0$, visto que, sendo $(X_j)_{j \in J}$ uma partição adaptada a f , tem-se $\mu(X_j) = 0$, para cada j .

II.1.12 Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Se $(X_j)_{j \in J}$ é uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X e se $(a_j)_{j \in J}$ é uma família de elementos de \mathbb{R}_+ , então podemos definir uma função simples $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, tendo a família dos (X_j) como partição adaptada, pela condição de se ter $f(x) = a_j$, para cada $x \in X_j$ (o facto de f ser mensurável resulta de I.5.6, uma vez que a restrição a cada X_j é constante).

Como caso particular do anterior, se $A \in \mathcal{M}$ e considerarmos a família formada pelos dois conjuntos A e $X \setminus A$, concluímos que tem lugar a função simples $\mathbb{I}_A: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida por

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

à qual se dá o nome de *função indicatriz*, ou *função característica*, do conjunto A , e para a qual se tem, dada uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int \mathbb{I}_A d\mu = \mu(A)$$

(também se usa a notação χ_A com o mesmo significado que \mathbb{I}_A). Repare-se, a propósito, que, se $(X_j)_{j \in J}$ é uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X e se $(a_j)_{j \in J}$ é uma família de elementos de \mathbb{R}_+ , então a correspondente função simples $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, que toma o valor constante a_j em X_j pode ser caracterizada por

$$f(x) = \sum_{j \in J} a_j \mathbb{I}_{X_j}(x).$$

II.1.13 (**Lema**) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ duas funções simples. Existe então uma partição de X adaptada simultaneamente a f e a g .

Dem: Seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois e de união X , tais que f seja constante em cada X_j e seja $(X'_k)_{k \in K}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois e de união X , tais que g seja constante em cada X'_k . Tem-se então que os conjuntos mensuráveis $X_j \cap X'_k$, $(j, k) \in J \times K$, são disjuntos dois a dois e de união X , constituem uma família finita e em cada um deles tanto f como g é constante. \square

II.1.14 (**Monotonia e linearidade**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ duas funções simples. tem-se então:

a) Se, para cada $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$, então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu;$$

b) A função $f + g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ também é simples e

$$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu;$$

c) Para cada $a \in \mathbb{R}_+$, a função $af: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ também é simples e

$$\int af d\mu = a \int f d\mu.$$

Dem: Tendo em conta o lema anterior, podemos considerar uma família finita $(X_j)_{j \in J}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que, para cada $x \in X_j$, $f(x) = a_j$ e $g(x) = b_j$. Sob a hipóteses de a), tem-se, para cada $j \in J$, $a_j \mu(X_j) \leq b_j \mu(X_j)$, visto que ambos os membros são 0, se $X_j = \emptyset$, e, caso contrário, $a_j \leq b_j$, e daqui deduzimos que

$$\int f d\mu = \sum_{j \in J} a_j \mu(X_j) \leq \sum_{j \in J} b_j \mu(X_j) = \int g d\mu.$$

Por outro lado, uma vez que $f + g$ e af são funções que em cada X_j tomam os valores constantes $a_j + b_j$ e aa_j , respetivamente, vemos que estas funções são simples e que

$$\begin{aligned} \int f + g d\mu &= \sum_{j \in J} (a_j + b_j) \mu(X_j) = \\ &= \sum_{j \in J} a_j \mu(X_j) + \sum_{j \in J} b_j \mu(X_j) = \int f d\mu + \int g d\mu, \\ \int af d\mu &= \sum_{j \in J} (aa_j) \mu(X_j) = a \sum_{j \in J} a_j \mu(X_j) = a \int f d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Vamos agora estender a definição do integral das funções simples para as funções mensuráveis. De facto, para a definição que apresentamos em seguida, e para o primeiro resultado que provaremos, poderíamos trabalhar igualmente com funções não necessariamente mensuráveis, mas não ganharíamos muito com isso, uma vez que há propriedades fundamentais, que encontraremos mais adiante, que só no quadro das funções mensuráveis se conseguem provar (é o que acontece, por exemplo, com a aditividade, que será provada em II.1.20).

II.1.15 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma aplicação mensurável. Define-se então o *integral* de f como sendo o elemento de $\overline{\mathbb{R}}_+$

que é supremo do conjunto dos integrais $\int h d\mu$, com $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ função simples, verificando $h(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$ (uma dessas funções h é a função identicamente nula, 0). O integral de f será notado, como antes,

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x),$$

ou ainda, quando se considerar importante explicitar qual o domínio da função,

$$\int_X f(x) d\mu(x).$$

Repare-se que, tendo em conta a propriedade de monotonia do integral na alínea a) de II.1.14, no caso em que f é uma função simples, este integral coincide com o definido em II.1.10, uma vez que o supremo referido é, nesse caso, um máximo, atingido precisamente para $h = f$.

No caso em que $X = \mathbb{R}$, \mathcal{M} é a σ -álgebra dos borelianos e μ é a medida de Lebesgue, é comum omitir a referência explícita a μ e escrever

$$\int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx,$$

em vez de $\int f(x) d\mu(x)$.

II.1.16 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Tem-se então:

a) Para a função mensurável $0: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, vem

$$\int 0 d\mu(x) = 0$$

e, no caso em que $\mu(X) = 0$ (ou, o que é equivalente, $\mu = 0$), tem-se

$$\int f(x) d\mu(x) = 0,$$

para cada função mensurável $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$;

b) Se $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ são duas funções mensuráveis tais que $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$, então

$$\int f(x) d\mu(x) \leq \int g(x) d\mu(x);$$

c) Se $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável e $a \in \mathbb{R}_+$, então

$$\int a f(x) d\mu(x) = a \int f(x) d\mu(x).$$

Dem: A primeira conclusão de a) resulta de que 0 é uma função simples de integral igual a 0 e de que o integral das funções mensuráveis estende o das funções simples e a segunda resulta de que, como já referimos, no caso em

que $\mu(X) = 0$, todas as funções simples têm integral igual a 0. A conclusão de b) decorre diretamente da definição dos integrais como supremos, uma vez que, se $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$, então toda a função simples $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ que verifica $h(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, verifica também $h(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$. Reparando que, no caso em que $a = 0$, c) é uma consequência de a), provemos então c), no caso em que $a \neq 0$. Seja $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função simples tal que $h(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$. Tem-se então que $ah: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função simples tal que $ah(x) \leq af(x)$, para cada $x \in X$, de onde deduzimos que

$$\int h(x) d\mu(x) = \frac{1}{a} \int ah(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{a} \int af(x) d\mu(x),$$

o que implica, tendo em conta a definição de $\int f d\mu$ como um supremo, que

$$\int f(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{a} \int af(x) d\mu(x),$$

e portanto

$$a \int f(x) d\mu(x) \leq \int af(x) d\mu(x).$$

Para justificar a desigualdade oposta, aplicamos o que acabamos de concluir à função mensurável af e ao escalar $\frac{1}{a}$ e deduzimos que

$$\begin{aligned} \int af(x) d\mu(x) &= a \times \frac{1}{a} \times \int af(x) d\mu(x) \leq \\ &\leq a \int \frac{1}{a} af(x) d\mu(x) = a \int f(x) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

Ficou a faltar-nos a aditividade do integral das funções mensuráveis, isto é, o análogo para estas da conclusão da alínea b) de II.1.14. Apesar de essa propriedade ser válida, só a conseguiremos provar mais tarde, depois de obter resultados de aparência menos elementar (cf. II.1.20, adiante). Apresentamos em seguida um lema, sobre a integração de funções simples em subconjuntos mensuráveis do domínio, que será mais tarde generalizado para as funções mensuráveis. Esse lema vai ser um instrumento importante para a prova do primeiro resultado profundo sobre o integral, o teorema da convergência monótona.

II.1.17 (Lema) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função simples. Para cada $A \in \mathcal{M}$, podemos então considerar o espaço de medida restrição $(A, \mathcal{M}_{/A}, \mu_{/A})$ (cf. I.2.13) e são ainda simples as funções $h_{/A}: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $h \times \mathbb{1}_A: X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Fica então definida uma nova medida $\mu_{(h)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com

$$\mu_{(h)}(A) = \int h_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \int h(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x).$$

Dem: Seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois e de união X e $(a_j)_{j \in J}$ uma família de elementos de \mathbb{R}_+ , tais que, para cada $x \in X_j$, $h(x) = a_j$. Tem-se então que A é a união dos conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois, $A \cap X_j$, onde $h_{/A}$ toma o valor constante a_j e X também é a união da família dos conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois $X \setminus A$ e $A \cap X_j$, onde $h \times \mathbb{I}_A$ toma os valores constantes 0 e a_j , o que mostra que as funções $h_{/A}: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $h \times \mathbb{I}_A: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ são simples e que

$$\begin{aligned} \int h_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) &= \sum_{j \in J} a_j \mu(A \cap X_j) = \\ (1) \quad &= 0 \times \mu(X \setminus A) + \sum_{j \in J} a_j \mu(A \cap X_j) = \\ &= \int h(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Em particular, podemos definir $\mu_{(h)}(A)$ indiferentemente pelas duas igualdades no enunciado, assim como pelo segundo membro de (1). Tem-se

$$\mu_{(h)}(\emptyset) = \sum_{j \in J} a_j \mu(\emptyset \cap X_j) = 0.$$

Seja agora $(A_k)_{k \in K}$ uma família contável de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e com $A = \bigcup_{k \in K} A_k$. Tem-se então que, para cada $j \in J$, $A \cap X_j$ é a união da família contável de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois $A_k \cap X_j$ e portanto, tendo em conta a fórmula para $\mu_{(h)}(A)$ obtida acima e a propriedade de Fubini para as somas em I.1.12,

$$\begin{aligned} \mu_{(h)}(A) &= \sum_{j \in J} a_j \mu(A \cap X_j) = \sum_{j \in J} a_j \left(\sum_{k \in K} \mu(A_k \cap X_j) \right) = \\ &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} a_j \mu(A_k \cap X_j) \right) = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in J} a_j \mu(A_k \cap X_j) \right) = \\ &= \sum_{k \in K} \mu_{(h)}(A_k), \end{aligned}$$

o que mostra que $\mu_{(h)}$ é efetivamente uma medida na σ -álgebra \mathcal{M} . \square

II.1.18 (Teorema da convergência monótona) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, que é crescente, isto é, com $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para cada $x \in X$. Podemos então considerar uma função mensurável $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$, e tem-se

$$\int f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int f(x) d\mu(x).$$

Dem: Para cada $x \in X$, o facto de a sucessão dos $f_n(x)$ ser crescente implica que ela converge em $\overline{\mathbb{R}}_+$ para o supremo dos seus termos, que é, por definição $f(x)$. O facto de $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ser mensurável é uma consequência de II.1.5, ou, alternativamente, de II.1.4. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\ell_n = \int f_n(x) d\mu(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

e reparemos que, tendo em conta a alínea b) de II.1.16, tem-se $\ell_n \leq \ell_{n+1}$, para cada n , e portanto, sendo ℓ o supremo do conjunto dos ℓ_n , $\ell_n \rightarrow \ell$ em $\overline{\mathbb{R}}_+$. O que temos que provar é que se tem

$$\ell = \int f(x) d\mu(x)$$

e, nesse sentido, reparamos, desde já, que, uma vez que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, vem

$$\ell_n = \int f_n(x) d\mu(x) \leq \int f(x) d\mu(x),$$

o que, por ℓ ser o supremo dos ℓ_n , implica que

$$\ell \leq \int f(x) d\mu(x).$$

Resta-nos assim provar que se tem também

$$\int f(x) d\mu(x) \leq \ell$$

e, tendo em conta a definição do integral no primeiro membro como um supremo, bastará, para isso, provar que, sendo $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função simples arbitrária, tal que $h(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, tem-se

$$\int h(x) d\mu(x) \leq \ell.$$

Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia, isto é, que

$$(1) \quad \ell < \int h(x) d\mu(x).$$

Fixemos $0 < \rho < 1$ tal que se tenha ainda

$$(2) \quad \ell < \rho \int h(x) d\mu(x)$$

(se o segundo membro de (1) é $+\infty$, qualquer ρ serve; caso contrário, basta tomar $\ell/\int h d\mu < \rho < 1$). Para cada $n \in \mathbb{N}$, notemos

$$X_n = \{x \in X \mid \rho h(x) \leq f_n(x)\},$$

conjunto que é mensurável por II.1.3.⁴² O facto de a sucessão dos $f_n(x)$ ser crescente, para cada $x \in X$, implica que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset X_{n+1}$ e tem-se $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$, uma vez que, para cada $x \in X$, ou $h(x) = 0$, e então

$x \in X_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou $h(x) > 0$ e então $\rho h(x) < h(x) \leq f(x)$, donde, por $f(x)$ ser o supremo dos $f_n(x)$, $\rho h(x) < f_n(x)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, para o qual se tem portanto $x \in X_n$. Consideremos agora a medida $\mu_{(\rho h)}$ associada à função simples $\rho h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ (cf. II.1.17). O facto de, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, se ter $\rho h(x)\mathbb{I}_{X_n}(x) \leq f_n(x)$ (se $x \notin X_n$, o primeiro membro é 0 e, se $x \in X_n$, o primeiro membro é $\rho h(x)$) implica que

$$\mu_{(\rho h)}(X_n) = \int \rho h(x)\mathbb{I}_{X_n}(x) d\mu(x) \leq \int f_n(x) d\mu(x) = \ell_n \leq \ell$$

e portanto, tendo em conta a propriedade das medidas na alínea 5) de I.2.12,

$$\rho \int h(x) d\mu(x) = \int \rho h(x) d\mu(x) = \mu_{(\rho h)}(X) = \lim \mu_{(\rho h)}(X_n) \leq \ell,$$

o que é o absurdo procurado, por contradizer (2). □

O resultado precedente, para além de muitas outras aplicações, permite estender, em muitos casos, propriedades conhecidas para as funções simples às funções mensuráveis uma vez que, como veremos em seguida, toda a função mensurável é limite de uma sucessão crescente de funções simples.

II.1.19 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. Existe então uma sucessão crescente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Notemos

$$X_\infty = \{x \in X \mid f(x) = +\infty\},$$

que é um subconjunto mensurável de X , e, para cada $n, p \in \mathbb{N}$,

$$X_{n,p} = \{x \in X \mid \frac{p-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{p}{2^n}\},$$

que é também um subconjunto mensurável de X , e reparemos que, para cada

⁴²Este é o primeiro ponto onde intervém, de modo essencial, o facto de estarmos a considerar funções mensuráveis.

$n \in \mathbb{N}$, os conjuntos $X_{n,p}$, $p \in \mathbb{N}$, são disjuntos dois a dois e de união $X \setminus X_\infty$.

2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a função definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{p-1}{2^n}, & \text{se } x \in X_{n,p}, \\ +\infty, & \text{se } x \in X_\infty, \end{cases}$$

função que é mensurável por ter restrição constante, em particular mensurável, a cada um dos conjuntos mensuráveis X_∞ e $X_{n,p}$, $p \in \mathbb{N}$, de união X (cf. I.5.6).⁴³

3) Vamos agora verificar que, para cada $x \in X$, a sucessão $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e com $g_n(x) \rightarrow f(x)$.

Subdem: Se $x \in X_\infty$, isto é, se $f(x) = +\infty$, isso resulta de se ter $g_n(x) = +\infty$, para todo o x . Caso contrário, tem-se $f(x) < +\infty$ e a afirmação resulta de que, como veremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ e

$$(1) \quad f(x) - \frac{1}{2^n} < g_n(x) \leq f(x).$$

Ora, sendo $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_{n,p}$, vem

$$(2) \quad \frac{p-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{p}{2^n},$$

isto é,

$$g_n(x) \leq f(x) < g_n(x) + \frac{1}{2^n},$$

condições equivalentes a (1), e, por outro lado, escrevendo (2) na forma

$$\frac{2p-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2p}{2^{n+1}},$$

vemos que, ou

$$\frac{2p-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2p-1}{2^{n+1}},$$

ou

$$\frac{2p-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2p}{2^{n+1}},$$

tendo-se, no primeiro caso, $x \in X_{n+1,2p-1}$ e portanto $g_{n+1}(x) = \frac{2p-2}{2^{n+1}}$ e, no segundo caso, $x \in X_{n+1,2p}$ e portanto $g_{n+1}(x) = \frac{2p-1}{2^{n+1}}$, em ambos os casos,

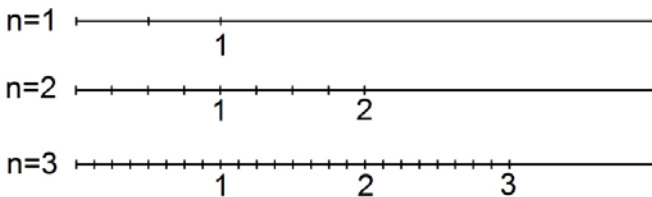
⁴³As funções g_n não serão, em geral, simples, uma vez que podem tomar o valor $+\infty$ e um número infinito de valores reais (embora discreto).

$$g_n(x) = \frac{p-1}{2^n} = \frac{2p-2}{2^{n+1}} \leq g_{n+1}(x).$$

4) Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função mensurável definida por

$$f_n(x) = \min\{g_n(x), n\}$$

(cf. II.1.4), função que é simples, por tomar apenas um número finito de valores, nomeadamente os da forma $\frac{p}{2^n}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq p \leq 2^n \times n$ (na figura a seguir, representamos, para os primeiros valores de n , os valores possíveis para $f_n(x)$).



Estas funções simples verificam, para cada $x \in X$, as condições do enunciado, nomeadamente $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Subdem: De se ter

$$\begin{aligned} f_n(x) &\leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x), \\ f_n(x) &\leq n \leq n+1, \end{aligned}$$

concluimos que

$$f_n(x) \leq \min\{g_{n+1}(x), n+1\} = f_{n+1}(x).$$

Se $x \in X_\infty$, tem-se $f(x) = +\infty$ e $g_n(x) = +\infty$, pelo que $f_n(x) = n$, o que implica que $f_n(x) \rightarrow +\infty = f(x)$. Se $x \notin X_\infty$, tem-se $f(x) < +\infty$ e, escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq f(x)$, tem-se, para cada $n \geq n_0$, $g_n(x) \leq f(x) \leq n$, donde

$$f_n(x) = \min\{g_n(x), n\} = g_n(x),$$

pelo que, por ser $g_n(x) \rightarrow f(x)$, tem-se também $f_n(x) \rightarrow f(x)$. □

II.1.20 (**Aditividade**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis. Tem-se então

$$\int f(x) + g(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x).$$

Dem: Tendo em conta II.1.19, podemos considerar duas sucessões crescentes de funções simples $f_n, g_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tais que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Ficamos então com uma sucessão crescente de funções simples $f_n + g_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, para a qual se tem, para cada $x \in X$,

$f_n(x) + g_n(x) \rightarrow f(x) + g(x)$. Tendo em conta o teorema da convergência monótona (II.1.18) e a conclusão da alínea b) de II.1.14, concluímos então que

$$\int f_n(x) + g_n(x) d\mu(x) = \int f_n(x) d\mu(x) + \int g_n(x) d\mu(x)$$

tem, por um lado, limite $\int f(x) + g(x) d\mu(x)$ e, por outro lado, limite $\int f(x) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x)$, o que implica que

$$\int f(x) + g(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x). \quad \square$$

II.1.21 (Aditividade contável) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(f_j)_{j \in J}$ uma família contável de funções mensuráveis $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. É então mensurável a função $\sum_{j \in J} f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $(\sum_{j \in J} f_j)(x) = \sum_{j \in J} f_j(x)$, e tem-se

$$\int \sum_{j \in J} f_j(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int f_j(x) d\mu(x).$$

Dem: O caso em que o conjunto J é finito resulta de II.1.20, por indução no número de elementos de J , tendo em conta o facto de o integral da função identicamente 0 ser igual a 0. Para provarmos o caso numerável, basta, por uma mudança do conjunto de índices, examinar o caso em que $J = \mathbb{N}$. Ora, nesse caso, sabemos, por I.1.8, que se tem $(\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j)(x) = \lim S_n(x)$, onde

$S_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)$, e portanto os $S_n(x)$ constituem uma sucessão crescente.

Uma vez que, pelo caso finito, os $S_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ são funções mensuráveis, com

$$\int S_n(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n \int f_j(x) d\mu(x),$$

deduzimos do teorema da convergência monótona II.1.18, tendo mais uma vez em conta I.1.8, que

$$\begin{aligned} \int \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(x) d\mu(x) &= \lim \int S_n(x) d\mu(x) = \lim \sum_{j=1}^n \int f_j(x) d\mu(x) = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \int f_j(x) d\mu(x). \end{aligned} \quad \square$$

II.1.22 (Medida definida por uma função mensurável). Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. Para cada $A \in \mathcal{M}$, podemos então considerar o espaço de medida restrição $(A, \mathcal{M}_{/A}, \mu_{/A})$ (cf.

I.2.13) e fica definida uma nova medida $\mu_{(f)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com

$$\mu_{(f)}(A) = \int f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \int f(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x),$$

a que damos o nome de *medida associada à função mensurável* f .

Tem-se, além disso, $\mu_{(f)}(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) = 0$.

Dem: Lembremos que a conclusão é já conhecida no caso em que f é uma função simples (cf. o lema II.1.17). Supondo agora que $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável, podemos considerar, por II.1.19, uma sucessão crescente de funções simples $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$. Para cada $A \in \mathcal{M}$, temos então sucessões crescentes de funções simples $f_n \times \mathbb{I}_A: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $f_{n/A}: A \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $f_n(x)\mathbb{I}_A(x) \rightarrow f(x)\mathbb{I}_A(x)$, para cada $x \in X$ e $f_{n/A}(x) \rightarrow f_{/A}(x)$, para cada $x \in A$, e portanto, tendo em conta o caso já conhecido e o teorema da convergência monótona,

$$\begin{aligned} \int f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) &= \lim \int f_{n/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \\ &= \lim \int f_n(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x) = \int f(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Podemos agora definir uma aplicação $\mu_{(f)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ por qualquer das duas caracterizações no enunciado e, utilizando a segunda, vemos que $\mu_{(f)}(\emptyset) = \int 0 d\mu(x) = 0$ e que, se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois, com $A = \bigcup_{j \in J} A_j$, o facto de se ter

$\mathbb{I}_A(x) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j}(x)$, para cada $x \in X$, implica, por II.1.21, que

$$\begin{aligned} \mu_{(f)}(A) &= \int f(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int f(x)\mathbb{I}_{A_j}(x) d\mu(x) = \\ &= \sum_{j \in J} \mu_{(f)}(A_j), \end{aligned}$$

o que mostra que temos efetivamente uma medida $\mu_{(f)}$ na σ -álgebra \mathcal{M} . O facto de se ter $\mu_{(f)}(A) = 0$, sempre que $\mu(A) = 0$, é uma consequência da primeira caracterização de $\mu_{(f)}(A)$, tendo em conta o referido na alínea a) de II.1.16. \square

II.1.23 (**Nota**) Em geral, sempre que (X, \mathcal{M}, μ) é um espaço de medida e $A \in \mathcal{M}$, usa-se a notação

$$\int_A f(x) d\mu(x)$$

para significar $\int f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x)$, sempre que f é uma função definida numa parte de X contendo A , cuja restrição a A seja mensurável. No caso em que

$X = \mathbb{R}$ e μ é a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} , escreve-se também simplesmente

$$\int_A f(x) dx.$$

Com esta notação, a primeira caracterização de $\mu_{(f)}(A)$ em II.1.22 pode também ser escrita na forma

$$\mu_{(f)}(A) = \int_A f(x) d\mu(x).$$

II.1.24 (Corolário) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável e $Y \subset X$ um conjunto mensurável, com $\mu(Y) = 0$. Tem-se então

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X \setminus Y} f(x) d\mu(x).$$

Dem: Uma vez que se tem também $\mu_{(f)}(Y) = 0$, vem

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu(x) &= \mu_{(f)}(X) = \mu_{(f)}(X \setminus Y) + \mu_{(f)}(Y) = \\ &= \int_{X \setminus Y} f(x) d\mu(x). \end{aligned} \quad \square$$

O corolário anterior é um primeiro exemplo do papel especial que os conjuntos de medida nula jogam no contexto do integral das funções mensuráveis com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$. Outros exemplos vão aparecer como corolário do resultado que enunciamos a seguir e que, só aparentemente, constitui uma trivialidade sem interesse.

II.1.25 (Complemento da alínea c) de II.1.16) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. Tem-se então

$$\int (+\infty) \times f(x) d\mu(x) = (+\infty) \times \int f(x) d\mu(x).$$

Dem: Começamos por reparar que, para cada $x \in X$, a sucessão $(nf(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ é crescente e tem limite $(+\infty) \times f(x)$.⁴⁴ Podemos então

⁴⁴Isto, apesar de a multiplicação, como aplicação $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, não ser contínua em todos os pontos. A validade desta conclusão, no caso em que $f(x) = 0$, é consequência da convenção, que estamos a fazer desde o início, $(+\infty) \times 0 = 0$.

aplicar o teorema da convergência monótona, II.1.18, para obter

$$\begin{aligned} \int (+\infty) \times f(x) d\mu(x) &= \lim \int n f(x) d\mu(x) = \lim n \int f(x) d\mu(x) = \\ &= (+\infty) \times \int f(x) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

II.1.26 (**Corolário**) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) \neq 0$. Tem-se então

$$\int_X +\infty d\mu(x) = +\infty. \quad 45$$

Dem: Uma vez que a função constante 1 é simples e com

$$\int_X 1 d\mu(x) = \mu(X) > 0,$$

deduzimos que

$$\int_X +\infty d\mu(x) = \int_X (+\infty) \times 1 d\mu(x) = (+\infty) \times \mu(X) = +\infty. \quad \square$$

II.1.27 (**Corolário**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) \neq 0$ e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma aplicação mensurável tal que $f(x) > 0$, para cada $x \in X$. Tem-se então

$$\int_X f(x) d\mu(x) > 0.$$

Dem: Uma vez que $(+\infty) \times f(x) = +\infty$, para cada $x \in X$, podemos ter em conta o corolário precedente para deduzir que

$$\begin{aligned} (+\infty) \times \int f(x) d\mu(x) &= \int (+\infty) \times f(x) d\mu(x) = \\ &= \int_X +\infty d\mu(x) = +\infty, \end{aligned}$$

portanto $\int f(x) d\mu(x) > 0$. □

II.1.28 Em geral, no contexto de um espaço de medida (X, \mathcal{M}, μ) , diz-se que uma propriedade relativa aos pontos $x \in X$ é *verdadeira quase sempre* (ou *verdadeira em quase todos os pontos* de X)⁴⁶ se existir $Y \in \mathcal{M}$, com

⁴⁵É claro que, se $\mu(X) = 0$, o integral referido é 0 (cf. a alínea a) de II.1.16).

⁴⁶Em inglês e francês usa-se, respetivamente, “*almost everywhere*” e “*presque partout*”, com as abreviaturas “*a. e.*” e “*p. p.*”. É frequente utilizar-se em português a expressão “*verdadeira em quase toda a parte*”, abreviadamente “*verdadeira q. t. p.*” mas essa expressão parece-nos ser demasiado longa.

$\mu(Y) = 0$, tal que a propriedade seja verdadeira para cada $x \in X \setminus Y$.

É claro que, se uma propriedade é verdadeira para todo o $x \in X$, então ela é também verdadeira quase sempre, visto que se pode considerar para Y o conjunto vazio \emptyset . É também claro que, se uma propriedade é verdadeira quase sempre e for falsa para todo o x num certo conjunto mensurável Y' , então $\mu(Y') = 0$ (relativamente à caracterização na definição, tem que ser $Y' \subset Y$). Em particular, se o conjunto Y' dos pontos em que a propriedade é falsa for mensurável, a propriedade é verdadeira quase sempre se, e só se, $\mu(Y') = 0$.

Um facto importante, que será aplicado muitas vezes, é que, se duas propriedades são verdadeiras quase sempre, então a sua conjunção é também verdadeira quase sempre, uma vez que, sendo $Y, Y' \in \mathcal{M}$, com $\mu(Y) = 0$ e $\mu(Y') = 0$ tais que a primeira propriedade seja verdadeira para cada $x \in X \setminus Y$ e a segunda seja verdadeira para cada $x \in X \setminus Y'$, então $Y \cup Y' \in \mathcal{M}$ verifica ainda $\mu(Y \cup Y') = 0$ e as duas propriedades são simultaneamente verdadeiras para cada $x \in X \setminus (Y \cup Y')$.

II.1.29 (Corolário) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável tal que

$$\int f(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Tem-se então $f(x) < +\infty$ quase sempre, isto é, existe $Y \in \mathcal{M}$, com $\mu(Y) = 0$, tal que $f(x) < +\infty$, para cada $x \in X \setminus Y$.⁴⁷

Dem: Sendo $Y \in \mathcal{M}$ o conjunto dos $x \in X$ tais que $f(x) = +\infty$, tem-se

$$\int_Y (+\infty) d\mu(x) = \mu_{(f)}(Y) \leq \mu_f(X) = \int_X f(x) d\mu(x) < +\infty,$$

donde, pelo corolário II.1.26, $\mu(Y) = 0$. □

II.1.30 (Corolário) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. Tem-se então

$$\int f(x) d\mu(x) = 0$$

se, e só se, $f(x) = 0$ quase sempre, isto é, se, e só se, existe $Y \in \mathcal{M}$, com $\mu(Y) = 0$, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in X \setminus Y$.

Dem: Suponhamos que existe $Y \in \mathcal{M}$, com $\mu(Y) = 0$, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in X \setminus Y$. Tendo em conta a alínea a) de II.1.16 e II.1.24, vem então

⁴⁷Pelo contrário, de se ter $f(x) < +\infty$ quase sempre, não se pode deduzir que $\int f d\mu$ seja finito; basta pensar, por exemplo, numa função de valor constante 1 num espaço de medida $+\infty$.

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X \setminus Y} f(x) d\mu(x) = 0.$$

Suponhamos, reciprocamente, que $\int f(x) d\mu(x) = 0$ e seja $Y \in \mathcal{M}$ o conjunto dos $x \in X$ tais que $f(x) > 0$. Tem-se então

$$\int_Y f(x) d\mu(x) = \mu_f(Y) \leq \mu_{(f)}(X) = \int_X f(x) d\mu(x) = 0$$

e portanto, tendo em conta o corolário II.1.27, tem que ser $\mu(Y) = 0$. \square

II.1.31 (Corolário) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis tais que $f(x) \leq g(x)$ quase sempre. Então

$$\int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X g(x) d\mu(x).$$

Em particular, se $f(x) = g(x)$ quase sempre, então

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x).^{48}$$

Dem: Tendo em conta II.1.24, sendo $Y \in \mathcal{M}$ com $\mu(Y) = 0$ tal que, para cada $x \in X \setminus Y$, $f(x) \leq g(x)$, vem

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu(x) &= \int_{X \setminus Y} f(x) d\mu(x) \leq \int_{X \setminus Y} g(x) d\mu(x) = \\ &= \int_X g(x) d\mu(x). \end{aligned} \quad \square$$

O resultado que examinamos em seguida, identifica as somas de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$ como integrais para a medida de contagem, e é utilizado com frequência para aplicar às somas resultados estudados para os integrais.

II.1.32 (O integral para a medida de contagem) Sejam X um conjunto e consideremos a σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$ de todas as partes de X e a medida de contagem $\nu: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (cf. I.2.15). Para cada função $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se então que f é mensurável e

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \sum_{x \in X} f(x).$$

⁴⁸Pelo contrário, do facto de duas funções mensuráveis terem o mesmo integral não se pode inferir que elas tenham que ser iguais quase sempre. Ver, no entanto, o exercício II.1.15, no fim do capítulo.

Em particular, lembrando I.1.15, se $\int_X f(x) d\nu(x) < +\infty$, então existe um conjunto contável $Y \subset X$ tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in X \setminus Y$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) O facto de f ser mensurável é uma consequência direta do facto de a σ -álgebra considerada ser a de todas as partes de X .

2) Vamos mostrar que a igualdade do enunciado é verdadeira, no caso em que $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função simples.

Subdem: Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família finita de subconjuntos de X , disjuntos dois a dois e de união X tal que $f(x)$ tome o valor constante a_i para $x \in X_i$. Tem-se então, lembrando a propriedade associativa das somas,

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\nu(x) &= \sum_{i \in I} a_i \nu(X_i) = \sum_{i \in I} a_i \left(\sum_{x \in X_i} 1 \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{x \in X_i} a_i \times 1 \right) = \\ &= \sum_{i \in I} \left(\sum_{x \in X_i} f(x) \right) = \sum_{x \in X} f(x). \end{aligned}$$

3) Vamos mostrar que

$$\sum_{x \in X} f(x) \leq \int_X f(x) d\nu(x).$$

Subdem: Começemos por notar que, se existe $x \in X$ tal que $f(x) = +\infty$, a desigualdade é verdadeira, por o segundo membro ser $+\infty$ (cf. II.1.29, tendo em conta o facto de, para a medida de contagem, $\nu(A) = 0$ implicar que $A = \emptyset$ ⁴⁹). Suponhamos então que $f(x) < +\infty$, para todo o $x \in X$.

Seja $A \subset X$ um subconjunto finito arbitrário. Tem-se então que a função $f \times \mathbb{I}_A$ é uma função simples, com uma partição adaptada constituída pelos conjuntos unitários $\{x\}$, com $x \in A$, onde ela toma o valor $f(x)$, e pelo conjunto $X \setminus A$, onde ela toma o valor 0. Uma vez que $f(x)\mathbb{I}_A(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, vem então

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} f(x) &= 0 \times \nu(X \setminus A) + \sum_{x \in A} f(x)\nu(\{x\}) = \\ &= \int_X f(x)\mathbb{I}_A(x) d\nu(x) \leq \int_X f(x) d\nu(x). \end{aligned}$$

Tendo em conta a definição de $\sum_{x \in X} f(x)$ como supremo de todas as somas parciais finitas, concluímos assim a desigualdade enunciada.

4) Vamos verificar, enfim, a desigualdade oposta

$$\int_X f(x) d\nu(x) \leq \sum_{x \in X} f(x),$$

⁴⁹Portanto, o que acontece quase sempre, acontece, de facto, sempre.

o que terminará a demonstração.

Subdem: Seja $g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função simples arbitrária, com $g(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$. Tendo em conta o que vimos em 2), tem-se então

$$\int_X g(x) d\nu(x) = \sum_{x \in X} g(x) \leq \sum_{x \in X} f(x),$$

o que, tendo em conta a definição do integral de uma função mensurável como supremo de integrais de funções simples, implica a desigualdade enunciada. \square

Vamos estudar agora outro resultado importante, que envolve o integral de um limite de funções mensuráveis, o teorema da convergência dominada, começando por uma versão do chamado Lema de Fatou que, apesar de menos geral que a habitual, não faz apelo à noção de limite inferior de uma sucessão em \mathbb{R}_+ e é suficiente para as aplicações que faremos.

II.1.33 (Lema de Fatou) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$.⁵⁰ Tem-se então, para a função mensurável $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ assim definida, que, qualquer que seja

$$\ell < \int f(x) d\mu(x),$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq n_0$,

$$\ell < \int f_n(x) d\mu(x).^{51}$$

Dem: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a função mensurável definida por

$$g_n(x) = \inf_{p \geq n} f_p(x)$$

(cf. II.1.4) e lembremos que, como se referiu em II.1.5, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável e $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$. Uma vez que, para cada $x \in X$, a sucessão

dos $g_n(x)$ é evidentemente crescente, tem-se também $g_n(x) \rightarrow f(x)$ donde,

⁵⁰Comparando com o teorema da convergência monótona, reparar que aqui não exigimos que a sucessão seja crescente mas, em compensação, a conclusão é mais fraca.

⁵¹Na versão mais forte do Lema de Fatou, não se exige que a sucessão dos $f_n(x)$ tenha limite, e toma-se para $f(x)$ o sublimite mínimo $\liminf f_n(x)$. A conclusão costuma então ser enunciada na forma equivalente

$$\int \liminf f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf \int f_n(x) d\mu(x).$$

pelo teorema da convergência monótona,

$$\int g_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int f(x) d\mu(x).$$

Seendo $\ell < \int f(x) d\mu(x)$ arbitrário, existe assim n_0 tal que, para cada $n \geq n_0$, $\ell < \int g_n(x) d\mu(x)$ e então o facto de se ter, para cada x , $g_n(x) \leq f_n(x)$, portanto $\int g_n(x) d\mu(x) \leq \int f_n(x) d\mu(x)$ implica que se tem também $\ell < \int f_n(x) d\mu(x)$. \square

II.1.34 (Teorema da convergência dominada) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$ e que exista uma aplicação mensurável $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com

$$\int_X g(x) d\mu(x) < +\infty$$

e $f_n(x) \leq g(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$.⁵² Tem-se então, para a função mensurável $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ assim definida,

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x).$$

Dem: Começemos por notar que, de se ter $f_n(x) \rightarrow f(x)$, com $f_n(x) \leq g(x)$, concluímos que se tem também $f(x) \leq g(x)$.

Vamos começar por demonstrar o resultado com a hipótese suplementar de se ter $g(x) < +\infty$, para todo o $x \in X$. A função g , e portanto também as funções f_n e f tomam assim valores em \mathbb{R}_+ . Tendo em conta a alínea b) de II.1.1, podemos considerar as funções mensuráveis $g - f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $g - f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, para as quais se tem $g(x) - f_n(x) \rightarrow g(x) - f(x)$, para cada $x \in X$. De se ter, para cada $x \in X$, $g(x) = (g(x) - f(x)) + f(x)$ e $g(x) = (g(x) - f_n(x)) + f_n(x)$, deduzimos que

$$(1) \quad \begin{aligned} \int_X g(x) d\mu(x) &= \int_X g(x) - f(x) d\mu(x) + \int_X f(x) d\mu(x), \\ \int_X g(x) d\mu(x) &= \int_X g(x) - f_n(x) d\mu(x) + \int_X f_n(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

em particular os integrais que aparecem nos segundos membros também são finitos. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Aplicando o lema de Fatou, II.1.33, às sucessões de funções mensuráveis $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $g(x) - f_n(x) \rightarrow g(x) - f(x)$,

⁵²Pensamos na função g como estando a dominar as funções f_n . Repare-se que, comparando com o teorema da convergência monótona (II.1.18), cuja conclusão é análoga, deixámos de pedir que a sucessão dos f_n seja crescente mas, para o compensar, tivemos que exigir a condição de dominação, que, aliás, não é necessariamente verificada no caso da convergência monótona.

e escolhendo já a maior das duas ordens envolvidas, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\int f_n d\mu &> \left(\int f d\mu\right) - \delta, \\ \int g - f_n d\mu &> \left(\int g - f d\mu\right) - \delta,\end{aligned}$$

em que a segunda desigualdade, tendo em conta (1) pode ser escrita nas formas equivalentes

$$\begin{aligned}\left(\int g d\mu\right) - \left(\int f_n d\mu\right) &> \left(\int g d\mu\right) - \left(\int f d\mu\right) - \delta, \\ \left(\int f_n d\mu\right) &< \left(\int f d\mu\right) + \delta.\end{aligned}$$

Concluimos assim que, para cada $n \geq n_0$,

$$\left(\int f d\mu\right) - \delta < \left(\int f_n d\mu\right) < \left(\int f d\mu\right) + \delta,$$

o que mostra que se tem efetivamente $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Abandonemos agora a hipótese suplementar de se ter $g(x) < +\infty$, para cada $x \in X$. Reparemos que, pelo corolário II.1.29, existe $Y \in \mathcal{M}$, com $\mu(Y) = 0$, tal que $g(x) < +\infty$, para cada $x \in X \setminus Y$, pelo que, por ser ainda

$$\int_{X \setminus Y} g(y) d\mu(y) = \mu_{(g)}(X \setminus Y) \leq \mu_{(g)}(X) = \int_X g(x) d\mu(x) < +\infty,$$

podemos aplicar o caso já estudado às restrições de f e dos f_n a $X \setminus Y$ para concluir, tendo em conta II.1.24, que

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_{X \setminus Y} f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_{X \setminus Y} f(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x),$$

que é a conclusão pretendida. \square

Vamos agora examinar alguns resultados que estudam o comportamento do integral quando se altera a medida considerada.

II.1.35 (O integral para a medida $\mu_{(f)}$) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável e consideremos a correspondente medida $\mu_{(f)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida em II.1.22. Para cada aplicação mensurável $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se então

$$\int g(x) d\mu_{(f)}(x) = \int g(x) f(x) d\mu(x).$$

Dem: No caso em que g é a função indicatriz \mathbb{I}_A de um conjunto $A \in \mathcal{M}$, a igualdade do enunciado reduz-se à definição de $\mu_{(f)}$:

$$\int \mathbb{I}_A(x) d\mu_{(f)}(x) = \mu_{(f)}(A) = \int \mathbb{I}_A(x) f(x) d\mu(x).$$

Suponhamos agora que $g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função simples e seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que, para cada $x \in X_j$, $g(x) = a_j \in \mathbb{R}_+$. Tem-se então, para cada $x \in X$, $g(x) = \sum_{j \in J} a_j \mathbb{I}_{X_j}(x)$, donde, tendo em conta II.1.21 e a alínea c) de

II.1.16,

$$\begin{aligned} \int g(x) d\mu_{(f)}(x) &= \sum_{j \in J} a_j \int \mathbb{I}_{X_j}(x) d\mu_{(f)}(x) = \\ &= \sum_{j \in J} a_j \int \mathbb{I}_{X_j}(x) f(x) d\mu(x) = \\ &= \int \sum_{j \in J} a_j \mathbb{I}_{X_j}(x) f(x) d\mu(x) = \int g(x) f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Suponhamos enfim que $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável arbitrária. Podemos então considerar uma sucessão crescente de funções simples $g_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que, para cada $x \in X$, $g_n(x) \rightarrow g(x)$, e portanto $g(x)$ é o supremo dos $g_n(x)$. As funções mensuráveis $g_n(x)f(x)$ constituem uma sucessão crescente de funções com $g_n(x)f(x) \rightarrow g(x)f(x)$, visto que, tanto no caso em que $f(x) = 0$ como naquele em que $g(x) = 0$, tem-se também $g_n(x)f(x) = 0$, para todo o n . Podemos então aplicar o teorema da convergência monótona e o caso particular, já estudado, das funções simples, para deduzir que

$$\begin{aligned} \int g(x) d\mu_{(f)}(x) &= \lim \int g_n(x) d\mu_{(f)}(x) = \lim \int g_n(x) f(x) d\mu(x) = \\ &= \int g(x) f(x) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

II.1.36 (Monotonia relativamente à medida) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\mu, \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas tais que, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) \leq \mu'(A)$. Para cada aplicação mensurável $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se então

$$\int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X f(x) d\mu'(x).$$

Dem: Começemos por examinar o caso em que f é uma função simples e seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que em cada X_i a função f tome o valor constante a_i . Tem-se então

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{i \in I} a_i \mu(X_i) \leq \sum_{i \in I} a_i \mu'(X_i) = \int_X f(x) d\mu'(x).$$

No caso geral em que $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável, podemos aplicar diretamente a definição do integral como um supremo: Para cada função simples $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) \leq f(x)$, para todo o $x \in X$, tem-se

$$\int_X h(x) d\mu(x) \leq \int_X h(x) d\mu'(x) \leq \int_X f(x) d\mu'(x)$$

e daqui decorre a desigualdade do enunciado. \square

II.1.37 (Soma de medidas e produto por uma constante) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, $\mu, \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas e $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$, e consideremos as medidas $\mu + \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $a\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (cf. I.2.16). Para cada função mensurável $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se então

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d(\mu + \mu')(x) &= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X f(x) d\mu'(x); \\ \int_X f(x) d(a\mu)(x) &= a \int_X f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Dem: Começemos por examinar o caso em que f é uma função simples e seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que em cada X_i a função f tome o valor constante a_i . Tem-se então

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d(\mu + \mu')(x) &= \sum_{i \in I} a_i (\mu(X_i) + \mu'(X_i)) = \\ &= \sum_{i \in I} a_i \mu(X_i) + \sum_{i \in I} a_i \mu'(X_i) = \\ &= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X f(x) d\mu'(x) \end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d(a\mu)(x) &= \sum_{i \in I} a_i a \mu(X_i) = a \sum_{i \in I} a_i \mu(X_i) = \\ &= a \int_X f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Passemos agora ao caso geral em que $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável. Consideramos então uma sucessão crescente de funções simples $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ com $f_n(x) \rightarrow f(x)$, e portanto com $f(x)$ igual ao supremo dos $f_n(x)$, para cada $x \in X$ (cf. II.1.19) e aplicamos o teorema da convergência monótona (II.1.18) para concluir que

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) d(\mu + \mu')(x) &= \lim \int_X f_n(x) d(\mu + \mu')(x) = \\
&= \lim \left(\int_X f_n(x) d\mu(x) + \int_X f_n(x) d\mu'(x) \right) = \\
&= \lim \int_X f_n(x) d\mu(x) + \lim \int_X f_n(x) d\mu'(x) = \\
&= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X f(x) d\mu'(x)
\end{aligned}$$

e, do mesmo modo, reparando que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, donde $\int f_n d\mu = 0$, no caso em que $\int f d\mu = 0$,

$$\begin{aligned}
\int_X f(x) d(a\mu)(x) &= \lim \int_X f_n(x) d(a\mu)(x) = \lim a \int_X f_n(x) d\mu(x) = \\
&= a \lim \int_X f_n(x) d\mu(x) = a \int_X f(x) d\mu(x)
\end{aligned}$$

(no caso em que $a = 0$ ou $\int f d\mu = 0$, tem-se $a \int f_n d\mu = 0$, para cada n). \square

II.1.38 (Teorema trivial da mudança de variáveis) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida e $\varphi: X \rightarrow Y$ uma aplicação mensurável compatível com as medidas, isto é, com $\mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu'(B)$, para cada $B \in \mathcal{N}$ (cf. I.5.11). Para cada aplicação mensurável $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se então, para a aplicação mensurável $f \circ \varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_Y f(y) d\mu'(y) = \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Dem: Começemos por examinar o caso em que a função f é simples. Seja então $(Y_i)_{i \in I}$ uma família finita de subconjuntos mensuráveis de Y , disjuntos dois a dois e de união Y , tais que, para cada $y \in Y_i$, $f(y)$ tenha um valor constante $a_i \in \mathbb{R}_+$. Tem-se então que os conjuntos $\varphi^{-1}(Y_i) \in \mathcal{M}$ são disjuntos dois a dois e de união X e a aplicação $f \circ \varphi$ toma o valor constante a_i em $\varphi^{-1}(Y_i)$ pelo que $f \circ \varphi$ também é uma função simples e, por definição,

$$\int_Y f(y) d\mu'(y) = \sum_{i \in I} a_i \mu'(Y_i) = \sum_{i \in I} a_i \mu(\varphi^{-1}(Y_i)) = \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Passemos agora ao caso geral, em que $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável. Podemos então considerar uma sucessão crescente de funções simples $f_n: Y \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $f_n(y) \rightarrow f(y)$, para cada $y \in Y$, e, uma vez que os $f_n \circ \varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ constituem também uma sucessão crescente de funções simples, com $f_n(\varphi(x)) \rightarrow f(\varphi(x))$, para cada $x \in X$, obtemos, pelo teorema da

convergência monótona,

$$\begin{aligned} \int_Y f(y) d\mu'(y) &= \lim \int_Y f_n(y) d\mu'(y) = \lim \int_X f_n(\varphi(x)) d\mu(x) = \\ &= \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x). \end{aligned} \quad \square$$

Exercícios

Ex II.1.1 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de aplicações mensuráveis $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Verificar que são mensuráveis os seguintes subconjuntos de X :

- a) O conjunto dos $x \in X$ tais que os termos da sucessão $f_n(x)$ constituam uma parte limitada de \mathbb{R}_+ .
- b) O conjunto dos $x \in X$ tais que a sucessão dos $f_n(x)$ seja crescente.
- c) O conjunto dos $x \in X$ tais que $f_n(x) \rightarrow +\infty$.
- d) Dado $a \in \mathbb{R}_+$, o conjunto dos $x \in X$ tais que $f_n(x) \rightarrow a$.
- e) O conjunto dos $x \in X$ tais que a sucessão dos $f_n(x)$ convirja para algum $a \in \mathbb{R}_+$. **Sugestão:** Caracterizar esses pontos x por uma condição do tipo Cauchy que utiliza a aplicação \bar{d} no exercício I.5.11.

Ex II.1.2 Apresentar uma demonstração alternativa de II.1.5, que não passe pela consideração de supremos ou ínfimos de funções mensuráveis, embora utilize as caracterizações no lema II.1.2. Nomeadamente, mostrar que, se (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$, então a função $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ assim definida é também mensurável. **Sugestão:** Dado $a \in \mathbb{R}_+$, mostrar que se tem $f(x) > a$ se, e só se, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$, $f_n(x) > a + \frac{1}{p}$.

Ex II.1.3 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis tais que, para cada $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$. Mostrar que existe uma função mensurável $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (não necessariamente única) tal que, para cada $x \in X$, $g(x) = f(x) + h(x)$. Mostrar ainda que, se assim o desejarmos, podemos construir h de modo que, para cada $x \in X$, $h(x) = 0$ se, e só se, $f(x) = g(x)$.

Ex II.1.4 Sejam X um conjunto e $x_0 \in X$ um elemento fixado e consideremos na σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$ de todas as partes de X a medida de Dirac μ_{x_0} (cf. I.2.15). Para cada função $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, automaticamente mensurável,

caracterizar o integral

$$\int_X f(x) d\mu_{x_0}(x).$$

Ex II.1.5 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida. Lembrar que, como se verificou na alínea 6) de I.2.12, dados conjuntos A, B em \mathcal{M} , tem-se

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

a) Obter uma nova justificação da fórmula referida, lembrando que a medida de um conjunto concide com o integral da respetiva função indicatriz, reparando na caracterização trivial da função indicatriz de uma intersecção de dois conjuntos e deduzindo desta, pelas leis de de Morgan, uma caracterização da função característica da união de dois conjuntos.

b) Utilizar a mesma ideia que em a) para mostrar que, dados três conjuntos A_1, A_2, A_3 em \mathcal{M} , tem-se

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + \mu(A_2 \cap A_3) + \mu(A_1 \cap A_3) + \mu(A_1 \cap A_2) = \\ = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

c) Enunciar e justificar uma fórmula no mesmo espírito que a de b), para a medida $\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ da união de quatro conjuntos de \mathcal{M} e explicitar, mais geralmente, uma fórmula para a união de k conjuntos mensuráveis.⁵³

Ex II.1.6 Seja X um conjunto e notemos ν a medida de contagem, definida na σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$ de todas as partes de X (cf. I.2.15). Seja $\alpha: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma aplicação arbitrária e notemos μ a medida, definida na σ -álgebra $\mathcal{P}(X)$, associada à família $(\alpha(x))_{x \in X}$ (cf. I.2.14). Utilizar II.1.32 para mostrar que a medida μ coincide com a medida $\nu_{(\alpha)}$, associada à medida ν e à função mensurável $\alpha: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (cf. II.1.22). Concluir daqui que, para cada aplicação $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{x \in X} \alpha(x) f(x)$$

e reparar que a conclusão do exercício II.1.4 é uma consequência direta desta conclusão.

Ex II.1.7 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Sejam $(X_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} , disjuntos dois a dois e de união X e $(a_j)_{j \in J}$ uma família de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Sendo $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a aplicação definida por $f(x) = a_j$, se $x \in X_j$, verificar que f é mensurável e que

⁵³Estas fórmulas, pelo menos no caso em que μ é a medida de contagem, são atribuídas ao matemático português Daniel da Silva (1814–1878).

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} a_j \mu(X_j)$$

(reparar que esta conclusão é uma generalização da definição do integral das funções simples).

Ex II.1.8 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de partes mensuráveis de X . Seja $A \subset X$ um subconjunto.

a) Verificar que $A_n \rightarrow A$ (cf. o exercício I.2.5) se, e só se, para cada $x \in X$, $\mathbb{I}_{A_n}(x) \rightarrow \mathbb{I}_A(x)$, e reobter, a partir daqui, a conclusão da alínea c) do exercício I.2.5.

b) Supondo que $A_n \rightarrow A$ e que existe um conjunto $B \in \mathcal{M}$, com $\mu(B) < +\infty$ e $A_n \subset B$, para cada $n \in \mathbb{N}$, mostrar que $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Ex II.1.9 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida finita, isto é, com $\mu(X) < +\infty$. Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função mensurável majorada, mostrar que

$$\int_X f(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Ex II.1.10 **a)** Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com μ σ -finita (cf. I.4.9) e seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação mensurável. Mostrar que a correspondente medida $\mu_{(f)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (cf. II.1.22) também é σ -finita.

Sugestão: Sendo $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de conjuntos mensuráveis de união X , com $\mu(X_n) < +\infty$, considerar, para cada $p \in \mathbb{N}$, os conjuntos $X_{n,p} = \{x \in X_n \mid f(x) \leq p\}$.

b) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com μ σ -finita. Mostrar que existe uma função mensurável $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ com $\int f d\mu < +\infty$.

Sugestão: Verificar que X é união de uma sucessão de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\mu(X_n) < +\infty$ e tomar para f uma função com um valor constante conveniente em cada X_n .

c) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida tal que exista uma aplicação mensurável $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ com $\int f d\mu < +\infty$. Mostrar que μ é σ -finita.

Sugestão: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerar o conjunto X_n dos pontos $x \in X$ tais que $f(x) \geq \frac{1}{n}$.

Ex II.1.11 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas funções mensuráveis tais que

$$\int_X f(x) d\mu(x) < +\infty, \quad \int_X g(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Sendo $h: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a função definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, mostrar

que h é mensurável e com

$$\int_X h(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Ex II.1.12 Considerando nos borelianos de \mathbb{R} a medida de Lebesgue, mostrar que, para cada função mensurável $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim \int_{[-n, n]} f(x) dx.$$

Ex II.1.13 Seja $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma família de elementos de \mathbb{R}_+ . Mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Ex II.1.14 Considerando nos borelianos de \mathbb{R} a medida de Lebesgue, mostrar que, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0,$$

então tem-se $f(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Ex II.1.15 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis tais que, para cada $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$ e que

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Mostrar que se tem $f(x) = g(x)$ quase sempre. Mostrar ainda que a hipótese de o integral ser diferente de $+\infty$ é essencial para a conclusão.

Sugestão: Utilizar a conclusão do exercício II.1.3.

Ex II.1.16 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(A_j)_{j \in J}$ uma família numerável de conjuntos mensuráveis tais $\sum_{j \in J} \mu(A_j) < +\infty$. Seja $A \subset X$ o

conjunto dos $x \in X$ tais que $x \in A_j$, para um número infinito de valores de j . Mostrar que A é um conjunto mensurável e que $\mu(A) = 0$.

Sugestão: Considerar a função $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por

$$f(x) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j}(x).$$

Ex II.1.17 Considerando nos borelianos de \mathbb{R} a medida de Lebesgue, mostrar que

$$\lim \int_{[0,1]} \frac{2n^2 + \cos(n)n}{n^2 + x^5} dx = 2.$$

Ex II.1.18 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$ e $f: X \rightarrow [0, 1]$ uma função mensurável. Mostrar que, sendo A o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $f(x) = 1$, tem-se

$$\lim \int_X f(x)^n d\mu(x) = \mu(A).$$

Ex II.1.19 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável tal que

$$\int_X f(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Mostrar que, para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $A \in \mathcal{M}$ verifica $\mu(A) < \varepsilon$, tem-se

$$\int_A f(x) d\mu(x) < \delta.$$

Dois sugestões alternativas: **1)** Aplicar a conclusão do exercício I.2.6 às medidas μ e $\mu_{(f)}$. **2)** Sendo $X_n = \{x \in X \mid f(x) > n\}$, mostrar que

$$\lim \int_{X_n} f(x) d\mu(x) = \int_{X_\infty} f(x) d\mu(x) = 0,$$

onde X_∞ é um conjunto mensurável conveniente, e usar esse facto para fixar n tal que

$$\int_{X_n} f(x) d\mu(x) < \frac{\delta}{2}.$$

Ex II.1.20 (**Sucessões duplas**) Se Y é um conjunto, uma *sucessão dupla* de elementos de Y é uma família $(y_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ de elementos de Y , em que o conjunto de índices é o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se Y é um espaço topológico, diz-se que a sucessão dupla $(y_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ converge para um elemento $y \in Y$, ou que tem limite y , e escreve-se $y_{m,n} \rightarrow y$, se, qualquer que seja a vizinhança V de y , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que $m \geq n_0$ e $n \geq n_0$, $y_{m,n} \in V$.

a) Mostrar que, se $y_{m,n} \rightarrow y$ num espaço topológico Y , então a sucessão, indexada em \mathbb{N} , de elementos $y_{n,n}$ também converge para y (embora a recíproca não seja válida) e deduzir, em particular, que num espaço topológico separado uma sucessão dupla não admite mais que um limite.

b) Reparar que uma sucessão $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elementos dum espaço métrico Y , é de Cauchy se, e só se, a sucessão dupla de números reais, que a $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ associa $d(x_m, x_n)$ tem limite 0.

c) (Teorema da convergência dominada para sucessões duplas) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(f_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ uma sucessão dupla de funções mensuráveis $f_{m,n}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que, para cada $x \in X$ a sucessão dupla de elementos $f_{m,n}(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tenha limite $f(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Verificar que a função $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ assim definida é mensurável e que, se existir uma função mensurável $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ com $\int g d\mu < +\infty$ e $f_{m,n}(x) \leq g(x)$, para cada $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $x \in X$, então

$$\int_X f_{m,n}(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x).$$

Sugestão: Para verificar que $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável ter em conta a conclusão de a). Para provar a convergência da sucessão dupla dos integrais, raciocinar por absurdo, notando que, se esta não convergisse, existia uma vizinhança V de $\int f d\mu$ em $\overline{\mathbb{R}}_+$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existia $\alpha(n) \geq n$ e $\beta(n) \geq n$ com $\int f_{\alpha(n), \beta(n)} d\mu \notin V$, chegando então ao absurdo por aplicação do teorema da convergência dominada à sucessão de funções

$$g_n = f_{\alpha(n), \beta(n)}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Ex II.1.21 (Para quem conheça as sucessões generalizadas) Neste exercício consideraremos *sucessões generalizadas*, ou seja, famílias indexadas num conjunto dirigido de índices, isto é, num conjunto de índices munido de uma relação \succeq , com as propriedades habituais que permitem trabalhar convenientemente com a noção de limite (ver, por exemplo, [9]).

a) Seja J um conjunto arbitrário de índices e seja $\mathcal{P}_f(J)$ o conjunto de todas as partes finitas $I \subset J$. Verificar que $\mathcal{P}_f(J)$ fica um conjunto dirigido, para a relação $I \succeq I' \Leftrightarrow I \supset I'$ e que, se $(x_j)_{j \in J}$ é uma família de elementos de $\overline{\mathbb{R}}_+$, a sua soma $\sum_{j \in J} x_j$ (cf. 1.1.6) é o limite da sucessão generalizada $(S_I)_{I \in \mathcal{P}_f(J)}$, com $S_I = \sum_{j \in I} x_j$.

b) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $(f_j)_{j \in J}$ uma sucessão generalizada de funções mensuráveis $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que, para cada $x \in X$, a sucessão generalizada dos elementos $f_j(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tenha limite $f(x)$ em $\overline{\mathbb{R}}_+$. Verificar que, apesar de $f(x)$ admitir uma caracterização, em termos de ínfimos e supremos, análoga à referida em II.1.5, isso não nos permite concluir que a função $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tenha que ser mensurável.

c) Suponhamos que o espaço mensurável (X, \mathcal{M}) é tal que os conjuntos unitários $\{x\}$, com $x \in X$, são mensuráveis. Mostrar que qualquer função $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, mensurável ou não, é limite, ponto a ponto, de uma sucessão generalizada de funções mensuráveis $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. **Sugestão:** Considerar, para

conjunto de índices, o conjunto $\mathcal{P}_f(X)$ das partes finitas de X e definir, para cada $I \in \mathcal{P}_f(X)$, uma função f_I , que se verificará ser mensurável, por $f_I(x) = f(x)\mathbb{I}_I(x)$.

d) Verificar que a noção de limite de uma sucessão dupla $(y_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ de elementos de um espaço topológico Y , referida no exercício II.1.20, é equivalente à noção de limite de uma sucessão generalizada, correspondente a uma relação \succeq naturalmente definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

e) Lembrar a noção de aplicação admissível entre conjuntos dirigidos, que é utilizada na definição da noção de subsucessão generalizada. Diremos que um conjunto dirigido J é de tipo numerável se existir uma aplicação admissível $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow J$, onde em \mathbb{N} se considera, naturalmente, a ordem usual.

Verificar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, com a relação \succeq considerada em d), é um conjunto dirigido de tipo numerável e que, se J é um conjunto contável de índices, o conjunto $\mathcal{P}_f(J)$, referido em a), é de tipo numerável.

Sugestão: No primeiro caso, tomar $\alpha(n) = (n, n)$ e, no segundo, afastado já o caso trivial em que $J = \emptyset$, considerar uma aplicação sobrejetiva $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow J$ e definir $\alpha(n) = \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$.

f) Adaptar a demonstração do teorema da convergência dominada para sucessões duplas na alínea c) do exercício II.1.20, para provar a seguinte versão do teorema da convergência dominada para sucessões generalizadas:

Sejam J um conjunto dirigido de tipo numerável, (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(f_j)_{j \in J}$ uma sucessão generalizada de funções mensuráveis $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tais que, para cada $x \in X$, $f_j(x) \rightarrow f(x)$. Tem-se então que $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável e, supondo que existe $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mensurável, com $\int_X g(x) d\mu(x) < +\infty$, tal que $f_j(x) \leq g(x)$, para cada $j \in J$ e $x \in X$, vem

$$\int_X f_j(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x).$$

§2. Integração de funções com valores num espaço de Banach.

Na secção precedente vimos como definir o integral de uma função mensurável com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$. Do ponto de vista intuitivo, pelo menos no caso dos espaços de medida mais interessantes, uma função ser mensurável pode ser interpretado como ela não ser “demasiado estranha” e, na prática, todas as funções que nos aparecem explicitamente descritas acabam por ser mensuráveis. A contrapartida que temos que pagar pelo facto de qualquer função com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$, que não seja “demasiado estranha”, ter integral é que esse integral pode ser $+\infty$, o que não é um preço demasiado alto desde que nos situemos num contexto de números positivos (no sentido lato).

Na secção que agora iniciamos, vamos abandonar as hipóteses de positividade mas, em compensação, teremos que ser muito mais cuidadosos em afastar a hipótese de algumas expressões poderem tomar um valor infinito. Analisando o que é necessário para integrar uma função, constatamos que precisamos multiplicar valores da função por medidas de conjuntos, somar valores assim obtidos e tomar limites de sucessões de valores assim obtidos. Estas observações levam-nos a pôr a hipótese de o contexto natural para a integração ser o das funções com valores num espaço vetorial normado, espaço que será conveniente ser completo (isto é, um espaço de Banach) para termos um método importante para garantir a convergência de certas sucessões. Vamos verificar que é esse efetivamente o caso.

Tal como já encontramos na secção I.5, também no contexto dos espaços vetoriais normados vão ser importantes os subconjuntos que, munidos da topologia induzida são espaços de base contável (cf. I.5.24). Vamos, por isso, iniciar a secção com algumas observações sobre espaços de base contável, no contexto dos espaços métricos, em particular no dos subconjuntos de espaços vetoriais normados que complementam o referido em I.5.25, I.5.26 e I.5.27.

II.2.1 Um espaço topológico X diz-se *separável* se existe uma parte contável $A \subset X$ que seja densa, isto é, cuja aderência seja X .

Se X é um espaço métrico, então X é de base contável se, e só se, é separável.

Dem: 1) Seja \mathcal{U} uma base contável de abertos de X . Para cada $U \in \mathcal{U}$, tal que $U \neq \emptyset$, seja $x_U \in U$ um elemento escolhido e seja A o conjunto contável dos elementos escolhidos x_U . Verifiquemos que A é uma parte densa de X . Ora se $x \in X$ e V é uma vizinhança arbitrária de x , tem-se $x \in \text{int}(V)$, que é um aberto pelo que, por \mathcal{U} ser uma base de abertos, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U \subset \text{int}(V)$ e então $x_U \in V \cap A$, portanto $V \cap A \neq \emptyset$.

2) Seja $A \subset X$ um subconjunto contável denso. Seja \mathcal{U} o conjunto contável de abertos $B_r(a)$, com $a \in A$ e $r > 0$ racional e verifiquemos que \mathcal{U} é uma base de abertos, ou seja, que, sendo U um aberto de X e $x \in U$, existe um conjunto de \mathcal{U} que contém x e está contido em U . Ora, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$, considerar um racional r com $0 < r < \varepsilon/2$ e, por x ser aderente a A , um elemento $a \in A \cap B_r(x)$. Por ser $d(a, x) < r$ tem-se também $x \in B_r(a)$, que é um dos conjuntos em \mathcal{U} , e, pela desigualdade triangular, tem-se

$$B_r(a) \subset B_{2r}(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U. \quad \square$$

II.2.2 (Subconjuntos separáveis dum espaço métrico) Seja X um espaço métrico. Tem-se então:

a) Se $Y \subset X$ é contável, então Y é separável.

b) Se $Y \subset X$ é separável e $Y' \subset Y$, então Y' é também separável.

c) Se $Y \subset X$ é separável, então a aderência $\text{ad}(Y)$, de Y em X , é também separável.

d) Se $(Y_j)_{j \in J}$ é uma família contável de subconjuntos separáveis de X , então $\bigcup_{j \in J} Y_j$ é também separável.

e) Se $Y \subset X$ é compacto, então Y é separável.

Dem: **a)** Temos uma consequência de Y ser uma parte densa em Y .

b) A conclusão resulta de II.2.1 e da alínea a) de I.5.25.

c) Se $B \subset Y$ é um conjunto contável denso em Y , B é também denso em $\text{ad}(Y)$, uma vez que $\text{ad}(B)$, sendo um fechado de X que contém Y , contém também $\text{ad}(Y)$.

d) Seja, para cada $j \in J$, $B_j \subset Y_j$ é um conjunto contável denso em Y_j . Então $\bigcup_{j \in J} B_j$ é uma parte contável densa de $\bigcup_{j \in J} Y_j$.

e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, a propriedade das coberturas dos conjuntos compactos garante a existência de uma parte finita $B_n \subset Y$ tal que a união das bolas abertas $B_{1/n}(x)$, com $x \in B_n$, contenha Y . Tem-se então que a união B dos B_n , com $n \in \mathbb{N}$, é um subconjunto contável de Y que é denso em Y , uma vez que, para cada $y \in Y$ e $\delta > 0$, podemos escolher n tal que $\frac{1}{n} < \delta$ e $x \in B_n \subset B$ tal que $y \in B_{1/n}(x)$, e então $x \in Y \cap B_\delta(y)$. \square

II.2.3 (Imagem por uma aplicação contínua) Sejam X um espaço topológico de base contável, \widehat{X} um espaço métrico e $f: X \rightarrow \widehat{X}$ uma aplicação contínua. Tem-se então que $f(X) \subset \widehat{X}$ é separável.

Dem: Seja \mathcal{U} uma base contável de abertos de X e escolhamos, para cada $U \in \mathcal{U}$, com $U \neq \emptyset$, um elemento $x_U \in U$. Vemos verificar que o subconjunto contável $B \subset f(X)$, cujos elementos são os $f(x_U)$, é denso em $f(X)$. Ora, se $y \in f(X)$ e $\delta > 0$, vem $y = f(x)$, para um certo $x \in X$ donde, pela continuidade de f em x , existe um aberto U' de X , com $x \in U'$ tal que $f(U') \subset B_\delta(y)$ e, sendo $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U \subset U'$ tem-se $f(x_U) \in B \cap B_\delta(y)$. \square

II.2.4 (Aplicações topologicamente mensuráveis) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach⁵⁴ e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação. Vamos dizer que f é *topologicamente mensurável* se f é mensurável, quando se considera em E a σ -álgebra \mathcal{B}_E dos borelianos, e $f(X)$ é separável.

Analogamente ao que referimos no início desta secção, relativamente às funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$, as funções topologicamente mensuráveis com valores num espaço de Banach vão ser intuitivamente encaradas como aquelas que não são “demasiado estranhas” para efeitos de integração. Repare-se que, no caso das funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$, não fazia sentido estar a pedir que a imagem tivesse base contável, uma vez

⁵⁴Com frequência trabalharemos com espaços de Banach, mesmo em situações em que se poderia trabalhar com espaços vetoriais normados, não necessariamente completos. Os espaços completos são essenciais em muitas situações e, ao trabalharmos sistematicamente com estes, dispensamos a necessidade de nos lembrarmos dos pontos em que eles são essenciais.

que ela era uma parte de $\overline{\mathbb{R}}_+$, o qual já tem base contável.

Tal como acontecia com as funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$, vamos ver em seguida que muitas das construções habituais de novas funções a partir de outras que sejam topologicamente mensuráveis, conduzem a funções topologicamente mensuráveis o que, de certo modo, explica o facto de estas serem “muito numerosas”,

II.2.5 (Nota) Entre os espaços de Banach que é mais frequente encontrarmos no contexto da integração estão \mathbb{R} e \mathbb{C} , em ambos os casos com o valor absoluto como norma implícita, e, mais geralmente, os espaços vectoriais E de dimensão finita, com qualquer das normas equivalentes que estes espaços possuem. Em todos estes casos particulares, o próprio espaço E já é de base contável, e portanto separável, como constatamos se lembrarmos o referido nas alíneas b) e e) de I.5.25 e tivermos em conta que um espaço vectorial real de dimensão n é isomorfo, e portanto também homeomorfo, a \mathbb{R}^n e que um espaço vectorial complexo de dimensão n é também um espaço vectorial real de dimensão $2n$. Nestes casos particulares, uma aplicação topologicamente mensurável é assim simplesmente uma aplicação mensurável, sem mais nenhuma condição suplementar.

Observe-se também que, mesmo no caso dos espaços de Banach de dimensão infinita, muitos dos que são encontrados com frequência são, de facto, espaços separáveis, pelo que a eles se aplica também a observação que fizemos atrás (ver, por exemplo, III.4.7 adiante).

II.2.6 (Composta com uma aplicação contínua) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Sejam F um espaço de Banach, $B \subset E$ um boreliano, com $f(X) \subset B$ e $g: B \rightarrow F$ uma aplicação contínua. Tem-se então que $g \circ f: X \rightarrow F$ é também topologicamente mensurável.

Dem: O facto de $f: X \rightarrow E$ ser mensurável implica que $f: X \rightarrow B$ é também mensurável, quando se considera em B a σ -álgebra \mathcal{B}_B dos borelianos (cf. I.5.5 e I.2.9). Uma vez que $g: B \rightarrow F$ é mensurável, por ser contínua (cf. I.5.8), concluímos que $g \circ f: X \rightarrow F$ é mensurável. O facto de $g \circ f(X) = g(f(X)) \subset F$ ser separável resulta de $f(X) \subset E$ ser de base contável, tendo em conta II.2.3. \square

II.2.7 (Composta com uma aplicação mensurável) Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) dois espaços mensuráveis e $\varphi: X \rightarrow Y$ uma aplicação mensurável. Sejam E um espaço de Banach e $f: Y \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Tem-se então que $f \circ \varphi: X \rightarrow E$ é também topologicamente mensurável.

Dem: A aplicação $f \circ \varphi$ é mensurável, enquanto composta de duas mensuráveis e o facto de $f \circ \varphi(X)$ ser separável é uma consequência de se ter $f \circ \varphi(X) \subset f(Y)$, onde $f(Y)$ é separável. \square

II.2.8 (Aplicação com valores num produto) Sejam E e F espaços de Banach, e consideremos no espaço vectorial $E \times F$ a norma

$$\|(z, w)\| = \max\{\|z\|, \|w\|\},$$

que sabemos definir a topologia produto e tornar $E \times F$ um espaço de Banach. Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow E$ e $g: X \rightarrow F$ duas aplicações topologicamente mensuráveis. É então também topologicamente mensurável a aplicação $h: X \rightarrow E \times F$, definida por

$$h(x) = (f(x), g(x)).^{55}$$

Dem: Uma vez que $f(X) \subset E$ e $g(X) \subset F$ são separáveis, o mesmo vai acontecer às respetivas aderências $Z = \text{ad}(f(X))$ e $W = \text{ad}(g(X))$, que são fechados, em particular borelianos de E e F , respetivamente. Uma vez que $f: X \rightarrow Z$ e $g: X \rightarrow W$ também são mensuráveis, quando em Z e W se consideram as σ -álgebras dos borelianos \mathcal{B}_Z e \mathcal{B}_W , respetivamente, tendo em conta I.5.21, vem então mensurável a aplicação $h: X \rightarrow Z \times W$, quando se considera no espaço de chegada a σ -álgebra produto $\mathcal{B}_Z \otimes \mathcal{B}_W$ que, por I.5.27, coincide com a σ -álgebra dos borelianos de $Z \times W$, o que implica que $h: X \rightarrow E \times F$ é mensurável, quando se considera em $E \times F$ a σ -álgebra dos borelianos. O facto de $h(X)$ ser separável é uma consequência de se ter $h(X) \subset f(X) \times g(X)$, que é de base contável, e portanto separável tendo em conta a alínea c) de I.5.25. \square

II.2.9 (Somam e produtos de aplicações topologicamente mensuráveis) Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Tem-se então:

a) Se E é um espaço de Banach e $f, g: X \rightarrow E$ são duas aplicações topologicamente mensuráveis, então $f + g: X \rightarrow E$ é também topologicamente mensurável.

b) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$,

$$w \times z = \xi(w, z) \in H.$$

Se $f: X \rightarrow F$ e $g: X \rightarrow G$ são duas aplicações topologicamente mensuráveis, então é topologicamente mensurável a aplicação $f \times g: X \rightarrow H$, definida por

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \xi(f(x), g(x)).$$

c) Em particular, se E é um espaço de Banach sobre o corpo \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , e se $f: X \rightarrow E$ e $\varphi: X \rightarrow \mathbb{K}$ são aplicações topologicamente mensuráveis⁵⁶, então é também topologicamente mensurável a aplicação $\varphi f: X \rightarrow E$.

⁵⁵Este resultado é uma das razões pelas quais temos que trabalhar com aplicações topologicamente mensuráveis. Se f e g fossem apenas aplicações mensuráveis, não conseguiríamos mostrar que h é mensurável, sem as hipóteses de E e F serem de separáveis.

⁵⁶No caso de φ , topologicamente mensurável é o mesmo que mensurável, uma vez que \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 , é separável.

Dem: As alíneas a) e b) têm uma justificação totalmente análoga: Tendo em conta II.2.8, consideramos a aplicação topologicamente mensurável $X \rightarrow E \times E$ (respetivamente, $X \rightarrow F \times G$), $x \mapsto (f(x), g(x))$ e reparamos que $f + g$ (respetivamente, $f \times g$) é a composta daquela aplicação com a soma (respetivamente a aplicação ξ), que é uma aplicação contínua $E \times E \rightarrow E$ (respetivamente $F \times G \rightarrow H$). A alínea c) é o caso particular de b) em que tomamos para ξ a multiplicação pelos escalares, uma aplicação bilinear contínua $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$. \square

II.2.10 Sejam X um espaço topológico de base contável, sobre o qual consideramos a σ -álgebra dos borelianos \mathcal{B}_X , e E um espaço de Banach. Se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação contínua, então f é topologicamente mensurável.

Dem: Tendo em conta I.5.8, f é mensurável e o facto de $f(X)$ ser separável é uma consequência de II.2.3. \square

II.2.11 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $(X_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} tal que $X = \bigcup_{j \in J} X_j$. Sejam E um espaço de Banach e

$f: X \rightarrow E$ uma aplicação tal que, para cada $j \in J$, $f|_{X_j}: X_j \rightarrow E$ seja topologicamente mensurável. Tem-se então que $f: X \rightarrow E$ é topologicamente mensurável.

Dem: A aplicação é mensurável, tendo em conta I.5.6, e o facto de $f(X)$ ser separável é uma consequência de se tratar da união dos $f(X_j)$, que são separáveis (cf. a alínea d) de II.2.2). \square

II.2.12 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, Y um espaço métrico e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de aplicações mensuráveis tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Tem-se então que a aplicação $f: X \rightarrow Y$, assim definida, é mensurável.

Dem: Tendo em conta I.5.7, tudo o que temos que verificar é que, para cada aberto V de Y , $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$, podendo já afastar-se o caso trivial em que $V = Y$, e portanto $f^{-1}(V) = X$. Lembrando que, no contexto dos espaços métricos, a distância a um conjunto fechado não vazio é uma função contínua que se anula exatamente nesse conjunto fechado, podemos, para cada $m \in \mathbb{N}$, considerar o aberto $V_m \subset V$, definido por

$$V_m = \left\{ y \in Y \mid d(y, Y \setminus V) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Vamos mostrar em seguida que se tem

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{(m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}(V_m),$$

o que, uma vez que cada $f_n^{-1}(V_m) \in \mathcal{M}$, provará que $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$, e terminará a demonstração.

Suponhamos que $x \in f^{-1}(V)$. Vem $f(x) \in V$, ou seja, $d(f(x), Y \setminus V) > 0$, pelo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x), Y \setminus V) > \frac{1}{m}$ e, por ser

$$d(f_n(x), Y \setminus V) \rightarrow d(f(x), Y \setminus V),$$

existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq k$, $d(f_n(x), Y \setminus V) > \frac{1}{m}$, por outras palavras, $f_n(x) \in V_m$ e $x \in f_n^{-1}(V_m)$. Ficou assim provado que

$$x \in \bigcup_{(m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}(V_m).$$

Suponhamos, reciprocamente, que x pertence ao conjunto referido e seja m, k fixados tais que, para cada $n \geq k$, $x \in f_n^{-1}(V_m)$, ou seja,

$$d(f_n(x), Y \setminus V) > \frac{1}{m}.$$

Mais uma vez por ser

$$d(f_n(x), Y \setminus V) \rightarrow d(f(x), Y \setminus V),$$

concluimos que $d(f(x), Y \setminus V) \geq \frac{1}{m} > 0$, donde $f(x) \in V$, ou seja, $x \in f^{-1}(V)$. \square

II.2.13 (Limites de topologicamente mensuráveis) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de aplicações topologicamente mensuráveis $f_n: X \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Tem-se então que a aplicação $f: X \rightarrow E$, assim definida, é topologicamente mensurável.

Dem: Já sabemos que $f: X \rightarrow E$ é mensurável, tendo em conta II.2.12. Uma vez que cada $f_n(X)$ é separável, deduzimos sucessivamente, das alíneas d) e c) de II.2.2, que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(X)$ e a sua aderência são também separáveis. Uma vez que cada $f(x)$ é limite da sucessão dos $f_n(x)$, que pertencem a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(X)$, concluimos que

$$f(X) \subset \text{ad}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(X)\right)$$

e portanto, pela alínea b) do resultado citado, $f(X)$ é separável. \square

II.2.14 Notemos que, se E é um espaço de Banach, o facto de a função $E \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, $z \mapsto \|z\|$, ser contínua, em particular mensurável, implica que, se (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável e se $f: X \rightarrow E$ é mensurável (em particular, se é topologicamente mensurável), então é mensurável a aplicação

$$X \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|f(x)\|.$$

Esta propriedade será usada amiúde sem referência explícita.

II.2.15 (Aplicações integráveis) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Vamos dizer que uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é

integrável se ela é topologicamente mensurável e

$$\int \|f(x)\| d\mu(x) < +\infty.$$

Com o objetivo de definir o integral das funções integráveis, vamos, por analogia com o que se fez no contexto das funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$, começar por examinar uma classe particular de aplicações integráveis, as aplicações em escada, que vão jogar o papel que então jogavam as funções simples. Repare-se que, ao contrário do que sucedia com as funções simples em II.1.6, a definição de aplicação em escada já faz intervir a medida que se considera no domínio.

II.2.16 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e E um espaço de Banach. Por analogia com II.1.6, vamos dizer que uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é uma *aplicação simples* se ela é mensurável e o contradomínio $f(X)$ é finito. Mais particularmente, e essas serão as aplicações com um papel mais importante nesta secção, dada uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, vamos dizer que uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é uma *aplicação em escada* se ela é simples e integrável. Repare-se que, no caso particular em que $\mu(X) < +\infty$, toda a aplicação simples $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação em escada, uma vez que a função $x \mapsto \|f(x)\|$ é então simples, e portanto de integral finito.

II.2.17 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação simples. Existe então uma família finita $(X_j)_{j \in J}$ de partes mensuráveis de X , disjuntas duas a duas e de união X , tais que a restrição de f a cada X_j seja constante.

A uma tal família damos então o nome de *partição adaptada* à aplicação simples f (comparar com II.1.7) e, no caso em que é dada uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, usamos a notação J_0 para designar o conjunto dos índices $j \in J$ tal que $\mu(X_j) < +\infty$. É claro que, no caso em que $\mu(X) < +\infty$, tem-se simplesmente $J_0 = J$.

No caso em que é dada uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $f: X \rightarrow E$ é mesmo uma aplicação em escada, tem-se $f(x) = 0$, para cada $j \in J \setminus J_0$ e $x \in X_j$.

Dem: Para obter uma partição adaptada, basta tomar para J o conjunto finito $f(X)$ e, para cada $j \in J$, tomar

$$X_j = \{x \in X \mid f(x) = j\},$$

imagem recíproca por meio de f do conjunto fechado, em particular boreliano $\{j\} \subset E$. Supondo agora que a aplicação é em escada, dada uma partição adaptada $(X_j)_{j \in J}$, tem-se, para cada $j_0 \in J$, com $f(x) = w_{j_0}$, para $x \in X_{j_0}$,⁵⁷

⁵⁷ w_{j_0} está bem determinado se $X_{j_0} \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned}
+\infty &> \int_X \|f(x)\| d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_{X_j} \|f(x)\| d\mu(x) \geq \\
&\geq \int_{X_{j_0}} \|f(x)\| d\mu(x) = \mu(X_{j_0}) \|w_{j_0}\|,
\end{aligned}$$

pelo que, se $j_0 \in J \setminus J_0$, isto é, se $\mu(X_{j_0}) = +\infty$, tem-se $\|w_{j_0}\| = 0$ e $w_{j_0} = 0$. \square

II.2.18 Repare-se que, tal como em II.1.12, se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação simples e se $(X_j)_{j \in J}$ é uma partição adaptada tal que $f(x) = w_j$, para cada $x \in X_j$, então, sendo $\mathbb{I}_{X_j}: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função indicatriz de X_j , tem-se, para cada $x \in X$,

$$f(x) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{X_j}(x) w_j$$

e, no caso em que é dada uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e f é mesmo uma aplicação em escada, também

$$f(x) = \sum_{j \in J_0} \mathbb{I}_{X_j}(x) w_j.$$

II.2.19 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação em escada. Sejam $(X_j)_{j \in J}$ e $(X'_k)_{k \in K}$ duas partições adaptadas à aplicação f e sejam $(w_j)_{j \in J}$ e $(z_k)_{k \in K}$ famílias de vetores de E tais que $f(x) = w_j$, para cada $x \in X_j$, e que $f(x) = z_k$, para cada $x \in X'_k$.⁵⁸ Tem-se então

$$\sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j = \sum_{k \in K_0} \mu(X'_k) z_k.$$

Dem: Começemos por observar que, sempre que $X_j \cap X'_k \neq \emptyset$, tem-se $w_j = z_k$, uma vez que ambos os vetores são iguais a $f(x)$, para x em $X_j \cap X'_k$. Para cada $j \in J_0$, X_j é a união da família finita dos conjuntos mensuráveis $X_j \cap X'_k$, $k \in K$, que são disjuntos dois a dois, e obtemos

$$\sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j = \sum_{j \in J_0} \left(\sum_{k \in K} \mu(X_j \cap X'_k) \right) w_j = \sum_{(j,k) \in J_0 \times K} \mu(X_j \cap X'_k) w_j.$$

Para cada $j \in J_0$ e $k \in K \setminus K_0$, tem-se $\mu(X_j \cap X'_k) w_j = 0$, uma vez que, se $X_j \cap X'_k = \emptyset$, tem-se $\mu(X_j \cap X'_k) = 0$ e, caso contrário, $w_j = z_k = 0$. Deduzimos assim das igualdades anteriores que se tem também

⁵⁸Repare-se que os z_j estão bem determinados para os índices j tais que $X_j \neq \emptyset$ mas que, se $X_j = \emptyset$, qualquer $z_j \in E$ verifica a condição referida. Análoga observação vale evidentemente para os w_k .

$$\sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j = \sum_{(j,k) \in J_0 \times K_0} \mu(X_j \cap X'_k) w_j.$$

Por troca dos papéis das duas partições, tem-se também

$$\sum_{k \in K_0} \mu(X'_k) z_k = \sum_{(j,k) \in J_0 \times K_0} \mu(X_j \cap X'_k) z_k.$$

Para concluir a igualdade do enunciado, basta assim verificar que, para cada par $(j, k) \in J_0 \times K_0$

$$\mu(X_j \cap X'_k) w_j = \mu(X_j \cap X'_k) z_k$$

e isso é uma consequência de ambos os membros desta igualdade serem 0, no caso em que $X_j \cap X'_k = \emptyset$ e, caso contrário, de ser $w_j = z_k$. \square

II.2.20 Tendo em conta o resultado precedente, sendo (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação em escada, é legítimo definir o *integral* de f como sendo o vetor de E

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j,$$

onde $(X_j)_{j \in J}$ é uma partição adaptada à função f , $f(x) = w_j$, para cada $x \in X_j$ e J_0 é o conjunto dos $j \in J$ tais que $\mu(X_j) < +\infty$.

Observe-se desde já que, no caso em que consideramos para E o espaço \mathbb{R} , uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ é uma aplicação em escada se, e só se, é uma função simples (cf. II.1.6) e com $\int f d\mu < +\infty$ e que, nesse caso, o integral de f como aplicação em escada coincide com o seu integral como função simples, uma vez que, para cada $j \in J \setminus J_0$, tem-se $w_j = 0$.

II.2.21 Como exemplo trivial de aplicação em escada, temos a aplicação identicamente nula, $0: X \rightarrow E$, a qual admite a família formada pelo único conjunto X como partição adaptada. É claro que se tem

$$\int 0 d\mu = 0.$$

Outra consequência direta da definição é que, se $\mu(X) = 0$ (ou, o que é equivalente, se $\mu = 0$), então, para cada aplicação em escada $f: X \rightarrow E$, tem-se $\int f(x) d\mu(x) = 0$, visto que, sendo $(X_j)_{j \in J}$ uma partição adaptada a f , tem-se $\mu(X_j) = 0$, para cada j .

II.2.22 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e E um espaço de Banach. Se $(X_j)_{j \in J}$ é uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X e se $(w_j)_{j \in J}$ é uma família de elementos de E , então podemos definir uma aplicação simples $f: X \rightarrow E$, tendo a família dos X_j como partição adaptada, pela condição de se ter $f(x) = w_j$, para cada $x \in X_j$. No

caso em que é dada uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $w_j = 0$ sempre que $\mu(X_j) = +\infty$, esta aplicação é mesmo uma aplicação em escada.

Dem: O facto de f ser topologicamente mensurável resulta de I.5.6, já que a restrição a cada X_j é constante, e do facto de $f(X)$ ser finito, em particular separável. Reparamos enfim que, com a hipótese suplementar, a função $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|f(x)\|$ é uma função simples, que toma o valor $\|w_j\|$ em X_j , donde

$$\int \|f(x)\| d\mu(x) = \sum_{j \in J} \|w_j\| \mu(X_j) = \sum_{j \in J_0} \|w_j\| \mu(X_j) < +\infty. \quad \square$$

II.2.23 (Lema) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $f, g: X \rightarrow E$ duas aplicações simples. Existe então uma partição $(X_j)_{j \in J}$ adaptada simultaneamente a f e a g .

Dem: Seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois e de união X , tais que f seja constante em cada X_j e seja $(X'_k)_{k \in K}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois e de união X , tais que g seja constante em cada X'_k . Tem-se então que os conjuntos mensuráveis $X_j \cap X'_k$, $(j, k) \in J \times K$, são disjuntos dois a dois e de união X , constituem uma família finita e em cada um deles tanto f como g é constante. \square

II.2.24 (Aditividade) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f, g: X \rightarrow E$ duas aplicações em escada. Tem-se então que $f + g: X \rightarrow E$ é também uma aplicação em escada e

$$\int f(x) + g(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x).$$

Dem: Tendo em conta o lema anterior, podemos considerar uma família finita $(X_j)_{j \in J}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que, para cada $x \in X_j$, $f(x) = w_j$ e $g(x) = z_j$ e sabemos que então tem-se $w_j = z_j = 0$, sempre que $\mu(X_j) = +\infty$. Como $f(x) + g(x) = w_j + z_j$, sempre que $x \in X_j$, onde $w_j + z_j = 0$, sempre que $\mu(X_j) = +\infty$, segue-se que $f + g$ é uma aplicação em escada e que

$$\begin{aligned} \int f(x) + g(x) d\mu(x) &= \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) (z_j + w_j) = \\ &= \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) z_j + \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j = \\ &= \int f(x) d\mu(x) + \int g(x) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

II.2.25 (Composição com uma aplicação linear) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E e F espaços de Banach e $\alpha: E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Se

$f: X \rightarrow E$ é uma aplicação em escada, então $\alpha \circ f: X \rightarrow F$ é também uma aplicação em escada e

$$\int \alpha(f(x)) d\mu(x) = \alpha\left(\int f(x) d\mu(x)\right).^{59}$$

Dem: Seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tais que em cada X_j a aplicação f tome o valor constante w_j e que $w_j = 0$, sempre que $\mu(X_j) = +\infty$. Uma vez que $\alpha \circ f$ toma o valor constante $\alpha(w_j)$ em X_j e que $\alpha(w_j) = 0$, sempre que $\mu(X_j) = +\infty$, concluímos que $\alpha \circ f$ é também uma aplicação em escada e

$$\begin{aligned} \int \alpha(f(x)) d\mu(x) &= \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) \alpha(w_j) = \alpha\left(\sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j\right) = \\ &= \alpha\left(\int f(x) d\mu(x)\right). \end{aligned}$$

II.2.26 (Corolário) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach sobre \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Tem-se então:

a) Se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação em escada e $a \in \mathbb{K}$, então é também em escada a aplicação $af: X \rightarrow E$, $x \mapsto af(x)$, e

$$\int af(x) d\mu(x) = a \int f(x) d\mu(x);$$

b) Se $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação em escada e $w \in E$, então é também em escada a aplicação $fw: X \rightarrow E$, $x \mapsto f(x)w$, e

$$\int f(x)w d\mu(x) = \left(\int f(x) d\mu(x)\right)w.$$

Dem: Basta considerar, para a), a aplicação linear $E \rightarrow E$, $z \mapsto az$, e, para b), a aplicação linear $\mathbb{K} \rightarrow E$, $b \mapsto bw$. \square

II.2.27 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação em escada. É então também em escada, em particular simples, a função $X \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ e

$$\left\| \int f(x) d\mu(x) \right\| \leq \int \|f(x)\| d\mu(x).$$

⁵⁹Considerando duas normas arbitrárias, equivalentes ou não, sobre um mesmo espaço vetorial E , este resultado, aplicado a $I_E: E \rightarrow E$, com uma norma no domínio e a outra no espaço de chegada, mostra que o facto de uma função ser em escada e o valor do seu integral não dependem da norma que se considera. De facto, foi só por comodidade e por ser nesse contexto que o integral de funções mais gerais vai ser definido adiante, que considerámos que o espaço de chegada é de Banach, para podermos falar de funções integráveis.

Dem: Seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tais que em cada X_j a aplicação f tome o valor constante w_j e que $w_j = 0$, sempre que $\mu(X_j) = +\infty$. Uma vez que $\|f(x)\|$ toma o valor constante $\|w_j\|$ em X_j e que $\|w_j\| = 0$, sempre que $\mu(X_j) = +\infty$, concluímos que $x \mapsto \|f(x)\|$ é também uma aplicação em escada e

$$\begin{aligned} \left\| \int f(x) d\mu(x) \right\| &= \left\| \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j \right\| \leq \sum_{j \in J_0} \|\mu(X_j) w_j\| = \\ &= \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) \|w_j\| = \int \|f(x)\| d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

No estudo do integral das funções mensuráveis com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$, um instrumento fundamental foi a possibilidade de obter qualquer função mensurável como limite de uma sucessão crescente de funções simples (cf. II.1.19), instrumento que foi usado em conjunção com o teorema da convergência monótona. Uma vez que, no contexto das funções com valores vetoriais, não faz sentido falar de sucessões crescentes, vamos arranjar um substituto daquele instrumento, vocacionado para a utilização do teorema da convergência dominada.

II.2.28 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach.

Dizemos que uma sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aplicações $f_n: X \rightarrow E$ é *dominada* se existir $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, mensurável e com $\int \varphi(x) d\mu(x) < +\infty$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$.

II.2.29 (**Aproximação dominada por aplicações em escada**) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Existe então uma sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aplicações simples $f_n: X \rightarrow E$ tal que:

- a) Para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$;
- b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$;
- c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(X) \subset f(X) \cup \{0\}$.

Em particular, no caso em que temos uma medida $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $f: X \rightarrow E$ é integrável, a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão dominada de aplicações em escada.

Dem: Uma vez que $f(X)$ é separável, e portanto o mesmo acontece a $f(X) \cup \{0\}$, podemos considerar uma parte densa contável de $f(X) \cup \{0\}$, que supomos já conter o vetor 0, assim como uma sucessão $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vetores, com $w_1 = 0$, cujo conjunto dos termos seja essa parte densa de $f(X) \cup \{0\}$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, considere-se, para cada $1 \leq k \leq n$, o conjunto

$$A_{n,k} = \{x \in X \mid \forall_{1 \leq j \leq n} \|f(x) - w_k\| \leq \|f(x) - w_j\|\},$$

conjunto que é mensurável por ser a intersecção, para $1 \leq j \leq n$, das imagens recíprocas de $[0, +\infty[$ pelas funções mensuráveis $X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \|f(x) - w_j\| - \|f(x) - w_k\|.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a união dos $A_{n,k}$, com $1 \leq k \leq n$, é igual a X , uma vez que, para cada $x \in X$, dos vetores w_1, \dots, w_n , há pelo menos um a distância mínima de $f(x)$. Além disso, se $x \in A_{n,k}$, tem-se

$$\|f(x) - w_k\| \leq \|f(x) - w_1\| = \|f(x)\|,$$

donde

$$\|w_k\| = \|(w_k - f(x)) + f(x)\| \leq \|w_k - f(x)\| + \|f(x)\| \leq 2\|f(x)\|.$$

Apesar de, para cada $n \in \mathbb{N}$, os conjuntos $A_{n,k}$ não serem necessariamente disjuntos dois a dois, por poder existir na sequência w_1, \dots, w_n mais que um vetor a distância mínima de $f(x)$, podemos deduzir do lema I.2.11 a existência de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois $B_{n,k} \subset A_{n,k}$, para $1 \leq k \leq n$, ainda com união igual a X .

Defina-se agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma aplicação $f_n: X \rightarrow E$ pela condição de se ter $f_n(x) = w_k$, para cada $x \in B_{n,k}$, aplicação que verifica, como mostrámos atrás, $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$, e para a qual

$$f_n(X) \subset \{w_1, \dots, w_n\} \subset f(X) \cup \{0\},$$

As aplicações f_n são topologicamente mensuráveis, por terem restrições constantes, em particular topologicamente mensuráveis, aos conjuntos $B_{n,k}$ de união X , e, no caso em que f é integrável, são mesmo aplicações em escada, por terem imagem finita e verificarem

$$\int \|f_n(x)\| d\mu(x) \leq \int 2\|f(x)\| d\mu(x) = 2 \int \|f(x)\| d\mu(x) < +\infty.$$

As desigualdades $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$, considerando $\varphi(x) = 2\|f(x)\|$, mostram também que, no caso em que f é integrável, a sucessão das aplicações f_n é dominada.

Resta-nos mostrar que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Ora, fixado $x \in X$ e $\delta > 0$ arbitrário, podemos considerar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(x) - w_{n_0}\| < \delta$ e então, para cada $n \geq n_0$, sendo $1 \leq k \leq n$ tal que $x \in B_{n,k} \subset A_{n,k}$, vem

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \|f(x) - w_k\| \leq \|f(x) - w_{n_0}\| < \delta,$$

o que prova a convergência pretendida. □

II.2.30 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável. Tem-se então:

a) Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão dominada de aplicações em escada $f_n: X \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, então a sucessão dos integrais $w_n = \int f_n(x) d\mu(x) \in E$ converge para um certo $w \in E$.

b) Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são duas sucessões dominadas de aplicações em escada, $f_n: X \rightarrow E$ e $\hat{f}_n: X \rightarrow E$, tais que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $\hat{f}_n(x) \rightarrow f(x)$, então

$$\lim \int f_n(x) d\mu(x) = \lim \int \hat{f}_n(x) d\mu(x).$$

Dem: a) Para mostrar que a sucessão dos w_n converge em E , basta mostrar que se trata de uma sucessão de Cauchy. Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia, portanto que existia $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, existam naturais $\alpha(p) \geq p$ e $\beta(p) \geq p$ com $\|w_{\alpha(p)} - w_{\beta(p)}\| \geq \delta$.

Tendo em conta II.2.24, II.2.26 e II.2.27, podemos escrever, para $p \in \mathbb{N}$,

$$(1) \quad \begin{aligned} \delta &\leq \|w_{\alpha(p)} - w_{\beta(p)}\| = \left\| \int f_{\alpha(p)}(x) - f_{\beta(p)}(x) d\mu(x) \right\| \leq \\ &\leq \int \|f_{\alpha(p)}(x) - f_{\beta(p)}(x)\| d\mu(x) \end{aligned}$$

e, sendo $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável, com $\int \varphi(x) d\mu(x) < +\infty$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$, tem-se

$$\|f_{\alpha(p)}(x) - f_{\beta(p)}(x)\| \leq \|f_{\alpha(p)}(x)\| + \|f_{\beta(p)}(x)\| \leq 2\varphi(x),$$

onde $\int 2\varphi(x) d\mu(x) = 2\int \varphi(x) d\mu(x) < +\infty$. Para cada $x \in X$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos escolher $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq p_0$, se tenha $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, pelo que, em particular, para cada $p \geq p_0$,

$$\|f_{\alpha(p)}(x) - f_{\beta(p)}(x)\| \leq \|f_{\alpha(p)}(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_{\beta(p)}(x)\| < \varepsilon,$$

o que mostra que a sucessão dos reais $\|f_{\alpha(p)}(x) - f_{\beta(p)}(x)\|$ tem limite 0. Podemos assim aplicar o teorema da convergência dominada (cf. II.1.34) para deduzir que a sucessão dos integrais $\int \|f_{\alpha(p)}(x) - f_{\beta(p)}(x)\| d\mu(x)$ tem limite $\int 0 d\mu(x) = 0$, o que contradiz a desigualdade (1).

b) Sejam

$$w = \lim \int f_n(x) d\mu(x), \quad \hat{w} = \lim \int \hat{f}_n(x) d\mu(x),$$

limites que existem pelo que vimos em a).

Sejam $\varphi, \hat{\varphi}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas funções mensuráveis, com $\int \varphi(x) d\mu(x) < +\infty$ e $\int \hat{\varphi}(x) d\mu(x) < +\infty$, tais que, $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$ e $\|\hat{f}_n(x)\| \leq \hat{\varphi}(x)$. Pela continuidade da soma, do produto e da norma, nos espaços vectoriais normados, tem-se, para cada $x \in X$,

$$\|f_n(x) - \widehat{f}_n(x)\| \rightarrow \|f(x) - f(x)\| = 0,$$

onde

$$\|f_n(x) - \widehat{f}_n(x)\| \leq \|f_n(x)\| + \|\widehat{f}_n(x)\| \leq \varphi(x) + \widehat{\varphi}(x),$$

com

$$\int \varphi(x) + \widehat{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x) + \int \widehat{\varphi}(x) d\mu(x) < +\infty,$$

pelo que, tendo em conta o teorema da convergência dominada (cf. II.1.34),

$$\int \|f_n(x) - \widehat{f}_n(x)\| d\mu(x) \rightarrow \int 0 d\mu(x) = 0$$

e portanto, por ser

$$\begin{aligned} \left\| \int f_n(x) d\mu(x) - \int \widehat{f}_n(x) d\mu(x) \right\| &= \left\| \int f_n(x) - \widehat{f}_n(x) d\mu(x) \right\| \leq \\ &\leq \int \|f_n(x) - \widehat{f}_n(x)\| d\mu(x), \end{aligned}$$

vem

$$\|w - \widehat{w}\| = \lim \left\| \int f_n(x) d\mu(x) - \int \widehat{f}_n(x) d\mu(x) \right\| = 0,$$

o que mostra que se tem efetivamente $w = \widehat{w}$. □

II.2.31 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável. Tendo em conta II.2.29 e II.2.30, é legítimo definir o integral de f como sendo o vetor de E , para o qual usaremos qualquer das notações

$$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x),$$

que é limite dos integrais $\int f_n(x) d\mu(x)$, com $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessão dominada arbitrária de aplicações em escada $f_n: X \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Tal como em II.1.15, no caso em que $X = \mathbb{R}$ e μ é a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} , usa-se também as notações alternativas

$$\int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Observe-se que, no caso em que $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação em escada, esta definição dá o mesmo resultado que a dada em II.2.20, uma vez que uma das escolhas possíveis para sucessão dominada dos f_n , é a sucessão com todos os termos iguais a f .

II.2.32 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ uma função integrável, isto é, uma função mensurável com $\int f(x) d\mu(x) < +\infty$. Tem-se então que o integral de f como função mensurável positiva (cf. II.1.15) coincide com o integral de f como função integrável com valores no espaço de Banach \mathbb{R} (cf. II.2.31).⁶⁰

Dem: Tendo em conta II.1.19, sabemos que existe uma sucessão crescente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, com $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$, tendo-se então $f_n(x) \leq f(x)$, para cada $x \in X$, o que mostra que temos uma sucessão dominada de funções. A desigualdade anterior mostra também que $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu < +\infty$, o que mostra que as funções simples são mesmo funções em escada e como, para estas, já sabemos que os integrais nos dois contextos coincidem (cf. II.2.20), deduzimos do teorema da convergência monótona (cf. II.1.18) que o integral de f , como função integrável, igual, por definição ao limite dos integrais $\int f_n d\mu$, coincide com o integral de f , como função mensurável positiva. \square

II.2.33 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Tem-se então:

a) A função identicamente nula $0: X \rightarrow E$ é integrável e com $\int 0 d\mu(x) = 0$.

b) No caso em que $\mu(X) = 0$ (ou, o que é equivalente, $\mu = 0$), cada aplicação topologicamente mensurável $f: X \rightarrow E$ é integrável e com

$$\int_X f(x) d\mu(x) = 0.$$

Dem: A conclusão de a) resulta de a aplicação identicamente nula ser uma aplicação em escada, com o integral referido. Nas hipóteses de b), se $f: X \rightarrow E$ é topologicamente mensurável, resulta da alínea a) de II.1.16 que $\int \|f(x)\| d\mu(x) = 0 < +\infty$, portanto que f é integrável e o facto de se ter $\int f(x) d\mu(x) = 0$ resulta diretamente da definição visto que, como referido em II.2.21, isso já acontece no caso em que f é uma aplicação em escada.

II.2.34 (**Aditividade**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f, \hat{f}: X \rightarrow E$ duas aplicações integráveis. Tem-se então que $f + \hat{f}: X \rightarrow E$ é também uma aplicação integrável e

$$\int f(x) + \hat{f}(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) + \int \hat{f}(x) d\mu(x).$$

Daqui decorre, naturalmente, por indução, que, se $(f_j)_{j \in I}$ é uma família finita de aplicações integráveis $f_j: X \rightarrow E$, é também integrável a aplicação $\sum_{j \in J} f_j: X \rightarrow E$ e

⁶⁰O que permite que utilizemos sem risco, como estamos a fazer, a mesma notação nos dois casos.

$$\int \sum_{j \in J} f_j(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int f_j(x) d\mu(x).$$

Dem: Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucessões dominadas de aplicações em escada tais que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $\widehat{f}_n(x) \rightarrow \widehat{f}(x)$. Sendo $\varphi, \widehat{\varphi}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ aplicações mensuráveis, com $\int \varphi d\mu < +\infty$ e $\int \widehat{\varphi} d\mu < +\infty$, tais que $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$ e $\|\widehat{f}_n(x)\| \leq \widehat{\varphi}(x)$, tem-se que

$$\|f_n(x) + \widehat{f}_n(x)\| \leq \|f_n(x)\| + \|\widehat{f}_n(x)\| \leq \varphi(x) + \widehat{\varphi}(x),$$

onde $\int (\varphi + \widehat{\varphi}) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \widehat{\varphi} d\mu < +\infty$, o que mostra que a sucessão de aplicações $f_n + \widehat{f}_n: X \rightarrow E$ é também dominada. Tendo em conta II.2.24, estas aplicações são em escada e tem-se, por definição

$$\begin{aligned} \int f(x) + \widehat{f}(x) d\mu(x) &= \lim \int f_n(x) + \widehat{f}_n(x) d\mu(x) = \\ &= \lim \int f_n(x) d\mu(x) + \lim \int \widehat{f}_n(x) d\mu(x) = \\ &= \int f(x) d\mu(x) + \int \widehat{f}(x) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

Recordemos que, se E e F são espaços vetoriais normados e $\alpha: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear, então α é contínua se, e só se, existe uma constante $M \geq 0$ tal que, para cada $w \in E$, $\|\alpha(w)\| \leq M\|w\|$. Recordemos também que esta caracterização fornece, em particular uma condição simples para verificar se duas normas sobre um mesmo espaço vetorial E são equivalentes (isto é, definem a mesma topologia), uma vez que isso acontece se, e só se, a aplicação linear identidade $I_E: E \rightarrow E$ é contínua de cada uma das normas para a outra.

II.2.35 (Composição com uma aplicação linear) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E e F espaços de Banach e $\alpha: E \rightarrow F$ uma aplicação linear contínua. Se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação integrável, então $\alpha \circ f: X \rightarrow F$ é também uma aplicação integrável e

$$\int \alpha(f(x)) d\mu(x) = \alpha \left(\int f(x) d\mu(x) \right).$$

Em particular, se considerarmos num espaço de Banach outra norma equivalente⁶¹, uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é integrável relativamente à primeira norma se, e só se, for integrável relativamente à segunda norma e então o

⁶¹Que o torna portanto também um espaço de Banach distinto, uma vez que a sucessões convergentes para um dado vetor e as sucessões de Cauchy são as mesmas para duas normas equivalentes.

integral é o mesmo dos dois pontos de vista (a aplicação identidade $I_E: E \rightarrow E$ é linear contínua de cada uma das normas para a outra).

Dem: Seja $M \geq 0$ tal que, para cada $w \in E$, $\|\alpha(w)\| \leq M\|w\|$. Uma vez que $\alpha \circ f$ é a composta da aplicação contínua α com a aplicação topologicamente mensurável f , $\alpha \circ f$ é também topologicamente mensurável e tem-se

$$\int \|\alpha(f(x))\| d\mu(x) \leq \int M\|f(x)\| d\mu(x) = M \int \|f(x)\| d\mu(x) < +\infty,$$

o que mostra que $\alpha \circ f$ é também uma aplicação integrável. Seja agora $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão dominada de aplicações em escada $f_n: X \rightarrow E$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para cada $x \in X$. Sendo $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável com $\int \varphi d\mu < +\infty$ tal que, para cada $x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$, vem $\|\alpha(f_n(x))\| \leq M\|f_n(x)\| \leq M\varphi(x)$, com $\int M\varphi d\mu = M \int \varphi d\mu < +\infty$, o que mostra que a sucessão dos $\alpha \circ f_n: X \rightarrow F$ é também dominada. Tendo em conta II.2.25, os $\alpha \circ f_n$ são aplicações em escada, com $\alpha(f_n(x)) \rightarrow \alpha(f(x))$, e portanto

$$\begin{aligned} \int \alpha(f(x)) d\mu(x) &= \lim \int \alpha(f_n(x)) d\mu(x) = \lim \alpha \left(\int f_n(x) d\mu(x) \right) = \\ &= \alpha \left(\lim \int f_n(x) d\mu(x) \right) = \alpha \left(\int f(x) d\mu(x) \right). \quad \square \end{aligned}$$

II.2.36 (Corolário) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach sobre \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Tem-se então:

a) Se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação integrável e $a \in \mathbb{K}$, então é também integrável a aplicação $af: X \rightarrow E$, $x \mapsto af(x)$, e

$$\int af(x) d\mu(x) = a \int f(x) d\mu(x);$$

b) Se $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação integrável e $w \in E$, então é também integrável a aplicação $fw: X \rightarrow E$, $x \mapsto f(x)w$, e

$$\int f(x)w d\mu(x) = \left(\int f(x) d\mu(x) \right) w.$$

Dem: Basta considerar, para a), a aplicação linear contínua $E \rightarrow E$, $z \mapsto az$, e, para b), a aplicação linear contínua $\mathbb{K} \rightarrow E$, $b \mapsto bw$. \square

II.2.37 (Corolário) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $F \subset E$ um subespaço vetorial fechado que é, em particular, também um espaço de Banach. Se $f: X \rightarrow F$ é uma aplicação, então f é integrável quando se considera F como espaço de chegada, se, e só se, é integrável quando se considera E como espaço de chegada e então o integral $\int_X f(x) d\mu(x)$ é o mesmo nos dois contextos, em particular este integral pertence a F .

Dem: O facto de F ser fechado, em particular um boreliano de E , permite-nos deduzir, tendo em conta I.5.5 e I.2.9, que f é mensurável de X para F se, e só se, é mensurável de X para E . O facto de $f(X)$ ser separável é uma propriedade da topologia induzida de $f(X)$ e não depende assim de se considerar F ou E como espaço de chegada. A propriedade de se ter $\int_X \|f(x)\| d\mu(x) < +\infty$ também não depende de qual o espaço de chegada considerado. O facto de o valor do integral ser o mesmo nos dois contextos resulta de aplicar II.2.35, considerando para α a aplicação linear contínua inclusão de F em E . \square

II.2.38 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável. É então também integrável, a função $X \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ e

$$\left\| \int f(x) d\mu(x) \right\| \leq \int \|f(x)\| d\mu(x).$$

Dem: O facto de f ser integrável implica, por definição que a função mensurável $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|f(x)\|$ tem integral finito, ou seja, é integrável. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão dominada de aplicações em escada $f_n: X \rightarrow E$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$. Seja $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mensurável, com $\int \varphi d\mu < +\infty$, tal que $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$. Tendo em conta II.2.27, tem-se, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(1) \quad \left\| \int f_n(x) d\mu(x) \right\| \leq \int \|f_n(x)\| d\mu(x).$$

Uma vez que, por definição, tem-se $\int f(x) d\mu(x) = \lim \int f_n(x) d\mu(x)$, e portanto também $\left\| \int f(x) d\mu(x) \right\| = \lim \left\| \int f_n(x) d\mu(x) \right\|$ e que, pelo teorema da convergência dominada em II.1.34, por ser $\|f_n(x)\| \rightarrow \|f(x)\|$, para cada $x \in X$, $\int \|f_n(x)\| d\mu(x) \rightarrow \int \|f(x)\| d\mu(x)$, concluímos de (1) que

$$\left\| \int f(x) d\mu(x) \right\| \leq \int \|f(x)\| d\mu(x). \quad \square$$

II.2.39 (**Teorema da convergência dominada**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão dominada de aplicações integráveis $f_n: X \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in X$, a sucessão dos $f_n(x)$ tenha um limite $f(x)$ em E . Tem-se então que a aplicação $f: X \rightarrow E$ assim definida é integrável e

$$\int f(x) d\mu(x) = \lim \int f_n(x) d\mu(x).$$

Dem: Seja $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável, com $\int \varphi d\mu < +\infty$ tal que, para cada $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$, donde também $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$, por ser $\|f_n(x)\| \rightarrow \|f(x)\|$. Tendo em conta II.2.13, $f: X \rightarrow E$ é topologica-

mente mensurável, e portanto integrável, uma vez que

$$\int \|f(x)\| d\mu(x) \leq \int \varphi(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Considerando as aplicações mensuráveis $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|f_n(x) - f(x)\|$, o facto de se ter, para cada $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0$ e

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x)\| + \|f(x)\| \leq 2\varphi(x),$$

com $\int 2\varphi(x) d\mu(x) = 2\int \varphi(x) d\mu(x) < +\infty$, implica, pelo teorema da convergência dominada em II.1.34,

$$\int \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) \rightarrow \int 0 d\mu(x) = 0$$

e portanto, por ser

$$\begin{aligned} \left\| \int f_n(x) d\mu(x) - \int f(x) d\mu(x) \right\| &= \left\| \int f_n(x) - f(x) d\mu(x) \right\| \\ &\leq \int \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x), \end{aligned}$$

também

$$\left\| \int f_n(x) d\mu(x) - \int f(x) d\mu(x) \right\| \rightarrow 0,$$

o que prova a convergência no enunciado. \square

II.2.40 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável. Para cada $A \subset X$, com $A \in \mathcal{M}$, podemos considerar o espaço de medida restrição $(A, \mathcal{M}_{/A}, \mu_{/A})$ e vêm integráveis as aplicações $f_{/A}: A \rightarrow E$ e $\mathbb{I}_A f: X \rightarrow E$. Podemos então definir uma aplicação $\mu_{(f)}: \mathcal{M} \rightarrow E$ por

$$\mu_{(f)}(A) = \int_A f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \int_X \mathbb{I}_A(x) f(x) d\mu(x).$$

Esta aplicação verifica $\mu_{(f)}(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$, em particular $\mu_{(f)}(\emptyset) = 0$, e, qualquer que seja a família finita $(A_j)_{j \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois,

$$\mu_{(f)}\left(\bigcup_{j \in I} A_j\right) = \sum_{j \in I} \mu_{(f)}(A_j).^{62}$$

⁶²Comparar com II.1.22. Repare-se que não enunciamos aqui uma propriedade de aditividade numerável, uma vez que não sabemos o que é a soma de uma família infinita de vetores do espaço de Banach E . Fa-lo-emos, no entanto, adiante em II.2.50.

Dem: Começemos por verificar que, se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação em escada, então $f_{/A}: A \rightarrow E$ e $\mathbb{I}_A f: X \rightarrow E$ são aplicações em escada e

$$(1) \quad \int_A f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \int_X \mathbb{I}_A(x) f(x) d\mu(x).$$

Seja então $(X_k)_{k \in K}$ uma família finita de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e de união X tal que em cada X_k a aplicação f tome um valor constante $w_k \in E$ e lembremos que, sendo K_0 o conjunto dos $k \in K$ tais que $\mu(X_k) < +\infty$, tem-se $w_k = 0$, para cada $k \notin K_0$ (cf. II.2.17). Tem-se então que $f_{/A}: A \rightarrow E$ toma os valores constantes w_k nos conjuntos mensuráveis $A \cap X_k$, que são disjuntos dois a dois e de união A , e que só podem verificar $\mu(A \cap X_k) = +\infty$ se for $\mu(X_k) = +\infty$, pelo que deduzimos de II.2.22 que $f_{/A}: A \rightarrow E$ é uma aplicação em escada, e, sendo $K'_0 \supset K_0$ o conjunto dos $k \in K$ tais que $\mu(A \cap X_k) < +\infty$, vem, por definição,

$$(2) \quad \int_A f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \sum_{k \in K'_0} \mu(A \cap X_k) w_k.$$

Analogamente, $\mathbb{I}_A f: X \rightarrow E$ toma os valores constantes w_k em $A \cap X_k$ e o valor constante 0 em $X \setminus A$ pelo que, uma vez que temos mais uma vez conjuntos disjuntos dois a dois e de união X , concluímos que esta é uma aplicação em escada e que, por definição,

$$(3) \quad \int_X \mathbb{I}_A(x) f(x) d\mu(x) = \sum_{k \in K'_0} \mu(A \cap X_k) w_k$$

(no caso em que $\mu(X \setminus A) < +\infty$ faltou, no segundo membro, a parcela $\mu(X \setminus A) \cdot 0 = 0$, que não altera este). Comparando as igualdades (2) e (3), obtemos assim (1).

Passemos agora à prova de (1) no caso geral em que $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação integrável. Consideremos uma sucessão dominada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aplicações em escada $f_n: X \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Seja $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma aplicação mensurável, com $\int_X \varphi(x) d\mu(x) < +\infty$, tal que, para cada $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$. Uma vez que

$$\int_A \varphi_{/A}(x) d\mu_A(x) = \mu_{(\varphi)}(A) \leq \mu_{(\varphi)}(X) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) < +\infty$$

e que $\|\mathbb{I}_A(x) f_n(x)\| \leq \|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$, temos sucessões dominadas de aplicações em escada $(f_{n/A})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\mathbb{I}_A f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $f_{n/A}(x) \rightarrow f_{/A}(x)$, para cada $x \in A$, e $\mathbb{I}_A(x) f_n(x) \rightarrow \mathbb{I}_A(x) f(x)$, para cada $x \in X$, donde, pelo teorema da convergência dominada (II.2.39), $f_{/A}: A \rightarrow E$ e $\mathbb{I}_A f: X \rightarrow E$ são aplicações integráveis e

$$\int_A f_{n/A}(x) d\mu_{/A}(x) \rightarrow \int_A f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x),$$

$$\int_X \mathbb{I}_A(x) f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X \mathbb{I}_A(x) f(x) d\mu(x).$$

Uma vez que, pelo que se verificou no início, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_A f_{n/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \int_X \mathbb{I}_A(x) f_n(x) d\mu(x),$$

podemos concluir que se tem efetivamente (1), para cada função integrável $f: X \rightarrow E$ e cada $A \in \mathcal{M}$, o que nos permite definir $\mu_{(f)}(A) \in E$ por qualquer das duas expressões no enunciado.

O facto de se ter $\mu_{(f)}(A) = 0$, sempre que $\mu(A) = 0$, é uma consequência da primeira caracterização, tendo em conta II.2.33. O facto de, sempre que $(A_j)_{j \in I}$ é uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois, ter-se $\mu_{(f)}\left(\bigcup_{j \in I} A_j\right) = \sum_{j \in I} \mu_{(f)}(A_j)$ é uma consequência da segunda caracterização, tendo em conta II.2.34, uma vez que, sendo $A = \bigcup_{j \in I} A_j$, tem-se, para cada $x \in X$,

$$\mathbb{I}_A(x) f(x) = \sum_{j \in I} \mathbb{I}_{A_j}(x) f(x). \quad \square$$

II.2.41 (Nota) Analogamente ao que se disse em II.1.23, para as funções positivas, se (X, \mathcal{M}, μ) é um espaço de medida, E um espaço de Banach, $A \in \mathcal{M}$ e f é uma aplicação com valores em E , definida num subconjunto de X contendo A e cuja restrição a A seja uma aplicação integrável, usa-se a notação

$$\int_A f(x) d\mu(x)$$

para significar $\int_A f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x)$. No caso em que $X = \mathbb{R}$ e μ é a medida de Lebesgue λ nos borelianos de \mathbb{R} , escreve-se também simplesmente

$$\int_A f(x) dx.$$

Com esta notação, a primeira caracterização de $\mu_{(f)}(A)$ em II.2.40 pode também ser escrita na forma

$$\mu_{(f)}(A) = \int_A f(x) d\mu(x).$$

II.2.42 (**Corolário**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach, $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável e $Y \subset X$ um conjunto mensurável com $\mu(Y) = 0$. Tem-se então

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{X \setminus Y} f(x) d\mu(x).$$

Dem: Tendo em conta II.2.40, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu(x) &= \mu_{(f)}(X) = \mu_{(f)}(X \setminus Y) + \mu_{(f)}(Y) = \\ &= \mu_{(f)}(X \setminus Y) = \int_{X \setminus Y} f(x) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

II.2.43 (**Corolário**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach, $f, \hat{f}: X \rightarrow E$ duas aplicações integráveis tais que $f(x) = \hat{f}(x)$ quase sempre (cf. II.1.28). Tem-se então

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X \hat{f}(x) d\mu(x).$$

Dem: Sendo $Y \in \mathcal{M}$ com $\mu(Y) = 0$ tal que, para cada $x \in X \setminus Y$, $f(x) = \hat{f}(x)$, vem

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu(x) &= \int_{X \setminus Y} f(x) d\mu(x) = \int_{X \setminus Y} \hat{f}(x) d\mu(x) = \\ &= \int_X \hat{f}(x) d\mu(x). \quad \square \end{aligned}$$

A propriedade de monotonia do integral, enunciada para funções positivas na alínea b) de II.1.16, não faz em geral sentido para funções com valores num espaço de Banach, mas já o faz no caso em que esse espaço de Banach é \mathbb{R} , caso em que, como vamos ver, é verdadeira e tem uma justificação muito simples.

II.2.44 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ duas aplicações integráveis tais que, para cada $x \in X$, $f(x) \leq g(x)$. Tem-se então

$$\int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X g(x) d\mu(x)$$

e, no caso em que $\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$, tem-se necessariamente $f(x) = g(x)$ quase sempre.

Dem: Pode-se escrever $g(x) = f(x) + (g(x) - f(x))$, com $g(x) - f(x) \geq 0$ e $g - f: X \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, o que implica que $g - f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é mensurável e com $0 \leq \int g(x) - f(x) d\mu(x)$. Tem-se

$$\int g(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) + \int g(x) - f(x) d\mu(x),$$

o que implica que $\int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X g(x) d\mu(x)$ e que, se for

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x),$$

tem-se $\int g(x) - f(x) d\mu(x) = 0$, portanto, por II.1.30, $g(x) - f(x) = 0$ quase sempre, ou seja, $f(x) = g(x)$ quase sempre. \square

No contexto das funções positivas, viu-se em II.1.30 que, se $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável com $\int_X f(x) d\mu(x) = 0$, então $f(x) = 0$ quase sempre. É claro que, nesta forma, o resultado deixa de ser válido para aplicações integráveis com valores num espaço de Banach (considerar, por exemplo uma função em escada que tome valores simétricos em dois conjuntos com igual medida e se anule no restante do domínio). O melhor que conseguimos nesta direção vai ser um corolário do resultado que apresentamos em seguida.

II.2.45 (Do integral para a aplicação) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ um semianel tal que a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} seja \mathcal{M} e que a restrição de μ a \mathcal{S} seja σ -finita (cf. I.4.9).⁶³ Sejam E um espaço de Banach, $C \subset E$ um subconjunto fechado e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável tal que, sempre que $A \in \mathcal{S}$, se tenha $\mu(A) < +\infty$, $f|_A: A \rightarrow E$ integrável e, se $\mu(A) > 0$,

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x) \in C.$$

Tem-se então $f(x) \in C$ quase sempre, isto é, existe $Y \in \mathcal{M}$ com $\mu(Y) = 0$ tal que $f(x) \in C$, para cada $x \in X \setminus Y$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em duas partes:

1) Sejam $w \in E$ e $r > 0$ tais que $B_r(w) \subset E \setminus C$, onde $B_r(w)$ é a bola aberta de E com centro w e raio r . Vamos mostrar que se tem quase sempre $f(x) \notin B_r(w)$.

Subdem: Seja $g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ a aplicação mensurável definida por $g(x) = \|f(x) - w\|$ e reparemos que, para cada $A \in \mathcal{S}$, tem-se

⁶³Como exemplos típicos de situações deste tipo, temos aquele em que μ é uma medida σ -finita numa σ -álgebra \mathcal{M} e tomamos para \mathcal{S} a classe dos $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) < +\infty$ (cf. I.4.11) e aquele em que \mathcal{M} é a σ -álgebra dos borelianos de um intervalo aberto \mathcal{E} de \mathbb{R} , μ é a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a uma certa função g e \mathcal{S} é a classe dos \mathcal{E} -intervalos semiabertos (cf. I.4.10). Repare-se que nestes exemplos os conjuntos dos semianel têm todos medida finita.

$$\begin{aligned}\mu_{(g)}(A) &= \int_A g(x) d\mu(x) \leq \int_A \|f(x)\| + \|w\| d\mu(x) = \\ &= \int_A \|f(x)\| d\mu(x) + \mu(A)\|w\| < +\infty,\end{aligned}$$

o que implica, em particular, que a restrição a \mathcal{S} da medida $\mu_{(g)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é também σ -finita. Seja $A \in \mathcal{S}$ arbitrário. Se $\mu(A) > 0$, o facto de se ter $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x) \in C$ implica que

$$\left\| \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x) \right) - w \right\| \geq r$$

donde

$$\begin{aligned}\mu_{(g)}(A) &= \int_A \|f(x) - w\| d\mu(x) \geq \left\| \int_A f(x) - w d\mu(x) \right\| = \\ &= \left\| \int_A f(x) d\mu(x) - \mu(A)w \right\| = \\ &= \mu(A) \left\| \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x) \right) - w \right\| \geq r\mu(A),\end{aligned}$$

e portanto $\mu_{(g)}(A) \geq r\mu(A)$, desigualdade que é também válida, trivialmente, no caso em que $\mu(A) = 0$. Uma vez que a medida $r\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tem também restrição σ -finita ao semianel \mathcal{S} , podemos deduzir de I.4.17 que a desigualdade $\mu_{(g)}(A) \geq r\mu(A)$ é válida, mais geralmente, para todo o $A \in \mathcal{M}$.

Seja agora $A \in \mathcal{M}$,

$$A = \{x \in X \mid f(x) \in B_r(w)\} = \{x \in X \mid g(x) < r\}$$

e seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ tal que $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ e $\mu(X_j) < +\infty$. Uma vez que, para cada $j \in J$, o conjunto

$X_j \cap A \in \mathcal{M}$ verifica $\mu(X_j \cap A) < +\infty$, deduzimos de II.2.44 que

$$\mu_{(g)}(X_j \cap A) = \int_{X_j \cap A} g(x) d\mu(x) \leq \int_{X_j \cap A} r d\mu(x) = r\mu(X_j \cap A)$$

pelo que, por ser também, como vimos atrás, $\mu_{(g)}(X_j \cap A) \geq r\mu(X_j \cap A)$, temos mesmo $\mu_{(g)}(X_j \cap A) = r\mu(X_j \cap A)$, donde, mais uma vez pelo mesmo resultado, tem que ser $g(x) = r$ quase sempre em $X_j \cap A$, isto é, $\mu(X_j \cap A) = 0$. Uma vez que $A = \bigcup_{j \in J} (X_j \cap A)$, concluímos que

$$\mu(A) \leq \sum_{j \in J} \mu(X_j \cap A) = 0,$$

o que mostra que se tem efetivamente $\|f(x) - w\| \geq r$ quase sempre em X .

2) Vamos agora utilizar a conclusão de 1) para justificar a propriedade do enunciado. Afastando já o caso trivial em que $f(X) \subset C$, seja Z uma parte contável densa de $f(X) \setminus C$ e seja $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão cujo conjunto de termos seja o conjunto contável das bolas abertas de centro num ponto de Z e raio racional estritamente positivo, que estão contidas em $E \setminus C$. Para cada $x \in X$ tal que $f(x) \notin C$, podemos considerar $r' > 0$ tal que $B_{r'}(f(x)) \subset E \setminus C$, um racional $r > 0$ com $r < r'/2$ e um ponto $z \in B_r(f(x)) \cap Z$, tendo-se então $f(x) \in B_r(z)$ e $B_r(z) \subset B_{2r}(f(x)) \subset E \setminus C$, o que mostra que $B_r(z)$ é um dos conjuntos B_n . Provámos assim que $f(X) \setminus C \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. O que verificámos em 1) garante-nos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(x) \notin B_n$ quase sempre, isto é, existe $Y_n \in \mathcal{M}$ com $\mu(Y_n) = 0$ tal que $f(x) \notin B_n$, para cada $x \in X \setminus Y_n$. Sendo $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, tem-se $Y \in \mathcal{M}$, $\mu(Y) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Y_n) = 0$ e, para cada $x \in X \setminus Y$, $f(x) \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, portanto $f(x) \in C$. Ficou assim provado que se tem efetivamente $f(x) \in C$ quase sempre. \square

II.2.46 (**Corolário**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ um semianel tal que a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} seja \mathcal{M} e que a restrição de μ a \mathcal{S} seja σ -finita. Sejam E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável tal que, sempre que $A \in \mathcal{S}$, se tenha $\mu(A) < +\infty$, $f|_A: A \rightarrow E$ integrável e

$$\int_A f(x) d\mu(x) = 0.$$

Tem-se então $f(x) = 0$ quase sempre.

Dem: Trata-se do caso particular do resultado precedente em que se considera para C o conjunto fechado $\{0\} \subset E$. \square

Com o objetivo de generalizarmos a aditividade finita do integral, referida em II.2.40, vamos agora definir as somas de famílias, eventualmente infinitas, de vetores dum espaço de Banach, estudando especialmente o caso em que o conjunto de índices é contável.

II.2.47 (**Famílias somáveis**)⁶⁴ Sejam E um espaço de Banach e $(w_j)_{j \in J}$ uma família, finita ou infinita, de vetores de E . Diz-se que aquela família é *somável* se existir um vetor $w \in E$ com a seguinte propriedade: Qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma parte finita $I_0 \subset J$ tal que, para cada parte finita $I \subset J$ com $I_0 \subset I$,

⁶⁴Para um estudo mais aprofundado das famílias somáveis num espaço de Banach, ver, por exemplo [9].

$$\left\| w - \sum_{j \in I} w_j \right\| < \delta.$$

Tem-se então:

a) Se a família é somável, não existe mais que um vetor w com a propriedade referida, pelo que é legítimo definir a soma de uma família somável, notada

$$\sum_{j \in J} w_j$$

como sendo o único vetor w nessas condições.

b) No caso em que J é finito, qualquer família $(w_j)_{j \in J}$ é somável e tem como soma a soma $\sum_{j \in J} w_j$, no sentido algébrico (se isto não acontecesse, a notação seria ambígua).

c) No caso em que $E = \mathbb{R}$ e $(a_j)_{j \in J}$ é uma família de elementos de \mathbb{R}_+ , então a família é somável se, e só se, no sentido de I.1.6, $\sum_{j \in J} a_j < +\infty$ e, nesse caso a soma da família é igual à soma $\sum_{j \in J} a_j$ no sentido referido (por outras

palavras, mais uma vez, a notação não é ambígua).

d) (Mudança de índices) Sejam $(w_j)_{j \in J}$ uma família de vetores de E , J' outro conjunto de índices e $\varphi: J' \rightarrow J$ uma aplicação bijetiva. Tem-se então que a família $(w_j)_{j \in J}$ é somável se, e só se, a família $(w_{\varphi(i)})_{i \in J'}$ é somável e, quando isso acontecer,

$$\sum_{j \in J} w_j = \sum_{i \in J'} w_{\varphi(i)}.$$

e) (Séries e famílias somáveis) Sejam E um espaço de Banach e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família somável de vetores de E indexada em \mathbb{N} . Sendo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{p=1}^n w_p$$

(a soma parcial no contexto das séries), tem-se então que $S_n \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$.⁶⁵

Dem: **a)** Suponhamos que w e w' eram vetores distintos com a mesma

⁶⁵Por outras palavras, se a família é somável então a série é convergente e a soma da família coincide com a soma da série. Note-se que não afirmamos a recíproca: Por exemplo, no contexto de \mathbb{R} , é bem conhecido que a série harmónica alternada, correspondente à família que a n associa $(-1)^n \frac{1}{n}$, é convergente (as correspondentes somas parciais S_n convergem) e, no entanto, esta família não é somável, uma vez que se podem considerar somas finitas com valores tão grandes quanto se queira, cujo conjunto de índices contenha um conjunto finito dado.

propriedade e seja $\delta = \frac{1}{2}\|w - w'\|$. Podíamos escolher partes finitas I_0 e I'_0 de J tais que, para cada parte finita $I \supset I_0$, e cada parte finita $I' \supset I'_0$,

$$\left\|w - \sum_{j \in I} w_j\right\| < \delta, \quad \left\|w' - \sum_{j \in I'} w_j\right\| < \delta.$$

Tomando então a parte finita $I = I_0 \cup I'_0$, tinha-se então

$$\begin{aligned} 2\delta &= \|w - w'\| = \left\|\left(w - \sum_{j \in I} w_j\right) - \left(w' - \sum_{j \in I} w_j\right)\right\| \leq \\ &\leq \left\|w - \sum_{j \in I} w_j\right\| + \left\|w' - \sum_{j \in I} w_j\right\| < \delta + \delta = 2\delta, \end{aligned}$$

o que era absurdo.⁶⁶

b) Basta reparar que, para cada $\delta > 0$, podemos tomar para I_0 o próprio J .

c) Suponhamos que $\sum_{j \in J} a_j = a < +\infty$. Dado $\delta > 0$, a definição de a como

um supremo garante a existência de uma parte finita $I_0 \subset J$ tal que $\sum_{j \in I_0} a_j >$

$a - \delta$ e o facto de se ter $a_j \geq 0$ implica então que, para cada parte finita $I \supset I_0$, tem-se

$$a - \delta < \sum_{j \in I_0} a_j \leq \sum_{j \in I} a_j \leq a,$$

donde $|a - \sum_{j \in I} a_j| < \delta$. Ficou assim provado que a família $(a_j)_{j \in J}$ é somável

e de soma a . Suponhamos, reciprocamente, que a família é somável e com soma a . Podemos então considerar uma parte finita $I_0 \subset J$ tal que, para cada parte finita $I \supset I_0$, $a - 1 < \sum_{j \in I} a_j < a + 1$. Tem-se então, para uma parte

finita arbitrária I , por $I_0 \cup I$ ser uma parte finita contendo I_0 ,

$$\sum_{j \in I} a_j \leq \sum_{j \in I_0 \cup I} a_j < a + 1,$$

e portanto, tomando o supremo, $\sum_{j \in J} a_j \leq a + 1 < +\infty$.

d) O resultado é claro no caso em que J é finito (cf. a discussão feita na secção I.1 no contexto de $\overline{\mathbb{R}}_+$) e, no caso geral, resulta de termos uma bijeção natural das partes finitas de J para as partes finitas de J' , $I \mapsto \varphi^{-1}(I)$.

e) Temos uma consequência direta do facto de, para cada parte finita $I \subset \mathbb{N}$,

⁶⁶Quem conhecer as sucessões generalizadas terá já reconhecido que o facto de uma família ser somável é equivalente a uma certa sucessão generalizada ser convergente e que o que acabámos de fazer foi demonstrar, neste caso particular, a propriedade geral de unicidade dos limites para as sucessões generalizadas.

existir n_0 tal que $I \subset \{1, \dots, n_0\}$ e de se ter então, para cada $n \geq n_0$, também $I \subset \{1, \dots, n\}$. \square

II.2.48 (Famílias somáveis e o integral para a medida de contagem) Sejam E um espaço de Banach, J um conjunto de índices e $(w_j)_{j \in J}$ uma família de vetores de E (ou seja, o que é o mesmo, uma aplicação $J \rightarrow E$). Seja ν a medida de contagem na σ -álgebra $\mathcal{P}(J)$ de todas as partes de J . Tem-se então que a família é uma aplicação integrável $J \rightarrow E$ se, e só se

$$\sum_{j \in J} \|w_j\| < +\infty,$$

e, quando isso acontecer, a família é somável e com soma

$$\sum_{j \in J} w_j = \int_J w_j d\nu(j),$$

tendo-se, em particular,

$$\left\| \sum_{j \in J} w_j \right\| \leq \sum_{j \in J} \|w_j\|.$$

Às famílias $(w_j)_{j \in J}$ com $\sum_{j \in J} \|w_j\| < +\infty$ dá-se o nome de *famílias absolutamente somáveis*.⁶⁷

Dem: Reparemos que, no caso em que J é finito, a aplicação $(w_j)_{j \in J}$ é em escada, em particular integrável, por ter o valor constante w_j em cada conjunto $\{j\}$ de medida 1, pelo que obtemos

$$\sum_{j \in J} w_j = \sum_{j \in J} \nu(\{j\})w_j = \int_J w_j d\nu(j).$$

Passemos ao caso geral em que J é arbitrário. Qualquer família $(w_j)_{j \in J}$ de vetores de E é evidentemente mensurável como aplicação. Tendo em conta II.1.32, concluímos assim que a família é uma aplicação integrável se, e só se,

$$\sum_{j \in J} \|w_j\| = \int_J \|w_j\| d\mu(j) < +\infty,$$

já que esta condição implica, em particular, que $\|w_j\| = 0$ para cada j fora de uma certa parte contável de J , pelo que o conjunto dos w_j é contável e portanto a família é mesmo uma aplicação topologicamente mensurável.

⁶⁷Comparar com II.1.32. Note-se que não afirmamos que uma família somável tenha que ser absolutamente somável (embora se possa provar que isso acontece no caso em que $E = \mathbb{R}$ ou, mais geralmente, em que E tenha dimensão finita, ver, por exemplo, os exercícios da secção 2.5 de [9]).

Suponhamos então que esta condição se verifica. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Seja $I_0 \subset J$ finito tal que

$$\sum_{j \in I_0} \|w_j\| > \sum_{j \in J} \|w_j\| - \delta,$$

portanto

$$\sum_{j \in J \setminus I_0} \|w_j\| < \delta.$$

Para cada parte finita $I \subset J$, com $I \supset I_0$, tem-se então $J \setminus I \subset J \setminus I_0$, donde também

$$\sum_{j \in J \setminus I} \|w_j\| < \delta$$

e daqui deduzimos, tendo em conta II.2.40, que

$$\begin{aligned} \left\| \int_J w_j d\nu(j) - \sum_{j \in I} w_j \right\| &= \left\| \int_J w_j d\nu(j) - \int_I w_j d\nu(j) \right\| = \\ &= \left\| \int_{J \setminus I} w_j d\nu(j) \right\| \leq \int_{J \setminus I} \|w_j\| d\nu(j) = \\ &= \sum_{j \in J \setminus I} \|w_j\| < \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que a família é, de facto, somável, e com $\int_J w_j d\nu(j)$ como soma. A desigualdade $\left\| \sum_{j \in J} w_j \right\| \leq \sum_{j \in J} \|w_j\|$ resulta de II.2.38. \square

II.2.49 (O integral de uma soma contável) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $(f_j)_{j \in J}$ uma família contável de aplicações integráveis $f_j: X \rightarrow E$ tal que exista uma aplicação mensurável $g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $\int g d\mu < +\infty$ e, para cada $x \in X$,

$$\sum_{j \in J} \|f_j(x)\| \leq g(x)$$

(em particular, a família $(f_j(x))_{j \in J}$ de vetores de E é absolutamente somável). Sendo então $f: X \rightarrow E$ a aplicação definida por $f(x) = \sum_{j \in J} f_j(x)$,

tem-se que f é integrável e

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_X f_j(x) d\mu(x),$$

em que a soma do segundo membro é a de uma família absolutamente somável de vetores de E .

Dem: Começemos por notar que, no caso em que o conjunto dos índices J é finito, o resultado é uma consequência de II.2.34. Resta-nos mostrar o resultado no caso em que J é numerável, caso em que, por uma mudança do conjunto de índices, podemos supor que $J = \mathbb{N}$. Nesse caso, sabemos que se tem $f(x) = \lim s_n(x)$ onde $s_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)$, e portanto os $s_n: X \rightarrow E$ são aplicações integráveis e com integrais

$$\int_X s_n(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n \int_X f_j(x) d\mu(x).$$

Uma vez que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|s_n(x)\| \leq \sum_{j=1}^n \|f_j(x)\| \leq \sum_{j \in J} \|f_j(x)\| \leq g(x),$$

podemos aplicar o teorema da convergência dominada em II.2.39 para concluir que $f: X \rightarrow E$ é integrável e que

$$(1) \quad \int_X f(x) d\mu(x) = \lim \int_X s_n(x) d\mu(x) = \lim \sum_{j=1}^n \int_X f_j(x) d\mu(x).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \left\| \int_X f_j(x) d\mu(x) \right\| &\leq \sum_{j \in J} \int_X \|f_j(x)\| d\mu(x) = \\ &= \int_X \sum_{j \in J} \|f_j(x)\| d\mu(x) \leq \\ &\leq \int_X g(x) d\mu(x) < +\infty \end{aligned}$$

o que mostra que a família dos integrais $\int_X f_j(x) d\mu(x)$ é absolutamente somável, e portanto

$$\lim \sum_{j=1}^n \int_X f_j(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_X f_j(x) d\mu(x),$$

o que, tendo em conta (1), implica a conclusão pretendida. \square

II.2.50 (Corolário) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável. Notemos, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\mu_{(f)}(A) = \int_A f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \int_X \mathbb{I}_A(x) f(x) d\mu(x)$$

(cf. II.2.40). Qualquer que seja a família contável $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M}

disjuntos dois a dois, tem-se então

$$\mu_{(f)}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu_{(f)}(A_i),$$

onde a soma do segundo membro é a de uma família absolutamente somável de vetores de E .

Dem: Pondo $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, temos uma consequência direta do resultado prece-

dente, considerando para $g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função definida por $g(x) = \|f(x)\|$ e para $f_i: X \rightarrow E$ a aplicação definida por $f_i(x) = \mathbb{I}_{A_i}(x)f(x)$, reparando que, para cada $x \in X \setminus A$, $f_i(x) = 0$, para todo o j , e, para cada $x \in A_{i_0}$, $f_{i_0}(x) = f(x)$ e $f_i(x) = 0$, para cada $i \neq i_0$, em qualquer caso $\mathbb{I}_A(x)f(x)$ é a soma dos $f_i(x)$ e, por outro lado, $\sum_{i \in I} \|f_i(x)\| \leq \|f(x)\|$. \square

II.2.51 (Associatividade contável nas famílias absolutamente somáveis)

Sejam E um espaço de Banach e $(w_j)_{j \in J}$ uma família absolutamente somável de vetores de E . Seja $(J_i)_{i \in I}$ uma família contável de partes de J , disjuntas duas a duas e de união J . Tem-se então

$$\sum_{j \in J} w_j = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J_i} w_j \right),$$

onde cada um dos somatórios aparecendo no segundo membro é o de uma família absolutamente somável de vetores de E .

Dem: Considerando na σ -álgebra de todas as partes de J a medida de contagem ν , temos uma consequência do corolário II.2.50 uma vez que, por II.2.48,

$$\sum_{j \in J} w_j = \int_J w_j d\nu(j), \quad \sum_{j \in J_i} w_j = \int_{J_i} w_j d\nu(j).$$

II.2.52 (Nota sobre produtos de espaços de Banach)

Recordemos que, se E_1, E_2, \dots, E_N são espaços de Banach, então o produto cartesiano $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N$ é também um espaço de Banach, com qualquer das normas que define a topologia produto, uma das quais é a definida por

$$\|(w_1, w_2, \dots, w_N)\| = \max\{\|w_1\|, \|w_2\|, \dots, \|w_N\|\}.$$

Recordemos também que, neste contexto, temos, para cada $1 \leq j \leq N$, aplicações lineares contínuas

$$\begin{aligned} \pi_j: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N &\rightarrow E_j, \\ \iota_j: E_j &\rightarrow E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N, \end{aligned}$$

(as *projeções canónicas* e as *injeções canónicas*) definidas, respetivamente, por

$$\begin{aligned}\pi_j(w_1, w_2, \dots, w_N) &= w_j, \\ \iota_j(w_j) &= (0, \dots, 0, w_j, 0, \dots, 0).\end{aligned}$$

Um dos casos particulares da situação referida é aquele em que $E_j = \mathbb{R}$, para todo o j , caso em que o produto cartesiano é o espaço \mathbb{R}^N e a norma considerada em \mathbb{R}^N é a chamada “norma do máximo”, notada frequentemente $\|\cdot\|_\infty$.

II.2.53 (Integração com valores num produto) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E_1, E_2, \dots, E_N espaços de Banach e, para cada $1 \leq j \leq N$, $f_j: X \rightarrow E_j$ uma aplicação. Seja $f: X \rightarrow E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N$ a aplicação definida por

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)).$$

Tem-se então que f é uma aplicação integrável se, e só se, para cada $1 \leq j \leq N$, f_j é integrável e, quando isso acontecer,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \left(\int_X f_1(x) d\mu(x), \int_X f_2(x) d\mu(x), \dots, \int_X f_N(x) d\mu(x) \right).$$

Dem: Temos uma consequência da nota precedente, de II.2.35 e de II.2.34, uma vez que se tem $f_j(x) = \pi_j(f(x))$ e

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \iota_j(f_j(x)). \quad \square$$

Tal como fizémos na secção II.1, vamos agora examinar alguns resultados que estudam o comportamento do integral quando se altera a medida considerada.

II.2.54 (O integral para a medida $\mu_{(\varphi)}$) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função mensurável e consideremos a correspondente medida $\mu_{(\varphi)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida em II.1.22.⁶⁸ Sejam E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. É então também topologicamente mensurável a aplicação $\varphi f: X \rightarrow E$, definida por $x \mapsto \varphi(x)f(x)$, a aplicação f é integrável relativamente à medida μ_φ se, e só se, φf é integrável relativamente à medida μ e, quando isso acontecer,

$$\int f(x) d\mu_{(\varphi)}(x) = \int \varphi(x)f(x) d\mu(x).$$

⁶⁸Repare-se que, ao contrário do que acontecia em II.1.35, não permitimos aqui que $\varphi(x)$ possa tomar o valor $+\infty$, visto que não fez sentido multiplicar um vetor de E por $+\infty$.

Dem: O facto de $\varphi f: X \rightarrow E$ ser topologicamente mensurável é uma consequência da alínea c) de II.2.9. O facto de f ser integrável relativamente a $\mu_{(\varphi)}$ se, e só se φf é integrável relativamente a μ é uma consequência de II.1.35, uma vez que podemos escrever

$$\int \|f(x)\| d\mu_{(\varphi)}(x) = \int \varphi(x) \|f(x)\| d\mu(x) = \int \|\varphi(x)f(x)\| d\mu(x).$$

Examinemos agora o caso particular em que $f: X \rightarrow E$ é uma função em escada, relativamente a $\mu_{(\varphi)}$. Tendo em conta II.2.17, existe então uma família finita $(X_j)_{j \in J}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que em cada X_j a aplicação f tome o valor constante w_j , tendo-se $w_j = 0$, sempre que $\mu_{(\varphi)}(X_j) = +\infty$. Tal como referido em II.2.18, sendo J_0 o conjunto dos índices j tais que $\mu_{(\varphi)}(X_j) < +\infty$, tem-se, para cada $x \in X$,

$$f(x) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{X_j}(x) w_j = \sum_{j \in J_0} \mathbb{I}_{X_j}(x) w_j$$

e daqui decorre, tendo em conta II.2.34 e a alínea b) de II.2.36, que

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) f(x) d\mu(x) &= \int \sum_{j \in J_0} \varphi(x) \mathbb{I}_{X_j}(x) w_j d\mu(x) = \\ &= \sum_{j \in J_0} \left(\int \varphi(x) \mathbb{I}_{X_j}(x) d\mu(x) \right) w_j = \\ &= \sum_{j \in J_0} \mu_{(\varphi)}(X_j) w_j = \int f(x) d\mu_{(\varphi)}(x). \end{aligned}$$

Passemos enfim ao caso geral em que $f: X \rightarrow E$ é integrável relativamente a $\mu_{(\varphi)}$. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão dominada de funções em escada relativamente a $\mu_{(\varphi)}$ tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Sendo $\psi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mensurável e com $\int \psi(x) d\mu_{(\varphi)}(x) < +\infty$ e $\|f_n(x)\| \leq \psi(x)$, tem-se, tendo em conta II.1.35,

$$\int \varphi(x) \psi(x) d\mu(x) = \int \psi(x) d\mu_{(\varphi)}(x) < +\infty,$$

$\varphi(x) f_n(x) \rightarrow \varphi(x) f(x)$ e $\|\varphi(x) f_n(x)\| \leq \varphi(x) \psi(x)$. Uma vez que, como vimos no início, os φf_n são aplicações integráveis relativamente a μ e com

$$\int \varphi(x) f_n(x) d\mu(x) = \int f_n(x) d\mu_{(\varphi)}(x)$$

podemos aplicar o teorema da convergência dominada em II.2.39 para

deduzir que

$$\begin{aligned} \int \varphi(x)f(x) d\mu(x) &= \lim \int \varphi(x)f_n(x) d\mu(x) = \lim \int f_n(x) d\mu_{(\varphi)}(x) = \\ &= \int f(x) d\mu_{(\varphi)}(x). \end{aligned} \quad \square$$

II.2.55 (Soma de medidas e produto por uma constante) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, $\mu, \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas e $a \in \mathbb{R}_+$, e consideremos as medidas $\mu + \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e $a\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (cf. I.2.16). Sejam E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável relativamente a ambas as medidas μ e μ' . Tem-se então que f é integrável relativamente a ambas as medidas $\mu + \mu'$ e $a\mu$ e

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d(\mu + \mu')(x) &= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X f(x) d\mu'(x), \\ \int_X f(x) d(a\mu)(x) &= a \int_X f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Dem: O facto de f ser integrável relativamente a $\mu + \mu'$ e a $a\mu$ resulta de que, tendo em conta II.1.37

$$\begin{aligned} \int_X \|f(x)\| d(\mu + \mu')(x) &= \int_X \|f(x)\| d\mu(x) + \int_X \|f(x)\| d\mu'(x) < +\infty, \\ \int_X \|f(x)\| d(a\mu)(x) &= a \int_X \|f(x)\| d\mu(x) < +\infty. \end{aligned}$$

Examinemos agora o caso em que f é uma aplicação em escada relativamente a $\mu + \mu'$ e seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que em cada X_j a aplicação f tome o valor constante w_j . Sendo J_0 o conjunto dos índices j tais que $\mu(X_j) + \mu'(X_j) < +\infty$, tem-se $w_j = 0$, para cada $j \in J \setminus J_0$ e, por definição,

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d(\mu + \mu')(x) &= \sum_{j \in J_0} (\mu(X_j) + \mu'(X_j))w_j = \\ \text{(1)} \quad &= \sum_{j \in J_0} \mu(X_j)w_j + \sum_{j \in J_0} \mu'(X_j)w_j. \end{aligned}$$

Uma vez que se tem $w_j = 0$ sempre que $\mu(X_j) = +\infty$, ou $\mu'(X_j) = +\infty$, ou $a\mu(X_j) = +\infty$, concluímos que f também é uma aplicação em escada relativamente às medidas μ , μ' e $a\mu$ e vemos que se tem

$$\begin{aligned}
 \int_X f(x) d\mu(x) &= \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j, \\
 (2) \quad \int_X f(x) d\mu'(x) &= \sum_{j \in J_0} \mu'(X_j) w_j, \\
 \int_X f(x) d(a\mu)(x) &= \sum_{j \in J_0} a\mu(X_j) w_j = a \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) w_j,
 \end{aligned}$$

onde, em cada caso, poderão ter ficado a faltar parcelas nos segundos membros, correspondentes a alguns dos índices j em $J \setminus J_0$, mas todas iguais a 0 por ser $w_j = 0$. Comparando as igualdades destacadas em (1) e (2) obtemos assim, neste caso particular, as igualdades no enunciado.

Passemos agora ao caso geral em que f é integrável relativamente a μ e a μ' , e portanto também relativamente a $\mu + \mu'$ e a $a\mu$. Relativamente a $\mu + \mu'$, podemos considerar uma sucessão dominada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em escada $f_n: X \rightarrow E$ tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$, existindo assim uma função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com $\int \varphi(x) d(\mu + \mu')(x) < +\infty$, tal que $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que, por II.1.37, tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_X \varphi(x) d(\mu + \mu')(x) &= \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_X \varphi(x) d\mu'(x), \\
 \int_X \varphi(x) d(a\mu)(x) &= a \int_X \varphi(x) d\mu(x),
 \end{aligned}$$

e portanto também $\int_X \varphi(x) d\mu(x) < +\infty$, $\int_X \varphi(x) d\mu'(x) < +\infty$ e $\int_X \varphi(x) d(a\mu)(x) < +\infty$, podemos aplicar o teorema da convergência dominada e o caso já estudado das aplicações em escada para concluir que

$$\begin{aligned}
 \int_X f(x) d(\mu + \mu')(x) &= \lim \int_X f_n(x) d(\mu + \mu')(x) = \\
 &= \lim \left(\int_X f_n(x) d\mu(x) + \int_X f_n(x) d\mu'(x) \right) = \\
 &= \lim \left(\int_X f_n(x) d\mu(x) \right) + \lim \left(\int_X f_n(x) d\mu'(x) \right) = \\
 &= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X f(x) d\mu'(x)
 \end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
 \int_X f(x) d(a\mu)(x) &= \lim \int_X f_n(x) d(a\mu)(x) = \lim \left(a \int_X f_n(x) d\mu(x) \right) = \\
 &= a \lim \left(\int_X f_n(x) d\mu(x) \right) = a \int_X f(x) d\mu(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

II.2.56 (Teorema trivial da mudança de variáveis) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida e $\varphi: X \rightarrow Y$ uma aplicação mensurável compatível com as medidas, isto é, com $\mu(\varphi^{-1}(B)) = \mu'(B)$, para cada $B \in \mathcal{N}$ (cf. I.5.11). Para cada espaço de Banach E e cada aplicação integrável $f: Y \rightarrow E$, tem-se que $f \circ \varphi: X \rightarrow E$ é integrável e

$$\int_Y f(y) d\mu'(y) = \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Dem: É conhecido que, sendo $f: Y \rightarrow E$ topologicamente mensurável, o mesmo acontece a $f \circ \varphi: X \rightarrow E$. O facto de $f \circ \varphi$ ser integrável resulta de que, por II.1.38,

$$\int_X \|f(\varphi(x))\| d\mu(x) = \int_Y \|f(y)\| d\mu'(y).$$

Começemos por examinar o caso em que f é uma aplicação em escada. Seja então $(Y_j)_{j \in J}$ uma família finita de subconjuntos mensuráveis de Y , disjuntos dois a dois e de união Y , tais que, para cada $y \in Y_j$, $f(y)$ tenha um valor constante $w_j \in E$. Sabemos que, sendo então J_0 o conjunto dos $j \in J$ tais que $\mu'(Y_j) < +\infty$, tem-se $w_j = 0$, para cada $j \in J \setminus J_0$. Uma vez que os conjuntos $\varphi^{-1}(Y_j) \in \mathcal{M}$ são disjuntos dois a dois e de união X e a aplicação $f \circ \varphi$ toma o valor constante w_j em $\varphi^{-1}(Y_j)$, onde $\mu(\varphi^{-1}(Y_j)) = \mu'(Y_j)$, vemos que $f \circ \varphi$ também é uma aplicação em escada e, por definição,

$$\int_Y f(y) d\mu'(y) = \sum_{j \in J_0} \mu'(Y_j) w_j = \sum_{j \in J_0} \mu(\varphi^{-1}(Y_j)) w_j = \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Passemos agora ao caso geral, em que $f: Y \rightarrow E$ é uma aplicação integrável. Podemos então considerar uma sucessão dominada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aplicações em escada $f_n: Y \rightarrow E$, com $f_n(y) \rightarrow f(y)$, para cada $y \in Y$, e portanto uma função mensurável $\psi: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com $\int_Y \psi(y) d\mu'(y) < +\infty$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $y \in Y$, $\|f_n(y)\| \leq \psi(y)$. Vem então, tendo em conta II.1.38,

$$\int_X \psi(\varphi(x)) d\mu(x) = \int_Y \psi(y) d\mu'(y) < +\infty$$

pelo que os $f_n \circ \varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ constituem também uma sucessão dominada de aplicações em escada, com $f_n(\varphi(x)) \rightarrow f(\varphi(x))$, para cada $x \in X$, e obtemos, pelo teorema da convergência dominada,

$$\begin{aligned} \int_Y f(y) d\mu'(y) &= \lim \int_Y f_n(y) d\mu'(y) = \lim \int_X f_n(\varphi(x)) d\mu(x) = \\ &= \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x). \end{aligned} \quad \square$$

Exercícios

Ex II.2.1 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação mensurável tal que $f(x) \neq 0$, para todo o $x \in X$. Verificar que também é mensurável a aplicação $X \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$.

Ex II.2.2 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Verificar que também é topologicamente mensurável a aplicação $g: X \rightarrow E$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } \|f(x)\| \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } \|f(x)\| \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Ex II.2.3 Provar a seguinte recíproca de II.2.8: Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e E e F espaços de Banach e consideremos em $E \times F$ a “norma do máximo”, definida no resultado referido. Se $h: X \rightarrow E \times F$ é uma aplicação topologicamente mensurável onde, $h(x) = (f(x), g(x))$, para cada $x \in X$, então as aplicações $f: X \rightarrow E$ e $g: X \rightarrow F$ também são topologicamente mensuráveis.

Ex II.2.4 Sejam E um espaço vetorial normado, real ou complexo, e $A \subset E$ um subconjunto separável. Sendo $F \subset E$ o subespaço vetorial gerado por A , verificar que F também é separável. **Sugestão:** Sendo $B \subset A$ um conjunto contável denso em A , considerar o conjunto das combinações lineares finitas de elementos de B (de $B \cup iB$, no caso complexo) com coeficientes racionais.

Ex II.2.5 Sejam E um espaço vetorial normado, real ou complexo, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de vetores de E e F o subespaço vetorial de E gerado pelo conjunto dos y_n . Mostrar que F é um boreliano de E . **Sugestão:** Mostrar que F é a união de uma família numerável de compactos. Para isso, considerar, para cada $N \in \mathbb{N}$, a bola fechada de centro 0 e raio N do subespaço vetorial de dimensão finita gerado pelos y_n com $1 \leq n \leq N$.

Ex II.2.6 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $f, g: X \rightarrow E$ duas aplicações topologicamente mensuráveis. Verificar que é mensurável o conjunto

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

Sugestão: Ao contrário do que sucedia no contexto de $\overline{\mathbb{R}}_+$, é possível considerar aqui a função topologicamente mensurável $f - g: X \rightarrow E$.

Ex II.2.7 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções topologicamente mensuráveis $f_n: X \rightarrow E$

e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Mostrar que são mensuráveis:

a) O conjunto dos pontos $x \in X$ tais que a sucessão dos $f_n(x) \in E$ seja limitada.

b) O conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

c) O conjunto dos pontos $x \in X$ tais que a sucessão dos $f_n(x)$ admita $f(x)$ como sublimite.

d) O conjunto dos pontos $x \in X$ tais que a sucessão dos $f_n(x)$ seja convergente.

Ex II.2.8 (Teorema de Egoroff) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida finita, isto é, com $\mu(X) < +\infty$, E um espaço de Banach e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Suponhamos que, para cada $x \in X$, a sucessão dos $f_n(x)$ tem limite $f(x) \in E$. Mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) < \varepsilon$ tal que em $X \setminus A$ a convergência $f_n(x) \rightarrow f(x)$ seja uniforme.

Sugestão: Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$, considerar o conjunto mensurável

$$B_{k,p} = \left\{ x \in X \mid \forall_{n \geq p} \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Verificar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, a sucessão dos conjuntos $B_{k,p}$ é crescente e de união X e utilizar esse facto para escolher p_k tal que

$$\mu(X \setminus B_{k,p_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tomar então

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X \setminus B_{k,p_k}.$$

Ex II.2.9 (Versão modificada da aproximação dominada) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida finita, isto é, com $\mu(X) < +\infty$. Seja E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável. Mostrar que existe então uma sucessão dominada $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aplicações em escada $f_n: X \rightarrow E$ tal que $f_n(X) \subset f(X)$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$.⁶⁹ Reparar que, no caso em que $\mu(X) = +\infty$ e $0 \notin f(X)$, uma tal aproximação é impossível, por não existirem aplicações em escada tomando valores em $f(X)$.

Sugestão: Afastado o caso trivial em que $X = \emptyset$, fixar $x_0 \in X$ e aplicar II.2.29 à função integrável $\hat{f}(x) = f(x) - f(x_0)$, cujo contradomínio contém 0, somando depois $f(x_0)$ às aplicações em escada que aproximam \hat{f} .

⁶⁹Relativamente ao que foi provado em II.2.29, abrimos mão da majoração $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$, mas obtivemos a condição mais forte de se ter $f_n(X) \subset f(X)$, e não apenas $f_n(X) \subset f(X) \cup \{0\}$, que, nalguns casos, é importante.

Ex II.2.10 (**Uma variante de II.2.29 com aproximação uniforme**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Suponhamos que E tem dimensão finita e $f(X)$ é limitado⁷⁰. Mostrar que existe uma sucessão de aplicações topologicamente mensuráveis $f_n: X \rightarrow E$ verificando as condições a), b) e c) de II.2.29 mas também a condição mais forte que a) que consiste em afirmar que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente.

Sugestão: Repetir a demonstração de II.2.29, com a única alteração que consiste em escolher mais cuidadosamente a sucessão dos w_n . Mais precisamente, depois de tomar $w_1 = 0$, considerar a seguir um número finito de pontos de $f(X) \cup \{0\}$ tais que a união das bolas de centro nesses pontos e raio 1 contenha $f(X)$, e fazer o mesmo sucessivamente, com o raio 1 substituído por $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{etc.}$

Ex II.2.11 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida finita, isto é, com $\mu(X) < +\infty$, e sejam E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável e limitada (isto é, com o contradomínio $f(X)$ contido nalguma bola de centro 0 de E). Mostrar que a aplicação f é integrável.

Ex II.2.12 (**Construção alternativa do integral das funções reais**) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida.

a) Mostrar que, se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável, isto é, uma função mensurável e com $\int |f(x)| d\mu(x) < +\infty$, então existem funções mensuráveis, $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $\int g(x) d\mu(x) < +\infty$ e $\int h(x) d\mu(x) < +\infty$, tais que, para cada $x \in X$, $f(x) = g(x) - h(x)$.

Sugestão: Tomar para g e h as funções f_+ e f_- definidas, respetivamente, por

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}. \quad 71$$

b) Mostrar que, se $\hat{g}, \hat{h}: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ são outras duas funções mensuráveis, com integrais finitos, tais que se tenha também $f(x) = \hat{g}(x) - \hat{h}(x)$, para cada $x \in X$, então

$$\int_X g(x) d\mu(x) - \int_X h(x) d\mu(x) = \int_X \hat{g}(x) d\mu(x) - \int_X \hat{h}(x) d\mu(x),$$

o que permite definir, sem ambiguidade e de forma independente do que fizemos na secção II.2, o integral de f por

⁷⁰Mais geralmente, quem conheça a noção de subconjunto precompacto de um espaço métrico (cf., por exemplo, [9]), poderá apenas supor que $f(X)$ seja precompacto, sem que E tenha que ter dimensão finita.

⁷¹Há, no entanto, vantagem em admitir que g e h possam ser outras funções.

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x) - \int_X h(x) d\mu(x),$$

para qualquer par g, h nas condições referidas em a).

c) Verificar que, se $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ fosse integrável, o integral definido em b) coincide com o já conhecido, no contexto das funções positivas.

d) Verificar que, se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável, então o integral definido em b) coincide com o que definimos no decurso da secção II.2, encarado \mathbb{R} como espaço de Banach.

e) Verificar, mais uma vez sem supor conhecido o que fizemos na secção II.2, que, se $f, \hat{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis e $a \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \int_X f(x) + \hat{f}(x) d\mu(x) &= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X \hat{f}(x) d\mu(x), \\ \int_X af(x) d\mu(x) &= a \int_X f(x) d\mu(x), \\ \left| \int_X f(x) d\mu(x) \right| &\leq \int_X |f(x)| d\mu(x). \end{aligned}$$

Ex II.2.13 (Conjuntos convexos) Seja E é um espaço vetorial. Se $w, z \in E$, o segmento afim de w para z é o conjunto $[[w, z]]$ dos vetores da forma $sw + tz$, com $s, t \in \mathbb{R}_+$ e $s + t = 1$,⁷² ou, por outras palavras, o conjunto dos vetores da forma $(1 - t)w + tz = w + t(z - w)$, com $t \in [0, 1]$, conjunto que, se $w \neq z$, fica em correspondência biunívoca com $[0, 1]$ por

$$t \mapsto (1 - t)w + tz = w + t(z - w).$$

Um conjunto $C \subset E$ diz-se *convexo* se, quaisquer que sejam $w, z \in C$, tem-se $[[w, z]] \subset C$.

a) Verificar que se tem $[[w, z]] = [[z, w]]$, $w \in [[w, z]]$, $z \in [[w, z]]$ e $[[w, w]] = \{w\}$. Verificar ainda que $y + [[w, z]] = [[y + w, y + z]]$.

b) Reparar que \emptyset é um conjunto convexo e verificar que a intersecção de uma família arbitrária de subconjuntos convexos de E é ainda um subconjunto convexo, que, se $C \subset E$ é convexo e $y \in E$, então a translação $y + C = \tau_y(C)$ é também um subconjunto convexo e que, se $F \subset E$ é um subespaço vetorial, então F é um conjunto convexo.

c) Verificar que, no espaço vetorial \mathbb{R} , tem-se $[[a, b]] = [a, b]$ ou $[[a, b]] = [b, a]$, conforme $a \leq b$ ou $b \leq a$, e, consequentemente, que um subconjunto de \mathbb{R} é convexo se, e só se, é um intervalo.

d) Verificar que, se E e F são espaços vetoriais e $\lambda: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear, então $\lambda([[w, z]]) = [[\lambda(w), \lambda(z)]]$ e, consequentemente, que, para cada $C \subset E$ convexo, $\lambda(C) \subset F$ é convexo e, para cada $D \subset F$ convexo,

⁷²Os elementos da forma $sw + tz$, com $s, t \in \mathbb{R}_+$ e $s + t = 1$, podem ser encarados como *médias pesadas* de w e z associadas aos pesos s e t .

$\lambda^{-1}(D) \subset E$ é convexo.

e) Seja E um espaço vetorial normado. Mostrar que, para cada $w \in E$ e $r > 0$, as bolas aberta e fechada de centro em w e raio r , $B_r(w)$ e $\overline{B}_r(w)$, são conjuntos convexos. Mostrar que, se $C \subset E$ é um conjunto convexo, então a aderência $\text{ad}(C)$ é um conjunto convexo.

f) Sejam E um espaço vetorial normado e $C \subset E$ um conjunto convexo. Mostrar que o interior $\text{int}(C)$ é também um conjunto convexo e, mais do que isso, que, se $w \in \text{int}(C)$ e $z \in \text{ad}(C)$, então $[[w, z]] \setminus \{z\} \subset \text{int}(C)$. Deduzir, em particular, que, se $C \subset E$ é um conjunto convexo com $\text{int}(C) \neq \emptyset$, então qualquer z aderente a C é também aderente a $\text{int}(C)$.

Sugestão: Fixado $y = (1-t)w + tz$, para um certo $0 \leq t < 1$, tem-se

$$w = \frac{y - tz}{(1-t)},$$

pelo que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $y' \in B_\varepsilon(y)$ e $z' \in B_\varepsilon(z)$

$$\frac{y' - tz'}{(1-t)} \in C;$$

fixando $z' \in B_\varepsilon(z) \cap C$, concluir que $B_\varepsilon(y) \subset C$.

g) Sejam E um espaço vetorial, $C \subset E$ um conjunto convexo, w_1, \dots, w_n elementos de C e $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ com $t_1 + \dots + t_n = 1$. Mostrar, por indução em n , que

$$t_1 w_1 + \dots + t_n w_n \in C. \quad 73$$

h) (Integral e conjuntos convexos) Sejam E um espaço de Banach e $C \subset E$ um conjunto convexo. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$ (um espaço de probabilidade) e $f: X \rightarrow C \subset E$ uma aplicação integrável. Mostrar que

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in \text{ad}(C). \quad 74$$

Sugestão: Reparar que no caso em que f é uma aplicação em escada, temos uma consequência da conclusão de g). Para o caso geral, utilizar a conclusão do exercício II.2.9.

i) (Reformulação de h))⁷⁵ Sejam E um espaço de Banach e $C \subset E$ um conjunto convexo. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $A \subset X$ um conjunto mensurável, com $0 < \mu(A) < +\infty$, e $f: A \rightarrow C \subset E$ uma

⁷³Como no caso $n = 2$, $t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$ pode ser encarado como uma média pesada dos vetores w_1, \dots, w_n , associada aos pesos t_1, \dots, t_n .

⁷⁴Mais uma vez, o integral $\int_X f(x) d\mu(x) \in C$ pode ser encarado como uma média pesada dos valores de f , com a “distribuição de pesos” definida pela medida de probabilidade μ .

⁷⁵A conclusão de g) também podia ter sido reformulada no mesmo sentido.

aplicação integrável. Mostrar que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x) \in \text{ad}(C).$$

Sugestão: Aplicar a conclusão de h) ao espaço de probabilidade que se obtém considerando na σ -álgebra $\mathcal{M}/_A$ de partes de A a medida $\frac{1}{\mu(A)}\mu|_A$.

k) (Complemento à conclusão de h) Sob as hipóteses de h), mostrar que, notando $\text{fr}(C)$ a fronteira de C , se

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in \text{fr}(C),$$

então $f(x) \in \text{fr}(C)$ quase sempre, em particular, se $f(X) \subset \text{int}(C)$, então

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in \text{int}(C).$$

Sugestão: Aplicando II.2.45, se não fosse $f(x) \in \text{fr}(C)$ quase sempre, existia $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) > 0$ tal que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x) \in \text{int}(C)$$

e tinha então que ser $\mu(A) < 1$. Aplicar então a conclusão de f), reparando que $\int_X f(x) d\mu(x)$ fica no segmento afim de extremidades

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x) &\in \text{int}(C), \\ \frac{1}{\mu(X \setminus A)} \int_{X \setminus A} f(x) d\mu(x) &\in \text{ad}(C). \end{aligned}$$

Ex II.2.14 (Cones convexos) Seja E um espaço vetorial. Dizemos que um conjunto $C \subset E$ é um *cone* se $0 \in C$ e, para cada $w \in C$ e $t \in \mathbb{R}_+$, $tw \in C$.

a) Mostrar que, se $C \subset E$ é um cone, então C é convexo se, e só se, quaisquer que sejam $w, z \in C$, $w + z \in C$. Em particular, qualquer subespaço vetorial $F \subset E$ é um cone convexo.

b) Sejam E um espaço vetorial normado e $C \subset E$ um cone convexo. Mostrar que a aderência $\text{ad}(C)$ é também um cone convexo e que, se $w \in \text{int}(C)$ e $z \in \text{ad}(C)$, então $w + z \in \text{int}(C)$. **Sugestão:** Lembrar a conclusão da alínea f) do exercício II.2.13.

c) Verificar que, se E é um espaço vetorial normado, $C \subset E$ é um cone e $0 \in \text{int}(C)$, então $C = E$.

d) Sejam E um espaço de Banach, $C \subset E$ um cone convexo, (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow C \subset E$ uma aplicação integrável. Mostrar que se tem

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in \text{ad}(C).$$

e) Sob as hipóteses de d) e supondo, para simplificar,⁷⁶ que a medida μ é σ -finita, mostrar que, se

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in \text{fr}(C),$$

então $f(x) \in \text{fr}(C)$ quase sempre, em particular, se $f(X) \subset \text{int}(C)$, então

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in \text{int}(C).$$

Sugestão: Se não fosse $f(x) \in \text{fr}(C)$ quase sempre deduzíamos de II.2.45 a existência de $A \in \mathcal{M}$, com $0 < \mu(A) < +\infty$ tal que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x) \in \text{int}(C),$$

e portanto também $\int_A f(x) d\mu(x) \in \text{int}(C)$. Aplicar então a conclusão de b), reparando que

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_A f(x) d\mu(x) + \int_{X \setminus A} f(x) d\mu(x).$$

f) Verificar que a condição de a medida μ ser σ -finita pode ser dispensada, sem afetar a validade da conclusão em e).

Sugestão: Por c), $0 \in \text{fr}(C)$. Sendo $Y = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, a alínea c) do exercício II.1.10 garante que a restrição de μ a Y já é σ -finita e reparar que

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_Y f(x) d\mu(x).$$

Ex II.2.15 (**O centro de gravidade**) Sejam E um espaço de Banach, $X \subset E$ um subconjunto boreliano limitado e $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida nos borelianos de X tal que $0 < \mu(X) < +\infty$.

a) Mostrar que fica bem definido $x_X \in E$, a que chamamos o *centro de gravidade* de X (relativamente à medida μ) por

$$x_X = \frac{1}{\mu(X)} \int_X x d\mu(x).$$

b) Seja $C \subset E$ um conjunto convexo tal que $X \subset C$. Mostrar que $x_X \in \text{ad}(C)$ e que, no caso em que $\mu(X \cap \text{int}(C)) > 0$, tem-se mesmo $x_X \in \text{int}(C)$.

⁷⁶Ver a alínea f) a seguir.

c) Suponhamos que $X = X_1 \cup X_2$, com X_1 e X_2 borelianos disjuntos verificando $\mu(X_1) > 0$ e $\mu(X_2) > 0$. Sendo x_{X_1} e x_{X_2} os centros de gravidade de X_1 e X_2 , respectivamente, mostrar que x_X pertence ao segmento afim de extremidades x_{X_1} e x_{X_2} .

Ex II.2.16 (**O teorema da convergência dominada para sucessões generalizadas**) Seja J um conjunto dirigido de tipo numerável (cf. a alínea e) do exercício II.1.21). Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $(f_j)_{j \in J}$ uma sucessão generalizada de aplicações integráveis $f_j: X \rightarrow E$. Suponhamos que, para cada $x \in X$, a sucessão generalizada $(f_j(x))_{j \in J}$ de vetores de E tem limite $f(x) \in E$ e que existe uma função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ com $\int \varphi d\mu < +\infty$ e $\|f_j(x)\| \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$ e $j \in J$. Verificar que a aplicação $f: X \rightarrow E$, assim definida, é integrável e que

$$\int_X f_j(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x).$$

Sugestão: Reduzir este resultado à versão do teorema da convergência dominada para as sucessões indexadas em \mathbb{N} (cf. II.2.39) por um processo análogo ao utilizado para resolver a alínea f) do exercício II.1.21).

Ex II.2.17 (**Versão melhorada de II.2.49 para quem conhece as sucessões generalizadas**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $(f_j)_{j \in J}$ uma família contável de aplicações integráveis $f_j: X \rightarrow E$. Suponhamos que, para cada $x \in X$, a família $(f_j(x))_{j \in J}$ de vetores de E é somável⁷⁷ e de soma $f(x) \in E$. Suponhamos ainda que existe uma função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ com $\int \varphi d\mu < +\infty$ tal que, para cada parte finita $I \subset J$, $\|\sum_{j \in I} f_j(x)\| \leq \varphi(x)$. Mostrar que a aplicação $f: X \rightarrow E$ assim definida é integrável e que

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_X f_j(x) d\mu(x).^{78}$$

Sugestão: Temos uma aplicação direta do teorema da convergência dominada para sucessões generalizadas, examinado no exercício II.2.16, se repararmos que a soma de uma família somável de vetores de E é um caso particular de limite de uma sucessão generalizada, cujo conjunto dirigido de índices é de tipo numerável (cf. a alínea e) do exercício II.1.21).

Ex II.2.18 (**Aplicações lineares fechadas e integração**) Sejam E e F espaços de Banach, $E_0 \subset E$ um subespaço vetorial (não necessariamente fechado) e $\lambda: E_0 \rightarrow F$ uma aplicação linear (não necessariamente contínua). Diz-se que

⁷⁷Não necessariamente absolutamente somável.

⁷⁸Soma de uma família somável, mas não necessariamente absolutamente somável de vetores de E .

λ é uma aplicação linear fechada se o gráfico de λ , $G_\lambda = \{(w, z) \in E \times F \mid w \in E_0 \text{ e } z = \lambda(w)\}$ for um subespaço vetorial fechado em $E \times F$.⁷⁹

a) (Exemplo) Seja $E = F = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ o espaço de Banach das aplicações contínuas $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, com a norma definida por $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ e seja

$E_0 \subset E$ o subespaço vetorial $E_0 = \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$, cujos elementos são as aplicações de classe C^1 , $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, as aplicações deriváveis em cada $t \in [0, 1]$ e com $f': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Verificar que tem lugar uma aplicação linear

$$\lambda: \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), \quad \lambda(f) = f',$$

a qual não é uma aplicação linear contínua, mas é uma aplicação linear fechada.

b) Sejam E e F espaços de Banach, $E_0 \subset E$ um subespaço vetorial e $\lambda: E_0 \rightarrow F$ uma aplicação linear fechada. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável, tal que $f(X) \subset E_0$ e que $\lambda \circ f: X \rightarrow F$ também seja integrável. Mostrar que $\int_X f(x) d\mu(x) \in E_0$ e que

$$\int_X \lambda(f(x)) d\mu(x) = \lambda\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right).$$

Ex II.2.19 (Variante de II.2.49) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $(f_j)_{j \in J}$ uma família contável de aplicações integráveis $f_j: X \rightarrow E$ tal que

$$\sum_{j \in J} \int_X \|f_j(x)\| d\mu(x) < +\infty.$$

Mostrar que existe $Y \in \mathcal{M}$, com $\mu(X \setminus Y) = 0$, tal que, para cada $x \in Y$, a família $(f_j(x))_{j \in J}$ de vetores de E seja absolutamente somável, e portanto somável. Mostrar ainda que, sendo $f: Y \rightarrow E$ a aplicação definida por

$$f(x) = \sum_{j \in J} f_j(x),$$

f é integrável e

$$\int_Y f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_X f_j(x) d\mu(x),^{80}$$

em que a soma do segundo membro é a de uma família absolutamente

⁷⁹Reparar que, em qualquer caso, G_λ é um subespaço vetorial de $E \times F$.

⁸⁰Para o primeiro membro, lembrar a notação referida em II.2.41.

somável de vetores de E .

Sugestão: Considerar a aplicação mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $\varphi(x) = \sum_{j \in J} \|f_j(x)\|$, ter em conta II.1.21 e II.1.29, definindo Y como o conjunto dos x tais que $\varphi(x) < +\infty$ e aplicando II.2.49 às restrições a Y das aplicações f_j .

§3. Propriedades elementares do integral indefinido.

Nesta secção vamos estudar algumas propriedades elementares do integral indefinido, em que a palavra “elementar” significa que não pretendemos ir muito além do que é estudado no contexto do integral de Riemann num primeiro curso de Análise Real. Apesar de, no contexto do integral de Lebesgue, que temos estado a estudar, existirem propriedades mais profundas (ver III.8.6 adiante), que aliás estiveram na origem da seu aparecimento, pensamos não ser prioritário que nos debrucemos sobre elas neste momento, para podermos mais rapidamente chegar a outros resultados importantes. O estudo das propriedades elementares do integral indefinido vai servir-nos, em particular, para continuar a desenvolver a teoria do integral de modo totalmente independente da dos integrais encontrados anteriormente, mostrando que os métodos utilizados para calcular aqueles são também válidos no presente contexto. A medida que utilizaremos nesta secção será usualmente a medida de Lebesgue λ nos borelianos de \mathbb{R} e relembramos que nos integrais relativos a esta medida é utilizada frequentemente a notação dx no lugar de $d\lambda(x)$.

II.3.1 Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo de extremidades finitas ou infinitas e aberto ou fechado em cada uma das extremidades. Sejam E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação. Diz-se que f é *localmente integrável* se f é topologicamente mensurável e a restrição de f a cada intervalo fechado e limitado $I \subset J$ é integrável.

É claro que uma aplicação integrável $f: J \rightarrow E$ é também localmente integrável e que, no caso em que o intervalo J é fechado e limitado, uma aplicação $f: J \rightarrow E$ é localmente integrável se, e só se, é integrável.

Repáre-se que, uma vez que qualquer intervalo fechado e limitado é compacto e que qualquer compacto não vazio $K \subset J$ está contido num intervalo fechado e limitado contido em J (nomeadamente, aquele cujas extremidades são o seu máximo e o seu mínimo), concluímos que $f: J \rightarrow E$ é localmente integrável se, e só se, é topologicamente mensurável e com restrição integrável a cada compacto $K \subset J$.⁸¹

⁸¹Esta observação permite fazer a ponte com a definição mais geral de aplicação localmente integrável que será apresentada adiante em III.4.15.

II.3.2 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Tem-se então que f é localmente integrável.

Dem: A aplicação f , sendo contínua, é mensurável e é mesmo topologicamente mensurável, tendo em conta II.2.3, uma vez que J , sendo um subconjunto de \mathbb{R} , é de base contável. Seja agora $I = [a, b] \subset J$ um intervalo fechado e limitado, que supomos já não vazio. A função contínua real $x \mapsto \|f(x)\|$ atinge um máximo c no compacto I pelo que

$$\int_I \|f(x)\| dx \leq \int_I c dx = c(b-a) < +\infty,$$

o que mostra que a restrição a I da aplicação f é integrável. \square

II.3.3 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável. Dados $a, b \in J$ com $a \leq b$, nota-se $\int_a^b f(x) dx$ o integral $\int_{[a,b]} f(x) dx$. Uma vez que $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$, podemos escrever as caracterizações alternativas seguintes:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{]a,b]} f(x) dx = \\ &= \int_{[a,b[} f(x) dx = \int_{]a,b[} f(x) dx. \end{aligned}$$

Como habitualmente, a notação anterior pode ser estendida ao caso em que $a > b$, pondo então, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

II.3.4 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável. Quaisquer que sejam $a, b, c \in J$, tem-se então:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= 0, \\ \int_b^a f(x) dx &= - \int_a^b f(x) dx, \\ \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx. \end{aligned}$$

Dem: A primeira igualdade resulta de se ter $\lambda(\{a\}) = 0$. No caso em que $a = b$, a segunda igualdade resulta da primeira e, nos casos em que $a < b$ e em que $a > b$, a segunda igualdade resulta da definição. Quanto à terceira igualdade, temos que examinar separadamente as diferentes posições relativas que os três pontos a, b, c podem ter. Se $a \leq b \leq c$, o intervalo $]a, c[$ é a união dos intervalos $]a, b[$ e $]b, c[$, que são disjuntos, pelo que

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) dx &= \int_{]a,c]} f(x) dx = \int_{]a,b]} f(x) dx + \int_{]b,c]} f(x) dx = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.\end{aligned}$$

O caso em que $c \leq b \leq a$ reduz-se ao que acabámos de estudar, já que

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) dx &= -\int_c^a f(x) dx = -\left(\int_c^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx\right) = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.\end{aligned}$$

A fórmula está assim estabelecida nos casos em que b está entre a e c (no sentido lato) e passamos a estabelecê-la nos casos em que a está entre b e c e em que c está entre a e b . Ora, tendo em conta o caso já estudado, temos, no primeiro caso,

$$\int_b^c f(x) dx = \int_b^a f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx,$$

e, no segundo caso,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx,$$

o que, em ambos os casos, implica a igualdade pretendida. \square

II.3.5 (O integral indefinido) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável. Fixado $t_0 \in J$, chamamos *integral indefinido* de f associado a t_0 à aplicação $\widehat{f}: J \rightarrow E$ definida por

$$\widehat{f}(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx.$$

Tem-se então que o integral indefinido $\widehat{f}: J \rightarrow E$ é uma aplicação contínua.

Dem: Seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de J tal que $t_n \rightarrow t \in J$. Temos que mostrar que $\widehat{f}(t_n) \rightarrow \widehat{f}(t)$. O conjunto constituído pelos termos da sucessão dos t_n e pelo seu limite t é compacto e, consequentemente, admite um mínimo $a \in J$ e um máximo $b \in J$.⁸² Para cada $n \in \mathbb{N}$, notemos

⁸²Trata-se de uma propriedade geral das sucessões convergentes em \mathbb{R} e, mais geralmente, em qualquer espaço topológico. Alternativamente, quem não conhecer este resultado poderá tomar para a e b o ínfimo e o supremo do conjunto dos t_n em $\overline{\mathbb{R}}_+$ e verificar, em seguida, que $a \leq t \leq b$ e que se a (respetivamente b) não for um dos termos da sucessão então tem que ser $a = t$ (respetivamente $b = t$).

I_n o intervalo $[t, t_n]$ ou o intervalo $[t_n, t]$, conforme $t \leq t_n$ ou $t_n \leq t$, e repararemos que

$$(1) \quad \begin{aligned} \|\widehat{f}(t_n) - \widehat{f}(t)\| &= \left\| \int_t^{t_n} f(x) dx \right\| = \left\| \int_{I_n} f(x) dx \right\| \leq \\ &\leq \int_{I_n} \|f(x)\| dx = \int_{[a,b]} \mathbb{I}_{I_n}(x) \|f(x)\| dx. \end{aligned}$$

Mas, tem-se $\mathbb{I}_{I_n}(x) \|f(x)\| \leq \|f(x)\|$, com $\int_{[a,b]} \|f(x)\| dx < +\infty$, $\mathbb{I}_{I_n}(t) \|f(t)\| = \|f(t)\|$, para todo o n e, para cada $x \neq t$, por ser $t_n \rightarrow t$, vem $\mathbb{I}_{I_n}(x) \|f(x)\| = 0$, a partir de certa ordem. Podemos então aplicar o teorema da convergência dominada para garantir que

$$\int_{[a,b]} \mathbb{I}_{I_n}(x) \|f(x)\| dx \rightarrow \int_{[a,b]} \mathbb{I}_{\{t\}}(x) \|f(x)\| dx = \int_{\{t\}} \|f(x)\| dx = 0,$$

o que, tendo em conta (1), implica que se tem $\|\widehat{f}(t_n) - \widehat{f}(t)\| \rightarrow 0$, isto é, $\widehat{f}(t_n) \rightarrow \widehat{f}(t)$. \square

O próximo passo é estudar em que condições se pode garantir a derivabilidade do integral indefinido. Uma vez que o leitor poderá não ter encontrado ainda o conceito de derivada para funções com valores vectoriais, começamos por fazer algumas observações que mostram como se podem estender facilmente a este contexto os factos básicos já conhecidos no contexto das funções com valores em \mathbb{R} .

II.3.6 Sejam E um espaço de Banach, $J \subset \mathbb{R}$ um conjunto, $t_0 \in J$, ponto de acumulação de J (ou seja, t_0 aderente a $J \setminus \{t_0\}$) e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação. Diz-se que f é derivável em t_0 , se existir o limite

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \in E$$

e a esse limite, que se nota $f'(t_0)$, dá-se o nome de *derivada* de f no ponto t_0 .

a) Tal como no caso real, se $f: J \rightarrow E$ é uma aplicação constante de valor w , então para cada ponto de acumulação $t_0 \in J$, a aplicação f é derivável em t_0 e com $f'(t_0) = 0$.

b) Se f é derivável em t_0 , então f é contínua em t_0 .

Dem: Sendo $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão qualquer de elementos de $J \setminus \{t_0\}$ com $t_n \rightarrow t_0$, tem-se

$$f(t_n) - f(t_0) = (t_n - t_0) \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow 0 \cdot f'(t_0) = 0. \quad \square$$

c) Se $f, g: J \rightarrow E$ são deriváveis em t_0 e a é um escalar, então as aplicações

$f + g: J \rightarrow E$ e $af: J \rightarrow E$ são deriváveis em t_0 e

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0), \quad (af)'(t_0) = af'(t_0).$$

Dem: Sendo $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão qualquer de elementos de $J \setminus \{t_0\}$ com $t_n \rightarrow t_0$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(t_n) - (f + g)(t_0)}{t_n - t_0} &= \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} + \frac{g(t_n) - g(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow f'(t_0) + g'(t_0), \\ \frac{(af)(t_n) - (af)(t_0)}{t_n - t_0} &= a \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow af'(t_0). \quad \square \end{aligned}$$

d) Se $f: J \rightarrow E$ é derivável em t_0 , F é outro espaço de Banach e $\lambda: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear contínua, então $\lambda \circ f: J \rightarrow F$ é derivável em t_0 e

$$(\lambda \circ f)'(t_0) = \lambda(f'(t_0)).$$

Dem: Sendo $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão qualquer de elementos de $J \setminus \{t_0\}$ com $t_n \rightarrow t_0$, tem-se

$$\frac{(\lambda \circ f)(t_n) - (\lambda \circ f)(t_0)}{t_n - t_0} = \lambda \left(\frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \right) \rightarrow \lambda(f'(t_0)).$$

e) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$,

$$w \times z = \xi(w, z) \in H.$$

Se $f: J \rightarrow F$ e $g: J \rightarrow G$ são duas aplicações deriváveis em t_0 , então a aplicação $f \times g: J \rightarrow H$, $f \times g(t) = f(t) \times g(t)$, é também derivável em t_0 e com

$$(f \times g)'(t_0) = f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0).$$

Dem: Sendo $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão qualquer de elementos de $J \setminus \{t_0\}$ com $t_n \rightarrow t_0$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{(f \times g)(t_n) - (f \times g)(t_0)}{t_n - t_0} &= \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \times g(t_n) + \\ &+ f(t_0) \times \frac{g(t_n) - g(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0). \quad \square \end{aligned}$$

Ao contrário das propriedades anteriores, cujas demonstrações são claramente análogas às que se faziam no contexto das funções com valores em \mathbb{R} , o teorema da média, que enunciaremos em seguida, que naquele contexto costuma aparecer como aplicação do teorema do valor intermédio de Lagrange, necessita aqui de uma demonstração diferente (aliás, já para funções com valores em \mathbb{R}^2 isso acontece).

II.3.7 (Teorema da média) Sejam $a \leq b$ em \mathbb{R} , E um espaço de Banach, $M \geq 0$ e $f: [a, b] \rightarrow E$ uma aplicação contínua, derivável em todos os pontos de $]a, b[$ e tal que, para cada $t \in]a, b[$, $\|f'(t)\| \leq M$. Tem-se então

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Dem:⁸³ Uma vez que o caso $a = b$ é trivial vamos supor já que $a < b$. Tendo em conta a continuidade de f , para mostrar a desigualdade do enunciado basta mostrar que, para cada $a < a' < b$ se tem

$$\|f(b) - f(a')\| \leq M(b - a').$$

Fixemos um tal a' e seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos o conjunto C dos $t \in [a', b]$ tais que

$$\|f(t) - f(a')\| \leq (M + \delta)(t - a').$$

Trata-se de um subconjunto fechado de $[a', b]$, que é não vazio, por conter a' , pelo que podemos considerar o máximo c do conjunto C , que verifica portanto a desigualdade

$$\|f(c) - f(a')\| \leq (M + \delta)(c - a').$$

Se se tivesse $c < b$, então o facto de se ter

$$\lim_{t \rightarrow c} \left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| = \|f'(c)\| \leq M < M + \delta$$

implicava a possibilidade de escolher t , com $c < t < b$ tal que

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| < M + \delta,$$

de onde deduzíamos que

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(a')\| &\leq \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a')\| \leq \\ &\leq (M + \delta)(t - c) + (M + \delta)(c - a') = (M + \delta)(t - a'), \end{aligned}$$

ou seja, $t \in C$, o que contrariava a hipótese de c ser o máximo de C . Tem-se assim $c = b$, ou seja, $\|f(b) - f(a')\| \leq (M + \delta)(b - a')$. Por fim, uma vez que $\delta > 0$ é arbitrário, a desigualdade anterior implica que se tem mesmo $\|f(b) - f(a')\| \leq M|b - a'|$, como queríamos. \square

II.3.8 (Corolário) Sejam $a \leq b$ em \mathbb{R} , E um espaço de Banach e $f: [a, b] \rightarrow E$ uma aplicação contínua tal que, para cada $t \in]a, b[$, f seja derivável em t e $f'(t) = 0$. Tem-se então que f é uma aplicação constante.

⁸³A demonstração que vamos fazer é a simplificação de uma, devida a J. Dieudonné, para um resultado mais forte em que se permite a existência de um conjunto contável de pontos do intervalo onde não se exige a derivabilidade de f (cf. [3]). Ver o exercício II.3.2, no fim do capítulo, para uma versão desse resultado mais forte.

Dem: Sendo $x \leq y$ em $[a, b]$, o facto de se ter $f(x) = f(y)$ resulta de aplicar o teorema da média, com $M = 0$, à restrição de f ao intervalo $[x, y]$, de forma a concluir que $\|f(y) - f(x)\| \leq 0$. \square

II.3.9 (Derivada do integral indefinido)⁸⁴ Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo de interior não vazio, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável. Sejam $t_0 \in J$ e $\widehat{f}: J \rightarrow E$ o correspondente integral indefinido, definido por

$$\widehat{f}(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx.$$

Se f é contínua em $t_1 \in J$, então \widehat{f} é derivável em t_1 e com $\widehat{f}'(t_1) = f(t_1)$.

Dem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Seja $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $t \in J$ com $t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon$, se tenha $\|f(t) - f(t_1)\| < \delta$. Para cada $t \in J \setminus \{t_1\}$ nessas condições, tem-se então, notando $I \subset]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$ o intervalo fechado de extremidades t_1 e t ,

$$\begin{aligned} & \|\widehat{f}(t) - \widehat{f}(t_1) - (t - t_1)f(t_1)\| = \\ & = \left\| \int_{t_0}^t f(x) dx - \int_{t_0}^{t_1} f(x) dx - (t - t_1)f(t_1) \right\| = \\ & = \left\| \int_{t_1}^t f(x) dx - \int_{t_1}^t f(t_1) dx \right\| = \left\| \int_I f(x) - f(t_1) dx \right\| \leq \\ & \leq \int_I \|f(x) - f(t_1)\| dx \leq \int_I \delta dx = \delta |t - t_1|, \end{aligned}$$

donde

$$\left\| \frac{\widehat{f}(t) - \widehat{f}(t_1)}{t - t_1} - f(t_1) \right\| \leq \delta,$$

o que mostra que se tem de facto $\frac{\widehat{f}(t) - \widehat{f}(t_1)}{t - t_1} \rightarrow f(t_1)$, quando $t \rightarrow t_1$. \square

O resultado precedente permite-nos deduzir que os métodos que utilizávamos com mais frequência para calcular o valor dos integrais de funções reais a partir do conhecimento de uma primitiva continuam a valer no contexto que estamos a estudar, em particular que, nesses casos, o integral que estamos a estudar coincide com o integral que já encontráramos anteriormente. Mais precisamente:

II.3.10 (Das primitivas para os integrais — a fórmula de Barrow) Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e limitado, E um espaço de Banach e $f: [a, b] \rightarrow E$ uma aplicação integrável e contínua nos pontos de $]a, b[$.

⁸⁴Ver III.8.6 adiante para um resultado mais profundo no mesmo contexto.

Suponhamos que existe uma aplicação contínua $\tilde{f}: [a, b] \rightarrow E$ tal que, para cada $t \in]a, b[$, \tilde{f} seja derivável em t e com $\tilde{f}'(t) = f(t)$. Tem-se então

$$\int_a^b f(x) dx = \tilde{f}(b) - \tilde{f}(a).$$

Dem: Podemos já afastar o caso trivial em que $a = b$. Seja $\hat{f}: [a, b] \rightarrow E$ o integral indefinido, definido por

$$\hat{f}(t) = \int_a^t f(x) dx,$$

que é uma aplicação contínua, com $\hat{f}(a) = 0$ e derivável em cada $t \in]a, b[$ e com $\hat{f}'(t) = f(t)$. Concluímos daqui, tendo em conta o corolário II.2.8, que a função contínua $g = \tilde{f} - \hat{f}: [a, b] \rightarrow E$, que é derivável em cada $t \in]a, b[$ e com $g'(t) = \tilde{f}'(t) - \hat{f}'(t) = 0$ tem que ser constante, em particular

$$\tilde{f}(b) - \int_a^b f(x) dx = \tilde{f}(b) - \hat{f}(b) = \tilde{f}(a) - \hat{f}(a) = \tilde{f}(a),$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = \tilde{f}(b) - \tilde{f}(a). \quad \square$$

II.3.11 (Aplicação à medida de Lebesgue-Stieltjes) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente (no sentido lato), derivável em todos os pontos e com derivada contínua $\varphi': J \rightarrow \mathbb{R}_+$, e consideremos a correspondente medida de Lebesgue-Stieltjes nos borelianos de J , $\lambda_\varphi: \mathcal{B}_J \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ (cf. I.4.13). Tem-se então, para cada $A \in \mathcal{B}_J$,

$$\lambda_\varphi(A) = \int_A \varphi'(x) dx,$$

por outras palavras, a medida λ_φ coincide com a medida $\lambda_{(\varphi')}$, definida, a partir da restrição a J da medida de Lebesgue, pela função mensurável $\varphi': J \rightarrow \mathbb{R}_+$ (cf. II.1.22).

Dem: Uma vez que λ_φ é, por definição, a única medida nos borelianos de J que verifica $\lambda_\varphi(]a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a)$, sempre que $a \leq b$ em J , tudo o que temos que verificar é que, para a medida $\lambda_{(\varphi')}$, tem-se também $\lambda_{(\varphi')}(]a, b]) = \varphi(b) - \varphi(a)$. Ora, isso é uma consequência de que, tendo em conta II.3.10,

$$\lambda_{(\varphi')}(]a, b]) = \int_{]a, b]} \varphi'(x) dx = \int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a). \quad \square$$

O resultado II.3.10 dá-nos um processo para calcular o integral quando o domínio é um intervalo fechado e limitado. Para calcularmos integrais quando o intervalo de definição é aberto nalguma das extremidades, em particular quando alguma destas é infinita, usa-se com frequência os dois resultados seguintes, que têm relações naturais com os “integrais impróprios” decerto já encontrados anteriormente.

II.3.12 (O integral das funções mensuráveis positivas do ponto de vista dos integrais impróprios).

a) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $b > a$, pertencente a \mathbb{R} ou igual a $+\infty$, e $f: [a, b[\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. Tem-se então

$$\int_{[a, b[} f(x) dx = \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in]a, b[}} \int_a^y f(x) dx.$$

b) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $c < a$, pertencente a \mathbb{R} ou igual a $-\infty$, e $f:]c, a] \rightarrow E$ uma função mensurável. Tem-se então

$$\int_{]c, a]} f(x) dx = \lim_{\substack{y \rightarrow c \\ y \in]c, a[}} \int_y^a f(x) dx.$$

Dem: a) A existência de limite resulta de termos uma função crescente de y . Escolhendo uma sucessão crescente de elementos $y_n \in]a, b[$, com $y_n \rightarrow b$, podemos então utilizar o teorema da convergência monótona para mostrar que, uma vez que, para cada $x \in [a, b[$, os $\mathbb{I}_{[a, y_n]}(x)f(x)$ constituem uma sucessão crescente igual a $f(x)$ a partir de certa ordem,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in]a, b[}} \int_a^y f(x) dx &= \lim_{y \rightarrow b} \int_a^{y_n} f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} \int_{[a, y_n[} \mathbb{I}_{[a, y_n]}(x)f(x) dx = \\ &= \int_{[a, b[} f(x) dx. \end{aligned}$$

b) Pode-se dar uma demonstração análoga à de a) ou, alternativamente, reduzir a conclusão de b) à de a), tendo em conta a invariância da medida de Lebesgue por simetria em I.5.14 e o teorema trivial de mudança de variáveis em II.1.38:

$$\begin{aligned} \int_{]c, a]} f(x) dx &= \int_{[-a, -c[} f(-z) dz = \lim_{\substack{w \rightarrow -c \\ w \in]-a, -c[}} \int_{-a}^w f(-z) dz = \\ &= \lim_{\substack{w \rightarrow -c \\ w \in]-a, -c[}} \int_{-w}^a f(x) dx = \lim_{\substack{y \rightarrow c \\ y \in]c, a[}} \int_y^a f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

II.3.13 (O integral das aplicações integráveis do ponto de vista dos integrais impróprios)

Seja E um espaço de Banach.

a) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $b > a$, pertencente a \mathbb{R} ou igual a $+\infty$, e $f: [a, b[\rightarrow E$ uma aplicação integrável. Tem-se então

$$\int_{[a, b[} f(x) dx = \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in]a, b[}} \int_a^y f(x) dx.$$

b) Sejam $a \in \mathbb{R}$, $c < a$, pertencente a \mathbb{R} ou igual a $-\infty$, e $f:]c, a] \rightarrow E$ uma aplicação integrável. Tem-se então

$$\int_{]c, a]} f(x) dx = \lim_{\substack{y \rightarrow c \\ y \in]c, a[}} \int_y^a f(x) dx.$$

Dem: a) Temos que mostrar que, qualquer que seja a sucessão de elementos $y_n \in [a, b[$, com $y_n \rightarrow b$, tem-se

$$\int_{[a, b[} f(x) dx = \lim \int_a^{y_n} f(x) dx.$$

ora, isso é uma consequência do teorema da convergência dominada, uma vez que se tem

$$\int_a^{y_n} f(x) dx = \int_{[a, b[} \mathbb{I}_{[a, y_n[}(x) f(x) dx$$

onde, para cada x , $\|\mathbb{I}_{[a, y_n[}(x) f(x)\| \leq \|f(x)\|$ e $\mathbb{I}_{[a, y_n[}(x) f(x) = f(x)$ a partir de certa ordem, e a função $x \mapsto \|f(x)\|$ tem, por hipótese, integral finito.

b) Pode-se dar uma demonstração análoga à de a) ou, alternativamente, reduzir a conclusão de b) à de a), do mesmo modo que no resultado precedente, tendo em conta a invariância da medida de Lebesgue por simetria em I.5.14 e o teorema trivial de mudança de variáveis em II.2.56. \square

Examinamos em seguida uma aplicação de II.3.10 à integração por mudança de variáveis, apresentando duas versões do resultado, a primeira com hipóteses mais fortes e demonstração mais simples, mas que será suficiente para a maioria das aplicações, e a segunda mais geral mas com uma demonstração que, não sendo difícil, utiliza alguns instrumentos técnicos mais rebuscados. Aconselhamos o leitor a utilizar a primeira versão e só se debruçar sobre a segunda se disso vier a necessitar.

II.3.14 (Integração por mudança de variáveis em \mathbb{R} , versão mais simples)

Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona, derivável em todos os pontos e com derivada contínua $\varphi': J \rightarrow \mathbb{R}$. Tem-se então:

a) Sendo $J' = \varphi(J)$, tem-se que J' é um intervalo aberto de \mathbb{R} e a aplicação $\varphi: J \rightarrow J'$ é mensurável e compatível com as medidas (cf. I.5.11), quando se considera em J' a restrição da medida de Lebesgue λ e em J a medida $\mu = \lambda_{(|\varphi'|)}$, definida, a partir da restrição da medida de Lebesgue, pela função mensurável $J \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |\varphi'(x)|$ (cf. II.1.22).

b) Seja $f: J' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. É então também mensurável a função $J \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto f(\varphi(x))|\varphi'(x)|$, e

$$\int_{J'} f(y) dy = \int_J f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

c) Sejam E um espaço de Banach e $f: J' \rightarrow E$ uma aplicação integrável. É então também integrável a aplicação $J \rightarrow E, x \mapsto |\varphi'(x)|f(\varphi(x))$, e

$$\int_{J'} f(y) dy = \int_J |\varphi'(x)| f(\varphi(x)) dx.$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes.

1) Uma vez que φ é contínua em todos os pontos, por ser derivável, concluímos que φ é mensurável e que $J' = \varphi(J)$ é um intervalo e este intervalo é necessariamente aberto, uma vez que o facto de φ ser estritamente monótona implica que ele não pode ter máximo nem mínimo.

Ponhamos $J =]a, b[$ e $J' =]a', b'[$, onde, em ambos os casos, as extremidades podem ser finitas ou infinitas.

2) Vamos provar a) no caso particular em que φ é estritamente crescente, portanto com $\varphi'(x) \geq 0$, para cada $x \in J$.

Subdem: O que se pretende mostrar é que coincidem nos borelianos de J' a restrição da medida de Lebesgue λ e a medida imagem direta $\varphi_*\mu$ (cf. I.5.13) e, tendo em conta I.4.10 e a versão precisada do teorema de extensão de Hahn em I.4.12, bastará, para isso, provar que, quaisquer que sejam $c' \leq d'$ em $]a', b'[$, tem-se

$$\lambda(]c', d']) = \varphi_*\mu(]c', d']).$$

Ora isso resulta de que, sendo $c \leq d$ em $]a, b[$ os pontos definidos por $c' = \varphi(c)$ e $d' = \varphi(d)$, tem-se, tendo em conta II.3.10,

$$\begin{aligned} \varphi_*\mu(]c', d']) &= \mu(\varphi^{-1}(]c', d'])) = \mu(]c, d]) = \int_{]c, d]} \varphi'(x) dx = \\ &= \int_c^d \varphi'(x) dx = \varphi(d) - \varphi(c) = d' - c' = \lambda(]c', d']). \end{aligned}$$

3) Para terminar a prova de a), resta-nos examinar o caso em que φ é estritamente decrescente, e portanto $\varphi'(x) \leq 0$, para cada $x \in J$. Ora, nesse caso, podemos aplicar o que já demonstrámos à aplicação estritamente crescente $\psi: -J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(y) = \varphi(-y)$, para a qual se tem $\psi(-J) = J'$, e, lembrando a invariância da medida de Lebesgue por simetria

em I.5.14 e o teorema trivial de mudança de variáveis em II.1.38, obtemos, para cada boreliano $B \subset J'$,

$$\begin{aligned}\lambda(B) &= \int_{\psi^{-1}(B)} \psi'(y) dy = \int_{-\varphi^{-1}(B)} -\varphi'(-y) dy \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} -\varphi'(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(B)} |\varphi'(x)| dx,\end{aligned}$$

o que prova a) também neste caso.

4) Passemos à prova de b). Ora, tendo em conta a conclusão de a), o teorema trivial de mudança de variáveis em II.1.38 e II.1.35, tem-se

$$\int_{J'} f(y) dy = \int_J f(\varphi(x)) d\mu(x) = \int_J f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

5) Passemos à prova de c). Ora, tendo em conta a conclusão de a), o teorema trivial de mudança de variáveis em II.2.56 e II.2.54, tem-se

$$\int_{J'} f(y) dy = \int_J f(\varphi(x)) d\mu(x) = \int_J f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx. \quad \square$$

II.3.15 (Integração por mudança de variáveis em \mathbb{R} , versão mais geral)

Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo de interior não vazio e $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona (no sentido lato), derivável em todos os pontos e com derivada contínua $\varphi': J \rightarrow \mathbb{R}$. Tem-se então:

a) Sendo $J' = \varphi(J)$, tem-se que J' é um intervalo de \mathbb{R} e a aplicação $\varphi: J \rightarrow J'$ é mensurável e compatível com as medidas (cf. I.5.11), quando se considera em J' a restrição da medida de Lebesgue λ e em J a medida $\mu = \lambda_{(|\varphi'|)}$, definida, a partir da restrição da medida de Lebesgue, pela função mensurável $J \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto |\varphi'(x)|$ (cf. II.1.22).

b) Seja $f: J' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. É então também mensurável a função $J \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $x \mapsto f(\varphi(x))|\varphi'(x)|$, e

$$\int_{J'} f(y) dy = \int_J f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

c) Sejam E um espaço de Banach e $f: J' \rightarrow E$ uma aplicação integrável. É então também integrável a aplicação $J \rightarrow E$, $x \mapsto |\varphi'(x)|f(\varphi(x))$, e

$$\int_{J'} f(y) dy = \int_J |\varphi'(x)| f(\varphi(x)) dx.$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes.

1) Uma vez que φ é contínua em todos os pontos, por ser derivável, concluímos que φ é mensurável e que $J' = \varphi(J)$ é um intervalo.

2) Vamos provar a) no caso particular em que φ é crescente, portanto com $\varphi'(x) \geq 0$, para cada $x \in J$, e em que $J' =]a', b'[$ (extremidades finitas ou

infinitas), caso em que, por este intervalo não ser vazio, tem-se $a' < b'$.

Subdem: Uma vez que φ é crescente e $J' = \varphi(J)$ não tem mínimo nem máximo, concluímos que J não tem mínimo nem máximo, portanto $J =]a, b[$, com $a < b$ (extremidades finitas ou infinitas). O que se pretende mostrar é que coincidem nos borelianos de J' a restrição da medida de Lebesgue λ e a medida imagem direta $\varphi_*\mu$ (cf. I.5.13) e, tendo em conta I.4.10 e a versão precisada do teorema de extensão de Hahn em I.4.12, bastará, para isso, provar que, quaisquer que sejam $c' \leq d'$ em $]a', b'[$, tem-se

$$(1) \quad \lambda(]c', d']) = \varphi_*\mu(]c', d']).$$

Ora, comecemos por reparar que, para cada $y' \in]a', b'[$, o facto de φ ser crescente e contínua implica que $\varphi^{-1}(\{y'\})$ é um intervalo não vazio fechado em $]a, b[$, cuja extremidade direita não pode ser b (senão φ não tomava valores maiores que y'), portanto necessariamente com máximo em $]a, b[$.⁸⁵ Podemos assim tomar $c \in]a, b[$ igual ao máximo do conjunto $\varphi^{-1}(\{c'\})$ e $d \in]a, b[$ igual ao máximo do conjunto $\varphi^{-1}(\{d'\})$ e constatamos, mais uma vez por φ ser crescente, que para cada $x \in]a, b[$

$$x \leq c \Leftrightarrow \varphi(x) \leq c', \quad x \leq d \Leftrightarrow \varphi(x) \leq d',$$

portanto $\varphi^{-1}(]c', d']) =]c, d]$. Podemos agora escrever, tendo em conta II.3.10,

$$\begin{aligned} \varphi_*\mu(]c', d']) &= \mu(\varphi^{-1}(]c', d'])) = \int_{]c, d]} \varphi'(x) dx = \int_c^d \varphi'(x) dx = \\ &= \varphi(d) - \varphi(c) = d' - c' = \lambda(]c', d']), \end{aligned}$$

o que prova (1).

3) Vamos agora provar a) ainda com a hipótese de φ ser crescente, portanto com $\varphi'(x) \geq 0$ para cada $x \in J$, mas deixando de exigir que os intervalos J e J' sejam abertos.

Subdem: O que temos que provar é que, para cada boreliano $B \subset J'$, tem-se

$$(2) \quad \lambda(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \varphi'(x) dx.$$

No caso trivial em que J' tem um único elemento, vem $\lambda(B) = 0$ e, por φ ser constante, $\varphi'(x) = 0$, para cada $x \in J$, pelo que a igualdade (2) é verdadeira. Suponhamos então que J' tem mais que um elemento e sejam $a' < b'$ as extremidades esquerda e direita de J' , finitas ou infinitas que, quando finitas, podem pertencer ou não a J' . Tendo em conta o facto de φ ser crescente, vemos que o intervalo J é união de três intervalos disjuntos,

⁸⁵Analogamente, esse conjunto também tem mínimo em $]a, b[$, mas não utilizaremos esse facto.

$$\begin{aligned} J_- &= \{x \in J \mid \varphi(x) = a'\}, \\ J_0 &= \{x \in J \mid \varphi(x) \in]a', b'[\}, \\ J_+ &= \{x \in J \mid \varphi(x) = b'\}, \end{aligned}$$

onde o primeiro e o último podem eventualmente ser vazios, e $\varphi(J_0) =]a', b'[\$. Tem-se $\mu(J_-) = \mu(J_+) = 0$ visto que cada um destes intervalos ou é de interior vazio, e nesse caso tem medida de Lebesgue 0, ou tem interior não vazio, e nesse caso $\varphi'(x) = 0$, para cada x no intervalo. Aplicando o que vimos em 2) à restrição $\varphi|_{J_0}: J_0 \rightarrow]a', b'[\$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \lambda(B \cap]a', b'[\) = \mu(\varphi|_{J_0}^{-1}(B)) = \mu(\varphi^{-1}(B) \cap J_0) = \\ &= \mu(\varphi^{-1}(B) \cap J_0) + \mu(\varphi^{-1}(B) \cap J_-) + \mu(\varphi^{-1}(B) \cap J_+) = \\ &= \mu(\varphi^{-1}(B)), \end{aligned}$$

o que prova (2).

4) Para terminar a prova de a), resta-nos examinar o caso em que φ é decrescente, e portanto $\varphi'(x) \leq 0$, para cada $x \in J$. Ora, nesse caso, podemos aplicar o que já demonstrámos à aplicação crescente $\psi: -J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(y) = \varphi(-y)$, para a qual se tem $\psi(-J) = J'$, e, lembrando a invariância da medida de Lebesgue por simetria em I.5.14 e o teorema trivial de mudança de variáveis em II.1.38, obtemos, para cada boreliano $B \subset J'$,

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \int_{\psi^{-1}(B)} \psi'(y) dy = \int_{-\varphi^{-1}(B)} -\varphi'(-y) dy \\ &= \int_{\varphi^{-1}(B)} -\varphi'(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(B)} |\varphi'(x)| dx, \end{aligned}$$

o que prova a) também neste caso.

5) Passemos à prova de b). Ora, tendo em conta a conclusão de a), o teorema trivial de mudança de variáveis em II.1.38 e II.1.35, tem-se

$$\int_{J'} f(y) dy = \int_J f(\varphi(x)) d\mu(x) = \int_J f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

6) Passemos à prova de c). Ora, tendo em conta a conclusão de a), o teorema trivial de mudança de variáveis em II.2.56 e II.2.54, tem-se

$$\int_{J'} f(y) dy = \int_J f(\varphi(x)) d\mu(x) = \int_J f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx. \quad \square$$

Exercícios

Ex II.3.1 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Mostrar que f é localmente integrável. **Sugestão:** O facto de f ser mensurável já foi examinado na alínea a) do exercício I.5.12. Reparar que, se $I = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado não vazio contido em J , a restrição de f a I admite um máximo e um mínimo, cada um deles igual a $f(a)$ ou $f(b)$ e deduzir daí que $|f(x)|$ é majorado em I .

Ex II.3.2 (**Generalização do teorema da média, cf. [3]**) Sejam $a \leq b$ em \mathbb{R} , E um espaço de Banach, $M \geq 0$ e $f: [a, b] \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Suponhamos que existe um conjunto contável $X \subset [a, b]$ tal que, para cada $t \in [a, b] \setminus X$, f seja derivável em t e com $\|f'(t)\| \leq M$. Mostrar que se tem então $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$.

Sugestão: Fixar $\delta > 0$ arbitrário. Considerar uma aplicação injetiva $\varphi: X \rightarrow \mathbb{N}$ e o conjunto C dos pontos $t \in [a, b]$ tais que

$$\|f(t) - f(a)\| \leq (M + \delta)(t - a) + \sum_{\substack{x \in X \\ x < t}} \frac{\delta}{2^{\varphi(x)}}.$$

Notando que $a \in C$, considerar o supremo c de C e mostrar, primeiro, que $c \in C$ e, depois, que tem que ser $c = b$. Deduzir que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (M + \delta)(b - a) + \delta$$

e considerar o limite quando $\delta \rightarrow 0$.

Ex II.3.3 (**Variante da condição de derivabilidade**) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um conjunto, a um ponto de acumulação de J , E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação derivável em a , com derivada $f'(a)$. Mostrar que se tem então

$$\lim_{\substack{(s,t) \rightarrow (a,a) \\ s < a < t}} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(a).$$

Sugestão: Verificar que, para cada $s < a < t$, $\frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ pertence ao segmento de E de extremidades $\frac{f(a) - f(s)}{a - s}$ e $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$.

Ex II.3.4 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação integrável (e não só localmente integrável). Dado $t_0 \in J$, mostrar que o integral indefinido $\widehat{f}: J \rightarrow E$, definido por

$$\widehat{f}(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx,$$

é uma aplicação uniformemente contínua (e não só contínua). **Sugestão:** Ter em conta a conclusão do exercício II.1.19.

Ex II.3.5 Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Sendo $g: J \times J \rightarrow E$ a aplicação definida por

$$g(s, t) = \int_s^t f(x) dx,$$

mostrar que g é uma aplicação contínua, determinar as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial s}(s, t)$ e $\frac{\partial g}{\partial t}(s, t)$ e mostrar que $\frac{\partial g}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial t}: J \times J \rightarrow E$ são aplicações contínuas.

Ex II.3.6 Sendo $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, verificar que:

a)
$$\int_{]0, a[} x^\alpha dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > -1;$$

b)
$$\int_{[a, +\infty[} x^\alpha dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < -1.$$

Ex II.3.7 a) Sejam $a > 0$ e $\varphi: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função contínua tal que, para um certo $\alpha > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \varphi(x) = 0.$$

Mostrar que

$$\int_{[a, +\infty[} \varphi(x) dx < +\infty.$$

b) Sejam E um espaço de Banach e $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ uma aplicação contínua tal que, para um certo $\alpha > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x|^\alpha \|f(x)\| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha \|f(x)\| = 0.$$

Mostrar que f é uma aplicação integrável.

Ex II.3.8 Verificar que é finito o integral

$$\int_{]0, +\infty[\setminus \{1\}} \frac{1}{\sqrt[3]{|x^4 - x^2|}} dx.$$

Sugestão: Ter em conta as conclusões do exercício II.3.6.

Ex II.3.9 (**Integração por partes**) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$,

$$w \times z = \xi(w, z) \in H.$$

Sejam $a < b$ em \mathbb{R} e $f: [a, b] \rightarrow F$ e $g: [a, b] \rightarrow G$ duas aplicações deriváveis em todos os pontos e com derivadas contínuas. Mostrar que

$$\int_a^b f'(x) \times g(x) dx = f(b) \times g(b) - f(a) \times g(a) - \int_a^b f(x) \times g'(x) dx.$$

Ex II.3.10 (Produto de contínua por localmente integrável) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$,

$$w \times z = \xi(w, z) \in H.$$

Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo de extremidades finitas ou infinitas e aberto ou fechado em cada uma das extremidades e sejam $f: J \rightarrow F$ uma aplicação contínua (respetivamente, localmente integrável) e $g: J \rightarrow G$ uma aplicação localmente integrável (respetivamente, contínua). Mostrar que a aplicação $f \times g: J \rightarrow H$, definida por $x \mapsto f(x) \times g(x)$, é também localmente integrável.

Ex II.3.11 (A função gama em $]0, +\infty[$) a) Verificar que, para cada $x > 0$ em \mathbb{R} , é integrável a função $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$, pelo que faz sentido definir uma função $\Gamma:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ (a *função gama*) por

$$\Gamma(x) = \int_{]0, +\infty[} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Sugestão: Para a integrabilidade em $]0, 1]$, atender à conclusão da alínea a) do exercício II.3.6 e, para a integrabilidade em $[1, +\infty[$, mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x-1} e^{-t/2} = 0.$$

b) Efetuar uma integração por partes em cada intervalo $[\frac{1}{n}, n]$ e passar ao limite, para deduzir que, para cada $x > 0$ em \mathbb{R} ,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c) Verificar que $\Gamma(1) = 1$ e deduzir, por indução em n , que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Ex II.3.12 (Um integral impróprio numa função não integrável) Seja $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função contínua definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, se $x > 0$.

a) Mostrar que a função f não é integrável.

Sugestão: Reparar que se tem $\|f(x)\| \geq g(x)$, onde $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ é a função que toma o valor constante $\frac{1}{2(n+1)\pi}$ em cada intervalo

$$\left[n\pi + \frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6} \right],$$

onde $n \geq 0$ é inteiro e é nula fora da união destes intervalos. Verificar que a função g tem integral $+\infty$, calculando o seu integral como soma de uma série.

b) Mostrar que existe e é finito o limite dos integrais

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y f(x) dx. \quad 86$$

Sugestão: Para cada $y > 1$, utilizar uma integração por partes para concluir que

$$\int_1^y f(x) dx = -\frac{\cos(y)}{y} + \cos(1) - \int_1^y \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

e mostrar que o integral no segundo membro tem limite finito quando $y \rightarrow +\infty$, mostrando que a função $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2}$ é integrável em $[1, +\infty[$ e utilizando II.3.13.

Ex II.3.13 (**Generalização trivial de II.3.15**) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo de interior não vazio e $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona (no sentido lato), derivável em todos os pontos e com derivada contínua $\varphi': J \rightarrow \mathbb{R}$ e consideremos o correspondente intervalo $J' = \varphi(J)$. Mostrar que:

a) Se $f: J' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável e $B \subset J'$ é um boreliano, então

$$\int_B f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

Sugestão: Reduzir os integrais em subconjuntos a integrais na totalidade dos intervalos, utilizando as funções indicatrizes dos subconjuntos.

b) Se E é um espaço de Banach, $f: J' \rightarrow E$ é uma aplicação topologicamente mensurável e $B \subset J'$ é um boreliano tal que $f|_B$ seja integrável, então

$$\int_B f(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx,$$

onde, em particular, estamos a afirmar que a função no segundo membro é integrável.

⁸⁶Ver o exercício II.4.9 adiante para o cálculo do valor deste integral.

§4. Produto de medidas e teorema de Fubini.

II.4.1 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida. Fica então bem definida uma medida $\mu \times \mu'$ no semianel $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ de partes de $X \times Y$ (cf. I.5.19) pela condição de se ter, para cada $C \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, com $C = A \times B$, $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$,

$$\mu \times \mu'(C) = \mu(A) \times \mu'(B).$$

Dem: O facto de $\mu \times \mu'$ estar bem definida vem de que, se $\emptyset = A \times B$, com $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$, então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, em ambos os casos $\mu(A) \times \mu'(B) = 0$ e de que, se $C \neq \emptyset$, com $C = A \times B = A' \times B'$, então $A = A'$ e $B = B'$ (imagens de C pelas projecções canónicas de $X \times Y$ para X e para Y , respetivamente).⁸⁷ Esta mesma observação mostra que se tem $\mu \times \mu'(\emptyset) = 0$.

Resta-nos mostrar que, dada uma família contável $(C_j)_{j \in J}$ de conjuntos de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ disjuntos dois a dois, cuja união seja um conjunto $C \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, então

$$\mu \times \mu'(C) = \sum_{j \in J} \mu \times \mu'(C_j),$$

para o que podemos já supor $C_j \neq \emptyset$, para cada j (retirando de J os índices j para os quais isso não acontece) e afastar seguidamente o caso trivial em que $C = \emptyset$, e portanto $J = \emptyset$.

Seja então $C = A \times B$, com $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$ e, para cada $j \in J$, $C_j = A_j \times B_j$, com $A_j \in \mathcal{M}$ e $B_j \in \mathcal{N}$ e reparemos que as suposições feitas implicam que, para cada $j \in J$, $A_j \subset A$ e $B_j \subset B$. Consideremos as funções mensuráveis, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e, para cada $j \in J$, $f_j: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$f(x) = \mu'(B) \times \mathbb{I}_A(x), \quad f_j(x) = \mu'(B_j) \times \mathbb{I}_{A_j}(x),$$

e reparemos que, tendo em conta II.1.12, a alínea c) de II.1.16 e II.1.25,

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu(x) &= \mu'(B) \int_X \mathbb{I}_A(x) d\mu(x) = \mu(A) \mu'(B) = \mu \times \mu'(C), \\ \int_X f_j(x) d\mu(x) &= \mu'(B_j) \int_X \mathbb{I}_{A_j}(x) d\mu(x) = \mu(A_j) \mu'(B_j) = \mu \times \mu'(C_j). \end{aligned}$$

Mas, para cada $x \in X$, tem-se

⁸⁷A razão desta observação está em que se pode ter, por exemplo, $\emptyset \times B = \emptyset = \emptyset \times B'$, com $B \neq B'$, pelo que poderia haver *a priori* ambiguidade na definição de $\mu \times \mu'(\emptyset)$.

$$f(x) = \sum_{j \in J} f_j(x),$$

visto que, se $x \notin A$, tem-se $f(x) = 0$ e $f_j(x) = 0$ para cada $j \in J$ e, se $x \in A$, notando $J_x = \{j \in J \mid x \in A_j\}$, B é a união dos B_j , com $j \in J_x$, que são disjuntos dois a dois, e portanto

$$f(x) = \mu'(B) = \sum_{j \in J_x} \mu'(B_j) = \sum_{j \in J_x} f_j(x) = \sum_{j \in J} f_j(x).$$

Tendo em conta II.1.21, obtemos assim

$$\mu \times \mu'(C) = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_X f_j(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \mu \times \mu'(C_j),$$

como queríamos. □

A partir de agora será cómodo, e várias vezes essencial, supor que os espaços de medida envolvidos são σ -finitos (cf. I.4.9), pelo que faremos sempre essa hipótese.

II.4.2 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida σ -finitos. Tem-se então que a medida $\mu \times \mu'$ no semianel de partes de $X \times Y$ é também σ -finita e, portanto, existe uma única medida $\mu \otimes \mu': \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ gerada por $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ (cf. I.5.20) cuja restrição a $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ é $\mu \times \mu'$. Dizemos que $\mu \otimes \mu'$, que é também σ -finita, é a *medida produto* das medidas μ e μ' e é ela a que se considera implicitamente num produto, quando outra não for referida.

Dem: Sejam $(X_j)_{j \in J}$ e $(Y_k)_{k \in K}$ famílias contáveis de subconjuntos em \mathcal{M} e \mathcal{N} , respetivamente, tais que $\mu(X_j) < +\infty$, $\mu'(Y_k) < +\infty$, $X = \bigcup X_j$ e $Y = \bigcup Y_k$. Tem-se então que $X \times Y$ é a união da família contável de conjuntos em $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, $(X_j \times Y_k)_{(j,k) \in J \times K}$ que verificam

$$\mu \times \mu'(X_j \times Y_k) = \mu(X_j)\mu'(Y_k) < +\infty,$$

o que mostra que a medida $\mu \times \mu'$ no semianel $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ é efetivamente σ -finita. A existência e unicidade de uma medida na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ cuja restrição a $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ é $\mu \times \mu'$ é agora uma consequência do teorema de extensão de Hahn em I.4.12 e o facto de esse prolongamento ser uma medida σ -finita é uma consequência trivial de a sua restrição ao semianel $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ já ser uma medida σ -finita. □

II.4.3 (Compatibilidade com as restrições) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida σ -finitos e consideremos a medida produto $\mu \otimes \mu'$ na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Sejam $X' \in \mathcal{M}$ e $Y' \in \mathcal{N}$. Tem-se então que as medidas restrição $\mu|_{X'}$ e $\mu'|_{Y'}$, nas σ -álgebras $\mathcal{M}|_{X'}$ e $\mathcal{N}|_{Y'}$, de partes de X' e de Y' ,

respetivamente, são ainda σ -finitas e a medida produto $\mu_{/X'} \otimes \mu'_{/Y'}$ na σ -álgebra

$$\mathcal{M}_{/X'} \otimes \mathcal{N}_{/Y'} = (\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})_{/X' \times Y'}$$

de partes de $X' \times Y'$ (cf. I.5.22) coincide com a medida $(\mu \otimes \mu')_{/X' \times Y'}$, restrição da medida $\mu \otimes \mu'$.⁸⁸

Dem: Sendo $(X_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos em \mathcal{M} com $\bigcup X_j = X$ e $\mu(X_j) < +\infty$, vemos que X' é a união da família contável dos conjuntos $X' \cap X_j$ em $\mathcal{M}_{/X'}$, que verificam

$$\mu_{/X'}(X' \cap X_j) = \mu(X' \cap X_j) \leq \mu(X_j) < +\infty,$$

o que mostra que a medida $\mu_{/X'}$ é também σ -finita. O mesmo argumento mostra que a medida $\mu'_{/Y'}$ é também σ -finita. A igualdade das duas medidas resulta agora de $\mu_{/X'} \otimes \mu'_{/Y'}$ ser, por definição, a única medida que nos conjuntos da forma $A \times B$, com $A \in \mathcal{M}_{/X'}$ e $B \in \mathcal{N}_{/Y'}$, toma o valor $\mu(A)\mu'(B)$ e de a medida $(\mu \otimes \mu')_{/X' \times Y'}$ verificar essa propriedade. \square

II.4.4 (Comutatividade) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida σ -finitos. Tem-se então que a bijeção $\sigma: Y \times X \rightarrow X \times Y$, definida por $\sigma(y, x) = (x, y)$ é bimensurável e compatível com as medidas, quando se considera no domínio a medida $\mu' \otimes \mu$ na σ -álgebra $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ e no espaço de chegada a medida $\mu \otimes \mu'$ na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.⁸⁹

Dem: O facto de σ ser mensurável é uma consequência direta de I.5.21 e o facto de ser mesmo bimensurável vem de que σ^{-1} é a aplicação do mesmo tipo, com os papéis de X e Y trocados. Verificar que σ é compatível com as medidas é o mesmo que verificar que a medida imagem direta $\sigma_*(\mu' \otimes \mu)$ (cf. I.5.13) coincide com a medida $\mu \otimes \mu'$, na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, e isso resulta da definição, uma vez que, para cada $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_*(\mu' \otimes \mu)(A \times B) &= \mu' \otimes \mu(\sigma^{-1}(A \times B)) = \\ &= \mu' \otimes \mu(B \times A) = \mu(A)\mu'(B). \end{aligned} \quad \square$$

Queremos examinar em seguida o resultado que permite calcular, em muitos casos de forma mais efetiva, a medida de um subconjunto mensurável dum produto cartesiano e que é uma primeira versão do teorema de Fubini. Para isso precisamos de examinar primeiro um lema, cujo enunciado não tem nada a ver com o produto de medidas.

⁸⁸Felizmente..., senão ficávamos na dúvida sobre qual a medida a considerar implicitamente em $X' \times Y'$.

⁸⁹Como era de desconfiar, trata-se de uma trivialidade, que apenas enunciamos porque será cómodo utilizá-la.

II.4.5 (**Lema**) Sejam Z um conjunto, \mathcal{S} um semianel de partes de Z , tal que $Z \in \mathcal{S}$ e \mathcal{P} a σ -álgebra de partes de Z gerada por \mathcal{S} . Seja \mathcal{F} uma classe de partes de Z , com $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ e que verifique as condições:

- 1) Sempre que $A, B \in \mathcal{F}$ e $B \subset A$, tem-se $A \setminus B \in \mathcal{F}$;
- 2) Sempre que $(A_k)_{k \in K}$ é uma família contável de conjuntos em \mathcal{F} disjuntos dois a dois, tem-se $\bigcup_{k \in K} A_k \in \mathcal{F}$.

Tem-se então $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Vamos dizer, em geral, que uma classe \mathcal{F} de partes de Z é *razoável*⁹⁰ se verificar as condições 1) e 2) no enunciado. Uma vez que a classe $\mathcal{P}(Z)$, de todas as partes de Z , é razoável e que a intersecção de uma família arbitrária de classes razoáveis é trivialmente uma classe razoável, podemos chamar \mathcal{F}_0 à intersecção de todas as classes razoáveis que contêm \mathcal{S} , que vai ser uma classe razoável contendo \mathcal{S} e contida em qualquer classe razoável que contenha \mathcal{S} (podemos dizer que \mathcal{F}_0 é a *classe razoável gerada por \mathcal{S}*). O lema ficará provado se verificarmos que $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}_0$, para o que bastará provar que \mathcal{F}_0 é uma σ -álgebra,⁹¹ e é isso que vamos fazer em seguida.

2) Para cada conjunto $C \subset Z$, seja

$$\mathcal{F}_C = \{A \subset Z \mid A \cap C \in \mathcal{F}_0\}.$$

Tem-se então que \mathcal{F}_C é uma classe razoável.

Subdem: Sendo $A, B \in \mathcal{F}_C$, com $B \subset A$, tem-se $B \cap C \subset A \cap C$, donde

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) \in \mathcal{F}_0,$$

o que mostra que $A \setminus B \in \mathcal{F}_C$. Sendo $(A_k)_{k \in K}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{F}_C disjuntos dois a dois, os conjuntos $A_k \cap C$ são também disjuntos dois a dois, donde

$$\left(\bigcup_{k \in K} A_k \right) \cap C = \bigcup_{k \in K} (A_k \cap C) \in \mathcal{F}_0,$$

o que mostra que $\bigcup_{k \in K} A_k \in \mathcal{F}_C$.

3) Vamos verificar que, sempre que $A, B \in \mathcal{F}_0$, tem-se $A \cap B \in \mathcal{F}_0$.

⁹⁰Trata-se de um nome nitidamente pouco interessante. A única desculpa para o utilizarmos é que esta noção será utilizada apenas no decurso desta demonstração, podendo ser esquecida uma vez esta terminada. Esta noção joga um papel análogo ao das “classes monótonas”, que são utilizadas em vários textos para demonstrar um lema análogo a este e que tem o mesmo objetivo. A demonstração que apresentamos é, aliás, inspirada na do lema análogo que se encontra no livro de Halmos [6].

⁹¹Apesar de qualquer σ -álgebra ser evidentemente uma classe razoável, não estamos, de modo nenhum, a afirmar que toda a classe razoável seja uma σ -álgebra. O que vamos provar é que a classe razoável gerada por um semianel, que verifique a propriedade especial no enunciado, é uma σ -álgebra.

Subdem: Começemos por supor que $C \in \mathcal{S}$. O facto de \mathcal{S} ser semianel implica que, para cada $A \in \mathcal{S}$, tem-se $A \cap C \in \mathcal{S} \subset \mathcal{F}_0$, portanto $A \in \mathcal{F}_C$. Provámos assim que $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}_C$ donde, por \mathcal{F}_C ser uma classe razoável, tem-se também $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_C$. A conclusão a que acabámos de chegar diz-nos que, para cada $C \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{F}_0$, tem-se $A \in \mathcal{F}_C$, condição que é equivalente, por definição, a $C \in \mathcal{F}_A$. Dito de outro modo, fixado $A \in \mathcal{F}_0$, tem-se $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}_A$, donde, como antes, por \mathcal{F}_A ser uma classe razoável, tem-se também $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_A$. Concluímos assim que, se $A \in \mathcal{F}_0$ e $B \in \mathcal{F}_0$, tem-se $B \in \mathcal{F}_A$, ou seja $A \cap B \in \mathcal{F}_0$.

4) Vamos verificar agora que \mathcal{F}_0 é uma σ -álgebra, o que, como referimos em 1), terminará a demonstração.

Subdem: Vamos dividir esta verificação em alíneas sucessivas:

a) Tem-se $\emptyset \in \mathcal{S} \subset \mathcal{F}_0$. Do mesmo modo, $Z \in \mathcal{S} \subset \mathcal{F}_0$, portanto, para cada $B \in \mathcal{F}_0$, $Z \setminus B \in \mathcal{F}_0$.

b) Se $A, B \in \mathcal{F}_0$ (sem ser necessariamente $B \subset A$), então $A \setminus B \in \mathcal{F}_0$.

Com efeito, tem-se $A \setminus B = A \cap (Z \setminus B)$ pelo que basta ter em conta o que vimos em 3).

c) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família finita de conjuntos em \mathcal{F}_0 , então $\bigcup A_j \in \mathcal{F}_0$.

Com efeito, raciocinando por indução no número de elementos de J , basta mostrar que, se $A, B \in \mathcal{F}_0$, tem-se $A \cup B \in \mathcal{F}_0$ e isso resulta de se ter $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, onde $B \setminus A \in \mathcal{F}_0$, por b), e $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

d) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos em \mathcal{F}_0 , então $\bigcup A_j \in \mathcal{F}_0$.

Com efeito, tendo em conta o lema I.2.11, podemos escrever $\bigcup A_j = \bigcup A'_j$, onde os conjuntos A'_j são disjuntos dois a dois e, tendo em conta b) e c), pertencem a \mathcal{F}_0 . \square

II.4.6 (Teorema de Fubini para conjuntos) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida σ -finitos e consideremos a medida produto $\mu \otimes \mu'$ na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Seja $C \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Tem-se então:

a) Para cada $x \in X$, o conjunto

$$C_{x,\cdot} = \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$$

pertence a \mathcal{N} . Além disso, é mensurável a função $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $x \mapsto \mu'(C_{x,\cdot})$ e tem-se

$$\mu \otimes \mu'(C) = \int_X \mu'(C_{x,\cdot}) d\mu(x).$$

b) Para cada $y \in Y$, o conjunto

$$C_{\cdot,y} = \{x \in X \mid (x, y) \in C\}$$

pertence a \mathcal{M} . Além disso, é mensurável a função $Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $y \mapsto \mu(C_{\cdot,y})$ e tem-se

$$\mu \otimes \mu'(C) = \int_Y \mu(C_{\cdot, y}) d\mu'(y).$$

Dem: Basta-nos provar apenas a), uma vez que b) resulta de aplicar a) ao conjunto $\widehat{C} \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$,

$$\widehat{C} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in C\},$$

para o qual se tem $\mu' \otimes \mu(\widehat{C}) = \mu \otimes \mu'(C)$ (cf. II.4.4). Vamos dividir a prova de a) em duas partes:

1) Vamos provar a) com a hipótese suplementar de se ter $\mu(X) < +\infty$ e $\mu'(Y) < +\infty$, portanto também

$$\mu \otimes \mu'(X \times Y) = \mu(X)\mu'(Y) < +\infty.$$

Subdem: Seja \mathcal{F} a classe dos conjuntos $C \subset X \times Y$, para os quais as conclusões de a) são verdadeiras.

Suponhamos que $C \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, portanto que $C = A \times B$, com $A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}$. Para cada $x \in A$, tem-se $C_{x, \cdot} = B$ e, para cada $x \notin A$, tem-se $C_{x, \cdot} = \emptyset$, em qualquer caso $C_{x, \cdot} \in \mathcal{N}$, e a função $x \mapsto \mu'(C_{x, \cdot})$ vai ser uma função simples, em particular mensurável, que em A toma o valor constante $\mu'(B)$ e em $X \setminus A$ o valor constante 0, e vemos então que

$$\mu \otimes \mu'(C) = \mu(A)\mu'(B) = \int_X \mu'(C_{x, \cdot}) d\mu(x),$$

o que mostra que se tem $C \in \mathcal{F}$.

Suponhamos agora que $C, C' \in \mathcal{F}$, com $C' \subset C$. Para cada $x \in X$, tem-se $C'_x \subset C_x$ e $(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x \in \mathcal{N}$, com

$$\mu'((C \setminus C')_x) = \mu'(C_x) - \mu'(C'_x),$$

o que mostra que é mensurável a função $x \mapsto \mu'(C_{x, \cdot}) - \mu'(C'_x)$ (diferença de duas funções integráveis com valores em \mathbb{R}), e tem-se então

$$\begin{aligned} \mu \otimes \mu'(C \setminus C') &= \mu \otimes \mu'(C) - \mu \otimes \mu'(C') = \\ &= \int_X \mu'(C_{x, \cdot}) d\mu(x) - \int_X \mu'(C'_{x, \cdot}) d\mu(x) = \\ &= \int_X \mu'(C_{x, \cdot}) - \mu'(C'_x) d\mu(x) = \\ &= \int_X \mu'((C \setminus C')_{x, \cdot}) d\mu(x), \end{aligned}$$

portanto $C \setminus C' \in \mathcal{F}$.

Suponhamos, enfim, que $C = \bigcup C_j$, onde $(C_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos $C_j \in \mathcal{F}$, disjuntos dois a dois. Para cada $x \in X$, $C_{x, \cdot}$ é a união da família contável de conjuntos $C_{j, x, \cdot} \in \mathcal{N}$, que são disjuntos dois a dois, pelo

que $C_{x,\cdot} \in \mathcal{N}$ e $\mu'(C_{x,\cdot}) = \sum_{j \in J} \mu'(C_{j_{x,\cdot}})$, o que implica que é mensurável a função $x \mapsto \mu'(C_{x,\cdot})$, e tem-se então, lembrando II.1.21,

$$\begin{aligned} \mu \otimes \mu'(C) &= \sum_{j \in J} \mu \otimes \mu'(C_j) = \sum_{j \in J} \int_X \mu'(C_{j_{x,\cdot}}) d\mu(x) = \\ &= \int_X \sum_{j \in J} \mu'(C_{j_{x,\cdot}}) d\mu(x) = \int_X \mu'(C_{x,\cdot}) d\mu(x), \end{aligned}$$

portanto $C \in \mathcal{F}$.

Verificámos assim que a classe \mathcal{F} contém o semianel $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ (que inclui $X \times Y$) e verifica as hipóteses 1) e 2) do lema II.4.5 pelo que, por esse lema, \mathcal{F} contém a σ -álgebra gerada $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, que é exatamente o que pretendemos.

2) Passemos agora à demonstração de a) no caso geral. O facto de a medida μ ser σ -finita permite-nos, por uma mudança de conjunto de índices, considerar uma sucessão $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de conjuntos $X_n \in \mathcal{M}$ com $\mu(X_n) < +\infty$, tal que $X = \bigcup X_n$. De facto, podemos já supor que os X_n constituem uma sucessão crescente de conjuntos, se necessário substituindo cada X_n pelo conjunto $X'_n = \bigcup_{1 \leq p \leq n} X_p$, que verifica ainda

$$\mu(X'_n) \leq \sum_{1 \leq p \leq n} \mu(X_p) < +\infty.$$

Analogamente, podemos considerar uma sucessão crescente de conjuntos $Y_n \in \mathcal{N}$, com $\mu'(Y_n) < +\infty$ e $Y = \bigcup Y_n$. Tem-se então que C é a união da sucessão crescente de conjuntos $C_n = C \cap (X_n \times Y_n) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, o que implica que

$$\mu \otimes \mu'(C) = \lim \mu \otimes \mu'(C_n).$$

Por outro lado, aplicando o caso particular estudado em 1), ao conjunto C_n , relativamente a $X_n \times Y_n$ com a medida induzida, vemos que, para cada $x \in X_n$, $C_{n,x,\cdot} \in \mathcal{N}$, que é mensurável a função $X_n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \mu'(C_{n,x,\cdot})$, e que

$$\mu \otimes \mu'(C_n) = \int_{X_n} \mu'(C_{n,x,\cdot}) d\mu(x),$$

e portanto, uma vez que, para cada $x \in X \setminus X_n$, $C_{n,x,\cdot} = \emptyset$, em particular $\mu'(C_{n,x,\cdot}) = 0$, também podemos dizer que é mensurável a função $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \mu'(C_{n,x,\cdot})$ e que

$$\mu \otimes \mu'(C_n) = \int_X \mu'(C_{n,x,\cdot}) d\mu(x).$$

Por outro lado, para cada $x \in X$, $C_{x,\cdot}$ é a união da sucessão crescente dos conjuntos $C_{n,x,\cdot}$ pelo que $C_{x,\cdot}$ é mensurável e com $\mu'(C_{x,\cdot}) = \lim \mu'(C_{n,x,\cdot})$ e

daqui concluímos, pelo teorema da convergência monótona (cf. II.1.18) que a aplicação $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \mu'(C_{x,\cdot})$, é mensurável e que

$$\int_X \mu'(C_{x,\cdot}) d\mu(x) = \lim \int_X \mu'(C_{n x,\cdot}) d\mu(x) = \lim \mu \otimes \mu'(C_n) = \mu \otimes \mu'(C),$$

como queríamos. \square

Como exemplo de aplicação do resultado precedente, determinamos a medida da bola de centro $(0,0)$ e raio 1 de \mathbb{R}^2 , valor esse que será importante para nós mais adiante.

II.4.7 (A área do círculo) Seja λ a medida de Lebesgue na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos de \mathbb{R} . Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ o círculo fechado de centro $(0,0)$ e raio 1,

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Tem-se então que $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e $\lambda \otimes \lambda(B) = \pi$.

Dem: O facto de B ser um boreliano de \mathbb{R}^2 resulta de se tratar de um conjunto fechado. Para cada $x \in \mathbb{R}$, o conjunto $B_{x,\cdot} = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in B\}$ é vazio, se $x \notin [-1, 1]$, e é o intervalo $[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$, se $x \in [-1, 1]$. Deduzimos assim de II.4.6 que

$$\lambda \otimes \lambda(B) = \int_{[-1,1]} 2\sqrt{1-x^2} dx = \int_{]-1,1[} 2\sqrt{1-x^2} dx.$$

Podemos agora aplicar o resultado sobre integração por mudança de variáveis em II.3.14, com a aplicação estritamente crescente de classe C^1 e sobrejetiva $\varphi:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-1, 1[, \varphi(t) = \text{sen}(t)$, para obter

$$\begin{aligned} \lambda \otimes \lambda(B) &= \int_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} 2\sqrt{1-\text{sen}^2(t)} \cos(t) dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos^2(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) + 1 dt = \pi. \quad \square \end{aligned}$$

II.4.8 (Nota) A determinação que acabamos de fazer fará pouco sentido para quem π seja, por definição, a área do círculo referido; é, em particular, o que acontece quando nos colocamos no contexto da definição geométrica das funções trigonométricas. Essa determinação já faz, no entanto, todo o sentido quando nos colocamos num contexto em que definimos as funções trigonométricas de forma não geométrica, por exemplo por

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \\ \cos(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\end{aligned}$$

e definimos π como o menor zero estritamente positivo da função $\operatorname{sen}(x)$, caso em que o que fazemos neste exercício é mostrar a relação entre esta definição de π e a definição geométrica.

II.4.9 (Teorema de Fubini para funções positivas⁹²) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida σ -finitos e consideremos a medida produto $\mu \otimes \mu'$ na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Seja $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função mensurável. Tem-se então:

a) Para cada $x \in X$, é mensurável a função $f_{x,\cdot}: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $f_{x,\cdot}(y) = f(x, y)$. Além disso, é mensurável a função $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu'(y)$ e tem-se

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x).$$

b) Para cada $y \in Y$, é mensurável a função $f_{\cdot,y}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definida por $f_{\cdot,y}(x) = f(x, y)$. Além disso, é mensurável a função $Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ e tem-se

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu'(y).$$

Dem: Basta-nos provar apenas a), uma vez que b) resulta de aplicar a) à aplicação mensurável $\hat{f}: Y \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $\hat{f}(y, x) = f(x, y)$, para a qual se tem

$$\int_{X \times Y} \hat{f}(y, x) d\mu' \otimes \mu(y, x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y)$$

(cf. II.4.4 e o teorema trivial de mudança de variáveis em II.1.38). Vamos dividir a prova de a) em duas partes:

1) Vamos demonstrar o resultado no caso em que $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função simples. Seja $(Z_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ disjuntos dois a dois e de união $X \times Y$ tal que em cada Z_j a função f tome um valor constante $a_j \in \mathbb{R}_+$. Com as notações de II.4.6, vemos que, para cada $x \in X$, o conjunto Y é a união da família finita de conjuntos $Z_{j,x,\cdot} \in \mathcal{N}$ disjuntos dois a dois e a função $f_{x,\cdot}$ toma o valor constante a_j em $Z_{j,x,\cdot}$, o que mostra que $f_{x,\cdot}$ é uma função simples, em particular mensurável, e com

⁹²Também conhecido por teorema de Tonelli.

$$\int_Y f(x, y) d\mu'(y) = \sum_{j \in J} a_j \mu'(Z_{jx, \cdot}).$$

Tendo em conta II.4.6, vemos que a função $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu'(y)$ é mensurável e com

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x) &= \sum_{j \in J} a_j \int_X \mu'(Z_{jx, \cdot}) d\mu(x) = \\ &= \sum_{j \in J} a_j \mu \otimes \mu'(Z_j) = \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y). \end{aligned}$$

2) Passemos a examinar o caso geral em que $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável. Podemos então considerar uma sucessão crescente de funções simples $f_n: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que $f_n(x, y) \rightarrow f(x, y)$, para cada $(x, y) \in X \times Y$. Para cada $x \in X$, temos, pelo que vimos em 1), funções mensuráveis $f_{n_x, \cdot}: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, as quais vão constituir uma sucessão crescente e com

$$f_{n_x, \cdot}(y) = f_n(x, y) \rightarrow f(x, y) = f_{x, \cdot}(y),$$

o que, tendo em conta o teorema da convergência monótona, implica que $f_{x, \cdot}$ é mensurável e com

$$\int_Y f(x, y) d\mu'(y) = \lim \int_Y f_n(x, y) d\mu'(y).$$

Uma vez que, mais uma vez pelo que vimos em 1), as funções $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \int_Y f_n(x, y) d\mu'(y)$ são mensuráveis e que, por ser $f_n(x, y) \leq f_{n+1}(x, y)$, vem

$$\int_Y f_n(x, y) d\mu'(y) \leq \int_Y f_{n+1}(x, y) d\mu'(y),$$

podemos aplicar o que vimos em 1) e mais duas vezes o teorema da convergência monótona para garantir que a função $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu'(y)$ é mensurável de X em $\overline{\mathbb{R}}_+$ e que

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x) &= \lim \int_X \left(\int_Y f_n(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \lim \int_{X \times Y} f_n(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) = \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y). \quad \square \end{aligned}$$

II.4.10 (Teorema de Fubini para funções vetoriais) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida σ -finitos e consideremos a medida produto $\mu \otimes \mu'$ na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Sejam E um espaço de Banach e $f: X \times Y \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Tem-se então:

a) Para cada $x \in X$, é topologicamente mensurável a aplicação $f_{x,\cdot}: Y \rightarrow E$, definida por $f_{x,\cdot}(y) = f(x, y)$ e, sendo X_∞ o conjunto dos $x \in X$ tais que esta aplicação não é integrável, tem-se $X_\infty \in \mathcal{M}$ e é topologicamente mensurável a aplicação $X \setminus X_\infty \rightarrow E$ definida por

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu'(y).$$

Além disso, no caso em que $f: X \times Y \rightarrow E$ é integrável, tem-se $\mu(X_\infty) = 0$, a referida aplicação $X \setminus X_\infty \rightarrow E$ é integrável e

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) = \int_{X \setminus X_\infty} \left(\int_Y f(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x).$$

b) Para cada $y \in Y$, é topologicamente mensurável a aplicação $f_{\cdot,y}: X \rightarrow E$, definida por $f_{\cdot,y}(x) = f(x, y)$ e, sendo Y_∞ o conjunto dos $y \in Y$ tais que esta aplicação não é integrável, tem-se $Y_\infty \in \mathcal{N}$ e é topologicamente mensurável a aplicação $Y \setminus Y_\infty \rightarrow E$ definida por

$$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x).$$

Além disso, no caso em que $f: X \times Y \rightarrow E$ é mesmo integrável, tem-se $\mu'(Y_\infty) = 0$, a referida aplicação $Y \setminus Y_\infty \rightarrow E$ é mesmo integrável e

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) = \int_{Y \setminus Y_\infty} \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu'(y).$$

Dem: Basta-nos provar apenas a), uma vez que b) resulta de aplicar a) à aplicação topologicamente mensurável $\widehat{f}: Y \times X \rightarrow E$ definida por $\widehat{f}(y, x) = f(x, y)$, que, no caso em que $f: X \times Y \rightarrow E$ é integrável, é integrável e com

$$\int_{X \times Y} \widehat{f}(y, x) d\mu' \otimes \mu(y, x) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y)$$

(cf. II.4.4 e o teorema trivial de mudança de variáveis em II.2.56).

O facto de, para cada $x \in X$, ser topologicamente mensurável a aplicação $f_{x,\cdot}: Y \rightarrow E$ resulta de que ela é a composta da aplicação topologicamente mensurável $f: X \times Y \rightarrow E$ com a aplicação $Y \rightarrow X \times Y$, $y \mapsto (x, y)$, que é mensurável por o serem as suas duas componentes (cf. II.2.7). Reparando

agora que, para cada $x \in X$, tem-se $x \in X_\infty$ se, e só se,

$$\int_Y \|f(x, y)\| d\mu'(y) = +\infty$$

e que, tendo em conta a versão do teorema de Fubini em II.4.9 relativa à aplicação mensurável $X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto \|f(x, y)\|$, é mensurável a aplicação $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, que a x associa o integral referido, concluímos que se tem efetivamente $X_\infty \in \mathcal{M}$. Além disso, no caso em que $f: X \times Y \rightarrow E$ é integrável, a mesma versão do teorema de Fubini garante que

$$\int_X \left(\int_Y \|f(x, y)\| d\mu'(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} \|f(x, y)\| d\mu \otimes \mu'(x, y) < +\infty,$$

pelo que, tendo em conta II.1.29, existe $X' \in \mathcal{M}$ com $\mu(X') = 0$ tal que, para cada $x \in X \setminus X'$, $\int_Y \|f(x, y)\| d\mu'(y) < +\infty$, o que implica que $X_\infty \subset X'$, portanto também $\mu(X_\infty) = 0$.

Vamos dividir o resto da prova de a) em duas partes:

1) Vamos examinar o caso particular em que a aplicação topologicamente mensurável $f: X \times Y \rightarrow E$ é simples. Podemos considerar uma família finita $(Z_j)_{j \in J}$ de conjuntos de $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ disjuntos dois a dois e uma família $(w_j)_{j \in J}$ de vetores de $E \setminus \{0\}$ tais que, para cada $(x, y) \in X \times Y$,

$$f(x, y) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) w_j,$$

(cf. II.2.17 e II.2.18, dispensando os índices j com $w_j = 0$). Tem-se então, para cada $(x, y) \in X \times Y$,

$$\mathbb{I}_{Z_j}(x, y) \leq \frac{1}{\|w_j\|} \|f(x, y)\|$$

e portanto, se $x \in X \setminus X_\infty$,

$$\int_Y \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu'(y) \leq \frac{1}{\|w_j\|} \int_Y \|f(x, y)\| d\mu'(y) < +\infty.$$

Tendo em conta a versão do teorema de Fubini em II.4.9 é mensurável a aplicação $X \setminus X_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_Y \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu'(y)$$

e, uma vez que, tendo em conta as propriedades de linearidade do integral em II.2.34 e II.2.36, para cada $x \in X \setminus X_\infty$

$$\int_Y f(x, y) d\mu'(y) = \sum_{j \in J} \left(\int_Y \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu'(y) \right) w_j,$$

concluimos de II.2.9 que é efetivamente topologicamente mensurável a aplicação $X \setminus X_\infty \rightarrow E$,

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu'(y).$$

Suponhamos agora que a aplicação simples $f: X \times Y \rightarrow E$ é mesmo integrável, portanto é uma aplicação em escada. Vem então

$$\int_{X \times Y} \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) \leq \frac{1}{\|w_j\|} \int_{X \times Y} \|f(x, y)\| d\mu \otimes \mu'(x, y) < +\infty$$

e, tendo em conta a versão do teorema de Fubini em II.4.9 e II.2.42,

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) &= \int_X \left(\int_Y \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \int_{X \setminus X_\infty} \left(\int_Y \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x), \end{aligned}$$

sendo assim integrável a função $X \setminus X_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \int_Y \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu'(y).$$

Aplicando mais uma vez as propriedades do integral em II.2.34 e II.2.36, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) &= \sum_{j \in J} \left(\int_{X \times Y} \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) \right) w_j = \\ &= \sum_{j \in J} \left(\int_{X \setminus X_\infty} \left(\int_Y \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x) \right) w_j = \\ &= \int_{X \setminus X_\infty} \sum_{j \in J} \left(\int_Y \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) d\mu'(y) \right) w_j d\mu(x) = \\ &= \int_{X \setminus X_\infty} \left(\int_Y \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{Z_j}(x, y) w_j d\mu'(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \int_{X \setminus X_\infty} \left(\int_Y f(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

2) Passemos a tratar o caso geral em que $f: X \times Y \rightarrow E$ é uma aplicação topologicamente mensurável arbitrária. Tendo em conta II.2.29, podemos considerar uma sucessão de aplicações topologicamente mensuráveis $f_n: X \times Y \rightarrow E$, tais que cada $f_n(X \times Y)$ seja finito e que, para cada $(x, y) \in X \times Y$, $f_n(x, y) \rightarrow f(x, y)$ e $\|f_n(x, y)\| \leq 2\|f(x, y)\|$. Para cada $x \in X \setminus X_\infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_Y \|f_n(x, y)\| d\mu'(y) &\leq \int_Y 2 \|f(x, y)\| d\mu'(y) = \\ &= 2 \int_Y \|f(x, y)\| d\mu'(y) < +\infty \end{aligned}$$

em particular, pelo teorema da convergência dominada,

$$\int_Y f_n(x, y) d\mu'(y) \rightarrow \int_Y f(x, y) d\mu'(y)$$

e, para cada n , sendo $X_{n\infty}$ o conjunto dos $x \in X$ tais que

$$\int_Y \|f_n(x, y)\| d\mu'(y) = +\infty,$$

tem-se $X_{n\infty} \subset X_\infty$. Pelo que vimos em 1), são assim topologicamente mensuráveis as aplicações $X \setminus X_\infty \rightarrow E$, $x \mapsto \int_Y f_n(x, y) d\mu'(y)$ e podemos concluir de II.2.13 que é também topologicamente mensurável a aplicação $X \setminus X_\infty \rightarrow E$,

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu'(y).$$

Suponhamos agora que a aplicação $f: X \times Y \rightarrow E$ é mesmo integrável. De se ter

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} \|f_n(x, y)\| d\mu \otimes \mu'(x, y) &\leq \int_{X \times Y} 2 \|f(x, y)\| d\mu \otimes \mu'(x, y) = \\ &= 2 \int_{X \times Y} \|f(x, y)\| d\mu \otimes \mu'(x, y) < +\infty \end{aligned}$$

concluimos que as aplicações $f_n: X \times Y \rightarrow E$ também são integráveis. Tendo em conta o que vimos no caso particular estudado em 1) e o facto de se ter, para cada $x \in X \setminus X_\infty$,

$$\left\| \int_Y f_n(x, y) d\mu'(y) \right\| \leq \int_Y \|f_n(x, y)\| d\mu'(y) \leq \int_Y 2 \|f(x, y)\| d\mu'(y),$$

onde

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus X_\infty} \left(\int_Y 2 \|f(x, y)\| d\mu'(y) \right) d\mu(x) &= \int_X \left(\int_Y 2 \|f(x, y)\| d\mu'(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \int_{X \times Y} 2 \|f(x, y)\| d\mu \otimes \mu'(x, y) < +\infty, \end{aligned}$$

podemos aplicar o teorema da convergência dominada para garantir que é

integrável a aplicação $X \setminus X_\infty \rightarrow E$, $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu'(y)$, e que

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus X_\infty} \left(\int_Y f(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x) &= \lim \int_{X \setminus X_\infty} \left(\int_Y f_n(x, y) d\mu'(y) \right) d\mu(x) = \\ &= \lim \int_{X \times Y} f_n(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y) = \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y). \quad \square \end{aligned}$$

II.4.11 (Notação alternativa) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') dois espaços de medida σ -finitos e consideremos a medida produto $\mu \otimes \mu'$ na σ -álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Tanto no caso em que $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável como naquele em que E é um espaço de Banach e $f: X \times Y \rightarrow E$ é uma aplicação integrável, o integral

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y)$$

é muitas vezes notado alternativamente

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu(x) d\mu'(y),$$

fazendo-se ainda a simplificação usual, no caso de alguma das medidas, por exemplo a primeira, ser a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} , de escrever dx em vez de $d\mu(x)$.

Exercícios

Ex II.4.1 Sejam (X, \mathcal{M}) e (Y, \mathcal{N}) espaços mensuráveis e consideremos o espaço mensurável produto $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. Verificar que, se $C \subset X \times Y$ pertence a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, então, para cada $x \in X$, o conjunto

$$C_{x,\cdot} = \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$$

pertence a \mathcal{N} e, para cada $y \in Y$, o conjunto

$$C_{\cdot,y} = \{x \in X \mid (x, y) \in C\}$$

pertence a \mathcal{M} , por outras palavras, esta parte das conclusões das alíneas a) e b) de II.4.6 não depende da consideração das medidas μ e μ' e, muito menos, do facto de estas serem σ -finitas. **Sugestão:** Reparar que estes conjuntos são imagens recíprocas de C por aplicações mensuráveis convenientes.

Ex II.4.2 (Cf. Halmos [6]) Reparar que, se (X, \mathcal{M}, μ) e (Y, \mathcal{N}, μ') são espaços de medida, não necessariamente σ -finitos, faz sentido generalizar a definição

em II.4.2, definindo no espaço mensurável $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ a medida produto, notada ainda $\mu \otimes \mu'$, como sendo o prolongamento de Hahn (cf. I.4.7) da medida $\mu \times \mu'$ no semianel $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ referida em II.4.1.⁹³ Consideremos o exemplo em que $X = Y = [0, 1]$, μ é a restrição da medida de Lebesgue λ nos borelianos de \mathbb{R} , definida na σ -álgebra dos borelianos de $[0, 1]$ e ν é a medida de contagem na σ -álgebra \mathcal{N} de todas as partes de $[0, 1]$, reparando que a medida λ é finita, mas a medida ν não é sequer σ -finita.

a) Seja $C = \Delta_{[0,1]} \subset [0, 1] \times [0, 1]$ o conjunto diagonal,

$$C = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x = y\}.$$

Verificar que $C \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ e que $\lambda \otimes \nu(C) = +\infty$. **Sugestão:** Por um lado, mostrar que todo o boreliano pertence a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Por outro lado, mostrar que, dada uma cobertura contável arbitrária de C por conjuntos $A_j \times B_j \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, onde $j \in J$, então $[0, 1]$ está contido na união dos $A_j \cap B_j$ e portanto existe pelo menos um índice j tal que $\lambda^*(A_j \cap B_j) > 0$, onde λ^* é a medida exterior de Lebesgue (cf. I.4.4).

b) Verificar que as conclusões das alíneas a) e b) de II.4.6 falham neste caso, uma vez que, com as notações desse resultado

$$\int_{[0,1]} \nu(C_{x,\cdot}) d\lambda(x) = 1,$$

$$\int_{[0,1]} \lambda(C_{\cdot,y}) d\nu(y) = 0.$$

Ex II.4.3 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida σ -finito e notemos λ a medida de Lebesgue na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos de \mathbb{R} . Seja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma função e notemos

$$A = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t < f(x)\}.$$

Mostrar que a função f é mensurável se, e só se, $A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e que, quando isso acontecer,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \mu \otimes \lambda(A).$$

Ex II.4.4 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida σ -finito e notemos λ a medida de Lebesgue na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos de \mathbb{R} . Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções mensuráveis e notemos

$$B = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t \leq g(x) \vee g(x) \leq t \leq f(x)\}.$$

⁹³A diferença é que não podemos garantir que esta seja a única extensão de $\mu \times \mu'$ a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Mostar que $B \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e que

$$\mu \otimes \lambda(B) = \int_X |f(x) - g(x)| d\mu(x).$$

Ex II.4.5 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida σ -finito e notemos λ a medida de Lebesgue na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos de \mathbb{R} . Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostrar que, para quase todo o $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = t\}) = 0,$$

isto é, que existe $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ com $\lambda(B) = 0$ tal que

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) = t\}) = 0$$

para cada $t \notin B$. **Sugestão:** Calcular de duas maneiras diferentes a medida

$$\mu \otimes \lambda(\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid t = f(x)\}).$$

Ex II.4.6 Consideremos a medida de Lebesgue λ na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos de \mathbb{R} . Sendo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq x^2\},$$

mostrar que $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e determinar

$$\int_A xy^3 dx dy.$$

Ex II.4.7 Se E é um espaço vetorial e se $x, y \in E$ são linearmente independentes, chamamos *paralelogramo* de lados x e y ao conjunto P das combinações lineares $sx + ty$, com $s, t \in [0, 1]$.

Seja λ a medida de Lebesgue na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ dos borelianos de \mathbb{R} e consideremos em \mathbb{R}^2 a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ e a medida $\lambda \otimes \lambda$, lembrando que, por I.5.27, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ é a σ -álgebra dos borelianos de \mathbb{R}^2 . Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, notar que $(a, 0)$ e (b, c) são linearmente independentes e mostrar que o paralelogramo $P \subset \mathbb{R}^2$, cujos lados são aqueles vetores, é um boreliano com $\lambda \otimes \lambda(P) = |ac|$.

Ex II.4.8 (**Visão alternativa sobre as famílias absolutamente somáveis**) Neste exercício vamos ignorar o que foi feito nos resultados II.2.47 a II.2.51, isto é nos resultados em que intervém a noção de família somável de vetores dum espaço de Banach. O objetivo é reobter alguns desses resultados de forma independente, depois de transformar um deles em definição.

a) Nesta alínea e nas próximas, E é um espaço de Banach, J é um conjunto de índices, que, para simplificar, suporemos contável, e notamos ν a medida de contagem na σ -álgebra de todas as partes de J . Se $(w_j)_{j \in J}$ é uma família de vetores de E , mostrar que a família constitui uma aplicação mensurável e

que esta aplicação é integrável se, e só se, $\sum_{j \in J} \|w_j\| < +\infty$ (isto é, a família é *absolutamente somável*). Nesse caso pomos, por definição,⁹⁴

$$\sum_{j \in J} w_j = \int w_j d\nu(j).$$

b) No caso em que J é finito, verificar que toda a família $(w_j)_{j \in J}$ de vetores de E é absolutamente somável e que a soma definida em a) coincide com a soma finita habitual de vetores de E .

c) No caso em que $J = \mathbb{N}$, verificar que, para uma família absolutamente somável, $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$, a soma da família coincide com a soma da série, no sentido análogo ao habitual:

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} w_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n w_p.$$

Sugestão: Aplicar o teorema da convergência dominada.

d) Sejam J e J' conjuntos contáveis e $\varphi: J' \rightarrow J$ uma aplicação bijetiva. Mostrar que uma família $(w_j)_{j \in J}$ é absolutamente somável se, e só se, a família $(w_{\varphi(j')})_{j' \in J'}$ é absolutamente somável e que, nesse caso,

$$\sum_{j \in J} w_j = \sum_{j' \in J'} w_{\varphi(j')}.$$

Sugestão: Temos uma aplicação do teorema trivial de mudança de variáveis.

e) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida que, para simplificar, vamos supor σ -finito⁹⁵ e $(f_j)_{j \in J}$ uma família contável de aplicações integráveis $f_j: X \rightarrow E$ tal que exista uma aplicação mensurável $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $\int \psi d\mu < +\infty$ e, para cada $x \in X$,

$$\sum_{j \in J} \|f_j(x)\| \leq \psi(x)$$

(em particular, a família $(f_j(x))_{j \in J}$ de vetores de E é absolutamente somável). Sendo então $f: X \rightarrow E$ a aplicação definida por $f(x) = \sum_{j \in J} f_j(x)$,

mostrar que f é integrável e

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_X f_j(x) d\mu(x),$$

em que a soma do segundo membro é a de uma família absolutamente somável de vetores de E .⁹⁶

⁹⁴Comparar com II.2.48.

⁹⁵A alínea c) do exercício II.1.10 dá-nos uma pista para dispensarmos esta hipótese.

⁹⁶Comparar com II.2.49.

Sugestão: Aplicar o teorema de Fubini, considerando a medida $\nu \otimes \mu$ na σ -álgebra $\mathcal{P}(J) \otimes \mathcal{M}$ de partes de $J \times X$ e a aplicação $F(j, x) = f_j(x)$.

f) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida que, para simplificar, vamos supor σ -finito e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável. Mostrar que, se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e se $A = \bigcup A_j$, então

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_{A_j} f(x) d\mu(x),$$

em que a soma do segundo membro é a de uma família absolutamente somável de vetores de E .⁹⁷

Sugestão: Reparar que, para cada $x \in X$, tem-se

$$\mathbb{I}_A(x)f(x) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j}(x)f(x).$$

g) (Associatividade) Suponhamos que $(w_j)_{j \in J}$ é uma família contável absolutamente somável de vetores de E e que o conjunto de índices J é uma união contável de subconjuntos J_i , $i \in I$, disjuntos dois a dois. Verificar que

$$\sum_{j \in J} w_j = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J_i} w_j \right),$$

onde cada soma do segundo membro é a de uma família absolutamente somável de vetores de E . **Sugestão:** Temos um caso particular da alínea f).

Ex II.4.9 (Cf. Rudin [10]) **a)** Efetuar duas integrações por partes (cf. o exercício II.3.9)⁹⁸ para mostrar que, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi n} \sin(x) e^{-xt} dx = \frac{1}{1+t^2} (1 - e^{-2\pi nt}).$$

b) Mostrar que, para cada $x > 0$ em \mathbb{R} , tem-se

$$\int_{[0, +\infty[} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Sugestão: Lembrar a conclusão de II.3.12.

c) Utilizar o teorema de Fubini para funções integráveis e as conclusões de a) e b) para deduzir que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{]0, 2\pi n]} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_{[0, +\infty[} \frac{1 - e^{-2\pi nt}}{1 + t^2} dt.$$

⁹⁷Comparar com II.2.50.

⁹⁸Alternativamente, reparar que $\sin(x)$ é o coeficiente da parte imaginária de e^{ix} e utilizar esse facto para obter diretamente uma primitiva.

Sugestão: Para verificar que a função definida em $]0, 2\pi n[\times]0, +\infty[$, que vai ser utilizada, é integrável, utilizar o teorema de Fubini para funções positivas, reparando que $\frac{|\sin(x)|}{x}$ é limitado em $]0, 2\pi n[$.

d) Deduzir de c) e do teorema da convergência monótona que se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{]0, 2\pi n]} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

apesar de a função $\frac{\sin(x)}{x}$ não ser integrável em $]0, +\infty[$ (cf. a alínea a) do exercício II.3.12 — ao limite anterior dá-se o nome de *integral de Dirichlet*).

Ex II.4.10 (Um tipo de integração por partes) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação crescente (no sentido lato) e notemos λ_φ a correspondente medida de Lebesgue-Stieltjes nos borelianos de J (cf. I.4.13). Sejam $a < b$ em J , E um espaço de Banach e $f: [a, b] \rightarrow E$ uma aplicação derivável em todos os pontos e com $f': [a, b] \rightarrow E$ contínua.

a) Mostrar que $f:]a, b[\rightarrow E$ é integrável, relativamente à restrição da medida λ_φ , que $\varphi f': [a, b] \rightarrow E$ é integrável, relativamente à restrição da medida de Lebesgue λ e que se tem

$$\int_{]a, b]} f(x) d\lambda_\varphi(x) = \varphi(b^+)f(b) - \varphi(a^+)f(a) - \int_a^b \varphi(x)f'(x) dx.$$

Sugestão: Sendo $C \subset]a, b[\times]a, b[$ o conjunto dos pares (x, y) com $x > y$, usar o teorema de Fubini para calcular de duas maneiras distintas o integral

$$\int_C f'(y) d\lambda_\varphi(x) dy,$$

e lembrar que $\varphi(x^+) = \varphi(x)$ salvo para um conjunto contável de valores de x .

b) Deduzir do resultado obtido em a) caracterizações com o mesmo espírito dos integrais

$$\int_{]a, b]} f(x) d\lambda_\varphi(x), \quad \int_{]a, b]} f(x) d\lambda_\varphi(x), \quad \int_{]a, b]} f(x) d\lambda_\varphi(x).$$

Sugestão: Lembrar a caracterização das medidas dos conjuntos unitários em I.4.14.

c) Verificar que, no caso em que a aplicação φ é derivável em todos os pontos e com derivada contínua, a conclusão de a) implica a fórmula de integração por partes, obtida, num contexto mais geral, no exercício II.3.9.

Ex II.4.11 (Outro tipo de integração por partes) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções crescentes (no sentido lato) e notemos λ_φ e λ_ψ as correspondentes medidas de Lebesgue-Stieltjes nos borelianos de J . Sejam $a < b$ em J tais que no intervalo $]a, b[$ as funções φ e

ψ não tenham nenhum ponto de descontinuidade comum.

Mostrar que as restrições de φ e ψ a $]a, b]$ são integráveis, relativamente às medidas λ_ψ e λ_φ , respetivamente, e que se tem

$$\int_{]a, b]} \psi(x) d\lambda_\varphi(x) = \varphi(b^+) \psi(b^+) - \varphi(a^+) \psi(a^+) - \int_{]a, b]} \varphi(x) d\lambda_\psi(x).$$

Sugestão: Sendo $C \subset]a, b] \times]a, b]$ o conjunto dos pares (x, y) tais que $x > y$, utilizar o teorema de Fubini para calcular de duas maneiras distintas a medida

$$\lambda_\varphi \otimes \lambda_\psi(C) = \lambda_\varphi \otimes \lambda_\psi(C \cup \Delta),$$

reparando que a inexistência de descontinuidades comuns implica que

$$\psi(x^-) = \psi(x) = \psi(x^+),$$

λ_φ -quase sempre, e que

$$\varphi(x^-) = \varphi(x) = \varphi(x^+),$$

λ_ψ -quase sempre.

Ex II.4.12 Consideremos uma medida μ nos borelianos de \mathbb{R} que seja finita nos borelianos limitados. Mostrar que, para cada $r \geq 0$, é mensurável a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = \mu([x - r, x + r])$. **Sugestão:** Reparar que μ é σ -finita e aplicar o teorema de Fubini a um subconjunto conveniente de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ex II.4.13 (**O produto de dois integrais indefinidos como integral indefinido**)

Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$,

$$w \times z = \xi(w, z) \in H.$$

Sejam $a < b$ em \mathbb{R} e $f: [a, b] \rightarrow F$ e $g: [a, b] \rightarrow G$ aplicações integráveis e consideremos os correspondentes integrais indefinidos $\hat{f}: [a, b] \rightarrow F$ e $\hat{g}: [a, b] \rightarrow G$, que sabemos serem aplicações contínuas, definidos por

$$\hat{f}(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \hat{g}(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Mostrar que a aplicação $\hat{f} \times \hat{g}: [a, b] \rightarrow H$ é também um integral indefinido, mais precisamente, que, para cada $t \in [a, b]$,

$$\hat{f}(t) \times \hat{g}(t) = \int_a^t f(x) \times \hat{g}(x) + \hat{f}(x) \times g(x) dx.$$

Sugestão: Fixado t , reparar que $[a, t] \times [a, t]$ é a união disjunta dos subcon-

juntos A_t e B_t , constituídos respetivamente pelos (x, y) com $x > y$ e por aqueles com $x \leq y$ e utilizar o teorema de Fubini para mostrar que

$$\int_a^t f(x) \times \widehat{g}(x) dx = \int_{A_t} f(x) \times g(y) dx dy$$

e que

$$\int_a^t \widehat{f}(x) \times g(x) dx = \int_a^t \widehat{f}(y) \times g(y) dy = \int_{B_t} f(x) \times g(y) dx dy.$$

§5. Medida de Lebesgue em dimensões superiores.

II.5.1 (Intervalos semiabertos em \mathbb{R}^n) Dado um natural $n \geq 1$, chamamos *intervalo semiaberto* de \mathbb{R}^n a todo o conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ da forma

$$(1) \quad A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n],$$

onde, para cada $1 \leq j \leq n$, $a_j \leq b_j$ são números reais.

É claro que, no caso em que $n = 1$, os intervalos semiabertos de \mathbb{R} são exactamente os \mathbb{R} -intervalos semiabertos definidos em I.3.1.

Tal como referido, no caso $n = 1$, em I.3.1, no caso em que um intervalo semiaberto A é não vazio, os elementos a_j e b_j na representação (1) ficam univocamente determinados por A e verificam $a_j < b_j$, já que $]a_j, b_j]$ é necessariamente a imagem direta de A pela projecção canónica $\pi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$, mas o conjunto vazio \emptyset é um intervalo semiaberto que admite infinitas representações do tipo (1) nomeadamente todas aquelas em que, para algum j , $a_j = b_j$.

II.5.2 (Os intervalos semiabertos como semianel) Para cada $n \geq 1$, a classe \mathcal{S}_n dos intervalos semiabertos de \mathbb{R}^n é um semianel cuja σ -álgebra gerada é a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ dos borelianos de \mathbb{R}^n .

Dem: O caso em que $n = 1$ é já conhecido (cf. I.3.2 e I.3.12). Suponhamos o resultado válido para um certo $n \geq 1$. Uma vez que \mathbb{R}^n é a união da família contável de conjuntos $] -p, p]^n$, com $p \in \mathbb{N}$, deduzimos de I.5.19 e de I.5.23 que a classe $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}$ dos produtos $A \times]a_{n+1}, b_{n+1}]$, com $A \in \mathcal{S}_n$ e $a_{n+1} \leq b_{n+1}$, é um semianel de partes de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, cuja σ -álgebra gerada é $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ou seja, tendo em conta I.5.27, é a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}$ dos borelianos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Considerando o homeomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definido por

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

deduzimos de I.5.18 e I.5.16 que \mathcal{S}_{n+1} coincide com $\varphi_*(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S})$ e é um semianel de partes de \mathbb{R}^{n+1} cuja σ -álgebra gerada é $\varphi_*(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ou seja,

tendo em conta I.5.10, é a σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ dos borelianos de \mathbb{R}^{n+1} . O resultado fica assim demonstrado por indução. \square

II.5.3 (A medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R}^n) Para cada $n \geq 1$, existe uma, e uma só, medida λ_n na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ dos borelianos de \mathbb{R}^n tal que, para cada

$$A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n] \in \mathcal{S}_n$$

(onde $a_j \leq b_j$), se tenha

$$\lambda_n(A) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

Esta medida, a que damos o nome de *medida de Lebesgue* nos borelianos de \mathbb{R}^n , é σ -finita e coincide, no caso em que $n = 1$, com a medida de Lebesgue λ nos borelianos de \mathbb{R} , definida em I.4.15 e, no caso em que $n = 2$, com a medida produto $\lambda \otimes \lambda$.

Dem: Demonstramos o resultado por indução em n . O caso $n = 1$ é já conhecido, uma vez que a medida de Lebesgue λ nos borelianos de \mathbb{R} é a única que verifica a condição $\lambda(]a, b]) = b - a$, sempre que $a \leq b$. Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo $n \geq 1$. Podemos então considerar a medida produto $\lambda_n \otimes \lambda$ na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}}$ (cf. I.5.27) e tomar para λ_{n+1} a medida imagem direta $\varphi_*(\lambda_n \otimes \lambda)$, na σ -álgebra dos borelianos de \mathbb{R}^{n+1} (cf. I.5.13), onde $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é o homeomorfismo definido por

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

medida para a qual se tem, para cada

$$A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_{n+1}, b_{n+1}] \in \mathcal{S}_{n+1}$$

(onde $a_j \leq b_j$),

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}(A) &= (\lambda_n \otimes \lambda)(\varphi^{-1}(A)) = \\ &= (\lambda_n \otimes \lambda)(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n] \times]a_{n+1}, b_{n+1}]) = \\ &= \lambda_n(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]) \times \lambda(]a_{n+1}, b_{n+1}]) = \\ &= (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n) \times (b_{n+1} - a_{n+1}). \end{aligned}$$

Esta medida é σ -finita, e tem mesmo restrição σ -finita ao semianel \mathcal{S}_{n+1} , uma vez que \mathbb{R}^{n+1} é a união da família contável dos conjuntos $]-p, p]^{n+1} \in \mathcal{S}_{n+1}$, com $\lambda_{n+1}(]-p, p]^{n+1}) = (2p)^{n+1} < +\infty$. A unicidade da medida λ_{n+1} nas condições do enunciado é uma consequência do teorema de Hahn em I.4.12. Uma vez que, para a medida produto $\lambda \otimes \lambda$, também se tem

$$\begin{aligned} \lambda \otimes \lambda(]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]) &= \lambda(]a_1, b_1]) \times \lambda(]a_2, b_2]) = \\ &= (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2), \end{aligned}$$

concluimos que $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$. \square

II.5.4 A medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R}^n tem as seguintes propriedades:

a) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um boreliano limitado⁹⁹, então $\lambda_n(A) < +\infty$.

b) Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um boreliano com $\text{int}(A) \neq \emptyset$, então $\lambda_n(A) > 0$.

Dem: Nas hipóteses de a), podemos considerar $R > 0$ tal que $A \subset]-R, R]^n$ pelo que temos

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_n(]-R, R]^n) = (2R)^n < +\infty.$$

Na hipótese de b), sendo $a = (a_1, \dots, a_n) \in \text{int}(A)$, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que

$$]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times \dots \times]a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon] \subset A$$

e então

$$0 < (2\varepsilon)^n = \lambda_n(]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times \dots \times]a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon]) \leq \lambda_n(A). \quad \square$$

Para trabalharmos com a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R}^n é muitas vezes cómodo utilizar o teorema de Fubini, e para isso é importante considerar bijeções com produtos de dois espaços mensuráveis que sejam compatíveis com as medidas. Dois exemplos dessas bijeções, que poderiam ser multiplicados, mas são de utilização especialmente frequente, são enunciados a seguir.

II.5.5 (Alguns homeomorfismos compatíveis com as medidas)

a) Para cada $1 \leq j \leq n$, temos um homeomorfismo $\psi_j: \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$\psi_j((x_1, \dots, x_{n-1}), x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_j, \dots, x_n),$$

o qual é compatível com as medidas, quando no domínio se considera a medida $\lambda_{n-1} \otimes \lambda$ e no espaço de chegada a medida λ_n (em ambos os casos nas σ -álgebras dos borelianos).

b) Para cada $1 \leq m < n$, temos um homeomorfismo $\theta_m: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$\theta_m((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

o qual é compatível com as medidas, quando no domínio se considera a medida $\lambda_m \otimes \lambda_{n-m}$ e no espaço de chegada a medida λ_n (em ambos os casos nas σ -álgebras dos borelianos).

Dem: **a)** Temos que mostrar que a medida imagem direta $\psi_{j*}(\lambda_{n-1} \otimes \lambda)$ coincide com a medida λ_n e isso resulta da caracterização desta em II.5.3,

⁹⁹Lembrar que em \mathbb{R}^n todas as normas são equivalentes, e é relativamente a qualquer uma dessas normas que a noção de conjunto limitado é considerada, tal como já temos estado a fazer relativamente às noções topológicas no contexto de \mathbb{R}^n .

uma vez que se tem

$$\begin{aligned} \psi_{j_*}(\lambda_{n-1} \otimes \lambda)(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]) &= \\ &= \lambda_{n-1} \otimes \lambda(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_{j-1}, b_{j-1}] \times]a_{j+1}, b_{j+1}] \times]a_n, b_n]) \times]a_j, b_j]) = \\ &= \lambda_{n-1}(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_{j-1}, b_{j-1}] \times]a_{j+1}, b_{j+1}] \times]a_n, b_n]) \times \lambda(]a_j, b_j]) = \\ &= (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n). \end{aligned}$$

b) Temos que mostrar que a medida imagem direta $\theta_{m_*}(\lambda_m \otimes \lambda_{n-m})$ coincide com a medida λ_n e isso resulta da caracterização desta em II.5.3, uma vez que se tem

$$\begin{aligned} \theta_{m_*}(\lambda_m \otimes \lambda_{n-m})(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]) &= \\ &= \lambda_m \otimes \lambda_{n-m}(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_m, b_m]) \times (]a_{m+1}, b_{m+1}] \times \cdots \times]a_n, b_n]) = \\ &= \lambda_m(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_m, b_m]) \times \lambda_{n-m}(]a_{m+1}, b_{m+1}] \times \cdots \times]a_n, b_n]) = \\ &= (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n). \quad \square \end{aligned}$$

II.5.6 (Corolário) Se, para cada $1 \leq j \leq n$, $A_j \subset \mathbb{R}$ é um boreliano, então o conjunto $A_1 \times \cdots \times A_n \subset \mathbb{R}^n$ é um boreliano e

$$\lambda_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \lambda(A_1) \times \cdots \times \lambda(A_n).$$

Em particular, tem-se, tal como já sabíamos no caso em que $n = 1$, $\lambda_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ e, para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n(\{x\}) = \lambda_n(\{x_1\} \times \cdots \times \{x_n\}) = 0.$$

Dem: Fazemos a demonstração por indução em n , o caso $n = 1$ sendo trivial. Supondo o resultado verdadeiro para um certo n e tomando, para cada $1 \leq j \leq n + 1$, um boreliano $A_j \subset \mathbb{R}$ a hipótese de indução garante que $A_1 \times \cdots \times A_n$ é um boreliano de \mathbb{R}^n com

$$\lambda_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \lambda(A_1) \times \cdots \times \lambda(A_n)$$

pelo que $(A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$ é um boreliano de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com

$$\lambda_n \otimes \lambda((A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}) = \lambda(A_1) \times \cdots \times \lambda(A_n) \times \lambda(A_{n+1})$$

e deduzimos então da alínea a) do resultado precedente, com $j = n + 1$, que $A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}$ é um boreliano de \mathbb{R}^{n+1} com

$$\lambda_{n+1}(A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}) = \lambda(A_1) \times \cdots \times \lambda(A_n) \times \lambda(A_{n+1}),$$

o que termina a prova por indução. □

II.5.7 (Invariância por translação) A medida de Lebesgue λ_n na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ dos borelianos de \mathbb{R}^n é *invariante por translação*, isto é, para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem lugar uma aplicação bimensurável $\tau_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_x(y) = x + y$, que é compatível com a medida de Lebesgue λ_n (ou seja, λ_n é τ_x -invariante, para cada x).

Dem: O facto de τ_x ser bimensurável resulta de se tratar de um

homeomorfismo, com inverso τ_{-x} . O que temos que mostrar é que a medida imagem direta $\tau_{x*}\lambda_n$ coincide com a medida λ_n e isso vai resultar da afirmação de unicidade na definição de λ_n , uma vez que, sendo

$$A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n] \in \mathcal{S}_n$$

(onde $a_j \leq b_j$), vem

$$\begin{aligned} \tau_{x*}\lambda_n(A) &= \lambda_n(-x + A) = \\ &= \lambda_n(]a_1 - x_1, b_1 - x_1] \times \cdots \times]a_n - x_n, b_n - x_n]) = \\ &= ((b_1 - x_1) - (a_1 - x_1)) \times \cdots \times ((b_n - x_n) - (a_n - x_n)) = \\ &= (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n) = \lambda_n(A). \quad \square \end{aligned}$$

II.5.8 (Outra caracterização da medida de Lebesgue) A medida de Lebesgue λ_n , na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ dos borelianos de \mathbb{R}^n , é a única medida μ nessa σ -álgebra que é invariante por translação e verifica $\mu(]0, 1]^n) = 1$.

Dem: Já verificámos que a medida de Lebesgue λ_n é invariante por translação e, por definição, ela verifica $\lambda_n(]0, 1]^n) = 1^n = 1$. Suponhamos agora que $\mu: \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma medida arbitrária invariante por translação e tal que $\mu(]0, 1]^n) = 1$. Vamos mostrar que se tem $\mu = \lambda_n$, dividindo essa prova em várias partes:

1) Começemos por mostrar que, se $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}$, então

$$\mu(]0, \frac{1}{q_1}] \times]0, \frac{1}{q_2}] \times \cdots \times]0, \frac{1}{q_n}]) = \frac{1}{q_1} \times \frac{1}{q_2} \times \cdots \times \frac{1}{q_n}.$$

Subdem: O conjunto $]0, 1]^n$, onde a medida μ toma o valor 1, é a união disjunta dos $q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_n$ subconjuntos do tipo

$$] \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1 + 1}{q_1}] \times] \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_2 + 1}{q_2}] \times \cdots \times] \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + 1}{q_n}],$$

com os inteiros p_1, p_2, \dots, p_n a verificar $0 \leq p_j \leq q_j - 1$, subconjuntos esses que são todos translações do conjunto $]0, \frac{1}{q_1}] \times]0, \frac{1}{q_2}] \times \cdots \times]0, \frac{1}{q_n}]$, e portanto são medidos por μ com o mesmo valor.

2) Vejamos agora que, mais geralmente, se r_1, \dots, r_n são racionais estritamente positivos, então

$$\mu(]0, r_1] \times]0, r_2] \times \cdots \times]0, r_n]) = r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n.$$

Subdem: Escrevendo $r_j = \frac{p_j}{q_j}$, com $q_j \in \mathbb{N}$ e $p_j \geq 0$ em \mathbb{Z} , basta notar que $]0, r_1] \times]0, r_2] \times \cdots \times]0, r_n]$ é a união disjunta dos $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ conjuntos

$$] \frac{k_1}{q_1}, \frac{k_1 + 1}{q_1}] \times] \frac{k_2}{q_2}, \frac{k_2 + 1}{q_2}] \times \cdots \times] \frac{k_n}{q_n}, \frac{k_n + 1}{q_n}],$$

com os inteiros k_1, k_2, \dots, k_n a verificar $0 \leq k_j \leq p_j - 1$, conjuntos esses

que são todos translações do conjunto $]0, \frac{1}{q_1}] \times]0, \frac{1}{q_2}] \times \cdots \times]0, \frac{1}{q_n}]$, e portanto são medidos por μ com o mesmo valor $\frac{1}{q_1} \times \frac{1}{q_2} \times \cdots \times \frac{1}{q_n}$.

3) Vejamos agora que, mais geralmente, se r_1, \dots, r_n são reais estritamente positivos, então

$$\mu(]0, r_1] \times]0, r_2] \times \cdots \times]0, r_n]) = r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n.$$

Subdem: Para cada $1 \leq j \leq n$, consideremos uma sucessão de números racionais estritamente positivos $(s_{j,p})_{p \in \mathbb{N}}$ decrescente e a convergir para r_j . Sendo, para cada $p \in \mathbb{N}$,

$$A_p =]0, s_{1,p}] \times]0, s_{2,p}] \times \cdots \times]0, s_{n,p}],$$

tem-se $A_p \supset A_{p+1}$ e, pelo que vimos no caso estudado em 2),

$$\mu(A_p) = s_{1,p} \times s_{2,p} \times \cdots \times s_{n,p} \rightarrow r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n,$$

em particular $\mu(A_1) < +\infty$. Uma vez que

$$\bigcap_p A_p =]0, r_1] \times]0, r_2] \times \cdots \times]0, r_n],$$

a igualdade pretendida é uma consequência da alínea 7) de I.2.12.

4) Para cada

$$A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] \times \cdots \times]a_n, b_n] \in \mathcal{S}_n$$

(onde $a_j \leq b_j$), tem-se

$$\mu(A) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n),$$

e, consequentemente, tendo em conta a definição de λ_n em II.5.3, $\mu = \lambda_n$.

Subdem: Se existir j tal que $a_j = b_j$, a igualdade resulta de se ter $A = \emptyset$. Caso contrário, temos uma consequência do que foi visto em 3), uma vez que se tem

$$A = (a_1, \dots, a_n) +]0, b_1 - a_1] \times \cdots \times]0, b_n - a_n]. \quad \square$$

II.5.9 (Corolário) Seja μ uma medida definida nos borelianos de \mathbb{R}^n , invariante por translação e tal que $\mu(A) < +\infty$, para cada boreliano limitado A . Tem-se então $\mu = c \lambda_n$, para um certo $0 \leq c < +\infty$, nomeadamente $c = \mu(]0, 1]^n)$.

Dem: Seja $c = \mu(]0, 1]^n)$. Se $c = 0$, o facto de \mathbb{R}^n ser a união da família numerável de conjuntos da forma

$$]p_1, p_1 + 1] \times]p_2, p_2 + 1] \times \cdots \times]p_n, p_n + 1],$$

com os p_j números inteiros, conjuntos esses que são todos translações de $]0, 1]^n$, implica que $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$, e portanto que a medida μ é identicamente 0. Se $c > 0$, podemos considerar a medida $\frac{1}{c}\mu$, que é invariante por translação e

toma o valor 1 em $]0, 1]^n$, tendo-se assim, por I.5.8, $\frac{1}{c}\mu = \lambda_n$, portanto $\mu = c\lambda_n$. \square

II.5.10 (O coeficiente de dilatação de um isomorfismo) Seja $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Existe então um único real $c_\xi \in]0, +\infty[$ tal que, para cada boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda_n(\xi(A)) = c_\xi \lambda_n(A)$. Dizemos que c_ξ é o *coeficiente de dilatação* do isomorfismo ξ .

Dem: Que não pode existir mais que um número real c_ξ nas condições anteriores é uma consequência de que, escolhendo um boreliano A com $0 < \lambda_n(A) < +\infty$ (por exemplo uma bola de raio maior que 0, que é limitada e de interior não vazio), não pode deixar de ser $c_\xi = \frac{\lambda_n(\xi(A))}{\lambda_n(A)}$.

Considere-se agora a medida μ nos borelianos de \mathbb{R}^n definida por $\mu(A) = \lambda_n(\xi(A))$ (a medida imagem direta de λ_n pela aplicação mensurável $\xi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), medida para a qual se tem, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mu(x + A) = \lambda_n(\xi(x + A)) = \lambda_n(\xi(x) + \xi(A)) = \lambda_n(\xi(A)) = \mu(A),$$

ou seja, é invariante por translação. Por outro lado, uma vez que a aplicação linear $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua (como qualquer aplicação linear $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), sabemos que existe $M \geq 0$ tal que $\|\xi(y)\| \leq M\|y\|$, para cada $y \in \mathbb{R}^n$, e daqui resulta que, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um boreliano limitado, o boreliano $\xi(A)$ também é limitado, e portanto $\mu(A) = \lambda_n(\xi(A)) < +\infty$. Deduzimos agora de II.5.9 que existe $c_\xi \in [0, +\infty[$ tal que $\mu = c_\xi \lambda_n$, isto é, tal que, para cada boreliano A de \mathbb{R}^n , $\lambda_n(\xi(A)) = c_\xi \lambda_n(A)$, tendo-se mesmo $c_\xi > 0$, uma vez que

$$+\infty = \lambda_n(\mathbb{R}^n) = \lambda_n(\xi(\mathbb{R}^n)) = c_\xi \lambda_n(\mathbb{R}^n). \quad \square$$

II.5.11 (Corolário) Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão $m < n$. Tem-se então que F é um boreliano com $\lambda_n(F) = 0$.

Dem: O caso em que $m = 0$, e portanto $F = \{0\}$ já foi referido em II.5.6. Supondo agora que $m > 0$, seja z_1, \dots, z_m uma base de F e completemo-la de modo a obter uma base $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ de \mathbb{R}^n . Seja $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o isomorfismo definido por $\xi(e_j) = z_j$, que é, em particular, um homeomorfismo. Tem-se então $F = \xi(\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m})$, onde $\{0\}^{n-m} \subset \mathbb{R}^{n-m}$ é um boreliano com

$$\lambda_{n-m}(\{0\}^{n-m}) = \lambda(\{0\}^{n-m}) = 0^{n-m} = 0$$

pelo que F é um boreliano e, tendo em conta a alínea b) de II.5.5,

$$\lambda_n(F) = c_\xi \lambda_m(\mathbb{R}^m) \times \lambda_{n-m}(\{0\}^{n-m}) = c_\xi \times (+\infty) \times 0 = 0,$$

como queríamos. \square

II.5.12 (Mudança de variáveis linear num integral) Seja $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo, com coeficiente de dilatação c_ξ . Tem-se então:

a) Para cada função mensurável $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\lambda_n(y) = c_\xi \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi(x)) d\lambda_n(x).$$

b) Se E é um espaço de Banach, para cada aplicação integrável $g: \mathbb{R}^n \rightarrow E$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\lambda_n(y) = c_\xi \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi(x)) d\lambda_n(x).$$

Dem: O facto de se ter $\lambda_n(\xi(A)) = c_\xi \lambda_n(A)$, para cada boreliano pode ser encarado como afirmando que o isomorfismo ξ é compatível com as medidas, quando se considera no espaço de chegada a medida de Lebesgue λ_n e no domínio a medida $\mu = c_\xi \lambda_n$. Tendo em conta o teorema trivial de mudança de variáveis (II.1.38, nas hipóteses de a), e II.2.56, nas hipóteses de b)), tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi(x)) d\mu(x)$$

onde, por II.1.35, nas hipóteses de a), e por II.2.54, nas hipóteses de b)),

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi(x)) d\mu(x) = c_\xi \int_U g(f(x)) d\lambda_n(x). \quad \square$$

II.5.13 (Propriedades dos coeficientes de dilatação) Os coeficientes de dilatação c_ξ dos isomorfismos $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ verificam as seguintes propriedades:

a) Se $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo ortogonal, então $c_\xi = 1$. Em particular, o isomorfismo identidade $I_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o seu simétrico $-I_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ têm coeficiente de dilatação igual a 1.

b) Se $\xi, \eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são isomorfismos, então o isomorfismo $\eta \circ \xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem coeficiente de dilatação $c_{\eta \circ \xi} = c_\eta \times c_\xi$.

c) Se $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, então o isomorfismo inverso $\xi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem coeficiente de dilatação $c_{\xi^{-1}} = \frac{1}{c_\xi}$.

Dem: Consideremos em \mathbb{R}^n a norma associada ao produto interno usual. Seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$, que é um conjunto aberto, limitado e não vazio e para o qual se tem portanto $0 < \lambda_n(B) < +\infty$. Sendo $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo ortogonal, tem-se $\|\xi(x)\| = \|x\|$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, pelo que $\xi(B) = B$. Resulta daqui que

$$\lambda_n(B) = \lambda_n(\xi(B)) = c_\xi \lambda_n(B),$$

portanto $c_\xi = 1$, o que prova a). A propriedade em b) resulta de se ter, para cada boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_n(\eta \circ \xi(A)) = \lambda_n(\eta(\xi(A))) = c_\eta \lambda_n(\xi(A)) = c_\eta c_\xi \lambda_n(A).$$

Por fim, c) resulta de que

$$1 = c_{I_{\mathbb{R}^n}} = c_{\xi \circ \xi^{-1}} = c_{\xi} \times c_{\xi^{-1}}. \quad \square$$

II.5.14 (Revisão sobre determinantes) Lembremos que, se $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear, define-se o seu *determinante* $\det(\xi)$ como sendo o determinante da matriz de ξ na base canónica de \mathbb{R}^n .¹⁰⁰ Esta noção tem as seguintes propriedades, que resultam de propriedades correspondentes dos determinantes de matrizes:

a) $\det(I_{\mathbb{R}^n}) = 1$;

b) Se $\xi, \eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são aplicações lineares, então

$$\det(\eta \circ \xi) = \det(\eta) \times \det(\xi)$$

(a matriz da composta é o produto das matrizes);

c) $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo se, e só se, $\det(\xi) \neq 0$ e, nesse caso, $\det(\xi^{-1}) = \frac{1}{\det(\xi)}$;

d) Se $\xi: E \rightarrow E$ é um isomorfismo ortogonal, isto é, se, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \xi(x), \xi(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

então $\det(\xi) = \pm 1$ (a matriz A de ξ verifica $A^T \times A = I$, e portanto tem-se $\det(A)^2 = 1$).

II.5.15 (Lema de Álgebra Linear) Sejam E e F espaços euclidianos e $\xi: E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Existe então uma base ortonormada w_1, \dots, w_n de E tal que os vetores $\xi(w_1), \dots, \xi(w_n)$ sejam ortogonais dois a dois.

Dem: Sendo $\xi^*: F \rightarrow E$ a aplicação linear adjunta de ξ ,¹⁰¹ obtemos uma aplicação linear autoadjunta $\xi^* \circ \xi: E \rightarrow E$, existindo portanto uma base ortonormada w_1, \dots, w_n de E constituída por vetores próprios de $\xi^* \circ \xi$, isto é, com $\xi^* \circ \xi(w_j) = a_j w_j$ para certos números reais a_j . Podemos então escrever

$$\langle \xi(w_j), \xi(w_k) \rangle = \langle \xi^*(\xi(w_j)), w_k \rangle = \langle a_j w_j, w_k \rangle = a_j \langle w_j, w_k \rangle,$$

e portanto $\langle \xi(w_j), \xi(w_k) \rangle = 0$ sempre que $j \neq k$. □

II.5.16 (Determinação do coeficiente de dilatação) Seja $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. Tem-se então $c_{\xi} = |\det(\xi)|$. Em particular, se $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\xi(x) = tx$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se $c_{\xi} = |t|^n$.

¹⁰⁰Mais geralmente, se E é um espaço vetorial de dimensão finita e $\xi: E \rightarrow E$ é uma aplicação linear, pode definir-se o determinante de ξ como sendo o determinante da matriz de ξ numa base arbitrária de E , determinante esse que se prova não depender da base escolhida.

¹⁰¹No caso em que estamos especialmente interessados, aquele em que $E = F = \mathbb{R}^n$, ξ^* é simplesmente a aplicação linear cuja matriz é a transposta da matriz de ξ .

Dem: Consideremos, pelo lema II.5.15, uma base ortonormada w_1, \dots, w_n de \mathbb{R}^n tal que os vetores $\xi(w_1), \dots, \xi(w_n)$ sejam ortogonais dois a dois. Sendo, para cada $1 \leq j \leq n$, $c_j = \|\xi(w_j)\| > 0$, podemos considerar então a base ortonormada z_1, \dots, z_n de \mathbb{R}^n , definida por $z_j = \frac{1}{c_j} \xi(w_j)$.

Consideremos os isomorfismos ortogonais $\alpha, \beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidos pelas condições $\alpha(e_j) = w_j$ e $\beta(z_j) = e_j$, respetivamente, onde e_1, \dots, e_n é a base canónica de \mathbb{R}^n . Vem que

$$\beta \circ \xi \circ \alpha(e_j) = \beta(\xi(w_j)) = \beta(c_j w_j) = c_j e_j,$$

o que implica, por um lado, que a matriz de $\beta \circ \xi \circ \alpha$ é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

e portanto $\det(\beta \circ \xi \circ \alpha) = c_1 \times \cdots \times c_n$ e, por outro lado, que

$$\beta \circ \xi \circ \alpha([0, 1]^n) =]0, c_1] \times \cdots \times]0, c_n],$$

portanto, por ser $\lambda_n([0, 1]^n) = 1$ e $\lambda_n(]0, c_1] \times \cdots \times]0, c_n]) = c_1 \times \cdots \times c_n$, $c_{\beta \circ \xi \circ \alpha} = c_1 \times \cdots \times c_n$. Podemos enfim escrever, lembrando a alínea a) de II.5.13 e a alínea b) de II.5.14,

$$\begin{aligned} c_\xi &= c_\beta \times c_\xi \times c_\alpha = c_{\beta \circ \xi \circ \alpha} = c_1 \times \cdots \times c_n = \det(\beta \circ \xi \circ \alpha) = \\ &= \det(\beta) \times \det(\xi) \times \det(\alpha) = \pm \det(\xi) = |\det(\xi)|. \end{aligned}$$

No caso em que $\xi(x) = tx$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a matriz de ξ é uma matriz diagonal com todos os elementos da diagonal iguais a t , e portanto vem $c_\xi = |\det(\xi)| = |t|^n$. \square

II.5.17 A partir de agora, nesta secção e salvo aviso em contrário, a norma que consideraremos implicitamente em \mathbb{R}^n é a associada ao seu produto interno usual. Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e um real $r > 0$, notaremos $\overline{B}_r(x_0)$ a bola fechada de centro x_0 e raio r ,

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\},$$

e β_n a medida $\lambda_n(\overline{B}_1(0))$. Tem-se então $0 < \beta_n < +\infty$ e, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$

$$\lambda_n(\overline{B}_r(x_0)) = \lambda_n(x_0 + r \overline{B}_1(0)) = \beta_n r^n.$$

Dem: O facto de se ter $0 < \beta_n < +\infty$ resulta de $\overline{B}_1(0)$ ser um conjunto limitado e de interior não vazio. O facto de o isomorfismo, $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\xi(x) = rx$, ter coeficiente de dilatação igual a r^n , implica, lembrando a

invariância de λ_n por translação, que

$$\lambda_n(\overline{B}_r(x_0)) = \lambda_n(x_0 + \overline{B}_r(0)) = \lambda_n(\xi(\overline{B}_1(0))) = r^n \beta_n. \quad \square$$

II.5.18 Repare-se que, tendo em conta a determinação, no caso em que $n = 2$, de $\lambda_2(\overline{B}_1(0))$, feita em II.4.7 e o facto de, no caso em que $n = 1$, ter-se $\overline{B}_1(0) = [-1, 1]$, podemos afirmar que

$$\beta_1 = 2, \quad \beta_2 = \pi.$$

Veremos adiante como determinar os restantes valores de β_n .

II.5.19 (As medidas esféricas) Para cada $n \geq 0$, vamos notar $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária,

$$S_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\},$$

que é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^{n+1} , em particular um boreliano. Considerando a bola fechada $\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, tem lugar uma aplicação contínua, em particular mensurável $\rho: \overline{B}_1(0) \setminus \{0\} \rightarrow S_n$,

$$\rho(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

e definimos na σ -álgebra \mathcal{B}_{S_n} dos borelianos de S_n uma medida μ_{S_n} , pondo, para cada boreliano $A \subset S_n$,

$$\mu_{S_n}(A) = (n+1)\lambda_{n+1}(\rho^{-1}(A)).$$

A medida $\mu_{S_n}: \mathcal{B}_{S_n} \rightarrow \mathbb{R}_+$, a que damos o nome de *medida de Lebesgue* de S_n , ou *medida esférica*, é assim o produto de $n+1$ pela medida imagem direta por ρ da restrição a $\overline{B}_1(0) \setminus \{0\}$ da medida de Lebesgue de \mathbb{R}^{n+1} .¹⁰² Repare-se que, uma vez que $\lambda_{n+1}(\{0\}) = 0$, tem-se, para a medida da esfera total,

$$\mu_{S_n}(S_n) = (n+1)\lambda_{n+1}(\overline{B}_1(0) \setminus \{0\}) = (n+1)\beta_{n+1},$$

em particular, lembrando os valores determinados em II.5.18,

$$\mu_{S_0}(S_0) = \mu_{S_0}(\{-1, 1\}) = 2, \quad \mu_{S_1}(S_1) = 2\pi.$$

II.5.20 (Medida esférica dum conjunto unitário) No caso em que $n = 0$, e portanto $S_0 = \{-1, 1\}$, tem-se $\mu_{S_0}(\{-1\}) = \mu_{S_0}(\{1\}) = 1$. No caso em que $n \geq 1$, tem-se $\mu_{S_n}(\{x\}) = 0$, para cada $x \in S_n$.

Dem: As conclusões no caso $n = 0$ resultam de se ter

$$\lambda(\rho^{-1}(\{-1\})) = \lambda([-1, 0]) = 1, \quad \lambda(\rho^{-1}(\{1\})) = \lambda([0, 1]) = 1.$$

¹⁰²A razão do fator multiplicativo $n+1$ será em breve mais clara.

O caso em que $n \geq 1$ é uma consequência de II.5.11, uma vez que $\rho^{-1}(\{x\})$ está contido no subespaço vetorial $\mathbb{R}x$ de dimensão $1 < n + 1$. \square

Uma das razões da importância das medidas esféricas, que, no caso $n = 1$, se inserem na ideia intuitiva de comprimento de uma curva e, no caso $n = 2$, na de área de uma superfície, é que, se, por um lado, elas são definidas a partir da medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n , esta última, como vamos ver, também pode ser recuperada a partir daquelas.

II.5.21 (Coordenadas polares generalizadas) Para cada $n \geq 0$, tem lugar um homeomorfismo

$$\Phi:]0, +\infty[\times S_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \Phi(t, x) = tx,$$

o qual é compatível com as medidas, quando se considera no espaço de chegada a restrição da medida de Lebesgue λ_{n+1} , nos borelianos de \mathbb{R}^{n+1} , e no domínio a medida $(\lambda \otimes \mu_{S_n})_{(\varphi)}$, na σ -álgebra

$$\mathcal{B}_{]0, +\infty[\times S_n} = \mathcal{B}_{]0, +\infty[} \otimes \mathcal{B}_{S_n},$$

definida pela função contínua $\varphi:]0, +\infty[\times S_n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi(t, x) = t^n$, a partir da medida produto da restrição da medida de Lebesgue λ nos borelianos de \mathbb{R} pela medida esférica μ_{S_n} nos borelianos de S_n . Por outras palavras, para cada boreliano $B \subset]0, +\infty[\times S_n$,

$$\lambda_n(\Phi(B)) = \int_B t^n d(\lambda \otimes \mu_{S_n})(t, x) = \int_B t^n dt d\mu_{S_n}(x).$$

Costuma-se dizer que $t \in]0, +\infty[$ e $x \in S_n$ são as *coordenadas polares generalizadas* do ponto $tx \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.¹⁰³

Dem: O facto de Φ , que é uma aplicação contínua, ser um homeomorfismo é uma consequência de admitir um inverso bilateral contínuo

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow]0, +\infty[\times S_n, \quad y \mapsto (\|y\|, \frac{y}{\|y\|}).$$

Em particular, Φ é uma aplicação bimensurável, pelo que, para ver que Φ é compatível com as medidas, basta ver que nos borelianos de $]0, +\infty[\times S_n$

¹⁰³As coordenadas polares usuais de um ponto $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ são $t > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $x = (t \cos(\alpha), t \sin(\alpha))$, em que α fica só determinado a menos de um múltiplo inteiro de 2π . Quando se pretende ter uma aplicação bijetiva, restringe-se α a um intervalo conveniente, por exemplo $[0, 2\pi[$ e se se pretender ter mesmo um homeomorfismo, diminui-se ainda mais o domínio de α , por exemplo para $]0, 2\pi[$, retirando-se neste caso a \mathbb{R}^2 os pontos da forma $(t, 0)$, com $t \geq 0$, que constituem um conjunto de medida nula. A vantagem das coordenadas polares generalizadas, que substituem α , por um elemento da esfera, está em que são dispensados estes artifícios e a generalização para \mathbb{R}^n é mais simples.

coincidem a medida $(\lambda \otimes \mu_{S_n})_{(\varphi)}$ e a medida imagem direta de λ_{n+1} por Φ^{-1} . Começemos por considerar $a \leq b$ em $]0, +\infty[$ e $A \in \mathcal{B}_{S_n}$. Reparemos que $\overline{B}_1(0) \setminus \{0\} = \Phi(]0, 1] \times S_n)$ e portanto, nas notações de II.5.19,

$$\rho^{-1}(A) = \Phi(]0, 1] \times A) =]0, 1] \cdot A$$

donde

$$\mu_{S_n}(A) = (n+1)\lambda_{n+1}(]0, 1] \cdot A).$$

Vemos agora que

$$\begin{aligned} \Phi_*^{-1}\lambda_{n+1}(]a, b] \times A) &= \lambda_{n+1}(\Phi(]a, b] \times A)) = \\ &= \lambda_{n+1}(\Phi((]0, b] \times A) \setminus (]0, a] \times A))) = \\ &= \lambda_{n+1}(b \cdot]0, 1] \cdot A) - \lambda_{n+1}(a \cdot]0, 1] \cdot A) = \\ &= (b^{n+1} - a^{n+1})\lambda_{n+1}(]0, 1] \cdot A) = \\ &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \mu_{S_n}(A) \end{aligned}$$

e, por outro lado, pelo teorema de Fubini para funções positivas,

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \mu_{S_n})_{(\varphi)}(]a, b] \times A) &= \int_{]a, b] \times A} t^n dt d\mu_{S_n}(x) = \\ &= \int_A \left(\int_{]a, b]} t^n dt \right) d\mu_{S_n}(x) = \\ &= \int_A \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} d\mu_{S_n}(x) = \\ &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \mu_{S_n}(A), \end{aligned}$$

o que mostra que

$$\Phi_*^{-1}\lambda_{n+1}(]a, b] \times A) = (\lambda \otimes \mu_{S_n})_{(\varphi)}(]a, b] \times A) < +\infty.$$

Uma vez que estes produtos cartesianos $]a, b] \times A$ constituem um semianel de partes de $]0, +\infty[\times S_n$ cuja σ -álgebra gerada é

$$\mathcal{B}_{]0, +\infty[\times S_n} = \mathcal{B}_{]0, +\infty[} \otimes \mathcal{B}_{S_n}$$

(cf. I.5.19 e I.5.23) o teorema de Hahn de unicidade do prolongamento em I.4.12 garante que, efetivamente, as medidas $\Phi_*^{-1}\lambda_{n+1}$ e $(\lambda \otimes \mu_{S_n})_{(\varphi)}$ coincidem. \square

Como primeira aplicação das coordenadas polares generalizadas, examinamos agora uma fórmula que permite calcular recursivamente os valores das constantes $\beta_n = \lambda_n(\overline{B}_1(0))$.

II.5.22 As constantes β_n , definidas em II.5.17, verificam a seguinte relação de recorrência:

$$\beta_{n+2} = \frac{2\pi\beta_n}{n+2}.$$

Em particular, além dos valores referidos em II.5.18, tem-se, por exemplo

$$\beta_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad \beta_4 = \frac{\pi^2}{2}, \quad \beta_5 = \frac{8\pi^2}{15}, \quad \beta_6 = \frac{\pi^3}{6}$$

e, para as correspondentes medidas das esferas, podemos continuar a série de valores referidos em II.5.19 com

$$\mu_{S_2}(S_2) = 4\pi, \quad \mu_{S_3}(S_3) = 2\pi^2, \quad \mu_{S_4}(S_4) = \frac{8\pi^2}{3}, \quad \mu_{S_5}(S_5) = \pi^3.$$

Dem: Considerando o homeomorfismo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, compatível com as medidas, referido na alínea b) de II.5.5 e aplicando o teorema trivial de mudança de variáveis e o teorema de Fubini, vemos que

$$\begin{aligned} \beta_{n+2} &= \lambda_n \otimes \lambda_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 1\}) = \\ &= \int_{\overline{B}_1(0)} \lambda_2(\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\|^2 \leq 1 - \|x\|^2\}) d\lambda_n(x) = \\ &= \int_{\overline{B}_1(0)} \lambda_2(\sqrt{1 - \|x\|^2} \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\|^2 \leq 1\}) d\lambda_n(x) = \\ &= \int_{\overline{B}_1(0)} (1 - \|x\|^2) \pi d\lambda_n(x). \end{aligned}$$

Podemos agora calcular este último integral com o auxílio das coordenadas polares generalizadas, isto é, considerando o homeomorfismo

$$\Phi:]0, +\infty[\times S_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \Phi(t, x) = tx,$$

(cf. II.5.21) e obtemos, tendo em conta mais uma vez o teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \beta_{n+2} &= \int_{]0,1] \times S_{n-1}} t^{n-1} (1 - \|tx\|^2) \pi dt d\mu_{S_{n-1}}(x) = \\ &= \int_{]0,1] \times S_{n-1}} t^{n-1} (1 - t^2) \pi dt d\mu_{S_{n-1}}(x) = \\ &= \pi \mu_{S_{n-1}}(S_{n-1}) \int_0^1 t^{n-1} - t^{n+1} dt = \\ &= \pi n \beta_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{2\pi\beta_n}{n+2}. \end{aligned} \quad \square$$

Vamos agora examinar como se comporta a medida de um conjunto quando este é transformado por um difeomorfismo de classe C^1 entre

abertos de \mathbb{R}^n . Supomos, naturalmente, que o leitor está familiarizado com os resultados fundamentais do Cálculo Diferencial no contexto de \mathbb{R}^n .

II.5.23 Lembremos que, se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 , então, para cada $x \in U$, temos uma aplicação linear derivada $Df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é aquela cuja matriz na base canónica de \mathbb{R}^n é a *matriz jacobiana*, isto é, aquela cujo elemento da linha i e coluna j é a derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, da coordenada i , $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, relativamente à variável j .

Lembremos também que, no caso em que f é um *difeomorfismo de classe C^1* dum aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, isto é, uma bijecção que é de classe C^1 assim como a sua inversa, então, para cada $x \in U$, a aplicação linear derivada $Df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, tendo $D(f^{-1})_{f(x)}$ como isomorfismo inverso.

Neste último caso, e uma vez que, por definição, as funções $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, podemos concluir que tem lugar uma aplicação contínua

$$U \rightarrow]0, +\infty[, \quad x \mapsto c_{Df_x},$$

já que o coeficiente de dilatação c_{Df_x} é o valor absoluto do determinante da matriz jacobiana e este último é uma soma de produtos de entradas dessa matriz, cada um multiplicado por ± 1 .

O próximo resultado é um lema que encerra o essencial da demonstração do resultado mais geral que examinaremos em seguida.

II.5.24 (**Lema**) Sejam U e V abertos de \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 e $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ um ponto tal que o compacto

$$K = [a_1, a_1 + 1] \times \cdots \times [a_n, a_n + 1]$$

esteja contido em U . Sendo

$$A =]a_1, a_1 + 1] \times \cdots \times]a_n, a_n + 1] \subset K,$$

tem-se então que A e $f(A)$ são borelianos e

$$\lambda_n(f(A)) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) < +\infty.$$

Dem: Vamos dividir a prova em várias partes, cada uma tendo eventualmente a sua própria demonstração.

a) O conjunto A é um boreliano, por ser um produto cartesiano de borelianos de \mathbb{R} , e o facto de f ser, em particular, um homeomorfismo, e portanto bimensurável, implica que $f(A)$ é também um boreliano. Observe-se também que $\lambda_n(A) = 1$ e que, sendo M o máximo no compacto K da

função contínua $x \mapsto c_{Df_x}$, tem-se

$$\int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) \leq M\lambda_n(A) = M < +\infty.$$

b) Ao contrário do que tem estado implícito ao longo desta secção, a norma de \mathbb{R}^n que consideraremos nesta demonstração não será a norma euclidiana mas sim a norma do máximo, definida, para $x = (x_1, \dots, x_n)$, por

$$\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Lembrando que as bolas aberta e fechada de centro b e raio $r > 0$, para esta norma, são respetivamente

$$\begin{aligned} B_r(b) &=]b_1 - r, b_1 + r[\times \cdots \times]b_n - r, b_n + r[, \\ \overline{B}_r(b) &= [b_1 - r, b_1 + r] \times \cdots \times [b_n - r, b_n + r], \end{aligned}$$

notaremos

$$B'_r(b) =]b_1 - r, b_1 + r] \times \cdots \times]b_n - r, b_n + r],$$

um boreliano que verifica $B_r(b) \subset B'_r(b) \subset \overline{B}_r(b)$ e

$$\lambda_n(B'_r(b)) = (2r)^n = \lambda_n(B_r(b)) = \lambda_n(\overline{B}_r(b)).$$

Por exemplo, o conjunto A no enunciado é da forma $B'_r(b)$, com $r = \frac{1}{2}$ e $b = (a_1 + \frac{1}{2}, \dots, a_n + \frac{1}{2})$.

c) Recordemos que, se $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear, a norma de operador de ξ , notada $\|\xi\|$ é, por definição, o menor dos números $k \geq 0$ tais que, para cada $u \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi(u)\| \leq k\|u\|$, tendo-se assim, em particular, a desigualdade $\|\xi(u)\| \leq \|\xi\|\|u\|$, para cada $u \in \mathbb{R}^n$.

d) Nesta alínea, e ao longo das alíneas e) e f), vamos considerar fixado um número $\delta > 0$ arbitrário.

Notaremos $m > 0$ o mínimo sobre o compacto K da função contínua $x \mapsto c_{Df_x}$.

Fixemos $R \geq 1$ maior ou igual ao máximo sobre o compacto K da função contínua $x \mapsto \|(Df_x)^{-1}\|$.

Tendo em conta a continuidade uniforme sobre o compacto K das funções contínuas $x \mapsto Df_x$ e $x \mapsto c_{Df_x}$, escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $b \in K$ e $x \in K$ verificam $\|x - b\| \leq \varepsilon$, tem-se

$$(1) \quad \|Df_x - Df_b\| \leq \delta, \quad |c_{Df_x} - c_{Df_b}| \leq m\delta.$$

Reparemos que, pelo teorema da média do Cálculo Diferencial, decorre da primeira desigualdade que, sempre que $b \in K$ e $x \in K$ verificam $\|x - b\| \leq \varepsilon$, tem-se

$$(2) \quad \|f(x) - f(b) - Df_b(x - b)\| \leq \delta\|x - b\|.$$

e) Vamos mostrar que, quaisquer que sejam $b \in K$ e $0 < r \leq \varepsilon$ tais que $B'_r(b) \subset K$, tem-se

$$(3) \quad \lambda_n(f(B'_r(b))) \leq (1 + R\delta)^{n+1} \int_{B'_r(b)} c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Subdem: Para cada $x \in B'_r(b)$, deduzimos de (2), tendo em conta o facto de se ter $\|(Df_b)^{-1}\| \leq R$, que

$$\begin{aligned} \|(Df_b)^{-1}(f(x) - f(b)) - (x - b)\| &= \\ &= \|(Df_b)^{-1}(f(x) - f(b) - Df_b(x - b))\| \leq \\ &\leq R\|f(x) - f(b) - Df_b(x - b)\| \leq R\delta\|x - b\|, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} \|(Df_b)^{-1}(f(x) - f(b))\| &= \\ &= \|(Df_b)^{-1}(f(x) - f(b)) - (x - b) + (x - b)\| \leq \\ &\leq R\delta\|x - b\| + \|x - b\| = (1 + R\delta)r, \end{aligned}$$

isto é,

$$(Df_b)^{-1}(f(x) - f(b)) \in \overline{B}_{(1+R\delta)r}(0),$$

ou ainda

$$f(x) \in f(b) + Df_b(\overline{B}_{(1+R\delta)r}(0)).$$

Verificámos assim que

$$f(B'_r(b)) \subset f(b) + Df_b(\overline{B}_{(1+R\delta)r}(0))$$

e portanto, tendo em conta a definição dos coeficientes de dilatação e a invariância por translação da medida de Lebesgue,

$$(4) \quad \lambda_n(f(B'_r(b))) \leq c_{Df_b} \lambda_n(\overline{B}_{(1+R\delta)r}(0)) = c_{Df_b} (2r)^n (1 + R\delta)^n.$$

Por outro lado, lembrando a segunda desigualdade em (1) e a definição de m , vemos que, para cada $x \in B'_r(b)$,

$$c_{Df_b} = c_{Df_x} + (c_{Df_b} - c_{Df_x}) \leq c_{Df_x} + m\delta \leq c_{Df_x}(1 + \delta) \leq c_{Df_x}(1 + R\delta)$$

e portanto

$$(5) \quad c_{Df_b}(2r)^n = \int_{B'_r(b)} c_{Df_b} d\lambda_n(x) \leq (1 + R\delta) \int_{B'_r(b)} c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Combinando as desigualdades em (4) e (5) obtemos agora a desigualdade (3) pretendida.

f) Vamos agora deduzir de e) que se tem, para o próprio A , a desigualdade análoga a (3),

$$(6) \quad \lambda_n(f(A)) \leq (1 + R\delta)^{n+1} \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Subdem: Suponhamos que mostrámos a existência de uma família finita $(A_j)_{j \in J}$ de borelianos disjuntos dois a dois nas condições de e), isto é, tais que $A_j = B'_{r_j}(b_j)$, com $0 < r_j \leq \varepsilon$, tal que $A = \bigcup A_j$. Uma vez que o boreliano $f(A)$ será então a união dos borelianos $f(A_j)$ que são disjuntos dois a dois, poderemos então concluir que

$$\begin{aligned} \lambda_n(f(A)) &= \sum_{j \in J} \lambda_n(f(A_j)) \leq \sum_{j \in J} (1 + R\delta)^{n+1} \int_{A_j} c_{Df_x} d\lambda_n(x) = \\ &= (1 + R\delta)^{n+1} \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x), \end{aligned}$$

que é a desigualdade pretendida. Resta-nos mostrar a existência de uma família $(A_j)_{j \in J}$ nas condições que referimos. Para isso, fixamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2p} \leq \varepsilon$ e reparamos que o conjunto

$$A =]a_1, a_1 + 1] \times \cdots \times]a_n, a_n + 1]$$

é então a união dos p^n conjuntos

$$\begin{aligned} A_{k_1, k_2, \dots, k_n} &= B'_{\frac{1}{2p}} \left(\left(a_1 + \frac{2k_1 - 1}{2p}, \dots, a_n + \frac{2k_n - 1}{2p} \right) \right) = \\ &=]a_1 + \frac{k_1 - 1}{p}, a_1 + \frac{k_1}{p}] \times \cdots \times]a_n + \frac{k_n - 1}{p}, a_n + \frac{k_n}{p}], \end{aligned}$$

com $(k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, p\}^n$, que são disjuntos dois a dois.

g) Na desigualdade estabelecida em f), $\delta > 0$ é arbitrário. Podemos então tomar, em particular, $\delta = \frac{1}{k}$, com $k \in \mathbb{N}$ e, passando ao limite em k as desigualdades assim obtidas, obtemos, por ser $\lim_k (1 + \frac{r}{k})^{n+1} = 1$,

$$\lambda_n(f(A)) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x),$$

que é a desigualdade pretendida. □

II.5.25 (Lema — metade do teorema de mudança de variáveis) Sejam U e V abertos de \mathbb{R}^n , $f: U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada boreliano $A \subset U$, $f(A)$ é boreliano e

$$\lambda_n(f(A)) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em duas partes:

a) Começamos por notar que a desigualdade é trivialmente verdadeira, com ambos os membros iguais a 0, no caso em que $A = \emptyset$ e vamos mostrar que se

tem

$$\lambda_n(f(A)) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) < +\infty$$

no caso em que o boreliano A é da forma

$$A =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n],$$

com $a_j < b_j$, para cada $1 \leq j \leq n$, e $]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n] \subset U$ (isto é, com a aderência de A contida em U).

Subdem: Seja, para cada $1 \leq j \leq n$, $r_j = b_j - a_j > 0$ e notemos $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o isomorfismo definido por

$$\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (r_1 x_1, r_2 x_2, \dots, r_n x_n).$$

Consideremos o aberto $\widehat{U} = \xi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ e reparemos que se tem $A = \xi(\widehat{A})$, com

$$\widehat{A} =]a'_1, b'_1] \times \cdots \times]a'_n, b'_n],$$

onde $a'_j = \frac{a_j}{r_j}$ e $b'_j = \frac{b_j}{r_j} = a'_j + 1$, assim como

$$]a'_1, b'_1] \times \cdots \times]a'_n, b'_n] = \xi^{-1}(]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]) \subset \widehat{U}.$$

Podemos considerar o difeomorfismo $\widehat{f} = f \circ \xi|_{\widehat{U}}: \widehat{U} \rightarrow V$, de classe C^1 e deduzir do lema II.5.24 que se tem

$$(1) \quad \lambda_n(f(A)) = \lambda_n(\widehat{f}(\widehat{A})) \leq \int_{\widehat{A}} c_{D\widehat{f}_x} d\lambda_n(x) < +\infty.$$

Mas, do teorema de derivação da função composta, vem $D\widehat{f}_x = Df_{\xi(x)} \circ \xi$, donde

$$c_{D\widehat{f}_x} = c_{Df_{\xi(x)}} \times c_\xi$$

e portanto, aplicando a alínea a) de II.5.12 aos prolongamentos a \mathbb{R}^n que são nulos fora dos conjuntos mensuráveis envolvidos,

$$\int_{\widehat{A}} c_{D\widehat{f}_x} d\lambda_n(x) = c_\xi \int_{\widehat{A}} c_{Df_{\xi(x)}} d\lambda_n(x) = \int_A c_{Df_y} d\lambda_n(y),$$

o que, combinado com as desigualdades (1), dá as desigualdades pretendidas.

b) Vamos agora provar a desigualdade do enunciado para um boreliano $A \subset U$ arbitrário.

Subdem: Consideremos duas medidas μ e μ' nos borelianos de U , definidas respetivamente por

$$\mu(A) = \lambda_n(f(A)), \quad \mu'(A) = \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x),$$

a primeira a imagem direta de λ_n por meio de f^{-1} (cf. I.5.13) e a segunda a definida a partir de λ_n pela função mensurável positiva $x \mapsto c_{Df_x}$ (cf. II.1.22). Reparemos que o nosso objetivo é provar que se tem $\mu(A) \leq \mu'(A)$ para cada boreliano $A \subset U$. Tendo em conta II.5.2, constatamos imediatamente que a classe \mathcal{S} formada pelos intervalos semiabertos

$$A =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n],$$

com $a_j \leq b_j$, cuja aderência está contida em U , é um semianel de partes de U e o que mostrámos em a) foi que se tem $\mu(A) \leq \mu'(A) < +\infty$, para cada A no semianel \mathcal{S} . Tendo em conta I.4.17, o nosso objetivo ficará atingido se mostrarmos que as restrições de μ e de μ' a \mathcal{S} são σ -finitas e que a σ -álgebra de partes de U gerada por \mathcal{S} é a dos borelianos, bastando, para esta segunda afirmação, mostrar que ela contém todos os abertos $U' \subset U$. O resultado ficará assim provado se verificarmos que qualquer aberto $U' \subset U$ é união de uma família contável de conjuntos de \mathcal{S} . Ora, sendo $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$ a parte contável de \mathcal{S} constituída pelos conjuntos de \mathcal{S} da forma $]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]$, com os a_j e os b_j racionais, qualquer aberto $U' \subset U$ é a união de todos os conjuntos de $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$ que estão contidos nele, uma vez que, para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in U'$, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que

$$]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\subset U'$$

e então, fixando, para cada j , $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ com

$$x_j - \varepsilon < a_j < x < b_j < x_j + \varepsilon,$$

o conjunto $]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]$ pertence a $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$, contém o ponto x e está contido em U' . \square

Podemos agora demonstrar finalmente o resultado fundamental sobre a medida da imagem de um boreliano por um difeomorfismo de classe C^1 .

II.5.26 (Teorema de mudança de variáveis para conjuntos) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos e $f: U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada boreliano $A \subset U$ tem-se então que $f(A) \subset V$ é um boreliano e

$$\lambda_n(f(A)) = \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Dem: Tendo em conta o lema II.5.25, já sabemos que, para cada boreliano $A \subset U$, $f(A)$ é boreliano e

$$(1) \quad \lambda_n(f(A)) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x),$$

pelo que o que nos falta provar é a desigualdade oposta.

Aplicando o lema II.5.25, ao difeomorfismo $f^{-1}: V \rightarrow U$ de classe C^1 , sabemos que, para cada boreliano $B \subset V$, tem-se

$$\lambda_n(f^{-1}(B)) \leq \int_B c_{Df_y^{-1}} d\lambda_n(y),$$

por outras palavras, considerando as medidas μ e μ' nos borelianos de V definidas por

$$\mu(B) = \lambda_n(f^{-1}(B)), \quad \mu'(B) = \int_B c_{Df_y^{-1}} d\lambda_n(y),$$

(a primeira é a imagem direta da medida de Lebesgue λ_n , nos borelianos de U , pelo homeomorfismo f e a segunda é a definida a partir da medida de Lebesgue λ_n , nos borelianos de V , pela função contínua positiva que a y associa $c_{Df_y^{-1}}$), tem-se $\mu(B) \leq \mu'(B)$, para cada boreliano $B \subset V$. De II.1.36 concluímos que, para cada função mensurável $g: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se

$$\int_V g(y) d\mu(y) \leq \int_V g(y) d\mu'(y),$$

isto é, tendo em conta o teorema trivial de integração por mudança de variáveis e a caracterização do integral para a medida definida por uma função mensurável positiva (cf. II.1.38),

$$\int_U g(f(x)) d\lambda_n(x) \leq \int_V g(y) c_{Df_y^{-1}} d\lambda_n(y).$$

Dado o boreliano $A \subset U$, podemos tomar na desigualdade precedente para g a aplicação mensurável que é 0 para $y \notin f(A)$ e em $y \in f(A)$ toma o valor $c_{Df_{f^{-1}(y)}}$. Reparando que $g(f(x)) = 0$ para $x \notin A$, que $g(f(x)) = c_{Df_x}$ para $x \in A$ e que, pelo teorema de derivação da aplicação composta, para cada $y \in f(A)$,

$$g(y) c_{Df_y^{-1}} = c_{Df_{f^{-1}(y)}} \times c_{Df_y^{-1}} = c_{Df_{f^{-1}(y)} \circ Df_y^{-1}} = c_{D(f \circ f^{-1})_y} = c_I = 1,$$

a desigualdade anterior diz-nos que

$$\int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) \leq \int_{f(A)} 1 d\lambda_n(y) = \lambda_n(f(A)),$$

desigualdade que, juntamente com a desigualdade (1), implica a igualdade do enunciado. \square

II.5.27 (**Integração por mudança de variáveis em \mathbb{R}^n**)¹⁰⁴ Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos e $f: U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 . Tem-se então:

a) Para cada função mensurável $g: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_V g(y) d\lambda_n(y) = \int_U g(f(x)) c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

b) Se E é um espaço de Banach, para cada aplicação integrável $g: V \rightarrow E$,

$$\int_V g(y) d\lambda_n(y) = \int_U g(f(x)) c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Dem: Tendo em conta o resultado precedente, podemos considerar uma nova medida μ definida nos borelianos de U por qualquer das duas caracterizações equivalentes:

$$\mu(A) = \lambda_n(f(A)), \quad \mu(A) = \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Basta agora repararmos que, pelo teorema trivial de mudança de variáveis (II.1.38, nas hipóteses de a), e II.2.56, nas hipóteses de b)), tem-se

$$\int_V g(y) d\lambda_n(y) = \int_U g(f(x)) d\mu(x)$$

e que, pela caracterização do integral para a medida definida por uma função mensurável positiva (II.1.35, nas hipóteses de a), e II.2.54, nas hipóteses de b)), tem-se

$$\int_U g(f(x)) d\mu(x) = \int_U g(f(x)) c_{Df_x} d\lambda_n(x). \quad \square$$

Exercícios

Ex II.5.1 (**Medida de paralelogramos multidimensionais**)¹⁰⁵ Se E é um espaço vetorial e x_1, x_2, \dots, x_n são vetores linearmente independentes de E , chamamos *paralelogramo multidimensional* gerado por aqueles vetores ao conjunto P das combinações lineares $t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n$, com $t_j \in [0, 1]$ (comparar com o exercício II.4.7). No caso em que $E = \mathbb{R}^n$, mostrar que P é um boreliano e que a medida de Lebesgue $\lambda_n(P)$ é igual ao

¹⁰⁴Comparar com II.3.14.

¹⁰⁵Generalização do exercício II.4.7.

valor absoluto do determinante da matriz em que cada coluna j é constituída pelas coordenadas do vetor x_j .

Ex II.5.2 (Propriedade de invariância das medidas esféricas) Seja $n \geq 0$ um inteiro e consideremos a esfera unitária $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, assim como a correspondente medida esférica μ_{S_n} nos borelianos de S_n (cf. I.5.19). Mostrar que, para cada isomorfismo ortogonal $\xi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, tem-se $\xi(S_n) = S_n$ e a restrição $\xi|_{S_n}: S_n \rightarrow S_n$ é compatível com as medidas (por outras palavras, μ_{S_n} é $\xi|_{S_n}$ -invariante). **Sugestão:** Lembrar a alínea a) de II.5.13.

Ex II.5.3 (Propriedades de invariância da medida esférica em $S_1 \subset \mathbb{R}^2$) Consideremos a medida esférica μ_{S_1} nos borelianos de $S_1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ e reparemos que S_1 tem uma estrutura de grupo multiplicativo em que a operação é a multiplicação de complexos, o elemento neutro é 1 e o inverso de $z \in S_1$ é $z^{-1} = \bar{z}$. Reparar que têm lugar homeomorfismos, em particular aplicações bimensuráveis $\kappa: S \rightarrow S$ e, para cada $z_0 \in S$, $\tau_{z_0}: S \rightarrow S$, definidos por

$$\kappa(z) = \bar{z} = z^{-1}, \quad \tau_{z_0}(z) = z_0 \times z.$$

a) Mostrar que a medida μ_{S_1} é κ -invariante e, para cada $z_0 \in S$, τ_{z_0} -invariante (comparar com I.5.14). **Sugestão:** Reparar que temos dois casos particulares da situação examinada no exercício II.5.2.

b) (Propriedade de unicidade) Mostrar que, se μ' é uma medida nos borelianos de S_1 que seja τ_{z_0} -invariante, para cada $z_0 \in S_1$, e que verifique $\mu'(S_1) = 2\pi$, então $\mu' = \mu_{S_1}$.

Sugestão: Dado um boreliano $A \subset S_1$, considerar o boreliano $\hat{A} \subset S_1 \times S_1$ definido por

$$\hat{A} = \{(z, w) \in S_1 \times S_1 \mid z \times w \in A\}$$

e utilizar o teorema de Fubini para calcular de duas maneiras distintas $\mu_{S_1} \otimes \mu'(\hat{A})$.

Ex II.5.4 a) Para cada $n \geq 1$, seja $C_n \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto

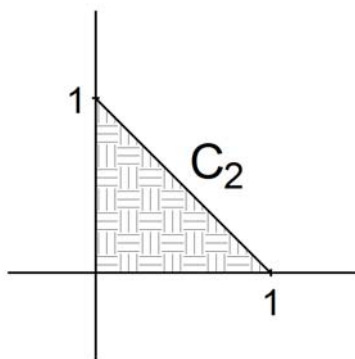
$$C_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}.$$

Verificar que, para cada $t \in [0, 1]$,

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in C_n\} = (1-t)C_{n-1}$$

e deduzir, por indução, que

$$\lambda_n(C_n) = \frac{1}{n!}.$$



b) Para cada $n \geq 0$, seja $\widehat{S}_n \subset C_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o n -simplex padrão, definido por

$$\widehat{S}_n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_j \geq 0, x_1 + \dots + x_{n+1} = 1\}.$$

Tendo presente a analogia com a situação tratada em II.5.19, verificar que \widehat{S}_n é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^{n+1} , em particular um boreliano, e que se pode definir uma medida $\mu_{\widehat{S}_n}$ nos borelianos de \widehat{S}_n (a que se poderia dar o nome de *medida simplicial*), considerando uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}: C_{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \widehat{S}_n, \\ \widehat{\rho}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \frac{1}{x_1 + \dots + x_{n+1}} (x_1, \dots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

e definindo, para cada boreliano $A \subset \widehat{S}_n$,

$$\mu_{\widehat{S}_n}(A) = (n+1) \lambda_{n+1}(\widehat{\rho}^{-1}(A)).$$

Verificar ainda que, para a medida do simplex total, tem-se

$$\mu_{\widehat{S}_n}(\widehat{S}_n) = \frac{1}{n!}.^{106}$$

c) Reparar que $\widehat{S}_0 = \{1\}$ e $\mu_{\widehat{S}_0}(\{1\}) = 1$ e mostrar que, se $n \geq 1$, tem-se $\mu_{\widehat{S}_n}(\{x\}) = 0$, para cada $x \in \widehat{S}_n$ (comparar com II.5.20).

d) (Coordenadas simpliciais generalizadas) Adaptando trivialmente a demonstração de II.5.21, mostrar que, para cada $n \geq 0$, tem lugar um homeomorfismo

$$\widehat{\Phi}:]0, +\infty[\times \widehat{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_+^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \widehat{\Phi}(t, x) = tx,$$

¹⁰⁶Em particular, por exemplo no caso $n = 1$, esta medida não é o que esperaríamos ser o “comprimento” do conjunto em questão.

o qual é compatível com as medidas, quando se considera no espaço de chegada a restrição da medida de Lebesgue λ_{n+1} , nos borelianos de \mathbb{R}^{n+1} , e no domínio a medida $(\lambda \otimes \mu_{\widehat{S}_n})_{(\varphi)}$, na σ -álgebra

$$\mathcal{B}_{]0, +\infty[\times \widehat{S}_n} = \mathcal{B}_{]0, +\infty[} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{S}_n},$$

definida, a partir da medida produto da restrição a $]0, +\infty[$ da medida de Lebesgue λ nos borelianos de \mathbb{R} pela medida simplicial $\mu_{\widehat{S}_n}$ nos borelianos de \widehat{S}_n , pela função contínua $\varphi:]0, +\infty[\times \widehat{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi(t, x) = t^n$.

Poder-se-ia dizer que $t \in]0, +\infty[$ e $x \in \widehat{S}_n$ são as *coordenadas simpliciais generalizadas* do ponto $tx \in \mathbb{R}_+^{n+1} \setminus \{0\}$.

Ex II.5.5 Deduzir de II.5.18 e das fórmulas de recorrência em II.5.22 as seguintes fórmulas explícitas para as constantes $\beta_n = \lambda_n(\overline{B}_1(0))$, válidas separadamente para n ímpar e para n par:

$$\beta_{2p-1} = \frac{2^{2p-1}(p-1)!\pi^{p-1}}{(2p-1)!}, \quad \beta_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}.$$

Ex II.5.6 Sejam $n \geq 1$ e $r > 0$ fixados. Para cada real α , seja $f_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função definida por

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^\alpha}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

onde a norma considerada é a euclidiana.¹⁰⁷ Sendo $\overline{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ a bola fechada de centro 0 e raio r , utilizar coordenadas polares generalizadas para mostrar que:

$$\int_{\overline{B}_r(0)} f_\alpha(x) d\lambda_n(x) < +\infty \Leftrightarrow \alpha < n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(0)} f_\alpha(x) d\lambda_n(x) < +\infty \Leftrightarrow \alpha > n.$$

Ex II.5.7 a) Demonstrar a fórmula

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

tendo em conta a identidade $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} \times e^{-y^2}$ e calculando o integral desta função em \mathbb{R}^2 de dois modos distintos, utilizando, por um lado, o

¹⁰⁷O valor da função no ponto 0 é evidentemente irrelevante para efeitos do cálculo dos integrais e só é exibido para fixar ideias. Com este valor, a função fica contínua em 0 se, e só se, $\alpha < 0$.

teorema de Fubini e, por outro lado, coordenadas polares generalizadas.¹⁰⁸

b) Utilizar uma ideia análoga para mostrar que, para cada inteiro $n \geq 0$, se tem

$$\int_{]0, +\infty[} x^n e^{-x^2} dx = \frac{1}{(n+1)\beta_{n+1}} (\sqrt{\pi})^{n+1},$$

onde $\beta_{n+1} = \lambda_{n+1}(\overline{B}_1(0))$.

c) Fazendo a mudança de variáveis $x = \sqrt{y}$ no integral referido em b), mostrar que, para cada inteiro $n \geq 0$,

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{(n+1)\beta_{n+1}} (\sqrt{\pi})^{n+1},$$

em particular,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Ex II.5.8 (Coordenadas polares em \mathbb{R}^2) a) Verificar que tem lugar um difeomorfismo de classe C^∞

$$\begin{aligned} \psi:]0, +\infty[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \\ \psi(t, \alpha) &= (t \cos(\alpha), t \sin(\alpha)) = t e^{i\alpha}, \end{aligned}$$

e que, para cada $(t, \alpha) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, o coeficiente de dilatação da aplicação linear derivada $D\psi_{(t,\alpha)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é

$$c_{D\psi_{(t,\alpha)}} = t.$$

Sugestão: As propriedades das funções trigonométricas implicam que é bijetiva a aplicação $]0, 2\pi[\rightarrow S_1 \setminus \{(1, 0)\}$, $\alpha \mapsto (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Deduzir daqui, tendo em conta o que é conhecido sobre as coordenadas polares generalizadas, que a aplicação ψ de classe C^∞ é bijetiva. Para mostrar que ψ^{-1} também é de classe C^∞ , poderá utilizar o teorema da função inversa.

b) Utilizar a conclusão de a) e a definição da medida esférica μ_{S_1} , nos borelianos de S_1 , em II.5.19, para mostrar que tem lugar um homeomorfismo

$$\varphi:]0, 2\pi[\rightarrow S_1 \setminus \{(1, 0)\}, \quad \varphi(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)),$$

e que este homeomorfismo é compatível com as medidas, quando se considera no domínio a restrição da medida de Lebesgue λ de \mathbb{R} e no espaço de chegada a restrição da medida esférica de S_1 .

Ex II.5.9 (Caracterizações geométrica e algébrica do ângulo de vetores de \mathbb{R}^2). Sejam $w, z \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ dois vetores linearmente independentes (no

¹⁰⁸Repare-se que a dificuldade do cálculo do integral nesta alínea reside na impossibilidade de determinar explicitamente uma primitiva da função e^{-x^2} .

sentido real, evidentemente). Chamamos *setor angular* definido por aqueles vetores ao conjunto fechado $T_{w,z} \subset \mathbb{R}^2$ das combinações lineares $sw + tz$, com $s \geq 0$ e $t \geq 0$ (reparar que a aplicação de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^2 , que a cada vetor associa as suas componentes na base w, z , é um isomorfismo, e portanto uma aplicação contínua). Definimos o *ângulo* daqueles vetores $\theta_{w,z} \in \mathbb{R}_+$ por

$$\theta_{w,z} = \mu_{S_1}(T_{w,z} \cap S_1). \quad 109$$

a) (Invariância pelos isomorfismos ortogonais) Verificar que, se $\xi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo ortogonal, então

$$T_{\xi(w),\xi(z)} = \xi(T_{w,z}), \quad \theta_{\xi(w),\xi(z)} = \theta_{w,z}.$$

b) (O ângulo só depende das semirretas) Mostrar que, se $a > 0$ e $b > 0$, então $T_{aw,bz} = T_{w,z}$, e portanto também $\theta_{aw,bz} = \theta_{w,z}$.

c) (O ângulo num caso particular) Suponhamos que $w = (1, 0)$ e que, para um certo $\theta \in]0, \pi[$, $z = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Mostrar que $\theta_{z,w} = \theta$.

Sugestão: Ter em conta a alínea b) do exercício II.5.8 e mostrar que $T_{w,z} \cap S_1$ é o conjunto dos vetores $(\cos(t), \sin(t))$, com $t \in [0, \theta]$, uma vez que

$$(\cos(t), \sin(t)) = \frac{\sin(\theta - t)}{\sin(\theta)} (1, 0) + \frac{\sin(t)}{\sin(\theta)} (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Alternativamente, sem passar pelo exercício referido, utilizar o teorema de Fubini para calcular diretamente a medida de Lebesgue da intersecção de $T_{w,z}$ com a bola de centro 0 e raio 1.

d) (O caso dos vetores de norma 1) Mostrar que, se $|w| = |z| = 1$, então $\theta_{z,w} \in]0, \pi[$ e $\cos(\theta_{z,w}) = \langle z, w \rangle$ (produto interno usual de \mathbb{R}^2).

Sugestão: Reduzir o resultado ao caso estudado em c), aplicando a) ao isomorfismo ortogonal $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $u \mapsto w^{-1} \times u$, seguido, se necessário, pelo isomorfismo ortogonal $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $u \mapsto \bar{u}$.

e) (O caso geral) utilizar a conclusão de b) para verificar que, se w, z , linearmente independentes, são arbitrários, então $\theta_{z,w} \in]0, \pi[$ e

$$\cos(\theta_{z,w}) = \frac{\langle z, w \rangle}{\|z\| \|w\|}. \quad 110$$

Ex II.5.10 (Propriedades de regularidade da medida de Lebesgue) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano. Mostrar que:

¹⁰⁹Trata-se da definição geométrica do ângulo, que se costuma apresentar em estudos elementares, quando se introduz o radiano como unidade de medida.

¹¹⁰Esta é a caracterização algébrica habitual do ângulo de dois vetores. O que fizemos neste exercício foi mostrar que as caracterizações geométrica e algébrica conduzem ao mesmo resultado, no caso dos vetores linearmente independentes.

- a) $\lambda_n(A)$ é o ínfimo dos $\lambda_n(U)$, com U aberto de \mathbb{R}^n com $A \subset U$;
 b) $\lambda_n(A)$ é o supremo dos $\lambda_n(K)$, com K compacto de \mathbb{R}^n e $K \subset A$.¹¹¹

Ex II.5.11 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano.

- a) Mostrar que existe uma família contável $(K_j)_{j \in J}$ de compactos $K_j \subset A$ tal que

$$\lambda_n(A \setminus \bigcup_{j \in J} K_j) = 0.$$

Sugestão: Para cada $p \in \mathbb{N}$, aplicar a alínea b) do exercício II.5.10 ao boreliano $A \cap [-p, p]^n$, de medida finita, para garantir a existência de compactos $K_{p,q}$, $q \in \mathbb{N}$, com $K_{p,q} \subset A \cap [-p, p]^n$ e

$$\lambda_n((A \cap [-p, p]^n) \setminus K_{p,q}) < \frac{1}{q}.$$

- b) Verificar que se pode deduzir facilmente de a) a existência de uma sucessão crescente de compactos $(\widehat{K}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\widehat{K}_m \subset A$ e

$$\lambda_n(A \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \widehat{K}_m) = 0.$$

Sugestão: Lembrar que uma união finita de compactos é um compacto.

Ex II.5.12 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 tal que, para cada $x \in U$, a derivada $Df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um isomorfismo. Mostrar que, para cada boreliano $A \subset U$, $f(A)$ é um boreliano de \mathbb{R}^n .

Sugestão: Utilizando o teorema da função inversa, mostrar que U é a união de uma família contável de abertos U_j , $j \in J$, tais que a restrição de f a cada U_j seja um difeomorfismo de classe C^1 de U_j sobre um aberto V_j de \mathbb{R}^n .

Ex II.5.13 Neste exercício usaremos a identificação natural de \mathbb{R}^3 com $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e, para a esfera $S_2 \subset \mathbb{R}^3$, utilizaremos uma linguagem geográfica:

O *polo Norte* e *polo Sul* são os pontos $P_N = (0, 0, 1)$ e $P_S = (0, 0, -1)$ de S^2 , o *equador* é o conjunto $S_1 \times \{0\} \subset S_2$ e, para cada $x = (x_1, x_2) \in S_1$, o *semimeridiano aberto* determinado por x é o conjunto dos elementos de S_2 da forma

$$\cos(\theta)(x, 0) + \sin(\theta)P_N = (\cos(\theta)x_1, \cos(\theta)x_2, \sin(\theta)),$$

com $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, dizendo-se então que θ é a *latitude* de um tal elemento.

- a) Verificar que os diferentes semimeridianos abertos são disjuntos dois a dois e de união $S_2 \setminus \{P_N, P_S\}$, o que nos permite considerar uma aplicação bijetiva

¹¹¹Estas propriedades serão reencontradas adiante, num contexto mais geral, em III.4.6. À primeira é costume dar o nome de *regularidade exterior* e à segunda o de *regularidade interior*.

$$\varphi: S_1 \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow S_2 \setminus \{P_N, P_S\}, \quad \varphi(x, \theta) = \cos(\theta)(x, 0) + \sin(\theta)P_N.$$

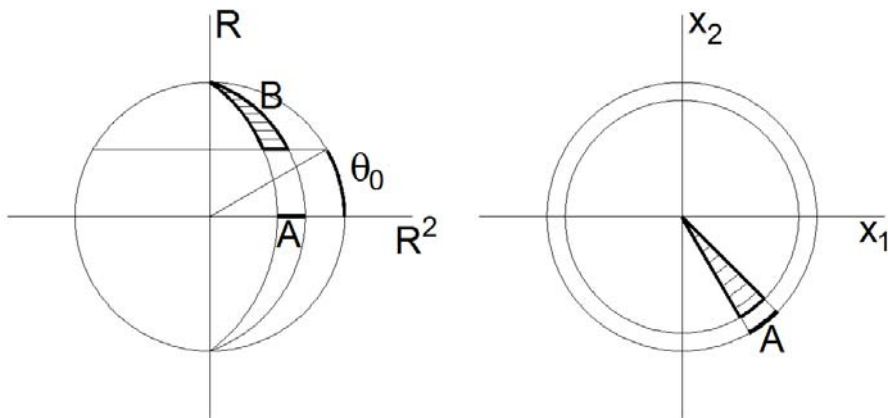
Diremos que $x \in S_1$ é a *longitude generalizada* de $\varphi(x, \theta)$ e, como já referimos, θ é a sua *latitude*. Mostrar que a aplicação φ é um homeomorfismo, em particular φ e φ^{-1} são aplicações mensuráveis.

b) Sejam $A \subset S_1$ um boreliano e $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ fixados e consideremos as correspondentes *calotes* aberta e fechada $B_{A, \theta_0}, \overline{B}_{A, \theta_0} \subset S_2$, constituídas pelos pontos de $S_2 \setminus \{P_N, P_S\}$ cuja latitude é, respetivamente maior e maior ou igual a θ_0 e a longitude generalizada pertence a A , definidas portanto por

$$B_{A, \theta_0} = \{\cos(\theta)(x, 0) + \sin(\theta)P_N\}_{\theta_0 < \theta < \pi/2, x \in A}$$

$$\overline{B}_{A, \theta_0} = \{\cos(\theta)(x, 0) + \sin(\theta)P_N\}_{\theta_0 \leq \theta < \pi/2, x \in A}$$

(cf. a figura a seguir, em que $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ e A é um arco de amplitude $\frac{\pi}{12}$).



Mostrar que se tem

$$\mu_{S_2}(B_{A, \theta_0}) = \mu_{S_2}(\overline{B}_{A, \theta_0}) = \mu_{S_1}(A) (1 - \sin(\theta_0)).$$

Sugestão: Começar por examinar o caso em que $\theta_0 \geq 0$. Nesse caso, e notando simplesmente B o conjunto cuja medida esférica se pretende calcular, reparar que, por definição, $\mu_{S_2}(B) = 3\mu_3(\widehat{B})$, onde \widehat{B} é um certo subconjunto da bola unitária de centro 0 de \mathbb{R}^3 e calcular a medida de \widehat{B} notando que, pelo teorema de Fubini, ela é igual ao integral num subconjunto de \mathbb{R}^2 (ver o lado direito da figura referida) de uma certa função, e calculando o integral através da utilização de coordenadas polares generalizadas. Reparar enfim que o caso em que $\theta_0 < 0$ se pode reduzir ao já estudado, tendo em conta o facto (cuja justificação simples encontrará) de um subconjunto de S_2 e a sua imagem pela simetria relativa ao plano do equador terem a mesma medida esférica.

c) Consideremos agora outro homeomorfismo, intimamente relacionado com o homeomorfismo φ referido em a),

$$\begin{aligned} \psi: S_1 \times]-1, 1[&\rightarrow S_2 \setminus \{P_N, P_S\}, \\ \psi(x, t) &= \varphi(x, \arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}(x, 0) + tP_N. \end{aligned}$$

Mostrar que ψ é compatível com as medidas, quando se considera no domínio a medida produto $\mu_{S_1} \otimes \mu_1$ e no espaço de chegada a medida esférica μ_{S_2} . Interpretar geometricamente este homeomorfismo, em termos de projecção da esfera sobre um cilindro, e descobrir qual a relevância dele para a possibilidade de construir um mapa plano da esfera (com os polos retirados) que não altere as áreas (embora, naturalmente, altere os comprimentos)

Sugestão: Começar por mostrar, com o auxílio do que se concluiu em b), que, para cada boreliano $A \subset S_1$ e cada $a < b$ em $]-1, 1[$, tem-se

$$\mu_{S_2}(\psi(A \times]a, b])) = \mu_{S_1}(A) \times (b - a)$$

e mostrar por que razão a conclusão pretendida decorre deste facto. Ter também em conta a alínea b) do exercício II.5.8.

§6. Integrais paramétricos.

II.6.1 (**Continuidade do integral paramétrico**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, Y um espaço métrico, E um espaço de Banach, $f: X \times Y \rightarrow E$ uma aplicação e $y_0 \in Y$ tais que:

1) Para cada $x \in X$, a aplicação $f_{x,\cdot}: Y \rightarrow E$, $f_{x,\cdot}(y) = f(x, y)$, é contínua no ponto y_0 .

2) Para cada $y \in Y$, a aplicação $f_{\cdot,y}: X \rightarrow E$, $f_{\cdot,y}(x) = f(x, y)$ é topologicamente mensurável.

3) Existe uma função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com $\int_X \varphi d\mu < +\infty$, tal que, para cada $(x, y) \in X \times Y$, $\|f(x, y)\| \leq \varphi(x)$.

Tem-se então que, para cada $y \in Y$, a aplicação $f_{\cdot,y}: X \rightarrow E$ é mesmo integrável e a aplicação $h: Y \rightarrow E$, definida por

$$h(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

(o *integral paramétrico*) é contínua no ponto y_0 .

Dem: O facto de, para cada $y \in Y$, a aplicação topologicamente mensurável $f_{\cdot,y}: X \rightarrow E$ ser integrável resulta de que se tem

$$\int_X \|f(x, y)\| d\mu(x) \leq \int_X \varphi(x) d\mu(x) < +\infty.$$

Tendo em conta o facto de Y ser um espaço métrico, e não meramente um espaço topológico, vemos que, para mostrar que a aplicação $h: Y \rightarrow E$ é contínua em y_0 , basta mostrarmos que, qualquer que seja a sucessão $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Y com $y_n \rightarrow y_0$, tem-se $h(y_n) \rightarrow h(y_0)$. Ora, isso é uma consequência direta do teorema da convergência dominada em II.2.39, uma vez que, pela hipótese 1) no enunciado, tem-se $f(x, y_n) \rightarrow f(x, y_0)$, para cada $x \in X$. \square

II.6.2 (Derivabilidade do integral paramétrico) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo de interior não vazio, E um espaço de Banach e $f: X \times J \rightarrow E$ uma aplicação tal que:

1) Para cada $x \in X$, a aplicação $f_{x,\cdot}: J \rightarrow E$, $f_{x,\cdot}(t) = f(x, t)$, é derivável em todos os $t \in J$, com derivada que notamos

$$f'_{x,\cdot}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \in E.$$

2) Para cada $t \in J$, a aplicação $f_{\cdot,t}: X \rightarrow E$, $f_{\cdot,t}(x) = f(x, t)$ é integrável.

3) Existe uma função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com $\int_X \varphi d\mu < +\infty$, tal que, para cada $(x, t) \in X \times J$,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right\| \leq \varphi(x).$$

Definindo então uma aplicação $h: J \rightarrow E$,

$$h(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x),$$

tem-se que h é derivável em cada $t \in J$ e

$$h'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x),$$

onde, em particular, estamos a afirmar que é integrável a aplicação no integral precedente.

Dem: Seja $t_0 \in J$ arbitrário. Escolhamos uma sucessão arbitrária de elementos $t_n \in J \setminus \{t_0\}$ com $t_n \rightarrow t_0$. Para cada $x \in X$, tem-se então

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}.$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta da hipótese 3) do enunciado, pelo teorema da média em II.3.7, aplicado ao intervalo fechado de extremidades t_0 e t_n , que

$$\|f(x, t_n) - f(x, t_0)\| \leq \varphi(x) |t_n - t_0|,$$

donde

$$\left\| \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \right\| \leq \varphi(x),$$

pelo que, pelo teorema da convergência dominada em II.2.39, concluímos que é integrável a aplicação $X \rightarrow E, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ e que

$$\begin{aligned} \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x) &= \lim \int_X \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\mu(x) = \\ &= \lim \frac{h(t_n) - h(t_0)}{t_n - t_0}. \end{aligned}$$

Tendo em conta a arbitrariedade da sucessão t_n , vemos que existe

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x),$$

que é precisamente o resultado pretendido. \square

II.6.3 (Corolário) Suponhamos que no resultado precedente a hipótese 1) é substituída pela hipótese mais forte:

1') Para cada $x \in X$, a aplicação $f_{x,\cdot}: J \rightarrow E, f_{x,\cdot}(t) = f(x, t)$, é derivável em todos os pontos $t \in J$ e com $f_{x,\cdot}: J \rightarrow E$ contínua.

Tem-se então que a correspondente aplicação $h: J \rightarrow E$,

$$h(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x),$$

é derivável em todos os pontos de J e com a derivada $h': J \rightarrow E$ contínua.

Dem: Pelo resultado precedente, h é derivável em cada $t \in J$ e com

$$h'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

e a continuidade da aplicação $h': J \rightarrow E$ é então uma consequência direta de II.6.1. \square

Nos dois resultados precedentes examinámos o comportamento de um integral paramétrico quanto à derivabilidade relativamente a um parâmetro real. Nas aplicações é frequentemente útil dispor de um resultado análogo em que a derivabilidade se faz relativamente a um parâmetro complexo, no sentido que se encontra no estudo das funções de variável complexa. Tal como fizemos em II.3.6, para a derivabilidade no sentido real, começamos por examinar rapidamente que se podem generalizar os resultados básicos sobre a derivabilidade de aplicações complexas de variável complexa de modo a permitir que as aplicações tomem valores num espaço de Banach complexo, e não necessariamente em \mathbb{C} .

II.6.4 Sejam E um espaço de Banach complexo, $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $z_0 \in U$ e $f: U \rightarrow E$ uma aplicação. Diz-se que f é derivável em z_0 , no sentido complexo, se existir o limite

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in E$$

e a esse limite, que se nota $f'(z_0)$, dá-se o nome de *derivada* de f em z_0 .

a) Tal como no caso das funções complexas, se $f: U \rightarrow E$ é uma aplicação constante de valor w , então para cada $z_0 \in U$, a aplicação f é derivável em z_0 e com $f'(z_0) = 0$.

b) Se f é derivável em z_0 , então f é contínua em z_0 .

Dem: Sendo $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão qualquer de elementos de $U \setminus \{z_0\}$ com $z_n \rightarrow z_0$, tem-se

$$f(z_n) - f(z_0) = (z_n - z_0) \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \rightarrow 0 \cdot f'(z_0) = 0. \quad \square$$

c) Se $f, g: U \rightarrow E$ são deriváveis em z_0 e $a \in \mathbb{C}$, então as aplicações $f + g: U \rightarrow E$ e $af: U \rightarrow E$ são deriváveis em z_0 e

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \quad (af)'(z_0) = af'(z_0).$$

Dem: Sendo $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão qualquer de elementos de $U \setminus \{z_0\}$ com $z_n \rightarrow z_0$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(z_n) - (f + g)(z_0)}{z_n - z_0} &= \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} + \frac{g(z_n) - g(z_0)}{z_n - z_0} \rightarrow f'(z_0) + g'(z_0), \\ \frac{(af)(z_n) - (af)(z_0)}{z_n - z_0} &= a \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \rightarrow af'(z_0). \end{aligned} \quad \square$$

d) Se $f: U \rightarrow E$ é derivável em z_0 , F é outro espaço de Banach complexo e $\alpha: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear contínua, então $\alpha \circ f: U \rightarrow F$ é derivável em z_0 e

$$(\alpha \circ f)'(z_0) = \alpha(f'(z_0)).$$

Dem: Sendo $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão qualquer de elementos de $U \setminus \{z_0\}$ com $z_n \rightarrow z_0$, tem-se

$$\frac{(\alpha \circ f)(z_n) - (\alpha \circ f)(z_0)}{z_n - z_0} = \alpha \left(\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \right) \rightarrow \alpha(f'(z_0)). \quad \square$$

e) (Lema de redução à variável real) Sejam $f: U \rightarrow E$ uma aplicação, $z, w \in \mathbb{C}$ e $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo de interior não vazio tais que, para cada $t \in J$, $z + tw \in U$. Se $t_0 \in J$ é tal que f seja derivável, no sentido complexo, em $z + t_0w$, então é derivável, no sentido real, em t_0 a aplicação $\varphi: J \rightarrow E$,

$$\varphi(t) = f(z + tw),$$

e com

$$\varphi'(t_0) = w \times f'(z + t_0w).$$

Dem: O caso em que $w = 0$ é trivial, uma vez que φ fica constante. Suponhamos então $w \neq 0$. Seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão arbitrária de pontos de $J \setminus \{t_0\}$ com $t_n \rightarrow t_0$. Tem-se então que os $z + t_nw$ constituem uma sucessão de pontos de U diferentes de $z + t_0w$ e convergente para este elemento pelo que

$$\frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0} = w \times \frac{f(z + t_nw) - f(z + t_0w)}{(z + t_nw) - (z + t_0w)} \rightarrow w \times f'(z + t_0w),$$

o que mostra que $\varphi'(t_0) = w \times f'(z + t_0w)$. \square

f) (Teorema da média no contexto complexo) Sejam $M \geq 0$, $f: U \rightarrow E$ uma aplicação e $z_0, w_0 \in U$ tais que, para $t \in [0, 1]$, $z_0 + t(w_0 - z_0) \in U$, f seja derivável, no sentido complexo, neste ponto e

$$\|f'(z_0 + t(w_0 - z_0))\| \leq M. \quad 112$$

Tem-se então

$$\|f(w_0) - f(z_0)\| \leq M |w_0 - z_0|.$$

Dem: Tendo em conta o lema na alínea e), podemos considerar uma aplicação $\varphi: [0, 1] \rightarrow E$,

$$\varphi(t) = f(z_0 + t(w_0 - z_0)),$$

a qual é derivável, no sentido real, em cada $t \in [0, 1]$ e com

$$\|\varphi'(t)\| = \|(w_0 - z_0)f'(z_0 + t(w_0 - z_0))\| \leq M |w_0 - z_0|,$$

donde, pelo teorema da média em II.3.7,

$$\begin{aligned} \|f(w_0) - f(z_0)\| &= \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \\ &\leq M |w_0 - z_0|(1 - 0) = M |w_0 - z_0|. \end{aligned} \quad \square$$

II.6.5 (Derivabilidade, no sentido complexo, do integral paramétrico) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, E um espaço de Banach complexo¹¹³ e $f: X \times U \rightarrow E$ uma aplicação tal que:

1) Para cada $x \in X$, a aplicação $f_{x, \cdot}: U \rightarrow E$, $f_{x, \cdot}(z) = f(x, z)$, é derivável, no sentido complexo, em todos os $z \in U$, com derivada que notamos

¹¹²Temos assim uma condição sobre a derivabilidade e o valor da derivada nos pontos do segmento que une z_0 a w_0 .

¹¹³Por exemplo, $E = \mathbb{C} \dots$

$$f'_{x,\cdot}(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) \in E.$$

2) Para cada $z \in U$, a aplicação $f_{\cdot,z}: X \rightarrow E$, $f_{\cdot,z}(x) = f(x, z)$ é integrável.

3) Existe uma função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com $\int_X \varphi d\mu < +\infty$, tal que, para cada $(x, z) \in X \times U$,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) \right\| \leq \varphi(x).$$

Definindo então uma aplicação $h: U \rightarrow E$,

$$h(z) = \int_X f(x, z) d\mu(x),$$

tem-se que h é derivável, no sentido complexo, em cada $z \in U$ e

$$h'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(x, z) d\mu(x),$$

onde, em particular, estamos a afirmar que é integrável a aplicação no integral precedente.

Dem: Seja $z_0 \in U$ arbitrário. Para estudar a derivabilidade de h em z_0 , basta estudar a derivabilidade da sua restrição a uma bola aberta $B_r(z_0)$ que esteja contida em U . Escolhamos uma sucessão arbitrária de elementos $z_n \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ com $z_n \rightarrow z_0$. Para cada $x \in X$, tem-se então

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0) = \lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{f(x, z_n) - f(x, z_0)}{z_n - z_0}.$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta da hipótese 3) do enunciado, pelo teorema da média na alínea f) de II.6.4, que

$$\|f(x, z_n) - f(x, z_0)\| \leq \varphi(x) |z_n - z_0|,$$

donde

$$\left\| \frac{f(x, z_n) - f(x, z_0)}{z_n - z_0} \right\| \leq \varphi(x),$$

pelo que, pelo teorema da convergência dominada em II.2.39, concluímos que é integrável a aplicação $X \rightarrow E$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0)$ e que

$$\begin{aligned} \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0) d\mu(x) &= \lim \int_X \frac{f(x, z_n) - f(x, z_0)}{z_n - z_0} d\mu(x) = \\ &= \lim \frac{h(z_n) - h(z_0)}{z_n - z_0}. \end{aligned}$$

Tendo em conta a arbitrariedade da sucessão z_n , vemos que existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0) d\mu(x),$$

que é precisamente o resultado pretendido. □

Há ainda outra situação, só aparentemente mais geral do que a estudada em II.6.2, em que há lugar a considerar integrais paramétricos. É aquela em que o espaço de parâmetros é um aberto de \mathbb{R}^m e procuramos as derivadas parciais do integral paramétrico, em relação a cada uma das m variáveis. A razão por que a situação só aparentemente é mais geral reside no facto de uma derivada parcial ser, por definição, a derivada de uma função de uma variável real, que se obtém fixando os valores das restantes $m - 1$ variáveis a qual, como a derivabilidade é uma questão local, pode, por restrição, ser sempre considerada definida num intervalo aberto.

II.6.6 (Derivadas parciais do integral paramétrico) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto, E um espaço de Banach e $f: X \times U \rightarrow E$ uma aplicação tal que:

1) Para cada $x \in X$, a aplicação $f_{x,\cdot}: U \rightarrow E$, $f_{x,\cdot}(z) = f(x, z)$, admite derivadas parciais relativamente a cada uma das m variáveis, em todos os $z \in U$, derivadas que, para $1 \leq i \leq m$, notamos

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z) \in E.$$

2) Para cada $z \in U$, a aplicação $f_{\cdot,z}: X \rightarrow E$, $f_{\cdot,z}(x) = f(x, z)$ é integrável.

3) Para cada $1 \leq i \leq m$, existe uma função mensurável $\varphi_i: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, com $\int_X \varphi_i d\mu < +\infty$, tal que, para cada $(x, z) \in X \times U$,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z) \right\| \leq \varphi_i(x).$$

Definindo então uma aplicação $h: U \rightarrow E$,

$$h(z) = \int_X f(x, z) d\mu(x),$$

tem-se que h admite derivadas parciais relativamente a cada uma das m variáveis, em cada $z \in U$ e

$$\frac{\partial h}{\partial z_i}(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z) d\mu(x),$$

onde, em particular, estamos a afirmar que é integrável a aplicação no integral precedente.¹¹⁴

¹¹⁴Como a demonstração adiante mostra, bastaria pedir a existência de derivada parcial relativamente a uma das variáveis i , com a hipótese em 3) também exigida apenas para

Além disso, se, para cada $1 \leq i \leq m$ e cada $x \in X$, a aplicação $U \rightarrow E$, $z \mapsto \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z)$ for contínua, então também cada aplicação $\frac{\partial h}{\partial z_i}: U \rightarrow E$ é contínua.¹¹⁵

Dem: Dado $z_0 \in U$ arbitrário, para mostrar que existe a derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial z_i}(z_0)$ e é igual a $\int_X \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z_0) d\mu(x)$, basta ter em conta II.6.2, para a aplicação

$$(x, z_i) \mapsto f(x, (z_{01}, \dots, z_i, \dots, z_{0m}))$$

que, por restrição, se pode considerar definida no produto cartesiano de X por um intervalo aberto de \mathbb{R} contendo z_{0i} . No caso em que, para cada $1 \leq i \leq m$ e cada $x \in X$, a aplicação $U \rightarrow E$, $z \mapsto \frac{\partial f}{\partial z_i}(x, z)$ é contínua, o facto de as aplicações $\frac{\partial h}{\partial z_i}: U \rightarrow E$ serem contínuas é uma consequência direta de II.6.1. \square

Exercícios

Ex II.6.1 (**A exponencial complexa**) Lembrar que, para cada $z \in \mathbb{C}$, a *exponencial* $\exp(z) \in \mathbb{C}$ pode ser definida como a soma da série

$$\exp(z) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} z^p$$

(onde se faz a convenção $0^0 = 1$), série essa que é também a soma de uma família absolutamente somável de números complexos (cf. o exercício II.4.8).

a) Mostrar que se tem

$$\exp(0) = 1, \quad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)},$$

e, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = e^x, \quad \exp(ix) = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x),$$

b) Utilizar a fórmula do binómio de Newton e a conclusão da alínea g) do exercício II.4.8 para mostrar que

$$\exp(z + w) = \exp(z) \times \exp(w),$$

e deduzir, em particular, que $\exp(z) \times \exp(-z) = 1$, e portanto $\exp(z) \neq 0$.

essa variável, para concluir que a aplicação h tem derivada parcial relativamente a essa variável, caracterizada pelo integral acima.

¹¹⁵Por outras palavras, se, para cada $x \in X$, $f_{x, \cdot}: U \rightarrow E$ é de classe C^1 , então h é de classe C^1 .

c) Deduzir do teorema da derivação do integral paramétrico em II.6.5 que a aplicação $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável, no sentido complexo, em cada $z \in \mathbb{C}$ e com $\exp'(z) = \exp(z)$. **Sugestão:** Reparar que basta mostrar a derivabilidade da restrição de \exp a cada bola de \mathbb{C} de centro 0 e raio $R > 0$.

Ex II.6.2 (**Ainda a função gama**) Lembrar que, como se examinou no exercício II.3.11, a função gama $\Gamma:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ está definida por

$$\Gamma(x) = \int_{]0, +\infty[} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

a) Mostrar que $\Gamma:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua.

Sugestão: Basta mostrar que a restrição de Γ a cada intervalo $]\delta, R[$, com $0 < \delta < R < +\infty$, é contínua.

b) Mostrar que Γ é derivável em cada $x \in]0, +\infty[$, e com $\Gamma':]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ contínua e que

$$\Gamma'(x) = \int_{]0, +\infty[} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Sugestão: A mesma que para a alínea precedente, sendo além disso de ter em conta que, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) t^\varepsilon = 0.$$

c) Mostrar que, sendo $\Omega \subset \mathbb{C}$ o aberto constituído pelos $z \in \mathbb{C}$ com $\Re(z) > 0$, a função $\Gamma:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ é a restrição de uma função $\bar{\Gamma}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, definida também por

$$\Gamma(z) = \int_{]0, +\infty[} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

onde, por definição, para cada $t > 0$ em \mathbb{R} , $t^z = \exp(\ln(t)z)$. Verificar que esta função é contínua, derivável em cada ponto $z \in \Omega$ e com derivada contínua e que se tem

$$\Gamma'(z) = \int_{]0, +\infty[} \ln(t) t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Verificar ainda que, tal como na alínea b) do exercício II.3.11, tem-se, para cada $z \in \Omega$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Ex II.6.3 Na teoria do integral pelos métodos de Riemann, costumam-se demonstrar os dois resultados seguintes:

1) Sejam E um espaço de Banach, I e K dois intervalos fechados e limitados e $f: I \times K \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Tem então lugar uma aplicação contínua $h: K \rightarrow E$, definida por $h(y) = \int_I f(x, y) dx$.

2) Sejam E um espaço de Banach, I e K dois intervalos fechados e

limitados, o segundo dos quais de interior não vazio, e $f: I \times K \rightarrow E$ uma aplicação, admitindo em cada (x, y) uma derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, e para a qual a aplicação $\frac{\partial f}{\partial y}: I \times K \rightarrow E$ seja contínua. Tem-se então que a aplicação $h: K \rightarrow E$, definida por $h(y) = \int_I f(x, y) dx$, é derivável em cada ponto e com

$$h'(y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Verificar que estes dois resultados podem ser demonstrados a partir dos teoremas sobre o integral paramétrico em II.6.1 e II.6.2.

Ex II.6.4 Seja $h: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ a função definida por

$$h(x) = \int_{[0, +\infty[} x e^{-xt} dt.$$

Verificar que $h(0) = 0$ e $h(x) = 1$, para cada $x \neq 0$. Por que razão não se aplica aqui o teorema de continuidade do integral paramétrico II.6.1?

Ex II.6.5 (**Transformada de Fourier**) Sejam E um espaço de Banach complexo e $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ uma aplicação integrável.

a) Mostrar que se pode definir uma nova aplicação $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow E$, chamada *transformada de Fourier* de f , por

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi ixy) f(x) dx$$

e que esta aplicação é contínua e limitada.

b) (**Linearidade**) Sejam $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow E$ duas aplicações integráveis, com transformadas de Fourier $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2: \mathbb{R} \rightarrow E$, e $a \in \mathbb{C}$. Mostrar que as transformadas de Fourier de $f_1 + f_2$ e de $a f_1$ são respetivamente $\widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ e $a \widehat{f}_1$.

c) (**Homogeneidade e simetria**) Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ uma aplicação integrável, com transformada de Fourier $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow E$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sendo $f_a: \mathbb{R} \rightarrow E$ a aplicação definida por $f_a(x) = f(ax)$, mostrar que f_a é integrável e que a transformada de Fourier $\widehat{f}_a: \mathbb{R} \rightarrow E$ de f_a está definida por

$$\widehat{f}_a(y) = \left| \frac{1}{a} \right| \widehat{f}\left(\frac{1}{a}y\right).$$

Em particular, a aplicação integrável $g: \mathbb{R} \rightarrow E$ definida por $g(x) = f(-x)$ tem transformada de Fourier \widehat{g} definida por $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(-y)$.

Ex II.6.6 (**Exemplos de transformadas de Fourier**) a) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Mostrar que f é integrável e que a sua transformada de Fourier $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{1 + 2\pi iy}$$

b) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ a função definida por

$$g(x) = e^{-|x|}.$$

Reparar que se tem quase sempre $g(x) = f(x) + f(-x)$ e deduzir que g é integrável e que a sua transformada de Fourier $\widehat{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$\widehat{g}(y) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 y^2}.$$

Ex II.6.7 (**Exemplos de transformadas de Fourier**) a) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ a função indicatriz do intervalo $[0, 1]$. Mostrar que f é integrável e que a sua transformada de Fourier $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$\widehat{f}(y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2\pi y)}{2\pi y} + \frac{\cos(2\pi y) - 1}{2\pi y} i, & \text{se } y \neq 0 \\ 1, & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

b) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ a função indicatriz do intervalo $[-1, 1]$. Reparar que se tem quase sempre $g(x) = f(x) + f(-x)$ e deduzir que g é integrável e que a sua transformada de Fourier $\widehat{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$\widehat{g}(y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2\pi y)}{\pi y}, & \text{se } y \neq 0 \\ 2, & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

Ex II.6.8 (**Derivação da transformada de Fourier**) Sejam E um espaço de Banach e $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ uma função integrável tal que a função $g: \mathbb{R} \rightarrow E$, $g(x) = xf(x)$, também seja integrável. Mostrar que a transformada de Fourier $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow E$ é derivável em cada $y \in \mathbb{R}$ e com

$$\widehat{f}'(y) = -2\pi i \widehat{g}(y),$$

onde $\widehat{g}: \mathbb{R} \rightarrow E$ é a transformada de Fourier de g .

Ex II.6.9 (**Transformada de Fourier numa derivada**) Sejam E um espaço de Banach e $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ uma aplicação integrável, derivável em todos os pontos, e tal que $f': \mathbb{R} \rightarrow E$ seja contínua e integrável e que $\lim_{x \rightarrow \infty} \|f(x)\| = 0$.¹¹⁶

¹¹⁶Em rigor esta condição só é colocada aqui para simplificar o exercício, uma vez que se pode verificar ser implicada pelas restantes: O facto de $\|f'(x)\|$ ter integral finito em \mathbb{R} implica que, para a e b “próximos” de $+\infty$, $\|f(b) - f(a)\|$ é “pequeno”, o que implica uma condição do tipo Cauchy, que arrasta a existência de limite para $f(x)$, quando

Sendo \widehat{f} e \widehat{g} as transformadas de Fourier de f e de f' , respetivamente, mostrar que

$$\widehat{g}(y) = 2\pi iy \widehat{f}(y).$$

Sugestão: Reparar que o integral em \mathbb{R} é o limite dos integrais em $[-n, n]$ e, para o cálculo destes, utilizar uma integração por partes.

Ex II.6.10 (**Transformada de Fourier aplicada duas vezes**) Sejam E um espaço de Banach e $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ uma aplicação contínua, limitada e integrável, cuja transformada de Fourier $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow E$ seja também integrável. Sendo $\widehat{\widehat{f}}: \mathbb{R} \rightarrow E$ a transformada de Fourier de $\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow E$, tem-se então, para cada $z \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\widehat{f}}(z) = f(-z).$$

Apresentamos em seguida uma demonstração deste resultado na forma de uma sequência de igualdades, pedindo-se que seja justificada cada uma das igualdades assinaladas (convém ter presente o exemplo na alínea b) do exercício II.6.6).

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{f}}(z) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi izy) \widehat{f}(y) dy = \\ &\stackrel{\text{A}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|/n} \exp(-2\pi izy) \widehat{f}(y) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|/n} \exp(-2\pi izy) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi ixy) f(x) dx \right) dy = \\ &\stackrel{\text{B}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i(x+z)y) e^{-|y|/n} dy \right) f(x) dx = \\ &\stackrel{\text{C}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} n \exp(-2\pi i(x+z)nw) e^{-|w|} dw \right) f(x) dx = \\ &\stackrel{\text{D}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{2n}{1 + 4\pi^2 n^2 (x+z)^2} f(x) dx = \\ &\stackrel{\text{E}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1 + 4\pi^2 y^2} f\left(\frac{y}{n} - z\right) dy = \\ &\stackrel{\text{F}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1 + 4\pi^2 y^2} f(-z) dy = f(-z). \end{aligned}$$

$x \rightarrow +\infty$, e esse limite tem que ser 0, sem o que f não seria integrável; O exame do limite quando $x \rightarrow -\infty$ é análogo.

CAPÍTULO III

Espaços funcionais e aplicações

§1. Aplicações convexas e desigualdades.

III.1.1 (**Conjuntos convexos**) Seja E é um espaço vetorial. Se $w, z \in E$, o segmento afim de w para z é o conjunto $[[w, z]]$ dos vetores da forma $sw + tz$, com $s, t \in \mathbb{R}_+$ e $s + t = 1$, ou, por outras palavras, o conjunto dos vetores da forma $(1 - t)w + tz = w + t(z - w)$, com $t \in [0, 1]$, conjunto que contém w e z e que, se $w \neq z$, fica em correspondência biunívoca com $[0, 1]$ por

$$t \mapsto (1 - t)w + tz = w + t(z - w).$$

Um conjunto $C \subset E$ diz-se *convexo* se, quaisquer que sejam $w, z \in C$, tem-se $[[w, z]] \subset C$.

Repare-se que $[[w, w]] = \{w\}$ e $[[w, z]] = [[z, w]]$.

Repare-se que, se $y \in E$, tem-se trivialmente

$$y + [[w, z]] = [[y + w, y + z]]$$

e, consequentemente, se $C \subset E$ é um conjunto convexo, também $y + C$ é um conjunto convexo.

III.1.2 No caso particular do espaço vetorial \mathbb{R} , tem-se $[[a, b]] = [a, b]$ ou $[[a, b]] = [b, a]$, conforme $a \leq b$ ou $b \leq a$, e, consequentemente, um subconjunto de \mathbb{R} é convexo se, e só se, é um intervalo.

III.1.3 Sejam E um espaço vetorial normado, $y_0 \in E$ e $r > 0$. Tem-se então que as bolas aberta e fechada $B_r(y_0)$ e $\overline{B}_r(y_0)$ são conjuntos convexos.

Dem: Uma vez que se tem $B_r(y_0) = y_0 + B_r(0)$ e $\overline{B}_r(y_0) = y_0 + \overline{B}_r(0)$, basta examinarmos o caso em que $y_0 = 0$. Ora, se $w, z \in \overline{B}_r(0)$ e se $s, t \geq 0$ com $s + t = 1$, vemos que

$$\|sw + tz\| \leq \|sw\| + \|tz\| = s\|w\| + t\|z\| \leq sr + tr = r,$$

o que mostra que $sw + tz \in \overline{B}_r(0)$. O caso da bola aberta é análogo, ou reduz-se ao da bola fechada se repararmos que, se $w, z \in B_r(0)$, então existe $0 < r' < r$ tal que $w, z \in \overline{B}_{r'}(0)$ e tem-se $\overline{B}_{r'}(0) \subset B_r(0)$. \square

III.1.4 Sejam E um espaço vetorial, $C \subset E$ um conjunto convexo, w_1, \dots, w_n elementos de C e $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ com $t_1 + \dots + t_n = 1$. Tem-se então

$$t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n \in C.$$

Dem: Fazemos a demonstração por indução em n . O caso $n = 1$ é trivial. Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo n e sejam w_1, \dots, w_{n+1} em C e t_1, \dots, t_{n+1} em \mathbb{R}_+ com $t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$. Se $t_{n+1} = 1$, e consequentemente $t_1 = \cdots = t_n = 0$, tem-se

$$t_1 w_1 + \cdots + t_{n+1} w_{n+1} = w_{n+1} \in C.$$

Caso contrário, tem-se $t_1 + \cdots + t_n \neq 0$ e podemos aplicar a hipótese de indução aos elementos $w_1, \dots, w_n \in C$ e aos elementos de \mathbb{R}_+

$$\frac{t_j}{t_1 + \cdots + t_n},$$

$1 \leq j \leq n$, cuja soma é 1, para deduzir que, notando

$$w = \frac{t_1}{t_1 + \cdots + t_n} w_1 + \cdots + \frac{t_n}{t_1 + \cdots + t_n} w_n,$$

tem-se $w \in C$ e, aplicando a definição aos elementos w e w_{n+1} de C e aos elementos $t_1 + \cdots + t_n$ e t_{n+1} de \mathbb{R}_+ , com soma 1, concluímos finalmente que

$$t_1 w_1 + \cdots + t_{n+1} w_{n+1} = (t_1 + \cdots + t_n)w + t_{n+1} w_{n+1} \in C. \quad \square$$

III.1.5 (Integral e conjuntos convexos) Sejam E um espaço de Banach e $C \subset E$ um conjunto convexo fechado. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $0 < \mu(X) < +\infty$ e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável tal que $f(X) \subset C$. Tem-se então

$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu(x) \in C.$$

Dem: Vamos demonstrar o resultado em situações sucessivamente mais gerais.

1) Suponhamos que $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação em escada. Podemos então considerar uma família finita $(X_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{M} , disjuntos dois a dois e de união X tal que em cada X_j a aplicação f tenha o valor constante $w_j \in C$. Uma vez que $\sum_{j \in J} \mu(X_j) = \mu(X)$, e portanto

$$\sum_{j \in J} \frac{\mu(X_j)}{\mu(X)} = 1,$$

deduzimos de II.1.4 que

$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu(x) = \frac{1}{\mu(X)} \sum_{j \in J} \mu(X_j) w_j = \sum_{j \in J} \frac{\mu(X_j)}{\mu(X)} w_j \in C.$$

2) Vamos admitir que f pode ser uma aplicação integrável, mas fazemos a hipótese de se ter $0 \in C$. Nesse caso, podemos deduzir de II.2.29 a existência de uma sucessão dominada de aplicações em escada $f_n: X \rightarrow C \subset E$ com $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in X$. O que vimos em 1) garante que, para cada n , $\frac{1}{\mu(X)} \int_X f_n d\mu \in C$ e portanto

$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(X)} \int_X f_n(x) d\mu(x) \in C.$$

3) Passamos enfim ao caso em que f é integrável mas não se tem necessariamente $0 \in C$. Para isso, escolhemos $y_0 \in C$ e consideramos a aplicação integrável $\hat{f}: X \rightarrow E$ definida por $\hat{f}(x) = f(x) - y_0$ (reparar que a constante y_0 é integrável por ser $\mu(X) < +\infty$), que toma valores no convexo fechado $-y_0 + C$, que contém 0. O caso particular estudado em 2) garante então que

$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X \hat{f}(x) d\mu(x) \in -y_0 + C,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu(x) &= \frac{1}{\mu(X)} \int_X \hat{f}(x) d\mu(x) + \frac{1}{\mu(X)} \int_X y_0 d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{\mu(X)} \int_X \hat{f}(x) d\mu(x) + y_0 \in C. \quad \square \end{aligned}$$

III.1.6 Sejam E um espaço vetorial, $C \subset E$ um conjunto convexo e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. Diz-se que f é uma *aplicação convexa* se, quaisquer que sejam $w, z \in C$ e $s, t \geq 0$, com $s + t = 1$, tem-se

$$f(sw + tz) \leq sf(w) + tf(z).^{117}$$

É claro que esta desigualdade é trivial (reduzindo-se a uma igualdade), no caso em que $w = z$ e naquele em que $s = 0$ ou $t = 0$.

III.1.7 Sejam E um espaço vetorial e $C \subset E$ um conjunto convexo. Uma aplicação $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e só se, o seu *epigráfico*

$$Epi_f = \{(w, a) \in C \times \mathbb{R} \mid a \geq f(w)\}$$

é um conjunto convexo.

¹¹⁷O que é trivialmente equivalente a exigir que, dados $w, z \in C$ e $t \in [0, 1]$, tem-se $f((1-t)z + tw) \leq (1-t)f(z) + tf(w)$. Repare-se que, no caso em que $E = \mathbb{R}$, e portanto C é um intervalo, esta noção corresponde a exigir que f tem o gráfico com a concavidade voltada para cima, tal como se estuda num curso básico de Análise Real.

Dem: Suponhamos que a aplicação f é convexa. Se (w, a) e (z, b) estão em Epi_f e $s, t \geq 0$ verificam $s + t = 1$, vemos que

$$sa + tb \geq sf(w) + tf(z) \geq f(sw + tz),$$

o que mostra que

$$s(w, a) + t(z, b) = (sw + tz, sa + tb)$$

pertence a Epi_f . Ficou assim provado que Epi_f é um conjunto convexo. Suponhamos, reciprocamente, que Epi_f é um conjunto convexo. Dados $w, z \in C$ e $s, t \geq 0$, com $s + t = 1$, tem-se que $(w, f(w))$ e $(z, f(z))$ pertencem a Epi_f pelo que

$$(sw + tz, sf(w) + tf(z)) = s(w, f(w)) + t(z, f(z)) \in Epi_f,$$

o que mostra que $f(sw + tz) \leq sf(w) + tf(z)$, ou seja, que f é uma aplicação convexa. \square

III.1.8 (Corolário) Sejam E um espaço vetorial, $C \subset E$ um conjunto convexo e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação convexa. Dados $w_1, \dots, w_n \in C$ e $t_1, \dots, t_n \geq 0$ tais que $t_1 + \dots + t_n = 1$, tem-se então

$$f(t_1 w_1 + \dots + t_n w_n) \leq t_1 f(w_1) + \dots + t_n f(w_n).$$

Dem: Uma vez que, para cada $1 \leq j \leq n$, $(w_j, f(w_j)) \in Epi_f$, que é um conjunto convexo, concluímos que

$$\left(\sum_{j=1}^n t_j w_j, \sum_{j=1}^n t_j f(w_j) \right) = \sum_{j=1}^n t_j (w_j, f(w_j)) \in Epi_f,$$

o que não é mais do que a conclusão do enunciado. \square

III.1.9 (Exemplos) a) Se E é um espaço vetorial normado, então a aplicação $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \|x\|$, é uma função convexa.

b) Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais que um elemento e seja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua, derivável em todos os pontos interiores de J e tal que $f': \text{int}(J) \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma aplicação crescente (é o que acontece, por exemplo, se f tiver derivada de segunda ordem maior ou igual a 0 em todos os pontos interiores). Tem-se então que f é uma aplicação convexa.

Dem: Para a alínea a), atendemos a que, se $s, t \geq 0$ verificam $s + t = 1$ e $w, z \in E$, vem

$$\|sw + tz\| \leq \|sw\| + \|tz\| = s\|w\| + t\|z\|.$$

Provemos então a conclusão de b), ou seja, que dados $a, b \in J$ e $s, t \geq 0$, com $s + t = 1$, tem-se

$$f(sa + tb) \leq sf(a) + tf(b),$$

para o que se pode afastar os casos triviais em que $a = b$ ou em que se tem

$s = 0$ e $t = 1$ ou $s = 1$ e $t = 0$, casos em que temos mesmo uma igualdade. Por eventual troca dos papéis das variáveis podemos também já supor que $a < b$. Tem-se então $a < sa + tb < b$ e o teorema de Lagrange garante a existência de $a < c < sa + tb < d < b$ tais que

$$\frac{f(sa + tb) - f(a)}{t(b - a)} = \frac{f(sa + tb) - f(a)}{(sa + tb) - a} = f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(sa + tb)}{s(b - a)} = \frac{f(b) - f(sa + tb)}{b - (sa + tb)} = f'(d)$$

e portanto, por a aplicação f' ser crescente,

$$\frac{f(sa + tb) - f(a)}{t(b - a)} \leq \frac{f(b) - f(sa + tb)}{s(b - a)},$$

ou ainda

$$s(f(sa + tb) - f(a)) \leq t(f(b) - f(sa + tb)),$$

o que também pode ser escrito na forma

$$f(sa + tb) = sf(sa + tb) + tf(sa + tb) \leq sf(a) + tf(b). \quad \square$$

III.1.10 (Propriedades das funções convexas) Sejam E um espaço vetorial e $C \subset E$ um conjunto convexo. Tem-se então:

a) Se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação constante, então f é convexa.

b) Se $f, g: C \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações convexas, então $f + g: C \rightarrow \mathbb{R}$ também é uma aplicação convexa.

c) Se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação convexa, e $c \geq 0$, então $cf: C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação convexa.

d) Se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação convexa, $J \supset f(C)$ é um intervalo e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa e crescente, então $g \circ f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação convexa.

Dem: As conclusões de a), b) e c) são consequências diretas da definição. Quanto a d), dados $w, z \in C$ e $s, t \geq 0$ com $s + t = 1$, vem

$$f(sw + tz) \leq sf(w) + tf(z)$$

e portanto

$$g(f(sw + tz)) \leq g(sf(w) + tf(z)) \leq sg(f(w)) + tg(f(z)). \quad \square$$

III.1.11 (Desigualdade de Jensen) Sejam E um espaço de Banach, $C \subset E$ um conjunto convexo fechado e $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação convexa e contínua. Sejam X um espaço de medida, com $0 < \mu(X) < +\infty$, e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação integrável tal que $f(X) \subset C$ e que $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ seja integrável. Tem-se então $\frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu(x) \in C$ e

$$g\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu(x)\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X g(f(x)) d\mu(x).$$

Dem: Podemos considerar a aplicação integrável $h: X \rightarrow E \times \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (f(x), g(f(x)))$, que toma valores no subconjunto convexo fechado $Epi_g \subset E \times \mathbb{R}$ (cf. III.1.7). Tendo em conta III.1.5, tem-se assim

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu(x), \frac{1}{\mu(X)} \int_X g(f(x)) d\mu(x) \right) = \\ & = \frac{1}{\mu(X)} \int_X h(x) d\mu(x) \in Epi_g, \end{aligned}$$

o que implica a conclusão do enunciado. \square

III.1.12 (Desigualdade de Jensen para funções positivas) Seja X um espaço de medida, com $0 < \mu(X) < +\infty$. Seja $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função convexa, contínua, crescente e tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ e estendamos g como aplicação $\overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, pondo $g(+\infty) = +\infty$. Se $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável, então

$$g\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X \varphi(x) d\mu(x)\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X g(\varphi(x)) d\mu(x).$$

Dem: Começemos por supor que $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função simples, portanto que existe uma família finita de conjuntos mensuráveis $(X_j)_{j \in J}$, disjuntos dois a dois e de união X , tal que φ tenha um valor constante $a_j \in \mathbb{R}_+$ em cada X_j . Tem-se então $\sum \mu(X_j) = \mu(X)$, portanto

$$\sum_{j \in J} \frac{\mu(X_j)}{\mu(X)} = 1$$

e, reparando que $g \circ \varphi$ é uma função simples que toma o valor constante $g(a_j)$ em X_j , deduzimos de III.1.8 que

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X \varphi(x) d\mu(x)\right) &= g\left(\sum_{j \in J} \frac{\mu(X_j)}{\mu(X)} a_j\right) \leq \sum_{j \in J} \frac{\mu(X_j)}{\mu(X)} g(a_j) = \\ &= \frac{1}{\mu(X)} \int_X g(\varphi(x)) d\mu(x). \end{aligned}$$

Passemos agora ao caso em que $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável. Podemos então considerar uma sucessão crescente de funções simples $\varphi_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ para cada $x \in X$ e, tendo em conta o facto de g ser crescente, contínua e com limite $+\infty$ quando a variável tende para $+\infty$, concluímos que a sucessão das funções simples $g \circ \varphi_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é crescente e com $g(\varphi_n(x)) \rightarrow g(\varphi(x))$, para cada $x \in X$, pelo que, de se ter, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$g\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X \varphi_n(x) d\mu(x)\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X g(\varphi_n(x)) d\mu(x)$$

concluimos, por passagem ao limite, tendo em conta o teorema da convergência monótona, que

$$g\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X \varphi(x) d\mu(x)\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X g(\varphi(x)) d\mu(x). \quad \square$$

III.1.13 (Médias aritmética e geométrica) Sejam y_1, \dots, y_n números reais, com $y_j > 0$, e t_1, \dots, t_n números reais, com $t_j \geq 0$ e $t_1 + \dots + t_n = 1$. Tem-se então

$$y_1^{t_1} \times \dots \times y_n^{t_n} \leq t_1 y_1 + \dots + t_n y_n.$$

Dem: Ponhamos $x_j = \ln(y_j)$, portanto $y_j = e^{x_j}$. Tendo em conta a alínea b) de III.1.9, é convexa a aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ e daqui deduz-se, por III.1.8, que

$$\begin{aligned} y_1^{t_1} \times \dots \times y_n^{t_n} &= e^{t_1 x_1} \times \dots \times e^{t_n x_n} = e^{\sum t_j x_j} \leq \\ &\leq \sum t_j e^{x_j} = t_1 y_1 + \dots + t_n y_n. \end{aligned} \quad \square$$

III.1.14 (Nota) Ao primeiro membro da desigualdade no resultado precedente costuma-se dar o nome de *média geométrica pesada* dos números y_1, \dots, y_n e ao segundo membro o de *média aritmética pesada* desses números (com o sistema de pesos t_1, \dots, t_n). A desigualdade afirma portanto que a média geométrica pesada é sempre menor ou igual à correspondente média aritmética pesada. Um caso particular é aquele em que todos os pesos t_j são iguais a $1/n$, caso em que temos as médias geométrica e aritmética usuais e a desigualdade pode ser escrita na forma

$$\sqrt[n]{y_1 \times \dots \times y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

III.1.15 (Expoentes conjugados) Se $p > 1$ é um número real, define-se o *expoente conjugado* de p como sendo o número real $q > 1$ para o qual se tem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. É claro que o expoente conjugado de q é então p . Por abuso de linguagem, com justificação evidente, também se diz que $+\infty$ é o expoente conjugado de 1 e que 1 é o expoente conjugado de $+\infty$. Repare-se que o expoente conjugado de 2 é o próprio 2.

No que se segue vamos também estender as convenções usuais sobre as operações em $\overline{\mathbb{R}}_+$, pondo, para cada $r > 0$, $(+\infty)^r = +\infty$, por outras palavras, prolongamos por continuidade a aplicação $\mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $x \mapsto x^r$.

III.1.16 Dados um espaço de medida (X, \mathcal{M}, μ) e uma função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, notaremos, para cada real $r > 0$,

$$\|\varphi\|_r = \left(\int_X \varphi(x)^r d\mu(x) \right)^{\frac{1}{r}} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Repare-se que, apesar de a notação sugerir que se está a definir uma norma, tal não é certamente o caso, uma vez que o conjunto das funções $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ não é um espaço vetorial e que o valor $\|\varphi\|_r$ pode ser $+\infty$. No entanto, se $p \geq 1$, a definição de $\|\varphi\|_r$ vai intervir na caracterização de uma norma que será estudada na próxima secção (cf. III.2.5).

III.1.17 (**Desigualdade de Hölder**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $p > 1$ e $q > 1$ dois expoentes conjugados e $\varphi, \psi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas funções mensuráveis. Tem-se então

$$\int_X \varphi(x)\psi(x) d\mu(x) \leq \|\varphi\|_p \times \|\psi\|_q.$$

Dem: Sejam $a, b \in \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$a = \|\varphi\|_p = \left(\int_X \varphi(x)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad b = \|\psi\|_q = \left(\int_X \psi(x)^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Se for $a = 0$, tem-se $\varphi(x)^p = 0$ quase sempre, o que implica que $\varphi(x) = 0$ quase sempre, e portanto também $\varphi(x)\psi(x) = 0$ quase sempre, pelo que a desigualdade do enunciado é verificada por ambos os membros serem nulos. Do mesmo modo se vê que a desigualdade do enunciado é verificada se for $b = 0$.

Podemos assim já supor, a partir de agora que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Podemos supor agora também que $a \neq +\infty$ e $b \neq +\infty$, sem o que a desigualdade era trivialmente verificada por o segundo membro ser $+\infty$.

Tem-se então, para as funções mensuráveis $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por $\widehat{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{a}$, $\widehat{\psi}(x) = \frac{\psi(x)}{b}$,

$$\begin{aligned} \int_X \widehat{\varphi}(x)^p d\mu(x) &= \frac{1}{a^p} \int_X \varphi(x)^p d\mu(x) = 1, \\ \int_X \widehat{\psi}(x)^q d\mu(x) &= \frac{1}{b^q} \int_X \psi(x)^q d\mu(x) = 1, \\ \int_X \widehat{\varphi}(x)\widehat{\psi}(x) d\mu(x) &= \frac{1}{ab} \int_X \varphi(x)\psi(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

em particular, o resultado ficará provado se verificarmos que

$$\int_X \widehat{\varphi}(x)\widehat{\psi}(x) d\mu(x) \leq 1.$$

Ora, para cada $x \in X$, tem-se

$$\widehat{\varphi}(x)\widehat{\psi}(x) = (\widehat{\varphi}(x)^p)^{\frac{1}{p}}(\widehat{\psi}(x)^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\widehat{\varphi}(x)^p + \frac{1}{q}\widehat{\psi}(x)^q,$$

visto que esta desigualdade é trivial no caso em que um dos valores $\widehat{\varphi}(x)$ e $\widehat{\psi}(x)$ é 0 ou $+\infty$ e, no caso em que ambos são finitos e não nulos, temos um caso particular da desigualdade em III.1.13. Deduzimos daqui que

$$\begin{aligned} \int_X \widehat{\varphi}(x)\widehat{\psi}(x) d\mu(x) &\leq \frac{1}{p} \int_X \widehat{\varphi}(x)^p d\mu(x) + \frac{1}{q} \int_X \widehat{\psi}(x)^q d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. \square

III.1.18 (Desigualdade de Minkowsky) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $p \geq 1$ um real e $\varphi, \psi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis. Tem-se então

$$\|\varphi + \psi\|_p \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p.$$

Dem: Se $p = 1$ o resultado é trivial, verificando-se mesmo a igualdade. Podemos assim supor que $p > 1$ e considerar o expoente conjugado $q > 1$ de p . Podemos supor que o primeiro membro da desigualdade é não nulo e que cada uma das parcelas do segundo membro é finita, sem o que a desigualdade era trivialmente válida. Reparemos agora que, para cada $x \in X$,

$$(\varphi(x) + \psi(x))^p \leq 2^p (\varphi(x)^p + \psi(x)^p),$$

visto que, se $\varphi(x) \leq \psi(x)$ então $\varphi(x) + \psi(x) \leq 2\psi(x)$ e se $\psi(x) \leq \varphi(x)$ então $\varphi(x) + \psi(x) \leq 2\varphi(x)$. Concluimos daqui que

$$\int_X (\varphi(x) + \psi(x))^p d\mu(x) \leq 2^p \left(\int_X \varphi(x)^p d\mu(x) + \int_X \psi(x)^p d\mu(x) \right) < +\infty.$$

Uma vez que

$$(p-1)q = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)q = p,$$

vem, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_X (\varphi + \psi)^p d\mu &= \int_X \varphi (\varphi + \psi)^{p-1} d\mu + \int_X \psi (\varphi + \psi)^{p-1} d\mu \leq \\
&\leq \|\varphi\|_p \left(\int_X (\varphi + \psi)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad + \|\psi\|_p \left(\int_X (\varphi + \psi)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= (\|\varphi\|_p + \|\psi\|_p) \left(\int_X (\varphi + \psi)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

e, dividindo ambos os membros desta desigualdade por $\left(\int_X (\varphi + \psi)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$, obtemos

$$\left(\int_X (\varphi + \psi)^p d\mu \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p$$

o que, por ser $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, é precisamente a desigualdade do enunciado. \square

Exercícios

Ex III.1.1 Sejam E um espaço vetorial, $C \subset E$ um conjunto convexo e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. Diz-se que f é *estritamente convexa* se, quaisquer que sejam $w \neq z$ em C e $s, t > 0$ tais que $s + t = 1$, se tem

$$f(sw + tz) < sf(w) + tf(z).$$

a) Mostrar que, se $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa, então também é convexa.

b) Suponhamos que $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação estritamente convexa. Sejam $w_1, \dots, w_n \in C$ e $t_1, \dots, t_n > 0$ tais que $t_1 + \dots + t_n = 1$. Mostrar que, se for

$$f(t_1 w_1 + \dots + t_n w_n) = t_1 f(w_1) + \dots + t_n f(w_n),$$

então $w_1 = w_2 = \dots = w_n$.

c) Mostrar que, se E é um espaço vetorial com produto interno, então, considerando em E a norma associada, a aplicação $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^2$ é estritamente convexa.

d) Mostrar que, notando $\|\cdot\|_\infty$ a norma do máximo em \mathbb{R}^2 , a aplicação $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|_\infty^2$ não é estritamente convexa.

e) Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua, derivável em todos os pontos interiores de J e tal que $f': \text{int}(J) \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma aplicação estritamente crescente (é o que acontece, por exemplo, se f

tiver derivada de segunda ordem maior que 0 em todos os pontos interiores). Mostrar que f é uma aplicação estritamente convexa.

Ex III.1.2 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^2 (isto é, com derivadas parciais contínuas até à segunda ordem) e tal que, para cada $x \in U$ a *matriz hessiana*, cujo elemento da linha i e coluna j é a derivada de segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, seja definida positiva. Mostrar que a aplicação f é estritamente convexa. **Sugestão:** Dados $w, z \in U$, utilizar a alínea e) do exercício III.1.1 para verificar que é estritamente convexa a função $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(t) = f((1-t)w + tz).$$

Ex III.1.3 Sejam $x, y \geq 0$ e $p \geq 1$. Mostrar que

$$(x + y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

Sugestão: Mostrar que a aplicação $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^p$, é convexa.

Ex III.1.4 a) Sejam $y_1, \dots, y_n > 0$ e $t_1, \dots, t_n > 0$, com $t_1 + \dots + t_n = 1$. Mostrar que, se for

$$y_1^{t_1} \times \dots \times y_n^{t_n} = t_1 y_1 + \dots + t_n y_n,$$

então $y_1 = y_2 = \dots = y_n$.

b) Sejam $x, y \geq 0$ e $p > 1$ tais que

$$(x + y)^p = 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

Mostrar que se tem então $x = y$.

Ex III.1.5 Sejam y_1, \dots, y_n números reais, com $y_j > 0$, e t_1, \dots, t_n números reais, com $t_j \geq 0$ e $t_1 + \dots + t_n = 1$ (um *sistema de pesos*). Chama-se *média harmónica pesada* dos y_j ao inverso da média aritmética pesada dos inversos dos y_j , isto é, ao número

$$\frac{1}{t_1 \frac{1}{y_1} + \dots + t_n \frac{1}{y_n}}.$$

Mostrar que a média harmónica pesada dos y_j é menor ou igual à respetiva média aritmética pesada, isto é,

$$\frac{1}{t_1 \frac{1}{y_1} + \dots + t_n \frac{1}{y_n}} \leq t_1 y_1 + \dots + t_n y_n.$$

Sugestão: Considerar a função $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ou, alternativamente, reparar que a propriedade pretendida é equivalente à de uma certa média geométrica ser menor ou igual à correspondente média aritmética.

Ex III.1.6 Sob as hipóteses de III.1.17 (desigualdade de Hölder), mostrar que, se for

$$\int_X \varphi(x)\psi(x) d\mu(x) = \left(\int_X \varphi(x)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X \psi(x)^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}},$$

com ambos os membros finitos e não nulos, então existe $c \in]0, +\infty[$ tal que $\psi(x)^q = c \varphi(x)^p$, quase sempre. **Sugestão:** Reexaminar a demonstração do resultado citado, provando que se tem $\widehat{\varphi}(x) = \widehat{\psi}(x)$ quase sempre, tendo em conta a alínea a) do exercício III.1.4.

Ex III.1.7 Analogamente ao exercício III.1.6, verificar que, sob as hipóteses de III.1.18 (desigualdade de Minkowsky), se for $p > 1$ e

$$\|\varphi + \psi\|_p = \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p,$$

com ambas as parcelas do segundo membro finitas e não nulas, então existe $c \in]0, +\infty[$ tal que $\psi(x) = c \varphi(x)$, quase sempre.

§2. Os espaços L^p .

III.2.1 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach, real ou complexo. Vamos notar $\mathbf{Mens}(X, E)$ o conjunto de todas as aplicações topologicamente mensuráveis $f: X \rightarrow E$ (cf. II.2.4), conjunto que, tendo em conta II.2.9, é um subespaço vetorial, real ou complexo, do espaço vetorial de todas as aplicações $f: X \rightarrow E$.

Podemos então considerar um subespaço vetorial $\mathbf{Mens}_0(X, E)$ de $\mathbf{Mens}(X, E)$, cujos elementos são as aplicações topologicamente mensuráveis $f: X \rightarrow E$ tais que $f(x) = 0$ quase sempre, isto é, tais que exista $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$ tal que $f(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus A$, assim como o espaço vetorial quociente

$$\mathbf{Mens}(X, E) = \frac{\mathbf{Mens}(X, E)}{\mathbf{Mens}_0(X, E)},$$

cujos elementos são as classes de equivalência de aplicações topologicamente mensuráveis $f: X \rightarrow E$ para a relação de equivalência \sim definida por

$$f \sim g \Leftrightarrow g - f \in \mathbf{Mens}_0(X, E) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ quase sempre.}$$

Com frequência usaremos a notação $[f]$ para a classe de equivalência do elemento $f \in \mathbf{Mens}(X, E)$ para a relação referida mas, quando não há risco de confusão, é comum notar simplesmente f essa classe de equivalência.

Dem: O que temos que justificar é que $\mathbf{Mens}_0(X, E)$ é efetivamente um subespaço vetorial de $\mathbf{Mens}(X, E)$. Ora, é evidente que a aplicação 0, identi-

camente nula, pertence a $\mathbf{Mens}_0(X, E)$ e, se $f_1, f_2 \in \mathbf{Mens}_0(X, E)$ e a é um escalar (real ou complexo), então existem $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ com $\mu(A_1) = 0$, $\mu(A_2) = 0$ e $f_j(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus A_j$, tendo-se então $af_1 \in \mathbf{Mens}_0(X, E)$ e $f_1 + f_2 \in \mathbf{Mens}_0(X, E)$, uma vez que $af_1(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus A_1$ e $f_1(x) + f_2(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus (A_1 \cup A_2)$, onde $\mu(A_1 \cup A_2) = 0$.¹¹⁸ \square

III.2.2 Repare-se que, no caso trivial em que $\mu(X) = 0$, tem-se $\mathbf{Mens}_0(X, E) = \mathbf{Mens}(X, E)$, e portanto

$$\mathbf{Mens}(X, E) = \frac{\mathbf{Mens}(X, E)}{\mathbf{Mens}_0(X, E)}$$

é constituído por uma única classe, nomeadamente a classe $[0]$.

III.2.3 (**Restrições**) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach, real ou complexo e $Y \subset X$, com $Y \in \mathcal{M}$, que consideramos naturalmente como subespaço mensurável. Uma vez que, como se constata trivialmente, se $[f] = [g]$ em $\mathbf{Mens}(X, E)$, então $[f|_Y] = [g|_Y]$ em $\mathbf{Mens}(Y, E)$, podemos definir uma aplicação linear

$$\mathbf{Mens}(X, E) \rightarrow \mathbf{Mens}(Y, E), \quad [f] \mapsto [f]|_Y = [f|_Y],$$

dizendo-se ainda que $[f]|_Y$ é a *restrição* de $[f]$ a Y .

Repare-se que, em geral, dada uma classe $[f] \in \mathbf{Mens}(X, E)$, não dispomos de nenhuma maneira natural de definir o que é o valor de $[f]$ num elemento $x \in X$, uma vez que, dados dois representantes da classe, os respetivos valores em x podem ser diferentes. Examinamos a seguir, apenas a título de exemplo, uma situação em que existe um modo natural de definir o valor de uma classe num ponto. Essa situação é susceptível de ser enquadrada sob um ponto de vista muito mais geral (cf. o exercício III.4.2 adiante).

III.2.4 (**Valor num ponto numa classe contínua**) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, para o qual consideramos a restrição da medida de Lebesgue λ_n aos respetivos borelianos. Sejam E um espaço de Banach e $f, \hat{f}: U \rightarrow E$ duas aplicações contínuas tais que $[f] = [\hat{f}]$ em $\mathbf{Mens}(U, E)$. Tem-se então, para cada $x \in U$, $f(x) = \hat{f}(x)$.

Faz assim sentido dizer que uma classe $[f] \in \mathbf{Mens}(U, E)$ é *contínua* se existir uma aplicação contínua $\hat{f}: U \rightarrow E$ tal que $[f] = [\hat{f}]$ e, para uma tal classe, definir o seu *valor* $[f](x)$ no ponto x pela igualdade $[f](x) = \hat{f}(x)$.

¹¹⁸O que está aqui em jogo é o facto geral de, no contexto de um espaço de medida, sempre que temos duas propriedades verdadeiras quase sempre, a respetiva conjunção ser ainda verdadeira quase sempre, facto esse já referido em I.2.28 e cuja justificação é decalçada pela que acabamos de fazer.

Dem: Suponhamos, por absurdo, que $f, \hat{f}: U \rightarrow E$ eram duas aplicações contínuas, tais que $[f] = [\hat{f}]$ em $Mens(U, E)$ e que $f(x_0) \neq \hat{f}(x_0)$. Podíamos então considerar um aberto V de \mathbb{R}^n , com $x_0 \in V \subset U$, tal que $f(x) \neq g(x)$, para cada $x \in V$, e, sendo $Y \subset U$ um boreliano com $\lambda_n(Y) = 0$ tal que $f(x) = \hat{f}(x)$, para cada $x \in U \setminus Y$, tinha-se assim $V \subset Y$, o que era absurdo por ser $\lambda_n(V) > 0$ (cf. a alínea b) de II.5.4). \square

III.2.5 (O espaço L^p) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e p um real com $1 \leq p$. Podemos então definir uma aplicação

$$Mens(X, E) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad [f] \mapsto \|[f]\|_p = \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

e ficamos com um subespaço vetorial $L^p(X, E)$ de $Mens(X, E)$, constituído pelos $[f]$ tais que $\|[f]\|_p < +\infty$ e com uma norma $\|\cdot\|_p$ neste espaço vetorial, definida por $[f] \mapsto \|[f]\|_p$, norma essa que é a que se considera implicitamente.¹¹⁹ Em particular, $L^1(X, E)$ é o conjunto das classes de equivalência de aplicações integráveis $f: X \rightarrow E$.

Dem: O facto de a aplicação $[f] \mapsto \|[f]\|_p$ estar bem definida resulta de que, se $f(x) = g(x)$ quase sempre, então $\|f(x)\|^p = \|g(x)\|^p$ quase sempre, e portanto, por II.1.31,

$$\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) = \int_X \|g(x)\|^p d\mu(x).$$

É imediato que, para a aplicação identicamente nula $0: X \rightarrow E$, tem-se $\|0\|_p = 0$, em particular $[0] \in L^p(X, E)$. Se $[f] \in L^p(X, E)$ e a é um escalar, em \mathbb{R} ou \mathbb{C} , então

$$\begin{aligned} \left(\int_X \|a f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_X |a|^p \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= |a| \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

o que mostra que $[af] \in L^p(X, E)$ e $\|[af]\|_p = |a| \|[f]\|_p$. Dados $[f], [g] \in L^p(X, E)$, tem-se, pela desigualdade de Minkowsky (cf. III.1.18),

$$\begin{aligned} \left(\int_X \|f(x) + g(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_X (\|f(x)\| + \|g(x)\|)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X \|g(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

em particular $[f + g] \in L^p(X, E)$ e $\|[f + g]\|_p \leq \|[f]\|_p + \|[g]\|_p$. Suponhamos enfim que $[f] \in L^p(X, E)$ é tal que $\|[f]\|_p = 0$, tem-se assim

¹¹⁹Comparando com a definição em III.1.16, tem-se $\|[f]\|_p = \|\varphi\|_p$, onde $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ está definida por $\varphi(x) = \|f(x)\|$.

$$\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) = 0,$$

com $\|f(x)\|^p \in \mathbb{R}_+$, para cada $x \in X$, pelo que, tendo em conta II.1.30, $\|f(x)\|^p = 0$ quase sempre, donde $f(x) = 0$ quase sempre, ou seja, $[f] = 0$, o que mostra que temos efetivamente uma norma. \square

III.2.6 (Nota) Um caso particular muito frequente nas aplicações é aquele em que o espaço de Banach E é \mathbb{R} ou \mathbb{C} , com a norma $\|w\| = |w|$. Nesse caso, a fórmula de definição da norma toma o aspeto

$$\|[f]\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, no caso em que $E = \mathbb{R}$, tem-se, para cada função mensurável $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\|[\varphi]\|_p = \|\varphi\|_p$, onde o segundo membro é o definido em III.1.16.

III.2.7 Um facto trivial, mas que vale a pena referir é o de que, nas condições de III.2.5, se $Y \subset X$ com $Y \in \mathcal{M}$, então a aplicação linear de restrição

$$\text{Mens}(X, E) \rightarrow \text{Mens}(Y, E), \quad [f] \mapsto [f]_{/Y} = [f|_Y],$$

aplica $L^p(X, E)$ em $L^p(Y, E)$ e verifica $\|[f]_{/Y}\|_p \leq \|[f]\|_p$, em particular trata-se de uma aplicação linear contínua.

III.2.8 (Lema de completude) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $p \geq 1$ um número real. Seja $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\text{Mens}(X, E)$ com $[g_n] \in L^p(X, E)$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|[g_n]\|_p < +\infty$$

(por outras palavras, os $[g_n]$ definem uma série absolutamente convergente). Existe então $g \in \text{Mens}(X, E)$ com $[g] \in L^p(X, E)$, tal que (como famílias absolutamente somáveis de vetores de E)

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

quase sempre e que

$$[g] = \sum_{n=1}^{\infty} [g_n]$$

(no sentido que $[g]$ é o limite em $L^p(X, E)$ da sucessão das somas parciais).

Dem: Sejam $\sigma_n: X \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ as aplicações mensuráveis definidas por

$$\sigma_n(x) = \sum_{j=1}^n \|g_j(x)\|,$$

para as quais se tem $[\sigma_n] \in L^p(X, \mathbb{R})$ e

$$\|[\sigma_n]\|_p \leq \sum_{j=1}^n \| [g_j] \|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \| [g_j] \|_p,$$

isto é,

$$\int_X \sigma_n(x)^p d\mu(x) \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \| [g_j] \|_p \right)^p,$$

e seja $\sigma: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a aplicação mensurável definida por

$$\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j(x)\|.$$

Uma vez que, para cada $x \in X$, os $\sigma_n(x)^p$ constituem uma sucessão crescente com limite $\sigma(x)^p$, deduzimos do teorema da convergência monótona que

$$\int_X \sigma(x)^p d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \sigma_n(x)^p d\mu(x) \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \| [g_j] \|_p \right)^p < +\infty.$$

Podemos assim concluir de II.1.29 que se tem $\sigma(x) < +\infty$ quase sempre, isto é, que existe $Y \in \mathcal{M}$ com $\mu(Y) = 0$ tal que, para cada $x \in X \setminus Y$, $\sigma(x) < +\infty$. Para cada $x \in X \setminus Y$, a família $(g_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ de vetores de E é assim absolutamente somável, em particular somável (cf. II.2.47 e II.2.48), o que nos permite definir uma aplicação $g: X \rightarrow E$ por

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x), & \text{se } x \in X \setminus Y \\ 0, & \text{se } x \in Y \end{cases}$$

(onde a família dos $g_j(x)$ é absolutamente somável). Lembrando a caracterização da soma de uma série como limite da sucessão das somas parciais, vemos que, para cada $x \in X \setminus Y$, tem-se $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x)$, onde as aplicações topologicamente mensuráveis $s_n: X \rightarrow E$, com $[s_n] \in L^p(X, E)$, estão definidas por

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x)$$

em particular g é topologicamente mensurável.

Seja agora $\delta > 0$ arbitrário. Fixemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \| [g_j] \|_p = \sum_{j=1}^{\infty} \| [g_j] \|_p - \sum_{j=1}^{n_0} \| [g_j] \|_p \leq \delta$$

Seja $n \geq n_0$ arbitrário. Tem-se, para cada $k > n$,

$$\begin{aligned} \| [s_k] - [s_n] \|_p &= \left\| \sum_{n < j \leq k} [g_j] \right\|_p \leq \sum_{n < j \leq k} \| [g_j] \|_p \leq \\ &\leq \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \| [g_j] \|_p \leq \delta \end{aligned}$$

donde,

$$\int_{X \setminus Y} \| s_k(x) - s_n(x) \|^p = \int_X \| s_k(x) - s_n(x) \|^p \leq \delta^p.$$

Uma vez que, para cada $x \in X \setminus Y$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \| s_k(x) - s_n(x) \|^p = \| g(x) - s_n(x) \|^p,$$

o lema de Fatou em II.1.33 implica que

$$\int_X \| g(x) - s_n(x) \|^p d\mu(x) = \int_{X \setminus Y} \| g(x) - s_n(x) \|^p d\mu(x) \leq \delta^p.$$

Ficou assim provado que, para cada $n \geq n_0$, $[g - s_n] \in L^p(X, E)$, portanto também $[g] = [g - s_n] + [s_n] \in L^p(X, E)$, e

$$\| [g] - [s_n] \|_p \leq \delta$$

o que nos permite concluir que $[s_n] = \sum_{j=1}^n [g_j]$ tem limite $[g]$ no espaço vetorial normado $L^p(X, E)$. \square

III.2.9 (Teorema de completude) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $p \geq 1$ um número real. Tem-se então:

a) O espaço vetorial normado $L^p(X, E)$ é completo (portanto um espaço de Banach).

b) Sejam $f \in \mathbf{Mens}(X, E)$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de aplicações de $\mathbf{Mens}(X, E)$ tais que $[f] \in L^p(X, E)$, $[f_n] \in L^p(X, E)$ e $[f_n] \rightarrow [f]$ em $L^p(X, E)$. Existe então uma subsucessão de aplicações $h_k = f_{\alpha(k)}$ tal que $h_k(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre.¹²⁰

Dem: Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de aplicações de $\mathbf{Mens}(X, E)$, com

¹²⁰Pelo contrário, não se pode concluir, em geral, que se tenha $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre; ver um contraexemplo na alínea c) do exercício III.2.3.

$[f_n] \in L^p(X, E)$, tal que a sucessão dos $[f_n]$ seja uma sucessão de Cauchy em $L^p(X, E)$. Podemos construir recursivamente uma aplicação estritamente crescente $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que, sempre que $m, n \geq \alpha(k)$, $\|[f_m] - [f_n]\|_p < \frac{1}{2^k}$. Consideremos então a subsucessão de aplicações $h_k = f_{\alpha(k)}$. Tem-se, em particular, $\|[h_{k+1}] - [h_k]\|_p < \frac{1}{2^k}$ pelo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|[h_{k+1}] - [h_k]\|_p < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty.$$

Podemos agora aplicar o lema III.2.8 às aplicações $g_k = h_{k+1} - h_k$ para garantir a existência de uma aplicação topologicamente mensurável $g: X \rightarrow E$ tal que $[g] \in L^p(X, E)$, que $[g]$ seja o limite em $L^p(X, E)$ da sucessão das classes

$$[s_k] = \sum_{j=1}^k [g_j] = [h_{k+1}] - [h_1]$$

e que $g(x)$ seja quase sempre o limite dos

$$s_k(x) = \sum_{j=1}^k g_j(x) = h_{k+1}(x) - h_1(x).$$

Daqui deduzimos que, sendo $\widehat{f}: X \rightarrow E$ a aplicação topologicamente mensurável definida por $\widehat{f}(x) = g(x) + h_1(x)$, tem-se $[\widehat{f}] \in L^p(X, E)$, quase sempre $h_{k+1}(x) \rightarrow \widehat{f}(x)$ e $[h_{k+1}] \rightarrow [\widehat{f}]$ em $L^p(X, E)$. O facto de uma sucessão de Cauchy com sublimite ser necessariamente convergente para esse sublimite implica que se tem também $[f_n] \rightarrow [\widehat{f}]$ em $L^p(X, E)$, o que mostra que o espaço vetorial normado $L^p(X, E)$ é completo.

Quanto à conclusão de b), o facto de termos uma sucessão convergente de elementos $[f_n] \in L^p(X, E)$ implica que eles constituem uma sucessão de Cauchy donde, pelo que vimos atrás, existe uma subsucessão de aplicações $h_k = f_{\alpha(k)}$ e $[\widehat{f}] \in L^p(X, E)$, com $[h_{k+1}] \rightarrow [\widehat{f}]$ em $L^p(X, E)$ e quase sempre $h_{k+1}(x) \rightarrow \widehat{f}(x)$. Uma vez que uma subsucessão de uma sucessão convergente converge para o mesmo limite, tem-se também $[h_{k+1}] \rightarrow [f]$ em $L^p(X, E)$, e portanto, pela unicidade do limite, $[f] = [\widehat{f}]$, isto é, $f(x) = \widehat{f}(x)$ quase sempre. Tem-se assim também $h_{k+1}(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre. \square

III.2.10 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. No caso em que $p = 1$, $L^1(X, E)$ é simplesmente o conjunto das classes de equivalência $[f]$ com $f: X \rightarrow E$ aplicação integrável e tem lugar uma aplicação linear contínua

$$\text{int}: L^1(X, E) \rightarrow E, \quad \text{int}([f]) = \int_X f(x) d\mu(x),$$

que verifica $\|\text{int}([f])\| \leq \|[f]\|_1$.

Dem: O facto de esta aplicação estar bem definida vem de que, se $f(x) = g(x)$ quase sempre, então $\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X g(x) d\mu(x)$ e a linearidade é uma consequência das propriedades de linearidade do integral. Quanto à continuidade, ela é uma consequência de se ter

$$\|\text{int}([f])\| = \left\| \int_X f(x) d\mu(x) \right\| \leq \int_X \|f(x)\| d\mu(x) = \|[f]\|_1. \quad \square$$

III.2.11 (Nota) Uma questão que se põe naturalmente é a de saber que relação existe entre os espaços $L^p(X, E)$ e $L^q(X, E)$, com $p \neq q$ em $[1, +\infty[$, em particular se um deles terá que estar contido no outro. É fácil reconhecer que, em geral, isso não é necessariamente verdade. Por exemplo, se $X =]0, +\infty[$, com a medida de Lebesgue nos respetivos borelianos, e se $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

então, integrando separadamente em $]0, 1]$ e em $]1, +\infty[$ e tendo em conta as conclusões do exercício II.3.6, constata-se, por um lado, que $[f] \in L^1(X, \mathbb{R})$ e $[f] \notin L^2(X, \mathbb{R})$ e, por outro, que $[g] \notin L^1(X, \mathbb{R})$ e $[g] \in L^2(X, \mathbb{R})$.

Há, no entanto, um caso em que podemos garantir que um dos espaços está contido no outro e exibir uma desigualdade envolvendo as respetivas normas. Por comodidade, enunciamos também um resultado mais completo, no caso das funções positivas.

III.2.12 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, com $0 < \mu(X) < +\infty$ e $1 \leq p \leq q$. Tem-se então:

a) Se $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável,

$$\|\varphi\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|\varphi\|_q$$

b) Se E um espaço de Banach, $L^q(X, E) \subset L^p(X, E)$ e, para cada $[f] \in L^q(X, E)$,

$$\|[f]\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|[f]\|_q.$$

Dem: Podemos já afastar o caso trivial em que $p = q$ e basta provarmos a afirmação em a) visto que a conclusão de b) resulta então de aplicar a) à função $\varphi(x) = \|f(x)\|$.

Tem-se então $\frac{p}{q} < 1$ pelo que podemos considerar $\beta > 1$ definido pela condição $\frac{p}{q} + \frac{1}{\beta} = 1$, isto é, o expoente conjugado de $\frac{p}{q}$. Pela desigualdade de Hölder relativa a estes expoentes conjugados (cf. III.1.17), podemos agora escrever

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(x)^p d\mu(x) &= \int_X \varphi(x)^p \times 1 d\mu(x) \leq \\ &\leq \left(\int_X (\varphi(x)^p)^{\frac{q}{p}} d\mu(x) \right)^{\frac{p}{q}} \times \left(\int_X 1^\beta d\mu(x) \right)^{\frac{1}{\beta}} = \\ &= \left(\int_X \varphi(x)^q d\mu(x) \right)^{\frac{p}{q}} \times \mu(X)^{\frac{1}{\beta}} = \\ &= (\|\varphi\|_q \times \mu(X)^{\frac{1}{\beta p}})^p, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|\varphi\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{\beta p}} \|\varphi\|_q,$$

bastando agora reparar que $\frac{1}{\beta p} = \frac{1}{p} (1 - \frac{p}{q}) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. □

No caso em que não se tem necessariamente $\mu(X) < +\infty$, há ainda uma resultado com uma natureza semelhante.

III.2.13 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $1 \leq p \leq r \leq q$. Tem-se então:

a) Se $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável,

$$\|\varphi\|_r \leq \max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_q\}.$$

b) Se E um espaço de Banach

$$L^p(X, E) \cap L^q(X, E) \subset L^r(X, E)$$

e, para cada $[f] \in L^p(X, E) \cap L^q(X, E)$,

$$\|[f]\|_r \leq \max\{\|[f]\|_p, \|[f]\|_q\}.$$

Dem: Como anteriormente, podemos já afastar os casos triviais em que $p = r$ ou $r = q$ e basta provar a afirmação em a), uma vez que a conclusão de b) resulta então de aplicar a) à função $\varphi(x) = \|f(x)\|$.

Sejam $\alpha, \beta > 0$, com $\alpha + \beta = 1$, os definidos por

$$\alpha = \frac{q - r}{q - p}, \quad \beta = \frac{r - p}{q - p},$$

para os quais se tem

$$\alpha p + \beta q = \frac{pq - pr + qr - pr}{q - p} = r.$$

Pela desigualdade de Hölder, relativa ao expoentes conjugados $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{\beta}$, podemos agora escrever

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(x)^r d\mu(x) &= \int_X \varphi(x)^{\alpha p} \times \varphi(x)^{\beta q} d\mu(x) \leq \\ &\leq \left(\int_X \varphi(x)^p d\mu(x) \right)^\alpha \times \left(\int_X \varphi(x)^q d\mu(x) \right)^\beta, \end{aligned}$$

e portanto, tendo em conta o facto de se ter $\frac{\alpha p}{r} + \frac{\beta q}{r} = 1$,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_r &\leq \|\varphi\|_p^{\frac{\alpha p}{r}} \times \|\varphi\|_q^{\frac{\beta q}{r}} \leq \\ &\leq \max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_q\}^{\left(\frac{\alpha p}{r} + \frac{\beta q}{r}\right)} = \\ &= \max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_q\}. \end{aligned} \quad \square$$

III.2.14 (Os espaços ℓ^p) Sejam E um espaço de Banach e J um conjunto, para o qual consideramos a medida de contagem ν na σ -álgebra de todas as partes de J .

a) Uma vez que qualquer aplicação $f: J \rightarrow E$ é mensurável, o espaço $\mathbf{Mens}(J, E)$ vai ser simplesmente o conjunto das aplicações $f: J \rightarrow E$ tais que a imagem $f(J) \subset E$ é separável (condição que é verificada, por exemplo, se $f(J)$ for um conjunto contável).

b) Uma vez que o conjunto vazio \emptyset é o único subconjunto de J com medida 0, vemos que, para $f, \hat{f} \in \mathbf{Mens}(J, E)$, tem-se $[f] = [\hat{f}]$ em $Mens(J, E)$ se, e só se, $f = \hat{f}$, por outras palavras, a aplicação natural

$$\mathbf{Mens}(J, E) \rightarrow Mens(J, E), \quad f \mapsto [f],$$

é um isomorfismo entre estes espaços vetoriais, que é encarado intuitivamente como identificando estes espaços.

c) Para cada real $1 \leq p < +\infty$, notamos

$$\ell^p(J, E) \subset \mathbf{Mens}(J, E)$$

o subespaço vetorial cuja imagem pelo isomorfismo referido em b) é o subespaço vetorial $L^p(J, E) \subset Mens(J, E)$. Tendo em conta a caracterização do integral das funções positivas para a medida de contagem em II.1.32 e a observação feita nesse resultado de que, sempre que um tal integral é finito, a função é nula fora de uma parte contável do domínio, concluímos que $\ell^p(J, E)$ vai ser simplesmente o conjunto das aplicações $f: J \rightarrow E$ tais

$$\sum_{j \in J} \|f(j)\|^p < +\infty$$

e que tem lugar uma norma neste espaço vetorial, definida, por transporte por meio do isomorfismo, por

$$\|f\|_p = \|[f]\|_p = \left(\sum_{j \in J} \|f(j)\|^p \right)^{1/p}.$$

As propriedades deste espaço vetorial normado, em particular o facto de se tratar de um espaço de Banach quando E é um espaço de Banach, deduzem-se trivialmente, por isomorfismo, a partir das propriedades correspondentes dos espaços $L^p(X, E)$.

d) Note-se que é mais comum representar os elementos de $\ell^p(J, E)$ como famílias $(w_j)_{j \in J}$, em vez de aplicações, o que conduz a escrevermos

$$\|(w_j)_{j \in J}\|_p = \left(\sum_{j \in J} \|w_j\|^p \right)^{1/p},$$

e que no caso em que $J = \mathbb{N}$, e portanto as famílias são sucessões, é costume escrever simplesmente $\ell^p(E)$, em vez de $\ell^p(\mathbb{N}, E)$.

Na prática revela-se útil estender a definição dos espaços $L^p(X, E)$ de modo a permitir que p possa também tomar o valor $+\infty$. Apesar dessa definição ter uma carácter totalmente diferente da que é dada para o caso em que $1 \leq p < +\infty$, ela vai permitir reconhecer semelhanças formais em certos resultados, quando se interpreta de modo natural o papel de $+\infty$ no contexto das diferentes operações.

III.2.15 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma aplicação mensurável. Vamos dizer que $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ é um *majorante essencial* de φ se se tem $\varphi(x) \leq a$ quase sempre. Tem-se então que o conjunto dos majorantes essenciais de φ admite um mínimo, a que daremos o nome de *supremo essencial* de φ e que notaremos $\text{supess}(\varphi)$, $\sup_{x \in X} \varphi(x)$ ou $\|\varphi\|_\infty$, o qual é, portanto, um elemento de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Dem: A aplicação φ admite, pelo menos, um majorante essencial, nomeadamente $+\infty$. Seja a o ínfimo do conjunto dos majorantes essenciais. O resultado ficará provado se verificarmos que a ainda é um majorante essencial, para o que podemos já afastar o caso trivial em que $a = +\infty$. Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$, vai existir um majorante essencial a_n tal que $a_n \leq a + \frac{1}{n}$, e portanto um conjunto mensurável $Y_n \subset X$, com $\mu(Y_n) = 0$, tal que, para cada $x \notin X \setminus Y_n$,

$$\varphi(x) \leq a_n \leq a + \frac{1}{n}.$$

Sendo $Y = \bigcup Y_n$, tem-se ainda $Y \in \mathcal{M}$ e $\mu(Y) = 0$ e, para cada $x \in X \setminus Y$, vem $\varphi(x) \leq a + \frac{1}{n}$, para todo o n , portanto $\varphi(x) \leq a$. Ficou assim provado que a é ainda um majorante essencial, o que termina a demonstração. \square

Repare-se que, afastando o caso trivial em que $X = \emptyset$, se $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma aplicação mensurável, então todo o majorante a de φ é naturalmente também uma majorante essencial de φ , o que implica que

$$\sup_{x \in X} \varphi(x) \leq \sup_{x \in X} \varphi(x).$$

É fácil exibir exemplos em que a desigualdade anterior é estrita, uma vez que modificando o valor de uma função num conjunto de medida nula não altera os seus majorantes essenciais, nem portanto o supremo essencial, mas pode alterar o seu supremo. Apresentamos em seguida duas situações, a primeira das quais susceptível de ser generalizada, em que podemos garantir que o supremo essencial coincide com o supremo.

III.2.16 (Supremo essencial de uma aplicação contínua) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, para o qual consideramos a restrição da medida de Lebesgue λ_n aos respetivos borelianos. Se $\varphi: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função contínua, então os majorantes essenciais de φ coincidem com os majorantes de φ , e portanto

$$\sup_{x \in U} \varphi(x) = \sup_{x \in U} \varphi(x).$$

Dem: É claro que, se a é um majorante de φ , então a é também um majorante essencial de φ . Suponhamos, por absurdo, que existia um majorante essencial a de φ que não fosse majorante, o que implicava, em particular, que $a < +\infty$. Existia então um conjunto mensurável Y com $\lambda_n(Y) = 0$ tal que, para cada $x \in U \setminus Y$, $\varphi(x) \leq a$ e um ponto $x_0 \in U$ tal que $\varphi(x_0) > a$. Pela continuidade de φ em x_0 , podíamos então considerar um aberto V de \mathbb{R}^n , com $x_0 \in V \subset U$ tal que, para cada $x \in V$, $\varphi(x) > a$, tendo-se então $V \subset Y$, o que era absurdo, por ser $\lambda_n(V) > 0$, tendo em conta a alínea b) de II.5.4. \square

III.2.17 (Supremo essencial no caso da medida de contagem) Seja J um conjunto, para o qual consideramos a medida de contagem ν , na σ -álgebra de todos os subconjuntos de J . Uma vez que o conjunto vazio \emptyset é o único subconjunto de J com medida 0, vemos que, para cada aplicação $\varphi: J \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, os majorantes essenciais $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ de φ coincidem com os seus majorantes, e portanto

$$\sup_{j \in J} \varphi(j) = \sup_{j \in J} \varphi(j).$$

Os dois resultados seguintes constituem os análogos das desigualdades de Hölder e Minkowsky (cf. III.1.17 e III.1.18), tendo, no entanto, demonstrações muito mais simples. Lembrar que $q = 1$ pode ser olhado formalmente como o expoente conjugado de $p = \infty$.

III.2.18 (Caso limite da desigualdade de Hölder) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $\varphi, \psi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas funções mensuráveis. Tem-se então

$$\int_X \varphi(x)\psi(x) d\mu(x) \leq \|\varphi\|_\infty \times \|\psi\|_1.$$

Dem: Seja $Y \in \mathcal{M}$ com $\mu(Y) = 0$ tal que $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty$ para cada $x \in X \setminus Y$. Para cada $x \in X \setminus Y$ tem-se então também

$$\varphi(x)\psi(x) \leq \|\varphi\|_\infty\psi(x),$$

donde

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(x)\psi(x) d\mu(x) &= \int_{X \setminus Y} \varphi(x)\psi(x) d\mu(x) \leq \int_{X \setminus Y} \|\varphi\|_\infty\psi(x) d\mu(x) = \\ &= \int_X \|\varphi\|_\infty\psi(x) d\mu(x) = \|\varphi\|_\infty \int_X \psi(x) d\mu(x) = \\ &= \|\varphi\|_\infty\|\psi\|_1. \quad \square \end{aligned}$$

III.2.19 (Caso limite da desigualdade de Minkowsky) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $\varphi, \psi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas funções mensuráveis. Tem-se então

$$\|\varphi + \psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty.$$

Dem: Uma vez que se tem $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty$ quase sempre e $\psi(x) \leq \|\psi\|_\infty$ quase sempre, concluímos que se tem quase sempre simultaneamente as duas desigualdades, portanto quase sempre

$$\varphi(x) + \psi(x) \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty,$$

o que significa que $\|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty$ é um majorante essencial de $\varphi + \psi$. O facto de $\|\varphi + \psi\|_\infty$ ser o menor dos majorantes essenciais implica assim que $\|\varphi + \psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty$. \square

III.2.20 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Podemos então definir uma aplicação

$$Mens(X, E) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad [f] \mapsto \|[f]\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

e ficamos com um subespaço vetorial $L^\infty(X, E)$ de $Mens(X, E)$, constituído pelos $[f]$ tais que $\|[f]\|_\infty < +\infty$ e com uma norma $\|\cdot\|_\infty$ neste espaço vetorial, definida por $[f] \mapsto \|[f]\|_\infty$, norma essa que é a que se considera implicitamente.¹²¹

Dem: O facto de a aplicação $[f] \mapsto \|[f]\|_\infty$ estar bem definida em $Mens(X, E)$ resulta de que, se $[f] = [g]$, ou seja, se $f(x) = g(x)$ quase

¹²¹Comparando com a definição em III.2.15, tem-se $\|[f]\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$, onde $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ está definida por $\varphi(x) = \|f(x)\|$.

sempre, então todos os majorantes essenciais de $x \mapsto \|f(x)\|$ são majorantes essenciais de $x \mapsto \|g(x)\|$, e vice-versa, pelo que os respetivos supremos essenciais coincidem. Dados $[f], [g] \in L^\infty(X, E)$, tem-se $\|f(x)\| \leq \|[f]\|_\infty$ quase sempre e $\|g(x)\| \leq \|[g]\|_\infty$ quase sempre, portanto, quase sempre,

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|[f]\|_\infty + \|[g]\|_\infty,$$

por outras palavras, $[f] + [g] \in L^\infty(X, E)$ e $\|[f]\|_\infty + \|[g]\|_\infty$ é um majorante essencial de $x \mapsto \|f(x) + g(x)\|$, ou seja,

$$\|[f] + [g]\|_\infty \leq \|[f]\|_\infty + \|[g]\|_\infty.$$

Para além disso, se a é um escalar, tem-se quase sempre

$$\|a f(x)\| = |a| \|f(x)\| \leq |a| \|[f]\|_\infty,$$

portanto $a[f] \in L^\infty(X, E)$ e $\|a[f]\|_\infty \leq |a| \|[f]\|_\infty$, e daqui se deduz que é mesmo $\|a[f]\|_\infty = |a| \|[f]\|_\infty$, visto que a desigualdade oposta é trivial, se $a = 0$, e, caso contrário resulta de que podemos escrever, pela desigualdade parcial já provada,

$$|a| \|[f]\|_\infty = |a| \left\| \frac{1}{a} \times a[f] \right\|_\infty \leq |a| \left\| \frac{1}{a} \|a[f]\|_\infty \right\|_\infty = \|a[f]\|_\infty.$$

Por fim, se fosse $\|[f]\|_\infty = 0$, 0 era um majorante essencial de $\|f(x)\|$, portanto $f(x) = 0$ quase sempre, isto é, $[f] = 0$. \square

III.2.21 Tal como em III.2.7, um facto trivial que vale a pena referir é o de que, nas condições de III.2.20, se $Y \subset X$ com $Y \in \mathcal{M}$, então a aplicação linear de restrição

$$\text{Mens}(X, E) \rightarrow \text{Mens}(Y, E), \quad [f] \mapsto [f]_{/Y} = [f|_Y],$$

aplica $L^\infty(X, E)$ em $L^\infty(Y, E)$ e verifica $\|[f]_{/Y}\|_\infty \leq \|[f]\|_\infty$, em particular trata-se de uma aplicação linear contínua.

III.2.22 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Tem-se então que o espaço vetorial normado $L^\infty(X, E)$ é um espaço de Banach e, dados $f \in \text{Mens}(X, E)$ e uma sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\text{Mens}(X, E)$ tais que $[f] \in L^\infty(X, E)$, $[f_n] \in L^\infty(X, E)$ e $[f_n] \rightarrow [f]$ em $L^\infty(X, E)$, então $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre.¹²²

Dem: Uma vez que uma sucessão convergente é sempre uma sucessão de Cauchy, o resultado ficará provado se mostrarmos que, para cada sucessão de Cauchy de elementos $[f_n] \in L^\infty(X, E)$, existe $f \in \text{Mens}(X, E)$ tal que $[f] \in L^\infty(X, E)$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre e $[f_n] \rightarrow [f]$ em $L^\infty(X, E)$.

Consideremos então uma tal sucessão de Cauchy. Quaisquer que sejam os índices m e n , o facto de se ter

¹²²Neste aspeto $L^\infty(X, E)$ comporta-se um pouco melhor que os espaços $L^p(X, E)$, com $1 \leq p < +\infty$ (cf. III.2.9), uma vez que não é necessário considerar subsucessões.

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|[f_n] - [f_m]\|_\infty$$

quase sempre implica a existência de um conjunto mensurável $Y_{m,n}$, com $\mu(Y_{m,n}) = 0$, tal que $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|[f_n] - [f_m]\|_\infty$, para cada $x \in X \setminus Y_{m,n}$. Seja Y a união de todos os conjuntos $Y_{m,n}$, que é um conjunto mensurável com $\mu(Y) = 0$. Para cada $x \in X \setminus Y$, a sucessão dos $f_n(x)$ é uma sucessão de Cauchy de elementos de E , visto que, dado $\delta > 0$, existe n_0 tal que, sempre que $m, n \geq n_0$, $\|[f_n] - [f_m]\|_\infty < \delta$ e então tem-se também

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|[f_n] - [f_m]\|_\infty < \delta.$$

Podemos assim concluir que, para cada $x \in X \setminus Y$, a sucessão dos $f_n(x)$ converge em E e isso permite-nos definir uma aplicação topologicamente mensurável $f: X \rightarrow E$ por

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x), & \text{se } x \notin Y \\ 0, & \text{se } x \in Y \end{cases}$$

tendo-se, em particular, por construção, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre. Para além disso, dado $\delta > 0$ e escolhendo n_0 como anteriormente, vemos que, para cada $x \in X \setminus Y$ e $m \geq n_0$, passando ao limite em n a desigualdade $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \delta$, tem-se $\|f(x) - f_m(x)\| \leq \delta$, portanto δ é um majorante essencial da aplicação que a x associa $\|f(x) - f_m(x)\|$, o que implica que $[f] - [f_m] \in L^\infty(X, E)$, portanto também

$$[f] = ([f] - [f_m]) + [f_m] \in L^\infty(X, E),$$

e que $\|[f] - [f_m]\|_\infty \leq \delta$. Ficou assim provado que $[f_m] \rightarrow [f]$ em $L^\infty(X, E)$. \square

Os resultados III.2.12 e III.2.13 também admitem extensões aos casos limites em que intervém a norma $\|\cdot\|_\infty$.

III.2.23 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, com $0 < \mu(X) < +\infty$ e $1 \leq p$.

Tem-se então:

a) Se $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável, então

$$\|\varphi\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_\infty.$$

b) Se E um espaço de Banach tem-se $L^\infty(X, E) \subset L^p(X, E)$ e, para cada $[f] \in L^\infty(X, E)$,

$$\|[f]\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|[f]\|_\infty$$

(comparar com as desigualdades que se obtêm a partir daquelas em III.2.12, substituindo formalmente q por $+\infty$).

Dem: Basta justificarmos a desigualdade em a), uma vez que b) resulta então

de aplicar a) à função mensurável $\varphi(x) = \|f(x)\|$. Uma vez que se tem quase sempre $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty$, portanto também quase sempre $\varphi(x)^p \leq \|\varphi\|_\infty^p$, concluímos que

$$\int_X \varphi(x)^p d\mu(x) \leq \int_X \|\varphi\|_\infty^p d\mu(x) = \|\varphi\|_\infty^p \mu(X),$$

o que implica que $\|\varphi\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_\infty$. □

III.2.24 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $1 \leq p \leq r$. Tem-se então:

a) Se $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função mensurável, então

$$\|\varphi\|_r \leq \max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_\infty\}.$$

b) Se E é um espaço de Banach

$$L^p(X, E) \cap L^\infty(X, E) \subset L^r(X, E)$$

e, para cada $[f] \in L^p(X, E) \cap L^\infty(X, E)$,

$$\|[f]\|_r \leq \max\{\|[f]\|_p, \|[f]\|_\infty\}$$

(comparar com as desigualdades que se obtêm a partir daquelas em III.2.13, substituindo formalmente q por $+\infty$).

Dem: Podemos afastar o caso trivial em que $p = r$ e basta justificarmos a desigualdade em a), uma vez que b) resulta então de aplicar a) à função mensurável $\varphi(x) = \|f(x)\|$. O facto de se ter $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty$ quase sempre implica que se tem também

$$\varphi(x)^r = \varphi(x)^p \varphi(x)^{r-p} \leq \varphi(x)^p \|\varphi\|_\infty^{r-p}$$

quase sempre, donde

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(x)^r d\mu(x) &\leq \int_X \varphi(x)^p \|\varphi\|_\infty^{r-p} d\mu(x) = \\ &= \|\varphi\|_\infty^{r-p} \|\varphi\|_p^p \leq \\ &\leq \max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_\infty\}^{r-p} \times \max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_\infty\}^p = \\ &= \max\{\|[f]\|_p, \|[f]\|_\infty\}^r \end{aligned}$$

e portanto

$$\|\varphi\|_r = \left(\int_X \varphi(x)^r d\mu(x) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \max\{\|\varphi\|_p, \|\varphi\|_\infty\}. \quad \square$$

III.2.25 (**O espaço ℓ^∞**) Sejam E um espaço de Banach e J um conjunto, para o qual consideramos a medida de contagem ν na σ -álgebra de todas as partes de J . No seguimento do que dissémos em III.2.14, notamos

$$\ell^\infty(J, E) \subset \mathbf{Mens}(J, E)$$

o subespaço vetorial cuja imagem pelo isomorfismo natural é o subespaço vetorial $L^\infty(J, E) \subset \text{Mens}(J, E)$, espaço vetorial onde temos uma norma, definida por transporte, por

$$\|f\|_\infty = \|[f]\|_\infty = \sup_{j \in J} \|f(j)\| \leq \sup_{j \in J} \|f(j)\|,$$

e as propriedades deste espaço vetorial normado, em particular o facto de se tratar de um espaço de Banach quando E é um espaço de Banach, deduzem-se trivialmente, por isomorfismo, das correspondentes propriedades de $L^\infty(J, E)$.

Observe-se que, em geral, e ao contrário do que acontecia com os espaços $\ell^p(J, E)$ com $1 \leq p < +\infty$, não podemos afirmar que $\ell^\infty(J, E)$ seja constituído por todas as aplicações $f: J \rightarrow E$ tais que $\sup_{j \in J} \|f(j)\| < +\infty$,

mas apenas por aquelas que, além disso, são tais que $f(J) \subset E$ seja separável. Esta condição suplementar não precisa, no entanto, de ser explicitamente exigida, por ser verificada automaticamente, em dois casos particulares, frequentes na prática: Aquele em que J é contável, e aquele em que o espaço de Banach E é, ele próprio, separável.

O resultado que examinamos em seguida é um teorema de densidade em $L^p(X, E)$ que não é válido no caso limite $p = \infty$.

III.2.26 (Teorema de densidade) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Banach. Vamos notar $St(X, E) \subset \text{Mens}(X, E)$ o conjunto das classes de equivalência $[f]$ com $f: X \rightarrow E$ aplicação em escada (cf. II.2.16)¹²³, conjunto que constitui trivialmente um subespaço vetorial. Para cada real p com $1 \leq p < +\infty$, tem-se então que $St(X, E)$ é um subespaço vetorial denso do espaço de Banach $L^p(X, E)$.¹²⁴

Dem: Se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação em escada, podemos considerar uma família finita $(X_j)_{j \in J}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que em cada X_j a aplicação f tome o valor constante $w_j \in E$ e sabemos que, sendo J_0 o conjunto dos índices j tais que $\mu(X_j) < +\infty$, tem-se então $w_j = 0$, para cada $j \in J \setminus J_0$. Sendo $1 \leq p < +\infty$, tem-se então que a função $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|f(x)\|^p$ é simples, tomando o valor constante $\|w_j\|^p$ em cada X_j , pelo que

$$\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) = \sum_{j \in J} \mu(X_j) \|w_j\|^p = \sum_{j \in J_0} \mu(X_j) \|w_j\|^p < +\infty.$$

¹²³A designação inglesa para as aplicações em escada é “step maps”.

¹²⁴Apesar de $St(X, E)$ também estar trivialmente contido em $L^\infty(X, E)$, não podemos afirmar, em geral, que seja denso neste espaço. Ver, a propósito o exercício III.2.6, mais adiante.

Provamos assim que $St(X, E) \subset L^p(X, E)$.

Seja agora $[f] \in L^p(X, E)$. Tendo em conta II.2.29, podemos considerar uma sucessão de aplicações simples $f_n: X \rightarrow E$ tais que, para cada $x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n é uma aplicação em escada, e portanto $[f_n] \in St(X, E)$, uma vez que, sendo $(X_j)_{j \in J}$ uma partição adaptada a f_n (cf. II.2.17), com f_n a tomar o valor constante w_j em X_j , do facto de se ter

$$\sum_{j \in J} \mu(X_j) \|w_j\|^p = \int_X \|f_n(x)\|^p d\mu(x) \leq 2^p \int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) < +\infty$$

podemos concluir que $w_j = 0$ para cada $j \in J \setminus J_0$. Em particular, tem-se $[f_n] \in L^p(X, E)$ e de se ter, para cada $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\|^p \rightarrow 0$, com

$$\|f_n(x) - f(x)\|^p \leq (\|f_n(x)\| + \|f(x)\|)^p \leq 3^p \|f(x)\|^p,$$

e

$$\int_X 3^p \|f(x)\|^p d\mu(x) = 3^p \int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) < +\infty,$$

deduzimos, pelo teorema da convergência dominada, que

$$\|[f_n] - [f]\|_p = \left(\int_X \|f_n(x) - f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0,$$

portanto que $[f_n] \rightarrow [f]$ em $L^p(X, E)$. □

No caso em que, no contexto do resultado precedente, a σ -álgebra \mathcal{M} é a gerada por um seminanel \mathcal{S} de partes de X onde μ toma valores finitos e é σ -finita, é por vezes útil considerar um conjunto mais pequeno de aplicações em escada, que é ainda um subespaço vetorial, tal que o correspondente conjunto das classes de equivalência é ainda denso em $L^p(X, E)$.

III.2.27 Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um seminanel de partes de X e E um espaço de Banach. Vamos dizer que uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é \mathcal{S} -simples se existir uma família finita $(B_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois tal que para cada $x \in B_j$, $f(x)$ tenha um valor constante w_j e que $f(x) = 0$, para cada x não pertencente à união B dos B_j .

Um contexto frequente em que se aplica a definição precedente é aquele em que (X, \mathcal{M}, μ) é um espaço de medida, e o seminanel \mathcal{S} está contido em \mathcal{M} e é tal que $\mu(B) < +\infty$ para cada $B \in \mathcal{S}$. Tendo em conta II.2.22, com a família formada pelos B_j e por $X \setminus B$, vemos que, nesse contexto, uma aplicação \mathcal{S} -simples é, em particular, uma aplicação em escada.

III.2.28 (**Propriedades algébricas das aplicações \mathcal{S} -simples**) Sejam X um conjunto, \mathcal{S} um seminanel de partes de X e E um espaço de Banach. Então

a) Se $f: X \rightarrow E$ e $g: X \rightarrow E$ são duas aplicações \mathcal{S} -simples, então existe uma família finita $(B_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois tal que para cada $x \in B_j$, $f(x)$ e $g(x)$ tenham valores constantes w_j e z_j e que $f(x) = g(x) = 0$, para cada x não pertencente à união B dos B_j .

b) A classe das aplicações \mathcal{S} -simples $f: X \rightarrow E$ é um subespaço vetorial do espaço de todas as aplicações $X \rightarrow E$.

Dem: **a)** Consideremos duas famílias finitas de conjuntos de \mathcal{S} , em cada uma disjuntos dois a dois, $(A_j)_{j \in J}$ e $(B_k)_{k \in K}$ tais que $f(x) = w_j$ para cada $x \in A_j$, e $g(x) = z_k$ para cada $x \in B_k$ e que, notando A e B as uniões dos A_j e dos B_k , respectivamente, $f(x) = 0$ para cada $x \notin A$ e $g(x) = 0$ para cada $x \notin B$. Tendo em conta I.3.6, para cada $j \in J$, $A_j \setminus B$ é a união de uma família finita de conjuntos disjuntos dois a dois $C_{j,i} \in \mathcal{S}$ e para cada $k \in K$, $B_k \setminus A$ é a união de uma família finita de conjuntos disjuntos dois a dois $D_{k,i} \in \mathcal{S}$. Podemos então considerar a família finita de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois constituída pelos $A_j \cap B_k$, onde $f(x)$ e $g(x)$ tomam os valores constantes w_j e z_k , pelos $C_{j,i}$, onde $f(x)$ e $g(x)$ tomam os valores constantes w_j e 0, e pelos $D_{k,i}$, onde $f(x)$ e $g(x)$ tomam os valores constantes 0 e z_k e constatamos que $f(x)$ e $g(x)$ tomam os valores constantes 0 fora da união finita de todos estes conjuntos de \mathcal{S} , o que mostra que esta família finita verifica as condições pedidas.

b) A aplicação identicamente 0 é em \mathcal{S} -escada, como se constata se considerarmos a família vazia de conjuntos de \mathcal{S} ou, alternativamente, uma família formada por um único conjunto \emptyset . É imediato que, se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação em \mathcal{S} -escada, o mesmo acontece a af , para cada escalar a . Por fim, se $f, g: X \rightarrow E$ são duas aplicações em \mathcal{S} -escada, então, considerando uma família finita $(B_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{S} nas condições de a), vemos que $f(x) + g(x) = w_j + z_j$ para $x \in B_j$ e que $f(x) + g(x) = 0$, para cada x não pertencente à união B dos B_j . \square

III.2.29 (Lema de densidade) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ um semianel σ -total (cf. I.4.3) com $\mu(B) < +\infty$ para cada $B \in \mathcal{S}$, e E um espaço de Banach. Suponhamos ainda que \mathcal{M} é a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} . Para cada $A \in \mathcal{M}$, com $\mu(A) < +\infty$, e cada $\delta > 0$ existe então uma família finita $(B_j)_{j \in I}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois tais que, sendo $B = \bigcup B_j$,

$$\int_X |\mathbb{I}_A(x) - \mathbb{I}_B(x)| d\mu(x) < \delta.$$

Dem: Tendo em conta o facto de μ ser o prolongamento de Hahn da sua restrição a \mathcal{S} (cf. I.4.12) e a caracterização desse prolongamento em I.4.8, podemos considerar uma família contável $(B_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois tal que $A \subset \bigcup B_j$ e

$$(1) \quad \sum_{j \in J} \mu(B_j) < \mu(A) + \frac{\delta}{2}.$$

Seja $I \subset J$ finito tal que

$$\sum_{j \in I} \mu(B_j) > \left(\sum_{j \in J} \mu(B_j) \right) - \frac{\delta}{2},$$

isto é,

$$(2) \quad \sum_{j \in J \setminus I} \mu(B_j) < \frac{\delta}{2}.$$

Seja B a união dos B_j , com $j \in I$.

Tendo em conta as fórmulas (1) e (2), vem

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus A) &\leq \mu\left(\bigcup_{j \in J} B_j \setminus A\right) = \sum_{j \in J} \mu(B_j) - \mu(A) < \frac{\delta}{2}, \\ \mu(A \setminus B) &\leq \mu\left(\bigcup_{j \in J} B_j \setminus B\right) = \mu\left(\bigcup_{j \in J \setminus I} B_j\right) < \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

e, reparando que, para cada $x \in X$,

$$|\mathbb{I}_A(x) - \mathbb{I}_B(x)| = \mathbb{I}_{A \setminus B}(x) + \mathbb{I}_{B \setminus A}(x)$$

(examinar o que sucede em cada um dos quatro casos que resultam de x poder pertencer ou não a A e pertencer ou não a B), deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_X |\mathbb{I}_A(x) - \mathbb{I}_B(x)| d\mu(x) &= \int_X \mathbb{I}_{A \setminus B}(x) + \mathbb{I}_{B \setminus A}(x) d\mu(x) = \\ &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) < \delta. \quad \square \end{aligned}$$

III.2.30 (Segundo teorema de densidade) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ um semianel σ -total com $\mu(B) < +\infty$ para cada $B \in \mathcal{S}$, e E um espaço de Banach. Suponhamos ainda que \mathcal{M} é a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} . Para cada real p com $1 \leq p < +\infty$, tem-se então que o conjunto $S_{\mathcal{S}}(X, E) \subset St(X, E)$, das classes de equivalência $[f]$ de aplicações \mathcal{S} -simples $f: X \rightarrow E$, é um subespaço vetorial denso do espaço de Banach $L^p(X, E)$.

Dem: Tendo em conta o teorema de densidade III.2.26, basta mostrarmos que toda a classe de equivalência $[f] \in St(X, E)$ é aderente em $L^p(X, E)$ a $S_{\mathcal{S}}(X, E)$ e, uma vez que a aderência de um subespaço vetorial é ainda um subespaço vetorial e que, como foi referido em II.2.18, toda a aplicação em escada $f: X \rightarrow E$ é uma soma finita de aplicações da forma $x \mapsto \mathbb{I}_A(x)w$, com $w \neq 0$, $A \in \mathcal{M}$ e $\mu(A) < +\infty$, bastará ainda mostrarmos que a classe

de equivalência de uma aplicação desta forma é aderente a $S_S(X, E)$. Consideremos então $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta o lema III.2.29, podemos considerar uma família finita $(B_j)_{j \in I}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois tal que, sendo B a sua união,

$$\int_X |\mathbb{I}_A(x) - \mathbb{I}_B(x)| d\mu(x) < \frac{\delta^p}{\|w\|^p}.$$

Reparamos agora que a aplicação $X \rightarrow E, x \mapsto \mathbb{I}_B(x)w$, é uma aplicação em \mathcal{S} -escada, por tomar o valor constante w em cada $B_j \in S$ e ser nula fora da sua união B e que se tem

$$\int_X \|\mathbb{I}_A(x)w - \mathbb{I}_B(x)w\|^p d\mu(x) = \int_X |\mathbb{I}_A(x) - \mathbb{I}_B(x)| \|w\|^p d\mu(x) < \delta^p,$$

o que implica que

$$\|\mathbb{I}_A w - \mathbb{I}_B w\|_p = \left(\int_X |\mathbb{I}_A(x) - \mathbb{I}_B(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \delta,$$

como queríamos. □

No remanescente desta secção e na próxima vamos utilizar de modo essencial a definição e propriedades básicas dos *espaços de Hilbert*, isto é, dos espaços vetoriais, reais ou complexos, munidos de produto interno e que são completos para a norma associada a esse produto interno. O leitor que não se sinta à vontade com estes poderá consultar qualquer texto básico de Análise Funcional, por exemplo [9].

III.2.31 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e E um espaço de Hilbert, onde notamos $\langle w, z \rangle$ o produto interno de dois vetores de E e $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$ a norma associada. Tem-se então que a correspondente norma $\|\cdot\|_2$ do espaço de Banach $L^2(X, E)$ é a associada a um produto interno deste espaço, nomeadamente o definido por

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x),$$

para $[f], [g] \in L^2(X, E)$. Em particular $L^2(X, E)$ com este produto interno, que é o que se considera implicitamente, é um espaço de Hilbert.

Dem: Notemos \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , o corpo dos escalares de E . Se $f, g \in \mathbf{Mens}(X, E)$, são tais que $[f], [g] \in L^2(X, E)$, vem topologicamente mensurável, por II.2.9, a aplicação $X \rightarrow \mathbb{K}$, que a x associa $\langle f(x), g(x) \rangle$, e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle f(x), g(x) \rangle| \leq \|f(x)\| \|g(x)\| \leq \|f(x)\|^2 + \|g(x)\|^2$$

(para a segunda desigualdade, reparar que $\|f(x)\| \|g(x)\|$ é menor ou igual a

uma das duas parcelas do segundo membro, nomeadamente a correspondente ao maior dos dois números $\|f(x)\|$ e $\|g(x)\|$, pelo que

$$\int_X |\langle f(x), g(x) \rangle| d\mu(x) \leq \int_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) + \int_X \|g(x)\|^2 d\mu(x) < +\infty,$$

e portanto a aplicação topologicamente mensurável acima referida é mesmo integrável. Verificamos agora facilmente que fica bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned} L^2(X, E) \times L^2(X, E) &\rightarrow \mathbb{K}, \\ ([f], [g]) &\mapsto \langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x), \end{aligned}$$

(isto é, que o integral não se altera quando se substitui f e g por aplicações topologicamente mensuráveis iguais quase sempre a estas) e que esta aplicação é linear na primeira variável e antilinear na segunda e verifica a condição $\langle [g], [f] \rangle = \overline{\langle [f], [g] \rangle}$.¹²⁵ Reparamos agora que

$$\begin{aligned} \|[f]\|_2 &= \left(\int_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_X \langle f(x), f(x) \rangle d\mu(x)} = \\ &= \sqrt{\langle [f], [f] \rangle}, \end{aligned}$$

pelo que, uma vez que já sabemos que a aplicação $[f] \mapsto \|[f]\|_2$ é uma norma, concluímos que temos um produto interno, cuja norma associada é a norma $\|\cdot\|_2$. O facto de termos um espaço de Hilbert resulta de que já sabemos que $L^2(X, E)$, com a norma $\|\cdot\|_2$, é completo. \square

III.2.32 Como casos particulares muito frequentes na prática, temos aqueles em que o espaço de Banach E é \mathbb{R} ou \mathbb{C} , com os produtos internos definidos respetivamente por $\langle a, b \rangle = ab$ e por $\langle a, b \rangle = a\bar{b}$, casos em que obtemos respetivamente as seguintes fórmulas para os produtos internos de $L^2(E, \mathbb{R})$ e $L^2(E, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle [f], [g] \rangle &= \int_X f(x) g(x) d\mu(x), \\ \langle [f], [g] \rangle &= \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x). \end{aligned}$$

III.2.33 No mesmo espírito que em III.2.14, no caso em que E é um espaço de Hilbert e J é um conjunto, a norma $\|\cdot\|_2$ em $\ell^2(J, E)$ provém de um produto interno, nomeadamente o definido por

¹²⁵No caso em que o corpo dos escalares é \mathbb{R} , consideramos “antilinear” como sinónimo de “linear”, tal como interpretamos, mais geralmente, o conjugado \bar{a} de um real a como sendo o próprio a .

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j \in J} \langle f(j), g(j) \rangle,$$

e portanto $\ell^2(J, E)$ é também um espaço de Hilbert.

Tendo em vista aplicações adiante, examinamos agora o modo trivial como uma multiplicação contínua envolvendo três espaços de Banach induz uma multiplicação contínua envolvendo espaços do tipo L^p correspondentes. Começamos, para isso, por uma aplicação simples da desigualdade de Hölder, envolvendo funções positivas.

III.2.34 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $\varphi, \psi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ aplicações mensuráveis e consideremos a correspondente aplicação mensurável $\varphi \times \psi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Tem-se então

a) Se $p > 1$, $q > 1$ e $r \geq 1$ são números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, tem-se

$$\|\varphi \times \psi\|_r \leq \|\varphi\|_p \times \|\psi\|_q.$$

b) Tem-se

$$\|\varphi \times \psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \times \|\psi\|_\infty.$$

c) Se $p \geq 1$ é um número real, então

$$\|\varphi \times \psi\|_p \leq \|\varphi\|_\infty \times \|\psi\|_p.$$

Dem: a) Tem-se $\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1$, em particular $p/r > 1$ e $q/r > 1$ pelo que, aplicando a desigualdade de Hölder (cf. III.1.17) às funções mensuráveis $x \mapsto \varphi(x)^r$ e $x \mapsto \psi(x)^r$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_X (\varphi(x)\psi(x))^r d\mu(x) &\leq \\ &\leq \left(\int_X (\varphi(x)^r)^{p/r} d\mu(x) \right)^{r/p} \left(\int_X (\psi(x)^r)^{q/r} d\mu(x) \right)^{r/q} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\varphi \times \psi\|_r &= \left(\int_X (\varphi(x)\psi(x))^r d\mu(x) \right)^{1/r} \leq \\ &\leq \left(\int_X \varphi(x)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \left(\int_X \psi(x)^q d\mu(x) \right)^{1/q} = \|\varphi\|_p \times \|\psi\|_q. \end{aligned}$$

b) Uma vez que $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty$ quase sempre e $\psi(x) \leq \|\psi\|_\infty$ quase sempre, tem-se $\varphi(x) \times \psi(x) \leq \|\varphi\|_\infty \times \|\psi\|_\infty$ quase sempre, donde a desigualdade.

c) O mais simples é talvez adaptar a demonstração de III.2.18, que não é mais do que o caso particular $p = 1$ do enunciado. Ora, sendo $Y \in \mathcal{M}$ com $\mu(Y) = 0$ tal que $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty$ para cada $x \in X \setminus Y$, tem-se, para cada

$x \in X \setminus Y$,

$$\varphi(x)^p \psi(x)^p \leq \|\varphi\|_\infty^p \psi(x)^p,$$

donde

$$\begin{aligned} \int_X (\varphi(x)\psi(x))^p d\mu(x) &= \int_{X \setminus Y} (\varphi(x)\psi(x))^p d\mu(x) \leq \\ &\leq \int_{X \setminus Y} \|\varphi\|_\infty^p \psi(x)^p d\mu(x) = \\ &= \|\varphi\|_\infty^p \int_X \psi(x)^p d\mu(x) \end{aligned}$$

e portanto

$$\|\varphi \times \psi\|_p = \left(\int_X (\varphi(x)\psi(x))^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_p. \quad \square$$

III.2.35 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$,

$$w \times z = \xi(w, z) \in H$$

(comparar com II.2.9). Seja $M \geq 0$ tal que, para cada $y \in F$ e $z \in G$ se tenha $\|\xi(y, z)\| \leq M\|y\|\|z\|$.¹²⁶ Tem-se então:

a) Dadas aplicações topologicamente mensuráveis $f: X \rightarrow F$ e $g: X \rightarrow G$, é também topologicamente mensurável a aplicação $f \times g: X \rightarrow H$ definida por $f \times g(x) = f(x) \times g(x)$ e fica então bem definida uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \text{Mens}(X, F) \times \text{Mens}(X, G) &\rightarrow \text{Mens}(X, H) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f] \times [g] = [f \times g]. \end{aligned}$$

b) Se $p > 1$, $q > 1$ e $r \geq 1$ são números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, obtém-se, por restrição da aplicação bilinear em a), uma aplicação bilinear contínua

$$L^p(X, F) \times L^q(X, G) \rightarrow L^r(X, H),$$

que verifica

$$\|[f] \times [g]\|_r \leq M\|[f]\|_p\|[g]\|_q.$$

c) Por restrição da aplicação bilinear em a), obtém-se uma aplicação bilinear contínua

¹²⁶A existência de um tal M é um resultado bem conhecido de topologia (cf., por exemplo [9]).

$$L^\infty(X, F) \times L^\infty(X, G) \rightarrow L^\infty(X, H),$$

que verifica

$$\|[f] \times [g]\|_\infty \leq M\|[f]\|_\infty\|[g]\|_\infty.$$

d) Se $p \geq 1$ é um número real, obtém-se, por restrição da aplicação bilinear em a), duas aplicações bilineares contínuas

$$\begin{aligned} L^\infty(X, F) \times L^p(X, G) &\rightarrow L^p(X, H), \\ L^p(X, F) \times L^\infty(X, G) &\rightarrow L^p(X, H), \end{aligned}$$

que verificam respetivamente

$$\begin{aligned} \|[f] \times [g]\|_p &\leq M\|[f]\|_\infty\|[g]\|_p, \\ \|[f] \times [g]\|_p &\leq M\|[f]\|_p\|[g]\|_\infty \end{aligned}$$

Dem: a) O facto de $f \times g: X \rightarrow H$ ser topologicamente mensurável já foi estabelecido em II.2.9 e o facto de termos uma aplicação bem definida, $([f], [g]) \mapsto [f \times g]$ resulta de que, se $f(x) = \hat{f}(x)$ quase sempre e $g(x) = \hat{g}(x)$ quase sempre, então $f(x) \times g(x) = \hat{f}(x) \times \hat{g}(x)$ quase sempre. A bilinearidade da aplicação referida é de verificação trivial.

b) Temos uma consequência da alínea a) de III.2.34, uma vez que, pondo $\varphi(x) = \|f(x)\|$ e $\psi(x) = \|g(x)\|$, vem

$$\begin{aligned} \|[f] \times [g]\|_r &= \left(\int_X \|f(x) \times g(x)\|^r \right)^{1/r} \leq \left(\int_X M^r (\varphi(x)\psi(x))^r \right)^{1/r} = \\ &= M\|\varphi \times \psi\|_r \leq M\|\varphi\|_p\|\psi\|_q = M\|[f]\|_p\|[g]\|_q. \end{aligned}$$

c) Temos uma consequência da alínea b) de III.2.34, uma vez que, pondo $\varphi(x) = \|f(x)\|$ e $\psi(x) = \|g(x)\|$, vem, para cada $x \in X$

$$\|f(x) \times g(x)\| \leq M\varphi(x)\psi(x)$$

e portanto, quase sempre

$$\|f(x) \times g(x)\| \leq M\|\varphi \times \psi\|_\infty \leq M\|\varphi\|_\infty\|\psi\|_\infty = M\|[f]\|_\infty\|[g]\|_\infty.$$

d) Examinamos apenas a primeira restrição referida, uma vez que a segunda tem uma justificação análoga ou, alternativamente, resulta de aplicar a primeira, considerando a aplicação bilinear $G \times F \rightarrow H$, $(z, w) \mapsto \xi(w, z)$. Temos, neste caso, uma consequência da alínea c) de III.2.34, uma vez que, pondo $\varphi(x) = \|f(x)\|$ e $\psi(x) = \|g(x)\|$, vem

$$\begin{aligned} \|[f] \times [g]\|_p &= \left(\int_X \|f(x) \times g(x)\|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_X M^p (\varphi(x)\psi(x))^p \right)^{1/p} = \\ &= M\|\varphi \times \psi\|_p \leq M\|\varphi\|_\infty\|\psi\|_p = M\|[f]\|_\infty\|[g]\|_p. \quad \square \end{aligned}$$

Exercícios

Ex III.2.1 Mostrar que, apesar de em III.2.5 termos apenas definido $L^p(X, E)$, como espaço vetorial normado, no caso em que $p \geq 1$, é possível definir, mais geralmente, mas apenas como subespaços vetoriais de $Mens(X, E)$, os espaços $L^p(X, E)$, com $p > 0$, pelo condição de os seus elementos serem as classes de equivalência $[f]$ tais que $\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) < +\infty$.

Sugestão: Utilizar e justificar a desigualdade $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, para $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Ex III.2.2 Sejam J um conjunto e E um espaço de Banach.

a) Mostrar que se $1 \leq p < +\infty$, então $\ell^p(J, E) \subset \ell^\infty(J, E)$ e, para cada $f \in \ell^p(J, E)$, $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$ (reparar que temos uma inclusão no sentido contrário ao da obtida, para os espaços $L^p(X, E)$ e $L^\infty(X, E)$, no caso em que $\mu(X) < +\infty$, em III.2.23).

b) Deduzir de a) que, se $1 \leq p \leq q$, tem-se $\ell^p(J, E) \subset \ell^q(J, E)$ e, para cada $f \in \ell^p(X, E)$, $\|f\|_q \leq \|f\|_p$ (reparar que temos uma inclusão no sentido contrário ao da obtida, para os espaços $L^p(X, E)$ e $L^q(X, E)$, no caso em que $\mu(X) < +\infty$, em III.2.12). **Sugestão:** Ter em conta III.2.24.

c) No caso em que J é um conjunto finito com N elementos, mostrar que os espaços $\ell^p(J, E)$, com $1 \leq p \leq \infty$, coincidem todos com o conjunto de todas as aplicações $f: J \rightarrow E$ e que as diferentes normas $\|\cdot\|_p$ são todas equivalentes. Para cada par destas normas encontrar constantes que permitam majorar cada uma delas por um múltiplo da outra.

Ex III.2.3 **a)** Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq +\infty$. Sejam $f_n: X \rightarrow E$ topologicamente mensuráveis, tais que $[f_n] \in L^p(X, E)$ e que exista $f: X \rightarrow E$ topologicamente mensurável com $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre. Mostrar que, se a sucessão dos elementos $[f_n]$ for convergente em $L^p(X, E)$, então $[f] \in L^p(X, E)$ e $[f]$ é o limite em $L^p(X, E)$ daquela sucessão. **Sugestão:** Ter em conta a alínea b) III.2.9, no caso em que $p < +\infty$, e III.2.22, no caso em que $p = \infty$.

b) Considerando a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} , dar um exemplo de uma sucessão de elementos de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, com uma sucessão de representantes convergindo em todos os pontos para o representante de um elemento de $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e que não convirja neste espaço normado.

Sugestão: O limite pode ser 0 e para funções pode-se tomar funções indicatrizes de conjuntos convenientes.

c) Considerar no conjunto dos pares $(n, i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tais que $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq i < n$, a ordem lexicográfica usual e reparar que, como se verifica facilmente, existe uma única bijeção estritamente crescente ξ de \mathbb{N} sobre aquele conjunto de pares. Para cada um daqueles pares (n, i) , seja

$f_{(n,i)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função indicatriz do intervalo $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f_{\xi(k)}$. Mostrar que, para cada $1 \leq p < +\infty$, a sucessão dos $[f_k]$ converge para $[0]$ em $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e que, apesar disso, não é verdade que $f_k(x)$ convirja para 0 quase sempre.

Ex III.2.4 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e $1 \leq p, q \leq +\infty$. Sejam $f_n: X \rightarrow E$ topologicamente mensuráveis, tais que $[f_n] \in L^p(X, E) \cap L^q(X, E)$ e que existam $[f] \in L^p(X, E)$ e $[\widehat{f}] \in L^q(X, E)$ com $[f_n] \rightarrow [f]$ e $[f_n] \rightarrow [\widehat{f}]$, em $L^p(X, E)$ e em $L^q(X, E)$, respectivamente. Mostrar que $[f] = [\widehat{f}]$, em particular $[f]$ pertence a $L^p(X, E) \cap L^q(X, E)$. **Sugestão:** Ter em conta a alínea b) III.2.9 e III.2.22.

Ex III.2.5 ($\|\varphi\|_\infty$ como um limite) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e seja $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma aplicação mensurável.

a) Se $\|\varphi\|_\infty = 0$, reparar que se tem trivialmente $\|\varphi\|_p = 0$, para todo o $0 < p < +\infty$.

b) Se $\|\varphi\|_\infty = +\infty$, mostrar que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\varphi\|_p = +\infty.$$

Sugestão: Fixado $R > 0$, considerar o conjunto Y dos pontos $x \in X$ tais que $\varphi(x) > R + 1$, reparar que $\mu(Y) > 0$, mostrar que

$$\|\varphi\|_p \geq (R + 1)\mu(Y)^{1/p}$$

e concluir que, para p suficientemente grande, $\|\varphi\|_p > R$.

c) Se $0 < \|\varphi\|_\infty < +\infty$ e $\mu(X) < +\infty$, mostrar que, como em a) e b),

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\varphi\|_p = \|\varphi\|_\infty.$$

Sugestão: Mostrar, por um lado, que, para cada p ,

$$\|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_\infty \mu(X)^{1/p},$$

onde $\mu(X)^{1/p} \rightarrow 1$, e, por outro lado, fixado $\delta > 0$, considerar o conjunto Y dos pontos $x \in X$ tais que $\varphi(x) > \|\varphi\|_\infty - \delta/2$, reparar que $\mu(Y) > 0$, mostrar que

$$\|\varphi\|_p \geq (\|\varphi\|_\infty - \delta/2)\mu(Y)^{1/p}$$

e concluir que, para p suficientemente grande, $\|\varphi\|_p > \|\varphi\|_\infty - \delta$.

c') Suponhamos, como em c), que $0 < \|\varphi\|_\infty < +\infty$ mas, em vez da hipótese $\mu(X) < +\infty$, suponhamos a existência de $0 < r < +\infty$ tal que $\|\varphi\|_r < +\infty$. Mostrar que, ainda neste caso,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\varphi\|_p = \|\varphi\|_\infty.$$

Sugestão: Considerar uma nova medida μ' , já com $\mu'(X) < +\infty$, definida

por

$$\mu'(A) = \int_A \varphi(x)^r d\mu(x),$$

assinalar com uma linha as normas relativas a esta medida, mostrar que $\|\varphi\|'_\infty = \|\varphi\|_\infty$ (utilizar a última observação em II.1.28) e reparar que, para cada $p > r$,

$$\|\varphi\|_p = (\|\varphi\|'_{p-r})^{\frac{p-r}{p}}.$$

Ex III.2.6 a) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = +\infty$ e seja $E \neq \{0\}$ um espaço de Banach. Mostrar que $St(X, E)$ não é denso em $L^\infty(X, E)$ (comparar com III.2.26). **Sugestão:** Considerar uma aplicação $f: X \rightarrow E$ de valor constante $w \neq 0$.

b) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$ e seja E um espaço de Banach de dimensão finita. Mostrar que $St(X, E)$ é denso em $L^\infty(X, E)$. **Sugestão:** Ter em conta o exercício II.2.10.

Ex III.2.7 (**Lema de Riemann-Lebesgue**) Sejam E um espaço de Banach, $a \in \mathbb{R}$ fixado e $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ uma aplicação integrável.

a) Mostrar que se pode definir uma aplicação $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow E$ por

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) \sin(ts + a) ds$$

e que se tem $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$.

Sugestão: Começar por estabelecer o resultado, calculando efetivamente o integral, no caso em que f é o produto por um vector de E da função indicatriz de um intervalo $[b, c]$, com $b < c$ em \mathbb{R} , e deduzir daí que o resultado é ainda válido no caso em que f é uma *aplicação simples de intervalo*, isto é, uma aplicação S -simples, onde S é o semianel dos intervalos daquele tipo. Utilizar então o teorema de densidade em III.2.30 para concluir o resultado para uma aplicação integrável f arbitrária.

b) Deduzir de a) que se tem também $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$, onde

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) \cos(ts + a) ds.$$

Sugestão: Reparar que $\cos(ts + a) = -\sin(ts + a + \pi)$.

c) Deduzir de a) e b) que, no caso em que E é um espaço de Banach complexo, a transformada de Fourier $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow E$ de f , definida no exercício II.6.5, verifica a condição $\lim_{y \rightarrow \infty} \hat{f}(y) = 0$, conclusão que complementa a da alínea a) do referido exercício.

§3. Decomposição de Lebesgue e teorema de Radon-Nikodym.

III.3.1 Dado um espaço de medida (X, \mathcal{M}, μ) , diz-se que uma nova medida $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é μ -absolutamente contínua se se tem $\hat{\mu}(A) = 0$ para cada $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) = 0$.¹²⁷

III.3.2 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Relembremos que, como vimos em II.1.22, a cada função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ fica associada uma nova medida $\mu_{(\varphi)}$ definida na mesma σ -álgebra \mathcal{M} por

$$\mu_{(\varphi)}(A) = \int_A \varphi_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \int_X \varphi(x) \mathbb{I}_A(x) d\mu(x),$$

a qual é μ -absolutamente contínua.

III.3.3 Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida σ -finito. Tem-se então:

a) Se $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função mensurável, então a correspondente medida $\mu_{(\varphi)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é também σ -finita.

b) Sejam $\varphi, \psi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ duas funções mensuráveis. Tem-se então $\mu_{(\varphi)}(A) \leq \mu_{(\psi)}(A)$, para todo o $A \in \mathcal{M}$ se, e só se, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ quase sempre.

c) Em particular, tem-se $\mu_{(\varphi)} = \mu_{(\psi)}$ se, e só se, $\varphi(x) = \psi(x)$ quase sempre, isto é, $[\varphi] = [\psi]$ em $Mens(X, \mathbb{R})$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Vamos mostrar que, se $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função mensurável, então a medida $\mu_{(\varphi)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é σ -finita.

Subdem: Seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} com $\mu(X_j) < +\infty$ e $X = \bigcup X_j$. Para cada $j \in J$ e $n \in \mathbb{N}$, seja $X_{j,n} \in \mathcal{M}$,

$$X_{j,n} = \{x \in X_j \mid \varphi(x) \leq n\}.$$

Tem-se então que X é a união da família contável dos conjuntos $X_{j,n}$, $j \in J$ e $n \in \mathbb{N}$, para os quais se tem

$$\mu_{(\varphi)}(X_{j,n}) = \int_{X_{j,n}} \varphi(x) d\mu(x) \leq \int_{X_{j,n}} n d\mu(x) = n\mu(X_{j,n}) \leq n\mu(X_j) < +\infty$$

o que mostra que $\mu_{(\varphi)}$ é efetivamente σ -finita.

2) Suponhamos que $\varphi, \psi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ são aplicações mensuráveis tais que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ quase sempre. Mostremos que, para cada $A \in \mathcal{M}$, tem-se $\mu_{(\varphi)}(A) \leq \mu_{(\psi)}(A)$.

¹²⁷Para uma explicação para este nome, ver a conclusão do exercício I.2.6, válida com a restrição de a medida $\hat{\mu}$ ser finita.

Subdem: Para cada $A \in \mathcal{M}$, tem-se

$$\varphi(x)\mathbb{I}_A(x) \leq \psi(x)\mathbb{I}_A(x)$$

quase sempre, donde

$$\mu_{(\varphi)}(A) = \int_X \varphi(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x) \leq \int_X \psi(x)\mathbb{I}_A(x) d\mu(x) = \mu_{(\psi)}(A).$$

3) Suponhamos, reciprocamente, que, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu_{(\varphi)}(A) \leq \mu_{(\psi)}(A)$. Vamos mostrar que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ quase sempre.

Subdem: Uma vez que já verificámos que $\mu_{(\varphi)}$ é σ -finita, consideremos uma família contável $(A_k)_{k \in K}$ de conjuntos $A_k \in \mathcal{M}$ com $\mu_{(\varphi)}(A_k) < +\infty$ e $\bigcup A_k = X$. Para cada $k \in K$, seja $B_k \in \mathcal{M}$,

$$B_k = \{x \in A_k \mid \psi(x) < \varphi(x)\} = \{x \in A_k \mid \varphi(x) - \psi(x) > 0\}.$$

Tem-se então

$$\int_{B_k} \psi(x) d\mu(x) \leq \int_{B_k} \varphi(x) d\mu(x) = \mu_{(\varphi)}(B_k) \leq \mu_{(\psi)}(A_k) < +\infty,$$

o que mostra que as restrições a B_k das funções φ e ψ são integráveis, como funções $B_k \rightarrow \mathbb{R}$. Mas, por hipótese,

$$\int_{B_k} \varphi(x) d\mu(x) = \mu_{(\varphi)}(B_k) \leq \mu_{(\psi)}(B_k) = \int_{B_k} \psi(x) d\mu(x)$$

e portanto tem-se mesmo

$$\int_{B_k} \psi(x) d\mu(x) = \int_{B_k} \varphi(x) d\mu(x).$$

Uma vez que $\psi(x) < \varphi(x)$, para cada $x \in B_k$, deduzimos de II.2.44 que se tem $\psi(x) = \varphi(x)$ quase sempre em B_k , o que implica que se tem $\mu(B_k) = 0$. Podemos agora considerar $B = \bigcup_{k \in K} B_k$, tendo-se $B \in \mathcal{M}$, $\mu(B) = 0$ e, para cada $x \in X \setminus B$, tem-se $x \in A_k \setminus B_k$, para algum k , donde $\varphi(x) \leq \psi(x)$. Ficou assim provado que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ quase sempre.

4) O que vimos em 2) e 3) prova a conclusão de b). Para provarmos c) basta agora termos em conta b) e o facto de se ter $\mu_{(\varphi)} = \mu_{(\psi)}$ se, e só se, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu_{(\varphi)}(A) \leq \mu_{(\psi)}(A)$ e $\mu_{(\psi)}(A) \leq \mu_{(\varphi)}(A)$ e de se ter $\varphi(x) = \psi(x)$ quase sempre se, e só se, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ quase sempre e $\psi(x) \leq \varphi(x)$ quase sempre. \square

O lema que apresentamos em seguida, e que se baseia numa ideia utilizada numa demonstração no livro de Rudin [10], mostra que para cada medida σ -finita pode-se encontrar uma função mensurável estritamente positiva cuja medida associada seja finita. Ele pode ser útil em

situações em que se pretende generalizar às medidas σ -finitas resultados conhecidos para as medidas finitas (cf., por exemplo as demonstrações dos resultados III.3.9 e III.7.26 adiante).

III.3.4 (Lema de Rudin) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida σ -finita. Existe então uma medida finita $\mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ e uma função mensurável $\rho: X \rightarrow]0, +\infty[$ tais que $\mu' = \mu_{(\rho)}$, tendo-se então, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu'(A) = 0$ se, e só se $\mu(A) = 0$.

Dem: Podemos já afastar o caso trivial em que a medida μ é mesmo finita, caso em que tomamos simplesmente $\mu' = \mu$ e para ρ a função de valor constante 1. Seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} com $\mu(X_j) < +\infty$ e com união igual a X , podendo já supor-se, pelo lema I.2.11, que estes conjuntos são disjuntos dois a dois. Uma vez que $\mu(X) \neq 0$, e portanto os $\mu(X_j)$ não podem ser todos nulos, podemos também supor que se tem $\mu(X_j) > 0$ para cada j , se necessário substituindo um dos X_j de medida não nula pela sua união com todos aqueles que têm medida nula e deixando então de considerar estes últimos. Consideremos uma família $(\delta_j)_{j \in J}$ de números $\delta_j > 0$ tal que $\sum_{j \in J} \delta_j \leq 1$ (cf. o lema I.3.10) e definamos uma

aplicação mensurável $\rho: X \rightarrow]0, +\infty[$ pela condição de se ter $\rho(x) = \frac{\delta_j}{\mu(X_j)}$, para cada $x \in X_j$. Considerando a medida $\mu' = \mu_{(\rho)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, tem-se $\mu'(A) = 0$, sempre que $A \in \mathcal{M}$ verifica $\mu(A) = 0$ e vem

$$\mu'(X) = \int_X \rho(x) d\mu(x) = \sum_{j \in J} \int_{X_j} \frac{\delta_j}{\mu(X_j)} d\mu(x) = \sum_{j \in J} \delta_j \leq 1,$$

o que mostra que μ' é uma medida finita. Por fim, se $\mu'(A) = 0$, vem

$$0 = \int_A \rho(x) d\mu(x) = \int_X \mathbb{I}_A(x) \rho(x) d\mu(x),$$

o que implica que $\mathbb{I}_A(x) \rho(x) = 0$ quase sempre, donde, por ser $\rho(x) > 0$, $\mu(A) = 0$. \square

III.3.5 Seja (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável. Diz-se que duas medidas μ e $\hat{\mu}$, definidas em \mathcal{M} , são *mutuamente singulares*, ou que $\hat{\mu}$ é μ -singular, se existir $B \in \mathcal{M}$ com $\mu(B) = 0$ tal que $\hat{\mu}(X \setminus B) = 0$. Repare-se que, considerando $X \setminus B$ no lugar de B , constatamos que $\hat{\mu}$ e μ são então também mutuamente singulares, e portanto μ é $\hat{\mu}$ -singular.

Se (X, \mathcal{M}, μ) é um espaço de medida e $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma segunda medida, chama-se *decomposição de Lebesgue* de $\hat{\mu}$ (relativamente a μ) a um par ordenado de medidas $(\hat{\mu}_a, \hat{\mu}_s)$, definidas em \mathcal{M} , tal que $\hat{\mu}_a$ seja μ -absolutamente contínua, $\hat{\mu}_s$ seja μ -singular e $\hat{\mu} = \hat{\mu}_a + \hat{\mu}_s$.

III.3.6 Repare-se que a medida identicamente nula $\hat{\mu} = 0$ é simultaneamente μ -absolutamente contínua e μ -singular (tomar $B = \emptyset$). Reciprocamente, se

uma medida $\hat{\mu}$ é simultaneamente μ -absolutamente contínua e μ -singular, então $\hat{\mu} = 0$.

Dem: Sendo $B \in \mathcal{M}$ com $\mu(B) = 0$ e $\hat{\mu}(X \setminus B) = 0$, tem-se $\hat{\mu}(B) = 0$, e portanto

$$\hat{\mu}(X) = \hat{\mu}(B) + \hat{\mu}(X \setminus B) = 0. \quad \square$$

III.3.7 (Unicidade da decomposição de Lebesgue) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $(\hat{\mu}_a, \hat{\mu}_s)$ uma decomposição de Lebesgue de uma medida $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Sendo $B \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(B) = 0$ e $\hat{\mu}_s(X \setminus B) = 0$, tem-se então, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\hat{\mu}_a(A) = \hat{\mu}(A \setminus B), \quad \hat{\mu}_s(A) = \hat{\mu}(A \cap B).$$

Em consequência, se $(\hat{\mu}_a, \hat{\mu}_s)$ e $(\hat{\mu}'_a, \hat{\mu}'_s)$ são duas decomposições de Lebesgue duma mesma medida $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, então $\hat{\mu}_a = \hat{\mu}'_a$ e $\hat{\mu}_s = \hat{\mu}'_s$.

Dem: O facto de $\hat{\mu}_a$ ser μ -absolutamente contínua implica que $\hat{\mu}_a(B) = 0$. Para cada $A \in \mathcal{M}$, A é a união dos conjuntos disjuntos $A \cap B$ e $A \setminus B$ que pertencem a \mathcal{M} e estão respetivamente contidos em B e em $X \setminus B$, em particular verificam $\hat{\mu}_a(A \cap B) = 0$ e $\hat{\mu}_s(A \setminus B) = 0$, e portanto, por ser $\hat{\mu} = \hat{\mu}_a + \hat{\mu}_s$, vem

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_a(A) &= \hat{\mu}_a(A \cap B) + \hat{\mu}_a(A \setminus B) = \hat{\mu}_a(A \setminus B) + \hat{\mu}_s(A \setminus B) = \hat{\mu}(A \setminus B), \\ \hat{\mu}_s(A) &= \hat{\mu}_s(A \cap B) + \hat{\mu}_s(A \setminus B) = \hat{\mu}_s(A \cap B) + \hat{\mu}_a(A \cap B) = \hat{\mu}(A \cap B). \end{aligned}$$

No caso em que $(\hat{\mu}_a, \hat{\mu}_s)$ e $(\hat{\mu}'_a, \hat{\mu}'_s)$ são duas decomposições de Lebesgue duma mesma medida $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, podemos considerar $B, B' \in \mathcal{M}$ com $\mu(B) = 0$, $\mu(B') = 0$, $\hat{\mu}_s(X \setminus B) = 0$ e $\hat{\mu}'_s(X \setminus B') = 0$ e então, sendo $B'' = B \cup B'$, tem-se ainda $\mu(B'') = 0$, $\hat{\mu}_s(X \setminus B'') = 0$ e $\hat{\mu}'_s(X \setminus B'') = 0$ pelo que, pelo que vimos atrás, para cada $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_a(A) &= \hat{\mu}(A \setminus B'') = \hat{\mu}'_a(A), \\ \hat{\mu}_s(A) &= \hat{\mu}(A \cap B'') = \hat{\mu}'_s(A). \end{aligned} \quad \square$$

Seguindo o caminho atribuído a von Neumann em [10], vamos agora provar, no contexto das medidas σ -finitas, ao mesmo tempo a existência de uma decomposição de Lebesgue e o teorema de Radon-Nikodym, que garante que as medidas μ -absolutamente contínuas são apenas as da forma $\mu(\varphi)$, com $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ mensurável. Começamos por examinar o caso em que as medidas envolvidas são mesmo finitas.

III.3.8 (Lema — O caso particular das medidas finitas) Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$. Seja $\hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma medida tal que $\hat{\mu}(X) < +\infty$. Tem-se então:

a) (Lebesgue) Existe uma decomposição de Lebesgue $(\hat{\mu}_a, \hat{\mu}_s)$ de $\hat{\mu}$, relativamente a μ , necessariamente única, por III.3.7.

b) (Radon-Nikodym) No caso em que $\widehat{\mu}$ é μ -absolutamente contínua, existe uma aplicação mensurável $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\widehat{\mu} = \mu(\varphi)$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Notemos $\overline{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ a medida $\overline{\mu} = \widehat{\mu} + \mu$. Tem-se $\overline{\mu}(X) < +\infty$ e, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\widehat{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(A)$ e, se $\widehat{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$, então $\mu(A) = 0$.

Subdem: O facto de se ter $\overline{\mu}(X) < +\infty$ resulta de ser $\mu(X) < +\infty$ e $\widehat{\mu}(X) < +\infty$. Para cada $A \in \mathcal{M}$, a igualdade $\overline{\mu}(A) = \widehat{\mu}(A) + \mu(A)$ implica que $\widehat{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(A)$ e que, se $\widehat{\mu}(A) = \overline{\mu}(A)$, então $\mu(A) = 0$.

2) Vamos mostrar a existência de uma função mensurável $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $[\psi] \in L^2_{\overline{\mu}}(X, \mathbb{R}) \subset L^1_{\overline{\mu}}(X, \mathbb{R})$ (cf. II.2.12, onde o índice $\overline{\mu}$ indica qual a medida que se considera) tal que, para cada $[h] \in L^2_{\overline{\mu}}(X, \mathbb{R}) \subset L^1_{\overline{\mu}}(X, \mathbb{R})$,

$$\int_X h(x) d\widehat{\mu}(x) = \int_X \psi(x) h(x) d\overline{\mu}(x),$$

em particular, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\widehat{\mu}(A) = \int_A \psi(x) d\overline{\mu}(x).$$

Subdem: Tendo em conta III.2.31, consideremos o espaço de Hilbert real $L^2_{\overline{\mu}}(X, \mathbb{R})$, das classes de equivalência $[h]$, com $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e $\int_X |h(x)|^2 d\overline{\mu}(x) < +\infty$, com o produto interno definido por

$$\langle [h], [\widehat{h}] \rangle = \int_X h(x) \widehat{h}(x) d\overline{\mu}(x).$$

Para cada $[h] \in L^2_{\overline{\mu}}(X, \mathbb{R})$, podemos escrever, tendo em conta a desigualdade de Cauchy-Schwarz¹²⁸,

$$\begin{aligned} \int_X |h(x)| d\widehat{\mu}(x) &\leq \int_X |h(x)| d\overline{\mu}(x) = \int_X |h(x)| \times 1 d\overline{\mu}(x) \leq \\ &\leq \| [h] \|_2 \| [1] \|_2 = \overline{\mu}(X)^{\frac{1}{2}} \| [h] \|_2, \end{aligned}$$

em particular h é integrável relativamente à medida $\widehat{\mu}$ e

$$\left| \int_X h(x) d\widehat{\mu}(x) \right| \leq \int_X |h(x)| d\widehat{\mu}(x) \leq \overline{\mu}(X)^{\frac{1}{2}} \| [h] \|_2.$$

Fica assim bem definida uma aplicação linear contínua $\xi: L^2_{\overline{\mu}}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\xi([h]) = \int_X h(x) d\widehat{\mu}(x).$$

Pelo teorema da representação de Riesz, sobre funcionais lineares contínuos

¹²⁸Ou, o que é o mesmo, a desigualdade de Hölder para os expoentes conjugados $p = 2$ e $q = 2$.

num espaço de Hilbert, vai existir $[g] \in L^2_{\bar{\mu}}(X, \mathbb{R}) \subset L^1_{\bar{\mu}}(X, \mathbb{R})$ tal que, para cada $[h] \in L^2_{\bar{\mu}}(X, \mathbb{R})$, $\xi([h]) = \langle [g], [h] \rangle$, isto é

$$\int_X h(x) d\hat{\mu}(x) = \int_X g(x) h(x) d\bar{\mu}(x).$$

Para cada $A \in \mathcal{M}$, podemos tomar na igualdade anterior

$$[h] = [\mathbb{I}_A] \in L^\infty_{\bar{\mu}}(X, \mathbb{R}) \subset L^2_{\bar{\mu}}(X, \mathbb{R})$$

e obtemos

$$\hat{\mu}(A) = \int_A g(x) d\bar{\mu}(x).$$

Apesar de a função mensurável $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ poder tomar valores menores que 0, notando $A' \in \mathcal{M}$ o conjunto dos $x \in X$ tais que $g(x) < 0$, vemos que

$$0 \leq \hat{\mu}(A') = \int_{A'} g(x) d\bar{\mu}(x) \leq \int_{A'} 0 d\bar{\mu}(x) = 0,$$

donde $\int_{A'} g(x) d\bar{\mu}(x) = \int_{A'} 0 d\bar{\mu}(x)$ o que, por II.2.44, implica que $g(x) = 0$ $\bar{\mu}$ -quase sempre em A' , isto é, $\bar{\mu}(A') = 0$. Podemos assim definir uma nova função mensurável $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in A' \\ g(x), & \text{se } x \notin A' \end{cases}$$

para a qual se tem $\psi(x) = g(x)$ quase sempre, pelo que ψ verifica as propriedades enunciadas.

3) Consideremos uma função mensurável $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ verificando as condições enunciadas em 2) e notemos $B = \{x \in X \mid \psi(x) \geq 1\}$. Tem-se então $B \in \mathcal{M}$ e $\mu(B) = 0$.

Dem: Uma vez que $1 \leq \psi(x)$, para cada $x \in B$, podemos escrever

$$\bar{\mu}(B) = \int_B 1 d\bar{\mu}(x) \leq \int_B \psi(x) d\bar{\mu}(x) = \hat{\mu}(B)$$

e portanto, por ser $\bar{\mu}(B) = \hat{\mu}(B) + \mu(B)$, com $\bar{\mu}(B) < +\infty$, vem $\mu(B) = 0$.

4) Podemos definir medidas $\hat{\mu}_a, \hat{\mu}_s: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ por

$$\hat{\mu}_a(A) = \hat{\mu}(A \setminus B), \quad \hat{\mu}_s(A) = \hat{\mu}(A \cap B),$$

tendo-se que $\hat{\mu} = \hat{\mu}_a + \hat{\mu}_s$ e $\hat{\mu}_s$ é μ -singular.

Subdem: A verificação de que $\hat{\mu}_a$ e $\hat{\mu}_s$ são efetivamente medidas pode ser feita facilmente de modo direto, mas podemos também reparar que não temos mais que as medidas imagem direta das restrições de $\hat{\mu}$ aos conjuntos mensuráveis $X \setminus B$ e B pelas inclusões destes conjuntos em X (cf. I.5.13).

Para cada $A \in \mathcal{M}$, A é a união dos conjuntos mensuráveis disjuntos $A \setminus B$ e $A \cap B$, pelo que

$$\widehat{\mu}(A) = \widehat{\mu}(A \setminus B) + \widehat{\mu}(A \cap B) = \widehat{\mu}_a(A) + \widehat{\mu}_s(A).$$

O facto de $\widehat{\mu}_s$ ser μ -singular, resulta de se ter $\mu(B) = 0$ e

$$\widehat{\mu}_s(X \setminus B) = \widehat{\mu}(\emptyset) = 0.$$

5) Seja $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função mensurável definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x)}{1-\psi(x)}, & \text{se } x \notin B \\ 0, & \text{se } x \in B \end{cases}.$$

Vamos mostrar que se tem $\widehat{\mu}_a = \mu_{(\varphi)}$, o que mostrará, em particular, que $\widehat{\mu}_{(a)}$ é μ -absolutamente contínua e terminará a prova de a).

Subdem: Tendo em conta o facto de se ter $\bar{\mu} = \widehat{\mu} + \mu$, a conclusão de 2) diz-nos que, para cada $[h] \in L_{\bar{\mu}}^2(X, \mathbb{R})$,

$$\int_X h(x) d\widehat{\mu}(x) = \int_X \psi(x) h(x) d\widehat{\mu}(x) + \int_X \psi(x) h(x) d\mu(x),$$

portanto

$$\int_X (1 - \psi(x)) h(x) d\widehat{\mu}(x) = \int_X \psi(x) h(x) d\mu(x).$$

Fixado $A \in \mathcal{M}$ podemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomar na igualdade anterior para $h: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função mensurável definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1-\psi(x)^n}{1-\psi(x)}, & \text{se } x \in A \setminus B \\ 0, & \text{se } x \notin A \setminus B \end{cases},$$

para a qual se tem $[h] \in L_{\bar{\mu}}^2(X, \mathbb{R})$, uma vez que para cada $x \in A \setminus B$

$$h(x) = \frac{1 - \psi(x)^n}{1 - \psi(x)} = 1 + \psi(x) + \dots + \psi(x)^{n-1} \leq n.$$

Obtemos então

$$\int_{A \setminus B} 1 - \psi(x)^n d\widehat{\mu}(x) = \int_{A \setminus B} \varphi(x)(1 - \psi(x)^n) d\mu(x)$$

e portanto, uma vez que, para cada $x \in A \setminus B$, os $1 - \psi(x)^n$ constituem uma sucessão crescente convergente para 1, o teorema da convergência monótona e o facto de ser $\mu_{(\varphi)}(A \cap B) \leq \mu_{(\varphi)}(B) = 0$ implica que

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_a(A) &= \widehat{\mu}(A \setminus B) = \int_{A \setminus B} 1 d\widehat{\mu}(x) = \int_{A \setminus B} \varphi(x) d\mu(x) = \\ &= \mu_{(\varphi)}(A \setminus B) = \mu_{(\varphi)}(A \setminus B) + \mu_{(\varphi)}(A \cap B) = \mu_{(\varphi)}(A).\end{aligned}$$

6) Para justificar b), basta atender à igualdade $\widehat{\mu}_a = \mu_{(\varphi)}$, reparando que, se $\widehat{\mu}$ é μ -absolutamente contínua então a decomposição de Lebesgue de $\widehat{\mu}$ é a definida por $\widehat{\mu}_a = \widehat{\mu}$ e $\widehat{\mu}_s = 0$. \square

III.3.9 (O caso geral das medidas σ -finitas) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço de mensurável e $\mu, \widehat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas medidas σ -finitas. Tem-se então:

a) (Lebesgue) Existe uma decomposição de Lebesgue $(\widehat{\mu}_a, \widehat{\mu}_s)$ de $\widehat{\mu}$, relativamente a μ , necessariamente única, por III.3.7.

b) (Radon-Nikodym) No caso em que $\widehat{\mu}$ é μ -absolutamente contínua, existe uma aplicação mensurável $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\widehat{\mu} = \mu_{(\varphi)}$.

Dem: Tendo em conta o lema de Rudin em III.3.4, podemos considerar duas medidas finitas $\mu', \widehat{\mu}': \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $\rho, \widehat{\rho}: X \rightarrow]0, +\infty[$ aplicações mensuráveis tais que $\mu' = \mu_{(\rho)}$ e $\widehat{\mu}' = \widehat{\mu}_{(\widehat{\rho})}$, tendo-se então, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu'(A) = 0$ se, e só se, $\mu(A) = 0$ e $\widehat{\mu}'(A) = 0$ se, e só se, $\widehat{\mu}(A) = 0$.

a) Aplicando a alínea a) de III.3.8, deduzimos a existência de uma medida μ' -absolutamente contínua $\widehat{\mu}'_a: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e de uma medida μ' -singular $\widehat{\mu}'_s: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tais que, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\widehat{\mu}'(A) = \widehat{\mu}'_a(A) + \widehat{\mu}'_s(A)$. Consideremos as medidas $\widehat{\mu}_a, \widehat{\mu}_s: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$\widehat{\mu}_a(A) = \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} d\widehat{\mu}'_a(x), \quad \widehat{\mu}_s(A) = \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} d\widehat{\mu}'_s(x).$$

Se $A \in \mathcal{M}$ verifica $\mu(A) = 0$, tem-se também $\mu'(A) = 0$, donde $\widehat{\mu}'_a(A) = 0$, o que implica, por definição, que $\widehat{\mu}_a(A) = 0$. Provámos assim que a medida $\widehat{\mu}_a$ é μ -absolutamente contínua. Seja agora $B \in \mathcal{M}$, com $\mu'(B) = 0$, tal que $\widehat{\mu}'_s(X \setminus B) = 0$. Tem-se então $\mu(B) = 0$ e

$$\widehat{\mu}_s(X \setminus B) = \int_{X \setminus B} \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} d\widehat{\mu}'_s(x) = 0,$$

o que mostra que $\widehat{\mu}_s$ é μ -singular. Uma vez que para cada $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_a(A) + \widehat{\mu}_s(A) &= \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} d\widehat{\mu}'_a(x) + \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} d\widehat{\mu}'_s(x) = \\ &= \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} d(\widehat{\mu}'_a + \widehat{\mu}'_s)(x) = \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} d\widehat{\mu}'(x) = \\ &= \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} \widehat{\rho}(x) d\widehat{\mu}(x) = \widehat{\mu}(A),\end{aligned}$$

concluimos que $(\widehat{\mu}_a, \widehat{\mu}_s)$ é efetivamente uma decomposição de Lebesgue de $\widehat{\mu}$ relativamente a μ .

b) Suponhamos agora que $\widehat{\mu}$ é μ -absolutamente contínua. Tem-se então que

$\widehat{\mu}'$ é μ' -absolutamente contínua, visto que, se $A \in \mathcal{M}$ verifica $\mu'(A) = 0$, então $\mu(A) = 0$, donde $\widehat{\mu}(A) = 0$, e portanto $\widehat{\mu}'(A) = 0$. Aplicando a alínea b) de III.3.8, deduzimos a existência de uma aplicação mensurável $\varphi': X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\widehat{\mu}' = \mu'_{(\varphi')}$. Considerando então a aplicação mensurável $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x)\varphi'(x)}{\widehat{\rho}(x)},$$

vemos que, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \mu_{(\varphi)}(A) &= \int_A \varphi(x) d\mu(x) = \int_A \frac{\varphi'(x)}{\widehat{\rho}(x)} \rho(x) d\mu(x) = \int_A \frac{\varphi'(x)}{\widehat{\rho}(x)} d\mu'(x) = \\ &= \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} d\widehat{\mu}'(x) = \int_A \frac{1}{\widehat{\rho}(x)} \widehat{\rho}(x) d\widehat{\mu}(x) = \widehat{\mu}(A), \end{aligned}$$

o que mostra que se tem efetivamente $\widehat{\mu} = \mu_{(\varphi)}$. □

Exercícios

Ex III.3.1 Seja λ a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} . Seja $A \subset \mathbb{R}$ um boreliano não contável, mas com $\lambda(A) = 0$ (para um exemplo, ver a alínea d) do exercício I.4.10 ou considerar o conjunto de Cantor C no exercício I.4.11). Seja $(\alpha_x)_{x \in \mathbb{R}}$ a família de elementos de \mathbb{R}_+ definida por

$$\alpha_x = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

e seja $\widehat{\mu}$ a restrição aos borelianos de \mathbb{R} da medida associada a esta família pelo método descrito em I.2.14, isto é, a definida por

$$\widehat{\mu}(B) = \sum_{x \in B} \alpha_x.$$

Verificar que a medida $\widehat{\mu}$ é λ -singular, mas não é σ -finita.

Ex III.3.2 Seja λ a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R} . Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função crescente e contínua à direita definida por

$$f(x) = x^3 + n,$$

para cada $x \in [n, n+1[$ ($n \in \mathbb{Z}$) e seja μ_f a medida de Lebesgue-Stieltjes nos borelianos de \mathbb{R} associada a f . Determinar a decomposição de Lebesgue de μ_f como soma de uma medida λ -singular com uma medida λ -absolutamente contínua, assim como uma função mensurável $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que a

parcela μ -absolutamente contínua seja igual a $\lambda_{(\varphi)}$.

Sugestão: Lembrar II.3.11.

Ex III.3.3 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e μ_1, μ_2 e $\hat{\mu}$ três medidas definidas em \mathcal{M} tais que μ_1 e $\hat{\mu}$ sejam mutuamente singulares e μ_2 e $\hat{\mu}$ sejam mutuamente singulares. Mostrar que $\mu_1 + \mu_2$ e $\hat{\mu}$ são mutuamente singulares.

§4. Medidas de Radon em localmente compactos.

A medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R}^n , que encontramos atrás na secção 5 do capítulo II, tem algumas propriedades topológicas importantes que não tivémos ainda a ocasião de examinar. Constata-se que essas propriedades são válidas em contextos mais gerais, em que, no lugar \mathbb{R}^n , podemos considerar um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável e, no lugar da medida de Lebesgue, podemos considerar uma classe importante de medidas, as medidas de Radon. É nesse contexto mais geral que nos colocamos nesta secção.

O leitor que quiser evitar o grau de generalidade em que nos colocamos poderá considerar que o espaço topológico é um aberto de \mathbb{R}^n ou, mais geralmente, de um espaço vetorial de dimensão finita, situação que constitui um dos exemplos mais importantes de aplicação. Ficará, no entanto, impedido de aplicar o que vai ser estudado a situações igualmente importantes, como o caso das curvas e superfícies e, mais geralmente, das subvariedades de dimensão m de um espaço vetorial de dimensão n .

III.4.1 Seja X um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável e seja \mathcal{B}_X a σ -álgebra dos borelianos de X . Vamos chamar *medida de Radon* sobre X a uma medida $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que $\mu(K) < +\infty$, para cada compacto $K \subset X$.¹²⁹

III.4.2 (**Caracterização alternativa das medidas de Radon**) Seja X um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável e seja \mathcal{B}_X a σ -álgebra dos borelianos de X . Uma medida $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma medida de Radon se, e só se, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança V de x com $\mu(V) < +\infty$ (condição que se costuma exprimir dizendo que μ é uma *medida localmente finita*).

Dem: Toda a medida de Radon é localmente finita, uma vez que, para cada $x \in X$, podemos considerar uma vizinhança compacta V de x , a qual vai portanto verificar a condição $\mu(V) < +\infty$. Suponhamos, reciprocamente,

¹²⁹Alguns autores, como Halmos [6], usam em vez de “medida de Radon” a designação “medida de Borel”. Note-se também que a definição de medida de Radon poderia ter sido dada sem a exigência do espaço ter base contável, mas essa exigência vai importante para a maioria dos resultados que vamos estabelecer.

que a medida μ é localmente finita e consideremos um compacto $K \subset X$ arbitrário. Para cada $x \in K$, existe assim uma vizinhança V_x de x com $\mu(V_x) < +\infty$. Uma vez que a família dos interiores $\text{int}(V_x)$ constitui uma cobertura aberta de K , a propriedade das coberturas dos compactos implica a existência de uma parte finita J de K tal que K esteja contido na união dos $\text{int}(V_x)$ com $x \in J$, em particular $K \subset \bigcup_{x \in J} V_x$, o que implica que

$$\mu(K) \leq \sum_{x \in J} \mu(V_x) < +\infty.$$

Ficou assim provado que μ é uma medida de Radon. \square

III.4.3 (Exemplos) a) A medida de Lebesgue λ nos borelianos de \mathbb{R} ou, mais geralmente, a medida de Lebesgue λ_n nos borelianos de \mathbb{R}^n , é uma medida de Radon (cf. a alínea a) de II.5.4, uma vez que os compactos são limitados). Do mesmo modo as medidas de Lebesgue-Stieltjes λ_g , nos borelianos de um intervalo aberto não vazio J , (cf. I.4.11) são medidas de Radon, uma vez que qualquer compacto contido em J está contido num intervalo semiaberto com extremidades em J .

b) Se X é um conjunto contável, sobre o qual consideramos a topologia discreta, X é um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável, a σ -álgebra dos borelianos é constituída por todos os subconjuntos de X e a medida de contagem ν é uma medida de Radon sobre X (uma vez que os compactos são finitos).

III.4.4 Em geral, se $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma medida de Radon sobre o espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável X e se $Y \subset X$ é um subconjunto aberto ou um subconjunto fechado de X , então Y , com a topologia induzida, é também um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável e a restrição de μ à σ -álgebra $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_{X/Y}$ dos borelianos de Y é uma medida de Radon sobre Y .

Examinamos em seguida um resultado sobre a regularidade das medidas de Radon nos espaços topológicos localmente compactos, separados e de base contável. Começamos por examinar um lema onde estabelecemos duas propriedades dos espaços topológicos localmente compactos e separados que teremos ocasião de aplicar adiante.

III.4.5 (Lema topológico) Sejam X um espaço topológico localmente compacto e separado e U um aberto de X . Tem-se então:

a) Se $K \subset U$ é um compacto, então existe um aberto U' e um compacto K' tais que

$$K \subset U' \subset K' \subset U.$$

b) Se X é de base contável, então existe uma sucessão crescente de compactos $K_n \subset U$ ($K_n \subset K_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), tal que U seja a união dos

interiores dos K_n , em particular, $U = \bigcup K_n$.

Dem: a) Para cada $x \in K$, seja C_x uma vizinhança compacta de x tal que $C_x \subset U$ e seja U_x o interior de C_x . Os conjuntos U_x são portanto abertos de X cuja união contém K pelo que a compacidade de K garante a existência de uma parte finita J de K tal que K esteja contido na união finita dos U_x , com $x \in J$. Chamando U' a essa união, U' vai ser um aberto de X contendo K , que está contido num compacto K' de X contido em U , a saber, a união finita dos C_x , com $x \in J$.

b) Seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base contável de abertos de X . Seja $J \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$ tais que exista um compacto K'_n com $U_n \subset K'_n \subset U$ e, para cada $n \in J$, escolhamos um compacto K'_n nas condições anteriores. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o compacto contido em U ,

$$K_n = \bigcup_{\substack{m \in J \\ m \leq n}} K'_m$$

(união finita de compactos, eventualmente vazia). Por construção, os K_n constituem uma sucessão crescente de compactos contidos em U e a união dos interiores dos K_n é U , uma vez que, para cada $x \in U$, podemos considerar uma vizinhança compacta C de x contida em U , e portanto um índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n \subset \text{int}(C)$, o que implica que $n \in J$, e portanto

$$x \in U_n \subset K'_n \subset K_n,$$

em particular x é interior a K_n . □

III.4.6 (Regularidade das medidas de Radon) Sejam X um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável, \mathcal{B}_X a σ -álgebra dos borelianos de X e $\mu: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma medida de Radon. Tem-se então:

a) A medida μ é σ -finita;

b) (Regularidade exterior) Para cada boreliano $A \in \mathcal{B}_X$, $\mu(A)$ é o ínfimo dos $\mu(U)$, com U aberto de X com $A \subset U$;

c) (Regularidade interior) Para cada boreliano $A \in \mathcal{B}_X$, $\mu(A)$ é o supremo dos $\mu(K)$, com K compacto de X com $K \subset A$.

d) (Variante de b) e c)) Para cada boreliano $A \in \mathcal{B}_X$ e cada $\delta > 0$, existe um aberto $U \supset A$ e um fechado $C \subset A$ tais que $\mu(U \setminus A) < \delta$ e $\mu(A \setminus C) < \delta$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes, cada uma com a sua demonstração:

1) Tendo em conta a alínea b) do lema III.4.5, X é união de uma família de compactos $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que, por definição, verificam $\mu(K_n) < +\infty$, o que mostra que a medida μ é σ -finita, e temos a conclusão de a).

2) Vamos mostrar que, para cada aberto $U \subset X$, $\mu(U)$ é o supremo dos $\mu(K)$, com K compacto de X tal que $K \subset U$.¹³⁰

¹³⁰Ou seja, a propriedade c) é verificada no caso em que o boreliano A é um conjunto aberto.

Subdem: Uma vez que, para cada compacto $K \subset U$, $\mu(K) \leq \mu(U)$, tudo o que temos que mostrar é que, para cada $a < \mu(U)$, existe um compacto $K \subset U$ tal que $\mu(K) > a$. Ora, tendo em conta o lema III.4.5, podemos considerar uma sucessão crescente $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos compactos de união U . Resulta então da alínea 5) de I.2.12 que $\lim \mu(K_n) = \mu(U)$, pelo que existe n tal que $\mu(K_n) > a$, como queríamos.

3) Podemos definir uma medida exterior $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ (cf. I.4.1) pondo, para cada conjunto $A \subset X$, $\mu^*(A)$ igual ao ínfimo dos $\mu(U)$, com $A \subset U$ aberto de X . Para cada aberto V de X , tem-se $\mu^*(V) = \mu(V)$.¹³¹

Subdem: Se V é um aberto de X , tem-se, para cada aberto $V \subset U$, $\mu(V) \leq \mu(U)$, pelo que $\mu^*(V) = \mu(V)$, uma vez que o ínfimo vai ser um mínimo. Em particular $\mu^*(\emptyset) = 0$. Se $A \subset B$, o facto de se ter $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ resulta de todo o aberto que contenha B também conter A . Resta-nos mostrar que se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de subconjuntos de X , então

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu^*(A_j),$$

para o que podemos já supor que o segundo membro é finito, e portanto também $\mu^*(A_j) < +\infty$, para cada j . Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta o lema I.3.10, podemos considerar, para cada $j \in J$, $\delta_j > 0$ com $\sum \delta_j \leq \delta$. Para cada j , seja U_j um aberto, com $A_j \subset U_j$ e $\mu(U_j) < \mu^*(A_j) + \delta_j$. Tem-se então que $\bigcup U_j$ é um aberto de X com $\bigcup A_j \subset \bigcup U_j$, pelo que

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu(U_j) \leq \sum_{j \in J} (\mu^*(A_j) + \delta_j) \leq \sum_{j \in J} \mu^*(A_j) + \delta$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de δ , implica que se tem efetivamente

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu^*(A_j).$$

4) A restrição de μ^* à σ -álgebra \mathcal{B}_X dos borelianos de X é uma medida.

Subdem: Tendo em conta a alínea a) de I.4.5, tudo o que temos que mostrar é que a σ -álgebra dos conjuntos μ^* -mensuráveis contém a dos borelianos, para o que bastará mostrar que, se U é um aberto arbitrário de X , U é μ^* -mensurável, ou seja, que se $U \subset X$ é aberto e $A \subset X$ é um conjunto arbitrário, então

$$(1) \quad \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) \leq \mu^*(A),$$

já que a desigualdade oposta resulta de A ser a união de $A \cap U$ com $A \setminus U$. Tendo em conta a definição de $\mu^*(A)$ como um ínfimo, para provarmos (1) basta mostrarmos que, para cada aberto $V \supset A$, se tem

¹³¹Para provarmos b), o que temos assim que mostrar é que $\mu^*(A) = \mu(A)$, para cada boreliano A .

$$(2) \quad \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U) \leq \mu^*(V),$$

e, atendendo a que se tem então $\mu^*(V) = \mu(V)$, $\mu^*(A \cap U) \leq \mu^*(V \cap U) = \mu(V \cap U)$ e $\mu^*(A \setminus U) \leq \mu^*(V \setminus U)$, para provarmos (2) será suficiente mostrarmos que, quaisquer que sejam os abertos U e V de X ,

$$(3) \quad \mu(V \cap U) + \mu^*(V \setminus U) \leq \mu(V).$$

A igualdade (3) é trivial se $\mu(V) = +\infty$, pelo que podemos já supor que $\mu(V) < +\infty$, e portanto também $\mu(V \cap U) < +\infty$ e $\mu^*(V \setminus U) < +\infty$, por $V \cap U$ e $V \setminus U$ estarem contidos no aberto V , caso em que (3) se pode escrever na forma equivalente

$$(4) \quad \mu(V \cap U) \leq \mu(V) - \mu^*(V \setminus U).$$

Tendo em conta a conclusão da parte 2), para mostrarmos (4), basta mostrarmos que, para cada compacto $K \subset V \cap U$,

$$(5) \quad \mu(K) \leq \mu(V) - \mu^*(V \setminus U).$$

Seja $\delta > 0$ arbitrário. Aplicando, mais uma vez, a conclusão de (2), agora ao aberto $V \setminus K$, que contém $V \setminus U$, concluímos a existência de um compacto $K' \subset V \setminus K$ tal que

$$\mu(K') > \mu(V \setminus K) - \delta \geq \mu^*(V \setminus U) - \delta$$

e, uma vez que $K \cap K' = \emptyset$ e $K \cup K' \subset V$, obtemos

$$\mu(V) \geq \mu(K \cup K') = \mu(K) + \mu(K') > \mu(K) + \mu^*(V \setminus U) - \delta$$

donde, pela arbitrariedade de δ ,

$$\mu(V) \geq \mu(K) + \mu^*(V \setminus U)$$

e temos a desigualdade (5), como queríamos.

5) Para cada boreliano A de X , tem-se $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

Subdem: Para cada aberto U de X , com $A \subset U$, tem-se $\mu(A) \leq \mu(U)$ pelo que, tendo em conta a definição de $\mu^*(A)$ como um ínfimo, tem-se efetivamente $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

6) Seja $A \subset X$ um boreliano tal que $A \subset K$, para algum compacto $K \subset X$. Tem-se então $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Subdem: Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia ou seja, tendo em conta a conclusão de 5), que $\mu(A) < \mu^*(A)$. Tendo em conta a alínea a) do lema III.4.5, podíamos considerar um aberto U de X com $\mu(U) < +\infty$ (por U estar contido num compacto de X que, por hipótese, tem medida finita) e obtínhamos então, por se ter também $\mu(U \setminus A) \leq \mu^*(U \setminus A)$, o absurdo

$$\mu(U) = \mu(A) + \mu(U \setminus A) < \mu^*(A) + \mu^*(U \setminus A) = \mu^*(U) = \mu(U).$$

7) Mais geralmente, para qualquer boreliano $A \subset X$, $\mu(A) = \mu^*(A)$, por outras palavras, tendo em conta a definição de μ^* , a medida μ verifica a propriedade na alínea b) do enunciado.

Subdem: Tendo em conta a alínea b) do lema III.4.5, consideremos uma sucessão crescente $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compactos com união X . Tem-se então que A é a união da sucessão crescente dos borelianos $A \cap K_n$, que verificam as hipóteses de 6) e para os quais se tem assim $\mu(A \cap K_n) = \mu^*(A \cap K_n)$, pelo que, tendo em conta a alínea 5) de I.2.12,

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap K_n) = \lim_n \mu^*(A \cap K_n) = \mu^*(A).$$

8) Para cada $A \in \mathcal{B}_X$ e $\delta > 0$, existe um aberto U de X , com $A \subset U$ e $\mu(U \setminus A) < \delta$ (a primeira parte da conclusão de d)).

Subdem: No caso em que $\mu(A) < +\infty$, temos uma consequência da conclusão de b), já demonstrada, visto que, sendo U um aberto de X com $A \subset U$, tal que $\mu(U) < \mu(A) + \delta$, vem $\mu(U \setminus A) = \mu(U) - \mu(A) < \delta$. No caso geral, consideramos uma sucessão crescente $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compactos de união X e aplicamos o caso particular a cada boreliano $A \cap K_n$ que já tem medida finita, para construir abertos U_n com $A \cap K_n \subset U_n$ e

$$\mu(U_n \setminus (A \cap K_n)) < \frac{\delta}{2^n}.$$

Podemos então considerar o aberto $U = \bigcup U_n$, que contém A , e tem-se $U \setminus A \subset \bigcup (U_n \setminus (A \cap K_n))$, donde

$$\mu(U \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus (A \cap K_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^n} = \delta.$$

9) Para cada $A \in \mathcal{B}_X$ e $\delta > 0$, existe um fechado C de X , com $C \subset A$ e $\mu(A \setminus C) < \delta$ (a segunda parte da conclusão de d)).

Subdem: Aplicando a conclusão de 8) ao boreliano $X \setminus A$, concluímos a existência de um aberto $V \supset X \setminus A$ tal que $\mu(V \setminus (X \setminus A)) < \delta$. Podemos então considerar o fechado $C = X \setminus V \subset A$ para o qual se tem

$$A \setminus C = V \setminus (X \setminus A),$$

portanto $\mu(A \setminus C) < \delta$.

10) Para cada $A \in \mathcal{B}_X$, $\mu(A)$ é o supremo dos $\mu(K)$ com K compacto tal que $K \subset A$, portanto temos a propriedade enunciada em c).

Subdem: Para cada compacto $K \subset A$, tem-se $\mu(K) \leq \mu(A)$. Seja agora $a < \mu(A)$ arbitrário. Escolhamos $\delta > 0$ tal que $a + \delta \leq \mu(A)$, tomando, por exemplo, $\delta = \mu(A) - a$, se $\mu(A) < +\infty$, e $\delta = 1$, se $\mu(A) = +\infty$. Tendo em conta a conclusão obtida em 9), podemos considerar um fechado $C \subset A$ tal que $\mu(A \setminus C) < \delta$, tendo-se então $a < \mu(C)$ visto que, se $\mu(C) \leq a$, vinha

$$\mu(A) = \mu(C) + \mu(A \setminus C) < a + \delta \leq \mu(A),$$

o que era absurdo. Reparamos agora que, escolhendo uma sucessão crescente $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compactos de união X , C é a união da sucessão crescente de compactos $C \cap K_n$, pelo que $\mu(C) = \lim_n \mu(C \cap K_n)$, o que implica que existe n tal que o compacto $C \cap K_n \subset A$ verifica $a < \mu(C \cap K_n)$. Ficou assim provado que $\mu(A)$ é o supremo referido. \square

Como primeira aplicação do resultado precedente, vamos provar a separabilidade de certos espaços funcionais.

III.4.7 (Separabilidade dos espaços $L^p(X, E)$) Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach separável. Para cada $1 \leq p < +\infty$, o espaço de Banach $L^p(X, E)$ é então separável.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes, cada uma com a sua demonstração:

1) Tendo em conta a alínea c) de I.2.2 e o teorema de densidade em III.2.26, o resultado ficará provado se verificarmos que é separável, relativamente à norma $\| \cdot \|_p$, o subespaço vetorial $St(X, E)$ cujos elementos são as classes de equivalência $[f]$, com $f: X \rightarrow E$ aplicação em escada.

2) Existe uma base contável \mathcal{U} de abertos de X tal que $\mu(U) < +\infty$, para cada $U \in \mathcal{U}$.

Subdem: Seja \mathcal{U}' uma base contável de abertos de X e notemos \mathcal{U} o conjunto dos $U \in \mathcal{U}'$ tais que $\mu(U) < +\infty$. A afirmação feita ficará provada se verificarmos que \mathcal{U} é ainda uma base de abertos. Sejam então V um aberto arbitrário e $x \in V$. Seja C uma vizinhança compacta de x tal que $C \subset V$. Considerando então o aberto $\text{int}(C)$ que contém x , existe $U \in \mathcal{U}'$ tal que $x \in U \subset \text{int}(C)$, em particular, $x \in U \subset V$, e tem-se mesmo $U \in \mathcal{U}$, uma vez que $\mu(U) \leq \mu(C) < +\infty$. Ficou assim provado que \mathcal{U} é efetivamente uma base de abertos de X .

3) Seja \mathcal{U}_{fin} a classe contável de abertos de X constituída por todas as uniões finitas de abertos em \mathcal{U} (incluindo o conjunto vazio \emptyset , como união da família vazia de abertos¹³²). Tem-se então $\mu(V) < +\infty$, para cada $V \in \mathcal{U}_{fin}$, e, para cada boreliano $A \subset X$, com $\mu(A) < +\infty$, e cada $\delta > 0$, existe $V \in \mathcal{U}_{fin}$ tal que as funções indicatrizes de V e A verificam

$$\| \mathbb{I}_V - \mathbb{I}_A \|_p < \delta$$

(reparar que temos a norma do espaço $L^p(X, \mathbb{R})$ e não do espaço $L^p(X, E)$).

Subdem: Se $V \in \mathcal{U}_{fin}$, existe uma família finita $(U_j)_{j \in J}$ de abertos em

¹³²Quem não gostar deste preciosismo lógico, acrescentará \emptyset à base de abertos \mathcal{U} referida em 2).

\mathcal{U} tal que $V = \bigcup U_j$ e então $\mu(V) \leq \sum \mu(U_j) < +\infty$. Sejam agora $A \in \mathcal{B}_X$, com $\mu(A) < +\infty$, e $\delta > 0$. Tendo em conta as alíneas b) e c) de III.4.6, podemos considerar um aberto $U \supset A$ e um compacto $K \subset A$ tais que

$$\mu(U) < \mu(A) + \frac{\delta^p}{2}, \quad \mu(K) > \mu(A) - \frac{\delta^p}{2},$$

portanto

$$\mu(U \setminus K) = \mu(U) - \mu(K) < \delta^p.$$

Reparamos agora que existe $V \in \mathcal{U}_{fin}$ tal que $K \subset V \subset U$, visto que, para cada $x \in K$, se pode escolher $V_x \in \mathcal{U}$ com $x \in V_x \subset U$ e tomar então para V , pela propriedade das coberturas dos compactos, uma união de um número finito dos V_x que ainda contenha K . Reparando agora que, para cada $x \in X$, $|\mathbb{I}_V(x) - \mathbb{I}_A(x)| \in \{0, 1\}$ e $|\mathbb{I}_V(x) - \mathbb{I}_A(x)| = 0$, tanto para $x \in K$ como para $x \notin U$, isto é, para cada $x \notin U \setminus K$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\mathbb{I}_V - \mathbb{I}_A\|_p &= \left(\int_X |\mathbb{I}_V(x) - \mathbb{I}_A(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\int_{U \setminus K} 1 d\mu(x) \right)^{1/p} = \\ &= \mu(U \setminus K)^{1/p} < \delta, \end{aligned}$$

como queríamos.

4) Seja E_0 uma parte contável densa de E . Notemos $\mathcal{D} \subset St(X, E)$ o conjunto contável das classes $[g]$ com $g: X \rightarrow E$ aplicação em escada da forma $x \mapsto \mathbb{I}_V(x)w$, com $V \in \mathcal{U}_{fin}$ e $w \in E_0$. Vamos mostrar que, para cada $\delta > 0$ e cada aplicação em escada $f: X \rightarrow E$ da forma $f(x) = \mathbb{I}_A(x)z$, com $A \in \mathcal{B}_X$, $\mu(A) < +\infty$, e $z \in E$, existe $[g] \in \mathcal{D}$ tal que $\|f - g\|_p < \delta$.

Subdem: Podemos já afastar os casos triviais em que $z = 0$ ou $\mu(A) = 0$, casos em que se teria $[f] = 0$ e se podia tomar $g = 0$, correspondente a $V = \emptyset \in \mathcal{U}_{fin}$ e $w \in E_0$ arbitrário. Escolhamos $w \in E_0$ tal que

$$\|z - w\| < \min\left\{\|z\|, \frac{\delta}{2\mu(A)^{1/p}}\right\},$$

em particular $w \neq 0$, e, tendo em conta a conclusão de 3), escolhamos $V \in \mathcal{U}_{fin}$ tal que

$$\|\mathbb{I}_V - \mathbb{I}_A\|_p < \frac{\delta}{2\|w\|}$$

e consideremos o correspondente $[g] \in \mathcal{D}$, com $g(x) = \mathbb{I}_V(x)w$. Notando h a aplicação em escada definida por $h(x) = \mathbb{I}_A(x)w$, obtemos

$$\begin{aligned}\|f - h\|_p &= \left(\int_A \|z - w\|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \|z - w\| \mu(A)^{1/p} < \frac{\delta}{2}, \\ \|h - g\|_p &= \left(\int_X |\mathbb{I}_V(x) - \mathbb{I}_A(x)|^p \|w\|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \\ &= \|\mathbb{I}_V - \mathbb{I}_A\|_p \|w\| < \frac{\delta}{2},\end{aligned}$$

portanto

$$\|f - g\|_p \leq \|f - h\|_p + \|h - g\|_p < \delta,$$

como queríamos.

5) Notemos $\mathcal{D}_{fin} \subset St(X, E)$ o conjunto contável das somas finitas de elementos de \mathcal{D} . Vamos mostrar que \mathcal{D}_{fin} é denso em $St(X, E)$, para a norma $\|\cdot\|_p$, o que, como referimos em 1), terminará a demonstração do nosso resultado.

Subdem: Sejam então $[f] \in St(X, E)$ e $\delta > 0$ arbitrários. Do que referimos em II.2.18, concluímos a existência de um número finito de elementos $[f_1], \dots, [f_k] \in St(X, E)$, cada um dos quais da forma particular estudada em 4), tais que $[f] = [f_1] + \dots + [f_k]$, pelo que, para cada $1 \leq j \leq k$, podemos considerar $[g_j] \in \mathcal{D}$ com $\|f_j - g_j\|_p < \frac{\delta}{k}$. Tem-se então que $[g] = [g_1] + \dots + [g_k] \in \mathcal{D}_{fin}$ e

$$\|f - g\|_p = \left\| \sum_{j=1}^k (f_j - g_j) \right\|_p \leq \sum_{j=1}^k \|f_j - g_j\|_p < \delta,$$

o que prova a densidade pretendida. □

Introduzimos em seguida, no contexto dos espaços topológicos localmente compactos e separados, um novo subespaço vetorial de $\mathbf{Mens}(X, E)$ importante nas aplicações.

III.4.8 Sejam X um espaço topológico localmente compacto e separado e E um espaço de Banach. Dizemos que uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é *de suporte compacto* se existe um compacto $K \subset X$ tal que $f(x) = 0$, para cada $x \notin K$.¹³³ Notamos $\mathcal{C}_c(X, E)$ o conjunto das aplicações $f: X \rightarrow E$ que são contínuas e *de suporte compacto*. Tem-se então que $\mathcal{C}_c(X, E)$ é um subespaço vetorial do espaço de todas as aplicações de X em E .

Dem: Talvez a única observação menos trivial seja a de que, se $f: X \rightarrow E$ é

¹³³O suporte de uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é a aderência em X do conjunto dos pontos x tais que $f(x) \neq 0$. Se lembrarmos que todo o compacto é fechado e que uma parte fechada dum compacto é compacta, concluímos que a condição referida equivale efetivamente ao suporte de f ser compacto.

nula fora do compacto $K \subset X$ e se $g: X \rightarrow E$ é nula fora do compacto $K' \subset X$, então $f + g: X \rightarrow E$ é nula fora do compacto $K \cup K'$. \square

III.4.9 Sejam X um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon sobre X e E um espaço de Banach. Tem-se então

$$\mathcal{C}_c(X, E) \subset \mathbf{Mens}(X, E)$$

e, se $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$, tem-se $[f] \in L^p(X, E)$ para cada $1 \leq p \leq +\infty$.

Dem: Suponhamos que $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$. Tem-se então que f é contínua, e portanto mensurável (cf. I.5.8) e, existe $K \subset X$ compacto tal que $f(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus K$. Em particular $f(X)$ é compacto (igual a $f(K)$ ou a $f(K) \cup \{0\}$), portanto separável (cf. a alínea e) de II.2.2), o que mostra que $f \in \mathbf{Mens}(X, E)$. Por outro lado, afastando já o caso trivial em que $f = 0$, tem-se $K \neq \emptyset$ e podemos considerar o máximo a da função contínua $x \mapsto \|f(x)\|$ para $x \in K$. O facto de se ter $\|f(x)\| \leq a$, para cada $x \in X$ implica que $[f] \in L^\infty(X, E)$ e, para cada $1 \leq p < +\infty$, o facto de se ter $\mu(K) < +\infty$ implica que

$$\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) = \int_K \|f(x)\|^p d\mu(x) \leq \mu(K) a^p < +\infty,$$

portanto $[f] \in L^p(X, E)$. \square

O nosso próximo objetivo é verificar que, sob hipóteses convenientes, o conjunto das classes de equivalência de funções em $\mathcal{C}_c(X, E)$ é denso em cada um dos espaços de Banach $L^p(X, E)$ com $1 \leq p < +\infty$. Precisamos, para isso, de estabelecer previamente um resultado topológico que garante a existência de uma classe suficientemente ampla de funções contínuas de suporte compacto, resultado que será aplicado também em outras ocasiões. Começamos por introduzir uma notação cómoda utilizada em Rudin [10].

III.4.10 Dados um espaço topológico X , localmente compacto e separado, um aberto $U \subset X$ e uma aplicação contínua $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, escrevemos $\varphi \prec U$ se $\varphi(X) \subset [0, 1]$ e existir um compacto $K \subset U$ tal que $\varphi(x) = 0$, para cada $x \notin K$.

Repare-se que, quando $\varphi \prec U$, tem-se, em particular, $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ e $\varphi(x) \leq \mathbb{1}_U(x)$, para cada $x \in X$.

III.4.11 (**Versão do lema de Urysohn**) Sejam X um espaço topológico localmente compacto e separado, $K \subset X$ um compacto e U um aberto de X tal que $K \subset U$. Existe então uma aplicação contínua $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi \prec U$ e $\varphi(x) = 1$, para cada $x \in K$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes, cada uma com a sua justificação. Na primeira parte fazemos um demonstração especialmente

simples, mas válida apenas no caso particular em que o espaço X é metrizável, de modo que o leitor para quem esse grau de generalidade seja suficiente possa dispensar a parte mais delicada da prova.

1) Vamos apresentar uma prova do resultado que é válida apenas no caso em que a topologia de X pode ser definida por uma métrica d .¹³⁴

Subdem: Tendo em conta a alínea a) do lema III.4.5, consideremos um aberto U' e um compacto K' tais que $K \subset U' \subset K' \subset U$. No caso em que $K = \emptyset$, a aplicação φ identicamente nula verifica as condições pedidas; no caso em que $U' = X$, tem-se $K' = U = X$ pelo que a aplicação φ identicamente igual a 1 verifica as condições pedidas; no caso em que $K \neq \emptyset$ e $U' \neq X$, lembramos que a função distância a um conjunto fechado não vazio é contínua e anula-se exatamente nos pontos desse conjunto fechado e definimos

$$\varphi(x) = \frac{d(x, X \setminus U')}{d(x, X \setminus U') + d(x, K)},$$

reparando que $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ é uma aplicação contínua verificando as condições pedidas.

2) A partir de agora vamos deixar de supor que X é metrizável e vamos subentender que as letras r e s designam sempre racionais do intervalo $[0, 1]$.

3) Vamos verificar que é possível escolher, para cada s , um aberto U_s e um compacto K_s , de modo que

$$(3.1) \quad K \subset U_s \subset K_s \subset U$$

e que

$$(3.2) \quad r < s \Rightarrow K_s \subset U_r.$$

e portanto também

$$(3.3) \quad r < s \Rightarrow U_s \subset U_r.$$

Subdem: Uma vez que o conjunto dos racionais do intervalo $[0, 1]$ é numerável podemos fixar uma bijeção ξ de \mathbb{N} sobre esse conjunto que verifique $\xi(1) = 0$ e $\xi(2) = 1$. Definimos então recursivamente os abertos $U_{\xi(n)}$ e os compactos $K_{\xi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, do modo seguinte:

Começamos por considerar, pela alínea a) do lema III.4.5, um aberto $U_0 = U_{\xi(1)}$ e um compacto $K_0 = K_{\xi(0)}$ de modo que se tenha $K \subset U_0 \subset K_0 \subset U$. Mais uma vez pelo resultado citado, consideramos, em seguida, um aberto $U_1 = U_{\xi(2)}$ e um compacto $K_1 = K_{\xi(2)}$ de modo que se tenha $K \subset U_1 \subset K_1 \subset U_0$ e reparamos que as condições (3.1) e (3.2) são verificadas quando r e s estão em $\{0, 1\}$.

Supomos, agora, construídos os abertos $U_{\xi(p)}$, com $1 \leq p \leq n$, de modo que

¹³⁴Esta parte pode ser dispensada, do ponto de vista estritamente lógico, por quem quiser examinar a demonstração do caso geral.

se verifique (3.1) e (3.2), sempre que r e s estão em $\{\xi(1), \dots, \xi(n)\}$. Chamamos r ao maior elemento deste conjunto que seja menor que $\xi(n+1)$ e s ao menor elemento do conjunto que seja maior que $\xi(n+1)$ (em particular $r < \xi(n+1) < s$). Tendo em conta mais uma vez o resultado citado, escolhemos o aberto $U_{\xi(n+1)}$ e o compacto $K_{\xi(n+1)}$ de modo que $K_s \subset U_{\xi(n+1)} \subset K_{\xi(n+1)} \subset U_r$ e constatamos que (3.1) e (3.2) continuam a ser verificados para r e s em $\{\xi(1), \dots, \xi(n+1)\}$. Fica assim terminada a definição recursiva anunciada.

4) Definimos agora a aplicação $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin U_0 \\ \sup\{s \mid x \in U_s\}, & \text{se } x \in U_0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que, para cada r , tem-se

$$(4.1) \quad x \notin U_r \Rightarrow \varphi(x) \leq r,$$

$$(4.2) \quad x \in K_r \Rightarrow \varphi(x) \geq r.$$

Subdem: Suponhamos que $x \notin U_r$. Para cada $s > r$, deduzimos de (3.3) que $x \notin U_s$. Por outras palavras, para cada s tal que $x \in U_s$ tem-se $s \leq r$ o que, trivialmente se $x \notin U_0$, e, pela definição de $\varphi(x)$ como um supremo se $x \in U_0$, implica que $\varphi(x) \leq r$.

Suponhamos agora que $\varphi(x) < r$. Podemos então escolher s tal que $\varphi(x) < s < r$ e daqui resulta que $x \notin U_s$ (se fosse $x \in U_s \subset U_0$, a definição de $\varphi(x)$ como um supremo implicava que $\varphi(x) \geq s$) e portanto, tendo em conta (3.2), $x \notin K_r$. Provámos assim que, se $x \in K_r$, então $\varphi(x) \geq r$.

5) Vamos mostrar que a aplicação $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ definida em 4) verifica as condições do enunciado.

Subdem: Se $x \in K$, então, por (3.1), $x \in U_s$, para todo o s , pelo que $\varphi(x) = 1$. Por outro lado, K_0 é um compacto contido em U e, para cada $x \notin K_0$, tem-se $x \notin U_0$, portanto $\varphi(x) = 0$. Resta-nos assim provar a continuidade de φ em cada ponto $x_0 \in X$, verificação essa que será dividida em três casos:

Suponhamos que $\varphi(x_0) = 0$ e seja $\delta > 0$ arbitrário. Sendo r tal que $0 < r < \delta$, resulta de (4.2) que $X \setminus K_r$ é um aberto de X contendo x_0 e, para cada $x \in X \setminus K_r$, tem-se, por (3.1) e (4.1), $x \notin U_r$ donde $\varphi(x) \leq r < \delta$, o que prova a continuidade de φ no ponto x_0 .

Suponhamos que $\varphi(x_0) = 1$ e seja $\delta > 0$ arbitrário. Sendo r tal que $1 - \delta < r < 1$, resulta de (4.1) que U_r é um aberto de X contendo x_0 e, para cada $x \in U_r$, tem-se, por (3.1) e (4.2), $x \in K_r$ donde $\varphi(x) \geq r > 1 - \delta$, o que prova a continuidade de φ no ponto x_0 .

Suponhamos que $0 < \varphi(x_0) < 1$ e seja $\delta > 0$ arbitrário. Sendo r e s tais que

$$\varphi(x_0) - \delta < r < \varphi(x_0) < s < \varphi(x_0) + \delta,$$

resulta de (4.1) e (4.2) que $U_r \cap (X \setminus K_s)$ é um aberto de X contendo x_0 e

para cada $x \in U_r \cap (X \setminus K_s)$ tem-se, por (3.1), (4.1) e (4.2), $x \in K_r$ e $x \notin U_s$ donde

$$\varphi(x_0) - \delta < r \leq \varphi(x) \leq s < \varphi(x_0) + \delta,$$

o que prova a continuidade de φ em x_0 . □

Apesar de só necessitarmos disso posteriormente, vamos aproveitar para examinar uma versão do teorema da partição da unidade que tem aplicações importantes no quadro da medida.

III.4.12 (Partição da unidade de um compacto) Sejam X um espaço topológico localmente compacto e separado, $K \subset X$ um compacto e $(U_j)_{j \in J}$ uma família finita de abertos de X tal que $K \subset \bigcup U_j$. Existem então aplicações contínuas $\varphi_j: X \rightarrow [0, 1]$, onde $j \in J$, tais que:

a) Para cada $j \in J$, $\varphi_j \prec U_j$.¹³⁵

b) Para cada $x \in X$, $\sum_{j \in J} \varphi_j(x) \leq 1$.

c) Para cada $x \in K$, $\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = 1$.

Costuma-se dizer que as funções φ_j constituem uma *partição da unidade* do compacto K subordinada à cobertura aberta finita constituída pelos U_j .

Dem: Vamos dividir a demonstração em duas partes:

1) Vamos provar a existência de conjuntos compactos $K_j \subset U_j$, onde $j \in J$, tais que $K \subset \bigcup K_j$.

Subdem: Consideremos, para cada $x \in K$, um índice $j_x \in J$ tal que $x \in U_{j_x}$ e uma vizinhança compacta C_x de x , tal que $C_x \subset U_{j_x}$. Pela propriedade das coberturas dos compactos, escolhamos então uma parte finita K_0 de K tal que se tenha ainda

$$K \subset \bigcup_{x \in K_0} \text{int}(C_x).$$

Sendo, para cada $j \in J$,

$$K_j = \bigcup_{\substack{x \in K_0 \\ j_x = j}} C_x,$$

cada K_j é um compacto (união finita de compactos), está contido em U_j e K está contido na união dos K_j .

2) Pelo lema de Urysohn em III.4.11, podemos considerar, para cada $j \in J$, uma aplicação contínua $\hat{\varphi}_j: X \rightarrow [0, 1]$, tal que $\hat{\varphi}_j \prec U_j$ e $\hat{\varphi}_j(x) = 1$, para cada $x \in K_j$ e definir uma aplicação contínua $\hat{\varphi}: X \rightarrow \mathbb{R}$ por

¹³⁵cf. a notação em III.4.10.

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{j \in J} \widehat{\varphi}_j(x),$$

vindo então que, para cada $x \in K$, existe j tal que $x \in K_j$, e portanto $\widehat{\varphi}(x) \geq \widehat{\varphi}_j(x) = 1$. Consideremos o aberto V de X , contendo K , constituído pelos $x \in X$ tais que $\widehat{\varphi}(x) > 0$. Mais uma vez pelo lema de Urysohn, vai existir uma aplicação contínua $\psi: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\psi \prec V$ e $\psi(x) = 1$, para cada $x \in K$. Para cada $x \in X$, $\widehat{\varphi}(x) + (1 - \psi(x)) > 0$, visto que, para $x \in V$, $\widehat{\varphi}(x) > 0$ e, para $x \notin V$, $\psi(x) = 0$. Podemos assim definir aplicações contínuas $\varphi_j: X \rightarrow [0, 1]$ por

$$\varphi_j(x) = \frac{\widehat{\varphi}_j(x)}{\widehat{\varphi}(x) + (1 - \psi(x))},$$

tendo-se $\varphi_j \prec U_j$, por ser $\widehat{\varphi}_j \prec U_j$. Vem, para cada $x \in X$,

$$\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = \frac{\widehat{\varphi}(x)}{\widehat{\varphi}(x) + (1 - \psi(x))} \leq 1$$

e, para cada $x \in K$, $1 - \psi(x) = 0$, e portanto

$$\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = \frac{\widehat{\varphi}(x)}{\widehat{\varphi}(x) + (1 - \psi(x))} = 1. \quad \square$$

III.4.13 (Lema de densidade) Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável e $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon. Se $A \subset X$ é um boreliano com $\mu(A) < +\infty$ e $1 \leq p < +\infty$, então $[\mathbb{I}_A] \in L^p(X, \mathbb{R})$ e, para cada $\delta > 0$, existe $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ com $\varphi(X) \subset [0, 1]$ e $\|[\mathbb{I}_A] - [\varphi]\|_p < \delta$.

Dem: Tendo em conta as alíneas b) e c) de III.4.6, podemos considerar um aberto $U \supset A$ e um compacto $K \subset A$ tais que

$$\mu(U) < \mu(A) + \frac{\delta^p}{2}, \quad \mu(K) > \mu(A) - \frac{\delta^p}{2},$$

portanto

$$\mu(U \setminus K) = \mu(U) - \mu(K) < \delta^p.$$

Tendo em conta o lema de Urysohn III.4.11, podemos considerar uma função contínua $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ nula fora de um certo compacto $K' \subset U$ e tal que $\varphi(x) = 1$, para cada $x \in K$. Tem-se, em particular, $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ e, uma vez que $\varphi(x) = \mathbb{I}_A(x)$, tanto para $x \in K$ como para $x \notin U$, e que, para cada

$x \in X$, $|\mathbb{I}_A(x) - \varphi(x)| \leq 1$, concluímos que

$$\begin{aligned} \|\mathbb{I}_A - [\varphi]\|_p &= \left(\int_X \|\mathbb{I}_A(x) - \varphi(x)\|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left(\int_{U \setminus K} 1 d\mu(x) \right)^{1/p} = \mu(U \setminus K)^{1/p} < \delta. \quad \square \end{aligned}$$

III.4.14 (Densidade das aplicações contínuas de suporte compacto) Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach. Para cada $1 \leq p < +\infty$, o conjunto $C_c(X, E) \subset Mens(X, E)$, das classes de equivalência $[f]$ com $f \in C_c(X, E)$, é um subespaço vetorial denso de $L^p(X, E)$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) O facto de $C_c(X, E)$ ser um subespaço vetorial de $Mens(X, E)$ contido em cada $L^p(X, E)$, com $1 \leq p < +\infty$, é uma consequência de III.4.8 e III.4.9.

2) Sejam A um boreliano de X com $\mu(A) < +\infty$ e $z \in E$ e consideremos a correspondente função em escada $g: X \rightarrow E$ definida por $g(x) = \mathbb{I}_A(x)z$. Vamos mostrar que, para cada $\delta > 0$, existe $f \in C_c(X, E)$ tal que

$$\|[g] - [f]\|_p < \delta.$$

Subdem: Podemos já afastar o caso trivial em que $z = 0$, caso em que se toma para f a aplicação identicamente 0. Podemos então aplicar o lema III.4.13 para garantir a existência de $\varphi \in C_c(X, \mathbb{R})$ tal que $\|\mathbb{I}_A - \varphi\|_p < \frac{\delta}{\|z\|}$ e, sendo então $f \in C_c(X, E)$ a aplicação definida por $f(x) = \varphi(x)z$, obtemos trivialmente

$$\|[g] - [f]\|_p = \|\mathbb{I}_A - \varphi\|_p \|z\| < \delta.$$

3) Vamos agora verificar que, para cada $[g] \in St(X, E)$ (cf. III.2.26) e cada $\delta > 0$, existe $[f] \in C_c(X, E)$ tal que

$$\|[g] - [f]\|_p < \delta.$$

Subdem: Do que referimos em II.2.18, concluímos a existência de um número finito de aplicações em escada $g_1, \dots, g_k: X \rightarrow E$, cada uma das quais da forma particular estudada em 2), tais que $g = g_1 + \dots + g_k$, pelo que, para cada $1 \leq j \leq k$, podemos considerar $[f_j] \in C_c(X, E)$ com $\|[g_j] - [f_j]\|_p < \frac{\delta}{k}$. Tem-se então que $[f] = [f_1] + \dots + [f_k] \in C_c(X, E)$ e

$$\|[g] - [f]\|_p = \left\| \sum_{j=1}^k ([g_j] - [f_j]) \right\|_p \leq \sum_{j=1}^k \|[g_j] - [f_j]\|_p < \delta.$$

4) Consideremos, por fim $[h] \in L^p(X, E)$ e $\delta > 0$ arbitrários. O teorema de densidade em III.2.26 garante a existência de $[g] \in St(X, E)$ tal que

$\|[h] - [g]\|_p < \frac{\delta}{2}$ e o que vimos em 3) implica então a existência de $[f] \in C_c(X, E)$ tal que $\|[g] - [f]\|_p < \frac{\delta}{2}$. Tem-se assim

$$\|[h] - [f]\|_p \leq \|[h] - [g]\|_p + \|[g] - [f]\|_p < \delta,$$

o que mostra que $C_c(X, E)$ é efetivamente denso em $L^p(X, E)$. \square

Uma das razões da importância das aplicações contínuas de suporte compacto é a forma como interagem com as aplicações localmente integráveis, que definimos a seguir.

III.4.15 Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach. Diz-se que uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é *localmente integrável* se for topologicamente mensurável e com $f|_K: K \rightarrow E$ integrável, para cada compacto $K \subset X$.

Repare-se que esta definição generaliza a apresentada em II.3.1, no caso particular em que X é um intervalo de \mathbb{R} .

III.4.16 a) Repare-se que, se $f: X \rightarrow E$ é topologicamente mensurável e se considerarmos a aplicação mensurável $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $\varphi(x) = \|f(x)\|$ e a medida $\mu_{(\varphi)}$ associada (cf. II.1.22), dizer que f é localmente integrável é o mesmo que dizer que a medida $\mu_{(\varphi)}$ é também uma medida de Radon; em particular, tendo em conta III.4.2, f é localmente integrável se, e só se, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança V de x tal que $f|_V: V \rightarrow E$ seja integrável.

b) A caracterização em a) implica a seguinte propriedade local das aplicações localmente integráveis: Se $(U_j)_{j \in J}$ é uma família de abertos de X de união X e se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação topologicamente mensurável¹³⁶ tal que, para cada $j \in J$, $f|_{U_j}: U_j \rightarrow E$ seja localmente integrável, então f é localmente integrável.

III.4.17 Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach. O conjunto das aplicações localmente integráveis $f: X \rightarrow E$ é então trivialmente um subespaço vetorial de $\mathbf{Mens}(X, E)$ e é claro que, se $f, \hat{f}: X \rightarrow E$ são tais que $[f] = [\hat{f}]$ em $\mathbf{Mens}(X, E)$, então f é localmente integrável se, e só se, \hat{f} é localmente integrável.

Nas condições anteriores, notamos $L^1_{loc}(X, E)$ o subespaço vetorial de

¹³⁶A hipótese de f ser topologicamente mensurável poderia ser dispensada, por decorrer da de cada restrição a U_j ser topologicamente mensurável (cf. a alínea a) do exercício III.4.7 adiante).

$Mens(X, E)$ cujos elementos são as classes de equivalência $[f]$, com $f: X \rightarrow E$ localmente integrável.¹³⁷

III.4.18 Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach. Se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação contínua, então f é localmente integrável.

Dem: O facto de f ser topologicamente mensurável resulta de I.5.8 e II.2.3. Seja $K \subset X$ um compacto, que podemos já supor não vazio. Sendo a o máximo em K da função contínua $x \mapsto \|f(x)\|$, vemos que

$$\int_K \|f(x)\| d\mu(x) \leq \int_K a d\mu(x) = a\mu(K) < +\infty. \quad \square$$

Apesar de não dispormos, em geral, de uma norma natural no espaço $L^1_{loc}(X, E)$, podemos definir uma noção de convergência neste espaço que é útil nas aplicações.

III.4.19 Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach. Dados uma sucessão de elementos $[f_n] \in L^1_{loc}(X, E)$, onde $n \in \mathbb{N}$, e um elemento $[f] \in L^1_{loc}(X, E)$, dizemos que a sucessão converge para $[f]$ em $L^1_{loc}(X, E)$, e escrevemos

$$[f_n] \rightarrow [f] \text{ em } L^1_{loc}(X, E),$$

se, para cada compacto $K \subset X$, a sucessão das restrições $[f_{n/K}]$ convergir para a restrição $[f_{/K}]$ em $L^1(K, E)$.

Esta noção de convergência verifica a seguinte condição de unicidade: Se a sucessão $[f_n]$ converge para $[f]$ e para $[g]$ em $L^1_{loc}(X, E)$, então $[f] = [g]$, isto é, $f(x) = g(x)$ quase sempre.

Dem: Tendo em conta a alínea b) de III.4.5, podemos considerar uma família de compactos $K_p \subset X$, onde $p \in \mathbb{N}$, de união X . Para cada $p \in \mathbb{N}$, o facto de a sucessão $[f_{n/K_p}]$ convergir tanto para $[f_{/K_p}]$ como para $[g_{/K_p}]$ em $L^1(K_p, E)$ implica que $[f_{/K_p}] = [g_{/K_p}]$, pelo que existe $A_p \in \mathcal{M}$ com $A_p \subset K_p$ e $\mu(A_p) = 0$ tal que $f(x) = g(x)$, para cada $x \in K_p \setminus A_p$. Tem-se então que $A = \bigcup A_p$ é um conjunto de \mathcal{M} com $\mu(A) = 0$ tal que, para cada $x \in X \setminus A$, $f(x) = g(x)$, o que mostra que se tem efetivamente $[f] = [g]$. \square

III.4.20 (**Compatibilidade da convergência com as operações vectoriais**) Nas condições anteriores, suponhamos que $[f_n] \rightarrow [f]$ e $[g_n] \rightarrow [g]$ em $L^1_{loc}(X, E)$ e que a é um escalar de E . Tem-se então que

¹³⁷Repare-se que, ao contrário do que acontecia com os subespaços vectoriais $L^p(X, E)$ de $Mens(X, E)$, com $1 \leq p \leq +\infty$, não consideramos nenhuma norma natural em $L^1_{loc}(X, E)$.

$[f_n] + [g_n] \rightarrow [f] + [g]$ e $a[f_n] \rightarrow a[f]$ em $L^1_{loc}(X, E)$.

Dem: Temos consequências imediatas da definição, tendo em conta, para cada compacto $K \subset X$, as propriedades correspondentes da convergência de sucessões no espaço de Banach $L^1(K, E)$. \square

III.4.21 Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach. Se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação topologicamente mensurável tal que $[f] \in L^p(X, E)$, para algum p , com $1 \leq p \leq +\infty$, então f é localmente integrável. Vemos assim que cada $L^p(X, E)$, com $1 \leq p \leq +\infty$, é um subespaço vetorial de $L^1_{loc}(X, E)$.

Além disso, se $[f_n]$, onde $n \in \mathbb{N}$, é uma sucessão de elementos de $L^p(X, E)$ que convirja para $[f] \in L^p(X, E)$ neste espaço de Banach, então tem-se também $[f_n] \rightarrow [f]$ em $L^1_{loc}(X, E)$.

Dem: Tendo em conta III.2.12 ou III.2.23, conforme $p < +\infty$ ou $p = +\infty$, vemos que, para cada compacto $K \subset X$, $L^p(K, E) \subset L^1(K, E)$ e existe uma constante $c \geq 0$ tal que, para cada $[f] \in L^p(X, E)$,

$$\|[f/K]\|_1 \leq c\|[f/K]\|_p \leq c\|[f]\|_p$$

(tem-se $\mu(K) < +\infty$ e o caso em que $\mu(K) = 0$ é trivial), o que implica que temos uma aplicação linear contínua

$$L^p(X, E) \rightarrow L^1(K, E), \quad [f] \mapsto [f/K]. \quad \square$$

A interação que referimos entre aplicações contínuas de suporte compacto e aplicações localmente integráveis manifesta-se sempre que temos uma “multiplicação” conveniente entre os vetores dos espaços vetoriais de chegada, isto é, quando estamos no contexto referido na alínea b) de II.2.9, mais precisamente, naquele em que temos três espaços de Banach F, G, H e uma aplicação bilinear contínua $\xi: F \times G \rightarrow H$, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$, $w \times z = \xi(w, z)$. Nessa situação, como se verifica em cursos de topologia ou de análise funcional (cf., por exemplo, [9]), a continuidade da aplicação bilinear ξ é equivalente à existência de uma constante $M \geq 0$ tal que, sempre que $w \in F$ e $z \in G$, $\|w \times z\| \leq M\|w\|\|z\|$.

Não nos devemos deixar atemorizar pela generalidade desta situação: Entre os exemplos mais frequentes de aplicação, estão aquele em que os três espaços vetoriais são iguais ao corpo \mathbb{K} dos escalares, \mathbb{R} ou \mathbb{C} , com o valor absoluto como norma, e a multiplicação como aplicação bilinear, e aquele em que $G = H$ é um espaço de Banach, F é o corpo dos escalares e a aplicação bilinear é a multiplicação dos escalares pelos vetores.

III.4.22 Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável e $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon.

Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para

cada $w \in F$ e $z \in G$, $w \times z = \xi(w, z) \in H$. Tem-se então:

a) Seja $f: X \rightarrow F$ uma aplicação contínua. Se $g: X \rightarrow G$ é localmente integrável, então a aplicação topologicamente mensurável $f \times g: X \rightarrow H$ é localmente integrável. Além disso, se $[g_n] \rightarrow [g]$ em $L^1_{loc}(X, G)$, então $[f] \times [g_n] \rightarrow [f] \times [g]$ em $L^1_{loc}(X, H)$.

b) Fica definida uma aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c(X, F) \times L^1_{loc}(X, G) &\rightarrow H, \\ (f, [g]) &\mapsto \langle f, [g] \rangle = \int_X f(x) \times g(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

e, se $[g_n] \rightarrow [g]$ em $L^1_{loc}(X, G)$ e $f \in \mathcal{C}_c(X, F)$, então $\langle f, [g_n] \rangle \rightarrow \langle f, [g] \rangle$ em H .

Dem: **a)** Seja $K \subset X$ um compacto, que podemos já supor não vazio. Tem-se então que a função contínua $x \mapsto \|f(x)\|$ atinge um máximo em K , e portanto $[f/K] \in L^\infty(K, F)$. Uma vez que $[g/K] \in L^1(K, G)$, deduzimos de III.2.35 que $[f/K \times g/K] \in L^1(K, H)$. Do mesmo modo, no caso em que $[g_n] \rightarrow [g]$ em $L^1_{loc}(X, G)$, vem $[g_n/K] \rightarrow [g/K]$ em $L^1(K, G)$ e portanto, pela continuidade da aplicação bilinear em III.2.35, $[(f \times g_n)/K] = [f/K] \times [g_n/K]$ converge em $L^1(K, H)$ para $[f/K] \times [g/K] = [(f \times g)/K]$

b) Suponhamos que $f \in \mathcal{C}_c(X, F)$ e que $g: X \rightarrow G$ é localmente integrável. Consideremos um compacto $K \subset X$ tal que $f(x) = 0$, para cada $x \in X \setminus K$ e reparemos que se tem também $f(x) \times g(x) = 0$, para cada $x \in X \setminus K$. Tendo em conta o que vimos em a), tem-se então

$$\int_X \|f(x) \times g(x)\| d\mu(x) = \int_K \|f(x) \times g(x)\| d\mu(x) < +\infty,$$

o que mostra que fica bem definido o elemento

$$\langle f, [g] \rangle = \int_X f(x) \times g(x) d\mu(x) \in H.$$

O facto de o valor $\langle f, [g] \rangle$ não depender do representante da classe de equivalência $[g]$ resulta de que, se $g(x) = \tilde{g}(x)$ quase sempre, então também $f(x) \times g(x) = f(x) \times \tilde{g}(x)$ quase sempre, e portanto as duas funções têm o mesmo integral. O facto de a aplicação $\mathcal{C}_c(X, F) \times L^1_{loc}(X, G) \rightarrow H$ ser bilinear resulta agora das propriedades de linearidade do integral em II.2.34 e na alínea a) de II.2.36. Suponhamos agora que $[g_n] \rightarrow [g]$ em $L^1_{loc}(X, G)$. Uma vez que, como na prova de a), $[f/K] \in L^\infty(K, F)$ e $[g_n/K] \rightarrow [g/K]$ em $L^1(K, G)$, deduzimos da continuidade da aplicação bilinear em III.2.35 que $[(f \times g_n)/K] = [f/K] \times [g_n/K]$ converge em $L^1(K, H)$ para $[f/K] \times [g/K] = [(f \times g)/K]$ e portanto, da continuidade da aplicação linear $L^1(K, H) \rightarrow H$ em III.2.10, deduzimos que

$$\int_X f(x) \times g_n(x) d\mu(x) = \int_K f(x) \times g_n(x) d\mu(x)$$

converge em H para

$$\int_K f(x) \times g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) \times g(x) d\mu(x). \quad \square$$

O corolário do próximo resultado mostra que, no caso em que E é um espaço de Banach e a aplicação bilinear que consideramos é a multiplicação pelos reais, um elemento de $L^1_{loc}(X, E)$ fica determinado pelo seu produto pelos diferentes elementos de $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$.¹³⁸

III.4.23 Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach e consideremos a correspondente aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \times L^1_{loc}(X, E) &\rightarrow E, \\ (\varphi, [g]) &\mapsto \langle \varphi, [g] \rangle = \int_X \varphi(x) g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Se $[g] \in L^1_{loc}(X, E)$ é tal que $\langle \varphi, [g] \rangle = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, então $[g] = 0$, isto é, $g(x) = 0$ quase sempre.

Dem: Começemos por reparar que se pode considerar um semianel $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}_X$, constituído pelos borelianos $A \subset X$ que estão contidos nalgum compacto de X , borelianos que verificam $\mu(A) < +\infty$, e que, tendo em conta a alínea b) do lema III.4.5, X é a união de uma sucessão de compactos K_n , $n \in \mathbb{N}$, o que implica que a restrição de μ a este semianel é σ -finita. Este último facto também implica que qualquer boreliano A é a união dos borelianos $K_n \cap A$ que estão em \mathcal{S} , pelo que a σ -álgebra gerada por \mathcal{S} é \mathcal{B}_X . Tendo em conta II.2.46, e uma vez que, para cada $A \in \mathcal{S}$, $g|_A: A \rightarrow E$ é integrável, para provarmos que se tem $g(x) = 0$ quase sempre, basta provarmos que, para cada $A \in \mathcal{S}$, se tem $\int_A g(x) d\mu(x) = 0$.

Fixemos então um tal $A \in \mathcal{S}$ e seja $\delta > 0$ arbitrário. O facto de g ser localmente integrável implica que podemos considerar uma nova medida de Radon μ' em \mathcal{B}_X definida por

$$\mu'(B) = \int_B \|g(x)\| d\mu(x),$$

para a qual se tem $\mu'(A) < +\infty$, e, aplicando o lema de densidade III.4.13, com $p = 1$, a μ' , concluímos a existência de $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ tal que

¹³⁸Mesmo que o corpo dos escalares de E seja \mathbb{C} , podemos multiplicar números reais por vetores de E .

$$\int_X |\mathbb{I}_A(x) - \varphi(x)| \|g(x)\| d\mu(x) = \int_X |\mathbb{I}_A(x) - \varphi(x)| d\mu'(x) < \delta$$

e portanto, por ser $\int_X \varphi(x) g(x) d\mu(x) = 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_A g(x) d\mu(x) \right\| &= \left\| \int_X (\mathbb{I}_A(x) - \varphi(x)) g(x) d\mu(x) \right\| \leq \\ &\leq \int_X |\mathbb{I}_A(x) - \varphi(x)| \|g(x)\| d\mu(x) < \delta, \end{aligned}$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de $\delta > 0$, implica que se tem efetivamente

$$\int_A g(x) d\mu(x) = 0. \quad \square$$

III.4.24 (Corolário) Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach e consideremos a correspondente aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \times L^1_{loc}(X, E) &\rightarrow E, \\ (\varphi, [g]) &\mapsto \langle \varphi, [g] \rangle = \int_X \varphi(x) g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Se $[g], [h] \in L^1_{loc}(X, E)$ são tais que $\langle \varphi, [g] \rangle = \langle \varphi, [h] \rangle$, para todo o $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, então $[g] = [h]$, isto é, $g(x) = h(x)$ quase sempre.

Dem: Basta atender a que, para todo o $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, vem

$$\langle \varphi, [g] - [h] \rangle = \langle \varphi, [g] \rangle - \langle \varphi, [h] \rangle = 0,$$

portanto $[g] - [h] = 0$. □

Vamos agora examinar um resultado, o teorema de Riesz, que relaciona as medidas de Radon num espaço topológico localmente compacto separado e de base contável X , com certos funcionais lineares $\Phi: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, funcionais esses que são tomados por alguns autores como ponto de partida para o estudo da medida nestes espaços topológicos.

III.4.25 Seja X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável. Notemos $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$ o subconjunto de $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ constituído pelos φ tais que $\varphi(x) \in \mathbb{R}_+$. Vamos dizer que uma aplicação linear

$$\Phi: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

é um *funcional linear positivo* se $\Phi(\varphi) \geq 0$, para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$.

Se $\Phi: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo e se $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ verificam $\varphi(x) \leq \psi(x)$, para cada $x \in X$, então $\Phi(\varphi) \leq \Phi(\psi)$.

Dem: Podemos considerar o elemento $\psi - \varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, para o qual se tem $\psi(x) - \varphi(x) \geq 0$, para cada $x \in X$, pelo que, por definição,

$$0 \leq \Phi(\psi - \varphi) = \Phi(\psi) - \Phi(\varphi). \quad \square$$

III.4.26 Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável e $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon. Fica então definido um funcional linear positivo associado

$$\Phi_\mu: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_\mu(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\mu(x)$$

(cf. III.4.14, com $p = 1$).

III.4.27 (**Teorema de Riesz**) Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável e $\Phi: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. Existe então uma, e uma só, medida de Radon $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ que tenha Φ como funcional linear positivo associado, isto é, tal que $\Phi = \Phi_\mu$.

Mais precisamente, para cada aberto U de X , $\mu(U)$ é o supremo dos números reais da forma $\Phi(\varphi)$, com $\varphi \prec U$ (cf. a notação em III.4.10) e, para cada boreliano A de X , $\mu(A)$ é o ínfimo dos $\mu(U)$, com U aberto e $A \subset U$.

Dem: Para uma melhor sistematização, vamos dividir a prova em várias alíneas, cada uma com a sua justificação.

a) Vamos mostrar que, se μ é uma medida de Radon tal que $\Phi = \Phi_\mu$, então a medida μ está necessariamente caracterizada do modo referido no enunciado, o que provará, em particular, a afirmação de unicidade.

Subdem: Seja U um aberto de X . Para cada $\varphi \prec U$, tem-se $\varphi(x) \leq \mathbb{I}_U(x)$, donde

$$\Phi(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) \leq \int_X \mathbb{I}_U(x) d\mu(x) = \mu(U).$$

Por outro lado, para cada $a < \mu(U)$, resulta da alínea c) de III.4.6 a existência de um compacto $K \subset U$ tal que $a < \mu(K)$ e considerando então, pelo lema de Urysohn em III.4.11, $\varphi \prec U$ tal que $\varphi(x) = 1$ para $x \in K$, vemos que $\mathbb{I}_K(x) \leq \varphi(x)$, donde

$$a < \mu(K) = \int_X \mathbb{I}_K(x) d\mu(x) \leq \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \Phi(\varphi),$$

o que mostra que $\mu(U)$ é efetivamente o supremo dos $\Phi(\varphi)$ com $\varphi \prec U$. O facto de $\mu(A)$ ser o ínfimo dos $\mu(U)$, com U aberto e $A \subset U$, é uma propriedade geral das medidas de Radon (cf. a alínea b) de III.4.6).

b) Para cada aberto U de X , seja $\mu_*(U) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ o supremo dos $\Phi(\varphi)$ com $\varphi \prec U$. Tem-se então que μ_* verifica as propriedades: **b1)** $\mu_*(\emptyset) = 0$; **b2)** Se $U \subset U'$, então $\mu_*(U) \leq \mu_*(U')$; **b3)** Se $(U_j)_{j \in J}$ é uma família de abertos de X , então

$$\mu_*\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu_*(U_j). \quad 139$$

Subdem: A propriedade b1) resulta de que, se $\varphi \prec U$, então $\varphi = 0$ e a propriedade b2) é consequência de que, se $U \subset U'$, para cada $\varphi \prec U$ tem-se também $\varphi \prec U'$. Seja agora $(U_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de X e consideremos $\varphi \prec \bigcup U_j$ arbitrário. Seja $K \subset \bigcup U_j$ um compacto tal que $\varphi(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus K$ e seja $I \subset J$ uma parte finita tal que $K \subset \bigcup_{j \in I} U_j$.

Pelo teorema da partição da unidade em III.4.12, podemos considerar, para cada $j \in I$, $\varphi_j: X \rightarrow [0, 1]$ contínua de suporte compacto com $\varphi_j \prec U_j$ de modo que $\sum_{j \in I} \varphi_j(x) = 1$ para cada $x \in K$. Tem-se então, para cada $x \in X$,

$$\varphi(x) = \sum_{j \in I} \varphi_j(x) \varphi(x),$$

visto que, se $x \notin K$, ambos os membros são nulos. Uma vez que se tem $\varphi_j \varphi \prec U_j$, obtemos

$$\Phi(\varphi) = \sum_{j \in I} \Phi(\varphi_j \varphi) \leq \sum_{j \in I} \mu_*(U_j) \leq \sum_{j \in J} \mu_*(U_j)$$

donde, passando ao supremo em φ , concluímos a desigualdade

$$\mu_*\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu_*(U_j).$$

c) Para cada conjunto $A \subset X$, seja $\mu^*(A)$ o ínfimo dos $\mu_*(U')$ com U' aberto de X e $A \subset U'$. Tem-se então que μ^* é uma medida exterior em X e, para cada aberto U de X , $\mu^*(U) = \mu_*(U)$.

Subdem: O facto de, para cada aberto U de X , se ter $\mu^*(U) = \mu_*(U)$ é uma consequência da propriedade b2), que garante que o ínfimo que define $\mu^*(U)$ é mesmo um mínimo, atingido para $U' = U$. Concluímos, em particular que $\mu^*(\emptyset) = 0$. O facto de se ter $\mu^*(A) \leq \mu^*(A')$, sempre que $A \subset A'$ resulta de que então qualquer aberto que contém A' também contém A . Resta-nos mostrar que, se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de subconjuntos de X , tem-se

$$(1) \quad \mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu^*(A_j),$$

para o que se pode já supor que o segundo membro é finito, em particular,

¹³⁹Trata-se das propriedades análogas às que definem as medidas exteriores, com o bônus de não se exigir que J seja contável, mas as medidas exteriores estão definidas em todos os subconjuntos, e não só nos abertos.

para cada $j \in J$, $\mu^*(A_j) < +\infty$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos uma família $(\delta_j)_{j \in J}$ com $\delta_j > 0$ e $\sum \delta_j \leq \delta$ (cf. I.3.10) e seja, para cada $j \in J$, U_j um aberto tal que $A_j \subset U_j$ e $\mu_*(U_j) \leq \mu^*(A_j) + \delta_j$. Tem-se então que $\bigcup U_j$ é um aberto contendo $\bigcup A_j$, pelo que, tendo em conta b3),

$$\mu^*\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \leq \mu_*\left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) \leq \sum_{j \in J} \mu_*(U_j) \leq \sum_{j \in J} (\mu^*(A_j) + \delta_j) \leq \left(\sum_{j \in J} \mu^*(A_j)\right) + \delta,$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de $\delta > 0$, implica a desigualdade (1).

d) A restrição μ da medida exterior μ^* à σ -álgebra \mathcal{B}_X dos borelianos de X é uma medida.

Subdem: Tendo em conta I.4.5, sabemos que a restrição de μ^* à σ -álgebra dos conjuntos μ^* -mensuráveis é uma medida, pelo que a conclusão desta alínea ficará justificada se mostrarmos que todo o boreliano de X é μ^* -mensurável, para o que bastará mostrar que, se $U \subset X$ é aberto, então U é μ^* -mensurável, isto é, para cada $A \subset X$,

$$(2) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U).$$

Sejam então $U \subset X$ um aberto e $A \subset X$ arbitrário. Para provar (2) bastará provar a desigualdade

$$(3) \quad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U),$$

uma vez que a desigualdade oposta resulta de μ^* ser uma medida exterior e de se ter $A = (A \cap U) \cup (A \setminus U)$. Tendo em conta a definição de $\mu^*(A)$ como um ínfimo, para mostrarmos (3) bastará mostrarmos que, para cada aberto $V \supset A$, tem-se

$$(4) \quad \mu^*(V) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \setminus U),$$

e, uma vez que $\mu^*(V \cap U) \geq \mu^*(A \cap U)$ e $\mu^*(V \setminus U) \geq \mu^*(A \setminus U)$, para provarmos (4) bastará mostrar que

$$(5) \quad \mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \setminus U).$$

Para provar (5) podemos já supor que $\mu^*(V) < +\infty$ e portanto, por termos conjuntos contidos em V , também $\mu^*(V \cap U) < +\infty$ e $\mu^*(V \setminus U) < +\infty$, caso em que escrevemos (5) na forma equivalente

$$(6) \quad \mu_*(V \cap U) \leq \mu_*(V) - \mu^*(V \setminus U).$$

Tendo em conta a definição de $\mu_*(V \cap U)$ como um supremo, para provar (6) basta mostrar que, para cada $\varphi \prec V \cap U$ tem-se

$$(7) \quad \Phi(\varphi) \leq \mu_*(V) - \mu^*(V \setminus U).$$

Seja $K \subset V \cap U$ um compacto tal que $\varphi(x) = 0$ para cada $x \notin K$. Uma vez que $V \setminus K$ é aberto e $\mu^*(V \setminus U) \leq \mu^*(V \setminus K) = \mu_*(V \setminus K)$, para provar (7) basta provar que

$$\Phi(\varphi) \leq \mu_*(V) - \mu_*(V \setminus K)$$

ou seja, escrito de outra forma,

$$(8) \quad \mu_*(V \setminus K) \leq \mu_*(V) - \Phi(\varphi).$$

Mais uma vez, tendo em conta a definição de $\mu_*(V \setminus K)$ como um supremo, para provar (8) basta provar que, para cada $\psi \prec V \setminus K$ tem-se

$$\Phi(\psi) \leq \mu_*(V) - \Phi(\varphi),$$

ou, o que é equivalente,

$$(9) \quad \Phi(\varphi + \psi) \leq \mu_*(V).$$

Mas, sendo $K' \subset V \setminus K$ um compacto tal que $\psi(x) = 0$ para cada $x \notin K'$, tem-se que $K \cup K'$ é um compacto contido em V tal que $\varphi(x) + \psi(x) = 0$ para cada $x \notin K \cup K'$ e o facto de, para cada $x \in X$ com $\varphi(x) \neq 0$, ser $x \in K$, e portanto $x \notin K'$, donde $\psi(x) = 0$, implica que, para cada $x \in X$, $\varphi(x) + \psi(x) \leq 1$, e portanto $\varphi + \psi \prec V$. A desigualdade (9), que nos faltava provar, é assim uma consequência da definição de $\mu_*(V)$ como um supremo.

e) Sejam $A \subset X$ boreliano, $a \geq 0$ e $\varphi \in C_c(X, \mathbb{R}_+)$ tal que $\varphi(x) \geq a$, para cada $x \in A$. Tem-se então $\Phi(\varphi) \geq a\mu(A)$.

Subdem: Podemos já afastar o caso trivial em que $a = 0$. Consideremos $c > 1$ arbitrário. Consideremos o aberto U de X ,

$$U = \{x \in X \mid \frac{c}{a}\varphi(x) > 1\},$$

que contém A . Sendo $\psi \prec U$ arbitrário, tem-se $\psi(x) \leq \frac{c}{a}\varphi(x)$, para cada $x \in X$, uma vez que, se $x \in U$, $\psi(x) \leq 1 < \frac{c}{a}\varphi(x)$ e, se $x \notin U$, $\psi(x) = 0$, e concluímos agora da propriedade de monotonia referida em III.4.25 que se tem

$$\Phi(\psi) \leq \Phi(\frac{c}{a}\varphi) = \frac{c}{a}\Phi(\varphi).$$

A definição de $\mu(U) = \mu_*(U)$ como um supremo implica agora que se tem $\mu(U) \leq \frac{c}{a}\Phi(\varphi)$, e portanto, por ser $\mu(A) \leq \mu(U)$, também

$$\mu(A) \leq \frac{c}{a}\Phi(\varphi).$$

Tendo em conta a arbitrariedade de c , podemos considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$, $c = 1 + \frac{1}{n}$, e, passando ao limite a sucessão de desigualdades obtida, vemos que $\mu(A) \leq \frac{1}{a}\Phi(\varphi)$, ou seja, $\Phi(\varphi) \geq a\mu(A)$.

f) Em particular, deduzimos de e) que μ é uma medida de Radon.

Subdem: Se $K \subset X$ é um compacto, o lema de Urysohn em III.4.11 garante a existência de $\varphi \prec X$ tal que $\varphi(x) = 1$ para cada $x \in K$, o que

implica que $\mu(K) \leq \Phi(\varphi) < +\infty$.

g) Sejam $K \subset X$ compacto, $b \geq 0$ e $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ tal que $\varphi(X) \subset [0, b]$ e $\varphi(x) = 0$, para cada $x \notin K$. Tem-se então $\Phi(\varphi) \leq b\mu(K)$.

Subdem: Podemos já afastar o caso trivial em que $b = 0$, e portanto $\varphi = 0$. Se U é um aberto arbitrário com $K \subset U$, vemos que $\frac{1}{b}\varphi \prec U$ e portanto, pela definição de $\mu_*(U)$ como um supremo,

$$\frac{1}{b}\Phi(\varphi) = \Phi\left(\frac{1}{b}\varphi\right) \leq \mu_*(U).$$

A definição de $\mu(K) = \mu^*(K)$ como um ínfimo implica agora que se tem $\frac{1}{b}\Phi(\varphi) \leq \mu(K)$.

h) Sejam, mais geralmente, $A \subset X$ boreliano, $b \geq 0$ e $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ tal que $\varphi(X) \subset [0, b]$ e $\varphi(x) = 0$, para cada $x \notin A$. Tem-se então $\Phi(\varphi) \leq b\mu(A)$.

Subdem: Podemos já afastar o caso trivial em que $b = 0$, e portanto $\varphi = 0$. Seja $K \subset X$ um compacto tal que $\varphi(x) = 0$, para cada $x \notin K$. Seja U um aberto arbitrário de X tal que $A \subset U$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Sendo $\widehat{U} = \{x \in X \mid \varphi(x) < b\varepsilon\}$, que é um aberto de X com $X = U \cup \widehat{U}$, o teorema da partição da unidade em III.4.12 garante a existência de funções contínuas de suporte compacto $\psi, \widehat{\psi}: X \rightarrow [0, 1]$ tais que $\psi \prec U$, $\widehat{\psi} \prec \widehat{U}$, tais que $\psi(x) + \widehat{\psi}(x) = 1$, para cada $x \in K$. Para cada $x \in X$ tem-se então

$$\frac{1}{b}\varphi(x) = \frac{1}{b}\varphi(x)\psi(x) + \frac{1}{b}\varphi(x)\widehat{\psi}(x)$$

(ambos os membros são 0 se $x \notin K$), onde $\frac{1}{b}\varphi\psi \prec U$ ($\psi \prec U$ e $\frac{1}{b}\varphi(x) \leq 1$) e a aplicação de suporte compacto $X \rightarrow [0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{b}\varphi(x)\widehat{\psi}(x)$ anula-se fora de K e fora de \widehat{U} e, por esta última razão, verifica $\frac{1}{b}\varphi(x)\widehat{\psi}(x) \leq \varepsilon$ para cada $x \in X$. Tendo em conta a definição de $\mu_*(U)$ como um supremo, vemos que $\Phi(\frac{1}{b}\varphi\psi) \leq \mu_*(U)$ e, tendo em conta a conclusão de g), vemos que $\Phi(\frac{1}{b}\varphi\widehat{\psi}) \leq \varepsilon\mu(K)$, pelo que podemos garantir que

$$\Phi\left(\frac{1}{b}\varphi\right) = \Phi\left(\frac{1}{b}\varphi\psi\right) + \Phi\left(\frac{1}{b}\varphi\widehat{\psi}\right) \leq \mu_*(U) + \varepsilon\mu(K).$$

Tendo em conta a arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, podemos considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e, passando ao limite a sucessão de desigualdades obtida, vemos que $\Phi(\frac{1}{b}\varphi) \leq \mu_*(U)$. Tendo em conta a definição de $\mu(A) = \mu^*(A)$ como um ínfimo, deduzimos agora que $\frac{1}{b}\Phi(\varphi) = \Phi(\frac{1}{b}\varphi) \leq \mu(A)$, que é equivalente à desigualdade enunciada.

i) Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$. Tem-se então

$$\Phi(\varphi) \leq \int_X \varphi(x) d\mu(x).$$

Subdem: Afastemos já o caso trivial em que $\varphi = 0$, e portanto ambos os membros da desigualdade são 0. Seja $K \subset X$ um compacto tal que

$\varphi(x) = 0$, para cada $x \notin K$ e seja $M > 0$ maior que o máximo para $x \in K$ de $\varphi(x)$. Tem-se assim $\varphi(X) \subset [0, M]$. Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário.

Vamos definir funções contínuas $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n: X \rightarrow [0, \frac{M}{n}]$ por

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \varphi(x) \leq \frac{M(k-1)}{n}, \\ \varphi(x) - \frac{M(k-1)}{n}, & \text{se } \frac{M(k-1)}{n} \leq \varphi(x) \leq \frac{Mk}{n}, \\ \frac{M}{n}, & \text{se } \frac{Mk}{n} \leq \varphi(x), \end{cases}$$

cada uma das quais é contínua, por ter restrição contínua a três fechados cuja união é X (os correspondentes a cada um dos casos da definição respetiva) e tem suporte compacto, uma vez que, para cada $x \notin K$, $\varphi(x) = 0$, e portanto também $\varphi_k(x) = 0$. Reparemos que, para cada $x \in X$, tem-se

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x),$$

uma vez que existe $1 \leq k \leq n$, não necessariamente único, tal que $\frac{M(k-1)}{n} \leq \varphi(x) \leq \frac{Mk}{n}$ e que, para um tal k , tem-se $\varphi_j(x) = 0$, para cada $j > k$, $\varphi_k(x) = \varphi(x) - \frac{M(k-1)}{n}$ e $\varphi_j(x) = \frac{M}{n}$, para cada $1 \leq j \leq n-1$. Consideremos os borelianos X_1, X_2, \dots, X_n , disjuntos dois a dois e de união K , definidos por

$$X_k = \{x \in K \mid \frac{M(k-1)}{n} \leq \varphi(x) < \frac{Mk}{n}\}$$

e reparemos que, aplicando a conclusão de h) a φ_k , que verifica $\varphi_k(x) = 0$ para cada $x \notin X_k \cup X_{k+1} \cup \dots \cup X_n$, concluímos que

$$\Phi(\varphi_k) \leq \frac{M}{n} \mu(X_k \cup \dots \cup X_n) = \frac{M}{n} (\mu(X_k) + \dots + \mu(X_n)),$$

e portanto que

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= \Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2) + \dots + \Phi(\varphi_n) \leq \\ (10) \quad &\leq \frac{M}{n} (\mu(X_1) + 2\mu(X_2) + \dots + n\mu(X_n)). \end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que, para cada $x \in X_k$, $\varphi(x) \geq \frac{M(k-1)}{n}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(x) d\mu(x) &= \int_K \varphi(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \int_{X_k} \varphi(x) d\mu(x) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{X_k} \frac{M(k-1)}{n} d\mu(x) = \\ &= \frac{M}{n} (\mu(X_2) + 2\mu(X_3) + \dots + (n-1)\mu(X_n)) \end{aligned}$$

o que, comparado com (10), implica que

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) - \frac{M}{n}\mu(K) &= \Phi(\varphi) - \frac{M}{n}(\mu(X_1) + \mu(X_2) + \cdots + \mu(X_n)) \leq \\ &\leq \frac{M}{n}(\mu(X_2) + 2\mu(X_3) + \cdots + (n-1)\mu(X_n)) \leq \\ &\leq \int_X \varphi(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Tendo em conta a arbitrariedade de n , podemos passar ao limite a sucessão de desigualdades precedente para concluir a desigualdade pretendida.

j) Seja, mais geralmente, $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, não necessariamente tal que $\varphi(X) \subset [0, +\infty[$. Tem-se então ainda

$$\Phi(\varphi) \leq \int_X \varphi(x) d\mu(x).$$

Subdem: Basta examinar o caso em que não se tem $\varphi(X) \subset [0, +\infty[$ e, sendo $K \subset X$ um compacto tal que $\varphi(x) = 0$ para cada $x \notin K$, seja $M > 0$ tal que $-M$ seja o mínimo de $\varphi(x)$ para $x \in K$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Uma vez que $\mu(K) < +\infty$, a caracterização desta medida como um ínfimo permite fixar um aberto U de X , com $K \subset U$ e $\mu(U) < \mu(K) + \varepsilon$. Tendo em conta o lema de Urysohn em III.4.11, consideremos uma função contínua $\psi: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\psi \prec U$ e $\psi(x) = 1$, para cada $x \in K$. O que vimos na alínea e) implica que $\mu(K) \leq \Phi(\psi)$. Por outro lado, uma vez que a aplicação contínua de suporte compacto $\varphi + M\psi$ já tem a propriedade de se ter $\varphi(x) + M\psi(x) \geq 0$, para cada $x \in X$, deduzimos do que se viu em i) que

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) + M\mu(K) &\leq \Phi(\varphi) + M\Phi(\psi) = \Phi(\varphi + M\psi) \leq \\ &\leq \int_X \varphi(x) + M\psi(x) d\mu(x) = \\ &= \int_X \varphi(x) d\mu(x) + M \int_X \psi(x) d\mu(x) \leq \\ &\leq \int_X \varphi(x) d\mu(x) + M\mu(U) \end{aligned}$$

e portanto

$$\Phi(\varphi) \leq \int_X \varphi(x) d\mu(x) + M(\mu(U) - \mu(K)) \leq \int_X \varphi(x) d\mu(x) + M\varepsilon.$$

Mais uma vez, tendo em conta a arbitrariedade de ε , podemos substituir ε por $\frac{1}{n}$ e tomar o limite de ambos os membros para deduzir a desigualdade pretendida.

k) Sendo $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ arbitrário, podemos aplicar o que vimos em j) à função $-\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ para deduzir que

$$-\Phi(\varphi) = \Phi(-\varphi) \leq \int_X -\varphi(x) d\mu(x) = -\int_X \varphi(x) d\mu(x),$$

portanto

$$\Phi(\varphi) \geq \int_X \varphi(x) d\mu(x),$$

o que, em conjunto com a desigualdade em j), implica a igualdade

$$\Phi(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) = \Phi_\mu(\varphi). \quad \square$$

III.4.28 (Visão alternativa sobre os funcionais lineares positivos) Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável e $\Phi: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação verificando as propriedades

$$\Phi(\varphi + \psi) = \Phi(\varphi) + \Phi(\psi), \quad \Phi(a\varphi) = a\Phi(\varphi),$$

quaisquer que sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$ e $a \in \mathbb{R}_+$.¹⁴⁰ Existe então uma, e uma só, aplicação linear $\overline{\Phi}: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ que prolonga Φ , e este prolongamento vai ser trivialmente um funcional linear positivo.

Dem: Comecemos por reparar que de se ter

$$\Phi(0) = \Phi(0 + 0) = \Phi(0) + \Phi(0),$$

deduzimos que $\Phi(0) = 0$. Reparemos agora que, para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, existem φ_+ e φ_- em $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$ tais que $\varphi(x) = \varphi_+(x) - \varphi_-(x)$, para cada $x \in X$, por exemplo os definidos por

$$\varphi_+(x) = \frac{|\varphi(x)| + \varphi(x)}{2}, \quad \varphi_-(x) = \frac{|\varphi(x)| - \varphi(x)}{2},$$

que se anulam em cada x tal que $\varphi(x) = 0$. Este facto já implica a unicidade de um prolongamento linear $\overline{\Phi}$ de Φ , visto que, para um tal φ com uma decomposição como atrás, não pode deixar de ser $\overline{\Phi}(\varphi) = \Phi(\varphi_+) - \Phi(\varphi_-)$. Reparemos agora que fica bem definida uma aplicação $\overline{\Phi}: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ pela condição de se ter $\overline{\Phi}(\varphi) = \Phi(\varphi_+) - \Phi(\varphi_-)$, qualquer que seja o par de elementos φ_+, φ_- de $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$ com $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ visto que, dado outro par $\widehat{\varphi}_+, \widehat{\varphi}_-$ também com $\varphi = \widehat{\varphi}_+ - \widehat{\varphi}_-$, vinha $\varphi_+ + \widehat{\varphi}_- = \widehat{\varphi}_+ + \varphi_-$, donde

$$\Phi(\varphi_+) + \Phi(\widehat{\varphi}_-) = \Phi(\varphi_+ + \widehat{\varphi}_-) = \Phi(\widehat{\varphi}_+ + \varphi_-) = \Phi(\widehat{\varphi}_+) + \Phi(\varphi_-),$$

e portanto $\Phi(\varphi_+) - \Phi(\varphi_-) = \Phi(\widehat{\varphi}_+) - \Phi(\widehat{\varphi}_-)$. O facto de a aplicação $\overline{\Phi}$

¹⁴⁰Por outras palavras Φ é “tão linear quanto possível”, tendo em conta o facto de o seu domínio não ser um espaço vetorial.

assim definida ser um prolongamento de Φ resulta de que da igualdade $\Phi(0) = 0$ e do facto de cada $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$ se poder escrever na forma $\varphi - 0$, onde φ e 0 pertencem a $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$. Resta-nos mostrar que o prolongamento $\overline{\Phi}$ é linear. Ora, dados $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$, com as decomposições $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ e $\psi = \psi_+ + \psi_-$ como diferenças de elementos de $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$, tem-se $\varphi + \psi = (\varphi_+ + \psi_+) - (\varphi_- + \psi_-)$, onde tanto $\varphi_+ + \psi_+$ como $\varphi_- + \psi_-$ pertencem a $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$, o que implica que

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(\varphi + \psi) &= \Phi(\varphi_+ + \psi_+) - \Phi(\varphi_- + \psi_-) = \\ &= \Phi(\varphi_+) + \Phi(\psi_+) - \Phi(\varphi_-) - \Phi(\psi_-) = \\ &= \overline{\Phi}(\varphi) + \overline{\Phi}(\psi)\end{aligned}$$

e, analogamente, para $a \geq 0$, $a\varphi = a\varphi_+ - a\varphi_-$, com $a\varphi_+$ e $a\varphi_-$ em $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$, donde

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(a\varphi) &= \Phi(a\varphi_+) - \Phi(a\varphi_-) = a\Phi(\varphi_+) - a\Phi(\varphi_-) = \\ &= a(\Phi(\varphi_+) - \Phi(\varphi_-)) = a\overline{\Phi}(\varphi)\end{aligned}$$

e, para $a \leq 0$, $a\varphi = (-a\varphi_-) - (-a\varphi_+)$, com $-a\varphi_-$ e $-a\varphi_+$ em $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$, donde

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}(a\varphi) &= \Phi(-a\varphi_-) - \Phi(-a\varphi_+) = -a\Phi(\varphi_-) - (-a)\Phi(\varphi_+) = \\ &= a(\Phi(\varphi_+) - \Phi(\varphi_-)) = a\overline{\Phi}(\varphi).\end{aligned}$$

□

Exercícios

Ex III.4.1 (O suporte de uma medida de Radon) Sejam X um espaço topológico localmente compacto, separado e com base contável e $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma medida de Radon. Define-se o *suporte* S da medida μ como sendo o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $\mu(U) > 0$, para todo o aberto U de X com $x \in U$. Diz-se que a medida de Radon μ é *estritamente positiva* se o seu suporte S é igual a X .

a) Verificar que uma medida de Radon μ é estritamente positiva se, e só se $\mu(U) > 0$, para cada aberto não vazio U . Deduzir, em particular, que, se μ é uma medida de Radon estritamente positiva nos borelianos de X , então a sua restrição a um aberto $V \subset X$ é ainda estritamente positiva.

b) Mostrar que o suporte S de μ é um conjunto fechado tal que $\mu(X \setminus S) = 0$. **Sugestão:** Sendo \mathcal{C} uma base contável de abertos de X , verificar que $X \setminus S$ é a união de todos os $U \in \mathcal{C}$ tais que $\mu(U) = 0$.

c) Verificar que o complementar $X \setminus S$ do suporte de μ é “o maior aberto de medida nula” de X , no sentido que, para além de se ter $\mu(X \setminus S) = 0$, tem-se $X \setminus S \supset U$, para cada aberto U com $\mu(U) = 0$.

d) Verificar que a medida de Lebesgue λ_n nos borelianos de \mathbb{R}^n é

estritamente positiva, isto é, que o seu suporte é a totalidade de \mathbb{R}^n .

e) Se $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função, o suporte de φ é a aderência em X do conjunto A dos pontos $x \in X$ tais que $\varphi(x) > 0$.¹⁴¹ Verificar que, se μ é uma medida de Radon nos borelianos de X , com suporte S e se $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma função contínua, com suporte A , então o suporte da medida de Radon $\mu_{(\varphi)}$ associada (cf. III.4.16) é igual a $S \cap A$ (em particular, se a medida μ é estritamente positiva, o suporte de $\mu_{(\varphi)}$ coincide com o suporte de φ).

Sugestão: Mostrar os seguintes três factos: 1) Se $x_0 \notin S$, então x_0 não pertence ao suporte de $\mu_{(\varphi)}$; 2) Se $x_0 \notin A$, então x_0 não pertence ao suporte de $\mu_{(\varphi)}$; 3) Se x_0 não pertence ao suporte de $\mu_{(\varphi)}$ e $x_0 \in A$, então $x_0 \in S$.

Ex III.4.2 (Valor de uma classe num ponto) Sejam X um espaço topológico localmente compacto, separado e com base contável e $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon estritamente positiva (cf. o exercício III.4.1). Sejam E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável. Vamos dizer que a classe $[f] \in Mens(X, E)$ admite um vetor $w_0 \in E$ como valor no ponto $x_0 \in X$ se, para cada $\delta > 0$, existe um aberto V de X , com $x_0 \in V$, tal que $\|f|_V(x) - w_0\| < \delta$ quase sempre, por outras palavras, para um certo boreliano $A \subset V$, com $\mu(A) = 0$, $\|f(x) - w_0\| < \delta$ para cada $x \in V \setminus A$.

a) Mostrar que a classe $[f]$ não pode admitir num ponto $x_0 \in X$ mais que um valor, o que torna legítimo notar $[f](x_0) = w_0$ o valor, quando exista, da classe $[f]$ no ponto x_0 .¹⁴²

b) Reparar que, se f é contínua no ponto x_0 , então a classe $[f]$ admite $f(x_0)$ como valor no ponto x_0 , por outras palavras, $[f](x_0) = f(x_0)$. Concluir, em particular, que a definição que apresentámos generaliza a que foi dada em III.2.4.

c) Suponhamos que a classe $[f]$ admite um valor em cada ponto $x \in X$ e seja $\widehat{f}: X \rightarrow E$ a aplicação definida por $\widehat{f}(x) = [f](x)$. Mostrar que a aplicação $\widehat{f}: X \rightarrow E$ é contínua e que $[f] = [\widehat{f}]$ em $Mens(X, E)$.¹⁴³

Sugestão: 1) Partir de uma base contável \mathcal{C} de abertos de X e mostrar que se pode considerar, para cada $k \in \mathbb{N}$, uma base de abertos \mathcal{C}_k , constituída pelos abertos $U \in \mathcal{C}$ tais que exista $w \in E$ com $\|f|_U(x) - w\| < \frac{1}{k}$ quase sempre.

2) Concluir que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $U \in \mathcal{C}_k$, existe um boreliano $A_{k,U} \subset U$, com $\mu(A_{k,U}) = 0$, tal que $\|f(x) - f(y)\| < \frac{2}{k}$, sempre que $x, y \in U \setminus A_{k,U}$. Considerar o boreliano $A \subset X$, com $\mu(A) = 0$, definido por

¹⁴¹Comparando com a definição de suporte de uma aplicação $f: X \rightarrow E$, com valores no espaço de Banach E , referida na nota 133 na página 285, constatamos que esse suporte não é mais do que o suporte da função $\varphi(x) = \|f(x)\|$, com valores em \mathbb{R}_+ .

¹⁴²É para a validade desta conclusão que temos que a admitir que a medida de Radon seja estritamente positiva.

¹⁴³Comparar com a noção de classe contínua dada em III.2.4, no caso em que X é um aberto de \mathbb{R}^n , com a medida de Lebesgue nos respetivos borelianos.

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{U \in \mathcal{C}_k} A_{k,U} \right).$$

3) Mostrar que, se $U \in \mathcal{C}_k$ e $x \in U$, então existe $x' \in U \setminus A$ tal que $\|f(x') - \widehat{f}(x)\| < \frac{1}{k}$.

4) Deduzir de 3) que, se $U \in \mathcal{C}_k$ e $x, y \in U$, então $\|\widehat{f}(y) - \widehat{f}(x)\| < \frac{4}{k}$ e concluir daqui que $\widehat{f}: X \rightarrow E$ é contínua.

5) Deduzir de 3) que, se $x \in X \setminus A$, então $f(x) = \widehat{f}(x)$, começando por mostrar que, para $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, $\|f(x) - \widehat{f}(x)\| < \frac{3}{k}$.

Ex III.4.3 (**Teorema de Lusin**) Sejam X um espaço topológico localmente compacto, separado e com base contável e $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon. Sejam E um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ uma aplicação topologicamente mensurável.

a) Mostrar que, para cada $\delta > 0$, existe um subconjunto fechado $C \subset X$ tal que $\mu(X \setminus C) < \delta$ e que $f|_C: C \rightarrow E$ seja contínua.

Sugestão:¹⁴⁴ Seja $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de abertos de $f(X)$ cujo conjunto dos termos seja uma base de abertos deste subespaço topológico de E . Para cada $n \in \mathbb{N}$, notando $A_n = f^{-1}(V_n) \in \mathcal{B}_X$ e $A'_n = X \setminus A_n$, utilizar o resultado de regularidade na alínea d) de III.4.6 para considerar fechados C_n e C'_n de X , com

$$C_n \subset A_n, \quad C'_n \subset X \setminus A_n, \quad \mu(A_n \setminus C_n) < \frac{\delta}{2^{n+1}}, \quad \mu(A'_n \setminus C'_n) < \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

e mostrar que o conjunto fechado de X ,

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (C_n \cup C'_n)$$

verifica as condições pedidas. Para verificar a continuidade da restrição de f a C , reparar que, se $x_0 \in C$ e n é tal que $f(x_0) \in V_n$, então $x_0 \in X \setminus C'_n$ e f aplica $C \cap (X \setminus C'_n)$ em V_n .

b) Utilizar a conclusão de a) para mostrar que, no caso em que $\mu(X) < +\infty$, para cada $\delta > 0$ existe um compacto $K \subset X$ com $\mu(X \setminus K) < \delta$ e $f|_K: K \rightarrow E$ contínua. **Sugestão:** Ter em conta a alínea c) de III.4.6.

Ex III.4.4 Verificar que $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ não é denso em $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (comparar com III.4.14). **Sugestão:** Considerar a função identicamente igual a 1.

Ex III.4.5 Sejam X um espaço topológico localmente compacto, separado e com base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e $\varphi: X \rightarrow [0, +\infty[$ uma função localmente integrável. Mostrar que, se $A \in \mathcal{B}_X$, então o integral $\int_A \varphi(x) d\mu(x)$ é o supremo dos integrais $\int_K \varphi(x) d\mu(x)$, com K compacto

¹⁴⁴A prova seguindo as linhas desta sugestão é devida a Loeb e Talvila, [8].

contido em A , e o ínfimo dos integrais $\int_U \varphi(x) d\mu(x)$, com U aberto contendo A . **Sugestão:** Lembrar que a medida $\mu_{(\varphi)}$ é uma medida de Radon.

Ex III.4.6 (**Topologia de $L^1_{loc}(X, E)$**) Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach. Dados $[f] \in L^1_{loc}(X, E)$, um compacto $K \subset X$ e $\delta > 0$, notemos

$$\mathcal{B}_{K, \delta}([f]) = \{[g] \in L^1_{loc}(X, E) \mid \|[g/K] - [f/K]\|_1 < \delta\}.$$

a) Mostrar que existe uma topologia em $L^1_{loc}(X, E)$ definida pela condição um conjunto $\mathcal{V} \subset L^1_{loc}(X, E)$ ser uma vizinhança de $[f] \in L^1_{loc}(X, E)$ se, e só se, existe um compacto $K \subset X$ e $\delta > 0$ tais que $\mathcal{B}_{K, \delta}([f]) \subset \mathcal{V}$.

b) Mostrar que uma sucessão de elementos $[f_n] \in L^1_{loc}(X, E)$ converge para um elemento $[f] \in L^1_{loc}(X, E)$ em $L^1_{loc}(X, E)$ (cf. III.4.19) se, e só se, converge para esta topologia.

c) Verificar que, para a topologia de $L^1_{loc}(X, E)$ definida em a), cada $[f] \in L^1_{loc}(X, E)$ admite um sistema fundamental de vizinhanças numerável. Mais precisamente, considerando uma sucessão crescente de compactos $K_n \subset X$ nas condições da alínea b) de III.4.5 (para $U = X$), verificar que se obtém um tal sistema fundamental de vizinhanças tomando a classe dos conjuntos $\mathcal{B}_{K_n, \frac{1}{n}}([f])$, com $n \in \mathbb{N}$. **Sugestão:** Utilizar a propriedade das coberturas dos compactos para mostrar que qualquer compacto $K \subset X$ está contido num dos compactos K_n .

d) Verificar que a topologia que consideramos em $L^1_{loc}(X, E)$ é separada (de Hausdorff).

e) Verificar que $C_c(X, E)$ é denso em $L^1_{loc}(X, E)$, para a topologia que consideramos neste espaço (comparar com III.4.14).

Sugestão: Dados f em $L^1_{loc}(X, E)$, um compacto $K \subset X$ e $\delta > 0$, aplicar a conclusão da alínea a) de III.4.5 para considerar um aberto U' e um compacto K' com $K \subset U' \subset K'$, reparar que $f|_{U'} \in L^1(U', E)$ e aplicar o resultado de densidade III.4.14, reparando que uma aplicação em $C_c(U', E)$ é restrição de uma em $C_c(X, E)$.

f) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$, $w \times z = \xi(w, z) \in H$. Seja $f: X \rightarrow F$ uma aplicação contínua. Verificar que é contínua a aplicação

$$L^1_{loc}(X, G) \rightarrow L^1_{loc}(X, H), \quad [g] \mapsto [f] \times [g]$$

(cf. a alínea a) de III.4.22), quando se considera no domínio e no espaço de chegada a topologia definida em a).

Ex III.4.7 (**Resultados de colagem em $Mens(X, E)$**) Sejam X um espaço topológico localmente compacto separado e de base contável, $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon e E um espaço de Banach.

a) Seja $f: X \rightarrow E$ uma aplicação tal que exista uma família de abertos $(U_j)_{j \in J}$ de união X com cada $f|_{U_j}: U_j \rightarrow E$ topologicamente mensurável (ou, equivalentemente, tal que, para cada $x \in X$, exista um aberto U_x de X com $x \in U_x$ e $f|_{U_x}: U_x \rightarrow E$ topologicamente mensurável). Mostrar que $f: X \rightarrow E$ é topologicamente mensurável. **Sugestão:** Utilizar a existência de uma base contável de abertos de X para garantir a existência de uma cobertura aberta $(V_k)_{k \in K}$ de X , com o conjunto K de índices contável, tal que cada V_k esteja contido nalgum U_j .

b) Sejam $(U_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de X de união X e para cada $j \in J$ $[f_j] \in \text{Mens}(U_j, E)$. Suponhamos que, quaisquer que sejam os índices $j, j' \in J$, as classes $[f_j]$ e $[f_{j'}]$ têm a mesma restrição a $U_j \cap U_{j'}$ (como elemento de $\text{Mens}(U_j \cap U_{j'}, E)$). Mostrar que existe uma, e uma só, classe $[f] \in \text{Mens}(X, E)$ tal que, para cada $j \in J$, $[f_j] = [f]|_{U_j}$.

Sugestão: Começar por provar o resultado de unicidade. Seguir a mesma ideia que a utilizada para a alínea a) para reduzir o problema ao caso em que J é contável. O lema I.2.11 poderá ajudar a definir explicitamente a aplicação f .

§5. Translações e produto de convolução em \mathbb{R}^n .

Nesta secção, a medida que vai ser considerada é a medida de Lebesgue λ_n na σ -álgebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ dos borelianos de \mathbb{R}^n , onde naturalmente, o caso particular em que $n = 1$ também é considerado. Como referido em III.4.3, λ_n é uma medida de Radon, à qual podemos, em particular, aplicar o que estudámos na secção III.4.

III.5.1 Lembremos que, como referido em II.5.7, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ notamos $\tau_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a translação associada a x , isto é, aplicação bimensurável definida por $\tau_x(y) = x + y$, cuja inversa é τ_{-x} , e que a medida de Lebesgue λ_n é invariante por translação, isto é, que se tem $\lambda_n(\tau_x(A)) = \lambda_n(A)$, para cada $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ e cada $x \in \mathbb{R}^n$. Nesta secção estará implícito que a medida que consideramos é a medida de Lebesgue λ_n nos borelianos de \mathbb{R}^n .

Dados E espaço de Banach, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ aplicação topologicamente mensurável e $x \in \mathbb{R}^n$, notamos $\tau_x(f): \mathbb{R}^n \rightarrow E$ a aplicação topologicamente mensurável definida por $\tau_x(f) = f \circ \tau_{-x}$ (cf. II.2.7), portanto por

$$\tau_x(f)(y) = f(y - x).$$

Repare-se que, como se constata imediatamente, fica assim definida uma aplicação linear

$$\tau_x: \text{Mens}(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow \text{Mens}(\mathbb{R}^n, E),$$

tenendo-se

$$\tau_0(f) = f, \quad \tau_x(\tau_{x'}(f)) = \tau_{x+x'}(f),$$

e portanto também $\tau_{-x}(\tau_x(f)) = f$.

III.5.2 Nas condições anteriores, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um boreliano e $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se, para a função indicatriz $\mathbb{I}_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tau_x(\mathbb{I}_A) = \mathbb{I}_{\tau_x(A)}. \quad 145$$

Dem: Basta atender a que

$$\tau_x(\mathbb{I}_A)(y) = \mathbb{I}_A(\tau_{-x}(y)) = \begin{cases} 1, & \text{se } y - x \in A \\ 0, & \text{se } y - x \notin A \end{cases}$$

onde a condição $y - x \in A$ é equivalente a $y \in \tau_x(A)$. □

III.5.3 Sejam E um espaço de Banach, $x \in \mathbb{R}^n$ e $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ duas aplicações mensuráveis tais que $[f] = [g]$ em $Mens(\mathbb{R}^n, E)$, isto é, tais que $f(x) = g(x)$ quase sempre. Vem então $[\tau_x(f)] = [\tau_x(g)]$ em $Mens(\mathbb{R}^n, E)$. A aplicação linear $\tau_x: Mens(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow Mens(\mathbb{R}^n, E)$ dá assim origem a uma aplicação linear $\tau_x: Mens(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow Mens(\mathbb{R}^n, E)$ definida por

$$\tau_x([f]) = [\tau_x(f)].$$

Dem: Basta atender a que, sendo $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano com $\lambda_n(A) = 0$ tal que $f(y) = g(y)$, para cada $y \notin A$, tem-se

$$\tau_x(f)(y) = f(y - x) = g(y - x) = \tau_x(g)(y),$$

sempre que $y - x \notin A$, isto é, sempre que $y \notin \tau_x(A)$, onde $\tau_x(A)$ é um boreliano com $\lambda_n(\tau_x(A)) = \lambda_n(A) = 0$. □

III.5.4 Nas condições anteriores, para cada $1 \leq p \leq \infty$, a aplicação linear

$$\tau_x: Mens(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow Mens(\mathbb{R}^n, E)$$

aplica $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ em $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ e tem-se $\|\tau_x([f])\|_p = \|[f]\|_p$.

Dem: Começemos por supor que $p < \infty$ e seja $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$. Tendo em conta o teorema trivial de mudança de variáveis (cf. II.1.38) e a invariância por translação da medida de Lebesgue, obtemos então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_x(f)(y)\|^p d\lambda_n(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\tau_{-x}(y))\|^p d\lambda_n(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f(z)\|^p d\lambda_n(z) < +\infty, \end{aligned}$$

¹⁴⁵Este resultado explica a razão, porventura considerada estranha, de termos utilizado a composição com τ_{-x} na definição de $\tau_x(f)$.

o que mostra que $\tau_x([f]) \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$ e que $\|\tau_x([f])\|_p = \|[f]\|_p$. Suponhamos agora que $[f] \in L^\infty(\mathbb{R}^n, E)$. Podemos assim considerar um boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$ com $\lambda_n(A) = 0$ tal que $\|f(y)\| \leq \|[f]\|_\infty$, para cada $y \notin A$ e tem-se então

$$\|\tau_x(f)(y)\| = \|f(y-x)\| \leq \|[f]\|_\infty,$$

sempre que $y-x \notin A$, isto é, sempre que $y \notin \tau_x(A)$, onde $\tau_x(A)$ é um boreliano de \mathbb{R}^n com $\lambda_n(\tau_x(A)) = \lambda_n(A) = 0$, o que implica que $\tau_x([f])$ está em $L^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ e que $\|\tau_x([f])\|_\infty \leq \|[f]\|_\infty$. Para mostrar que se tem mesmo $\|\tau_x([f])\|_\infty = \|[f]\|_\infty$ basta agora reparar que se pode escrever

$$\|[f]\|_\infty = \|\tau_{-x}(\tau_x([f]))\|_\infty \leq \|\tau_x([f])\|_\infty. \quad \square$$

III.5.5 (Teorema de continuidade) Sejam E um espaço de Banach, $1 \leq p < +\infty$ e $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$. Tem então lugar uma aplicação uniformemente contínua de \mathbb{R}^n para $L^p(\mathbb{R}^n, E)$, que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ associa $\tau_x([f])$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Vamos fazer a hipótese suplementar de se ter $f \in C_c(\mathbb{R}^n, E)$ (cf. III.4.8) e mostrar que a aplicação referida é contínua em $0 \in \mathbb{R}^n$.

Subdem: A hipótese feita implica que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ é contínua e que, para um certo $R > 0$, vem $f(y) = 0$, sempre que $\|y\| > R$. Seja $M = \lambda_n(\overline{B_{R+1}}(0))$ a medida da bola fechada de centro 0 e raio $R+1$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. A continuidade uniforme de f no compacto $\overline{B_{R+2}}(0)$ permite-nos escolher $0 < \varepsilon < 1$ tal que, sempre que $y, z \in \overline{B_{R+2}}(0)$ verificam $\|z - y\| < \varepsilon$,

$$\|f(z) - f(y)\| < \delta M^{-1/p}.$$

Seja agora $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| < \varepsilon$. Se $\|y\| > R+1$, tem-se $f(y) = 0$ e $\tau_x(f)(y) = f(y-x) = 0$ (se $\|y-x\| \leq R$, vinha $\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\| \leq R+1$). Se $\|y\| \leq R+1$, vem $\|y-x\| \leq \|y\| + \|x\| \leq R+2$, e portanto $\|f(y-x) - f(y)\| < \delta M^{-1/p}$. Concluimos assim que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_x(f)(y) - \tau_0(f)(y)\|^p d\lambda_n(y) &= \int_{\overline{B_{R+1}}(0)} \|f(y-x) - f(y)\|^p d\lambda_n(y) \leq \\ &\leq \int_{\overline{B_{R+1}}(0)} \delta^p / M d\lambda_n(y) = \delta^p, \end{aligned}$$

portanto $\|\tau_x([f]) - \tau_0([f])\|_p \leq \delta$, o que prova a continuidade pretendida.

2) Vamos mostrar agora que a aplicação referida no enunciado é contínua em 0, sem fazer nenhuma hipótese suplementar sobre f .

Subdem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta o teorema de densidade em III.4.14, podemos considerar $g \in C_c(X, E)$ tal que $\|[f] - [g]\|_p < \frac{\delta}{3}$ e, pelo caso particular estudado em 1), existe $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $x \in \mathbb{R}^n$ verifica $\|x\| < \varepsilon$, $\|\tau_x([g]) - \tau_0([g])\|_p \leq \frac{\delta}{3}$. Para cada

$x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| < \varepsilon$, tem-se então

$$\begin{aligned} & \|\tau_x([f]) - \tau_0([f])\|_p \leq \\ & \leq \|\tau_x([f]) - \tau_x([g])\|_p + \|\tau_x([g]) - \tau_0([g])\|_p + \|\tau_0([g]) - \tau_0([f])\|_p = \\ & = \|\tau_x([f] - [g])\|_p + \|\tau_x([g]) - \tau_0([g])\|_p + \|[g] - [f]\|_p < \\ & < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade pretendida.

3) Provemos enfim a continuidade uniforme da aplicação referida.

Subdem: Dado $\delta > 0$, o que vimos em 2) garante-nos a existência de $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $\|x\| < \varepsilon$,

$$\|\tau_x([f]) - [f]\|_p = \|\tau_x([f]) - \tau_0([f])\|_p < \delta,$$

e então, sempre que $\|y - z\| < \varepsilon$, vem

$$\begin{aligned} \|\tau_y([f]) - \tau_z([f])\|_p &= \|\tau_z(\tau_{y-z}([f])) - \tau_z([f])\|_p = \\ &= \|\tau_z(\tau_{y-z}([f]) - [f])\|_p = \|\tau_{y-z}([f]) - [f]\|_p < \delta, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade uniforme pretendida. □

Vamos agora estudar o produto de convolução de funções definidas em \mathbb{R}^n , começando por examinar o caso especial das funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}_+$.

III.5.6 Sejam $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis. Tem então lugar uma aplicação mensurável $\varphi * \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, a que damos o nome de *produto de convolução* de φ e ψ , definida por

$$\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y)\psi(y) d\lambda_n(y).$$

Tem-se, além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi * \psi(x) d\lambda_n(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\lambda_n(x) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) d\lambda_n(x) \right),$$

ou seja, nas notações de III.1.16,

$$\|\varphi * \psi\|_1 = \|\varphi\|_1 \times \|\psi\|_1.$$

Dem: Considerando a aplicação mensurável $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, que a (x, y) associa $\varphi(x - y)\psi(y)$, resulta do teorema de Fubini em II.4.9, em primeiro lugar que $\varphi * \psi$ está bem definido, isto é, que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, é mensurável a aplicação $\mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $y \mapsto \varphi(x - y)\psi(y)$, e, em segundo lugar, que a aplicação $\varphi * \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é mensurável. O mesmo resultado, em conjunto com o teorema trivial de mudança de variáveis e a invariância por

translação da medida de Lebesgue, garante que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi * \psi(x) d\lambda_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y) d\lambda_n \otimes \lambda_n(x, y) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y) d\lambda_n(x) \right) d\lambda_n(y) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) d\lambda_n(x) \right) \psi(y) d\lambda_n(y) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) d\lambda_n(z) \right) \psi(y) d\lambda_n(y) = \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) d\lambda_n(z) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) d\lambda_n(y) \right)
 \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. \square

III.5.7 (Comutatividade) Sejam $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis. Tem-se então $\varphi * \psi = \psi * \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$.

Dem: Tendo em conta o teorema trivial de mudança de variáveis e a invariância por translação e por simetria da medida de Lebesgue (cf. II.5.7 e II.5.13), vem

$$\begin{aligned}
 \varphi * \psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y) d\lambda_n(y) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - \tau_x(-z))\psi(\tau_x(-z)) d\lambda_n(z) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\psi(x-z) d\lambda_n(z) = \psi * \varphi(x).
 \end{aligned}$$

\square

III.5.8 (Monotonia) Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ aplicações mensuráveis tais que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ e $\psi_1(x) \leq \psi_2(x)$. Tem-se então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_1 * \psi_1(x) \leq \varphi_2 * \psi_2(x).$$

Dem: Trata-se de uma consequência direta da propriedade de monotonia do integral das funções positivas na alínea b) de II.1.16. \square

III.5.9 (“Bilinearidade”) Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ aplicações mensuráveis e $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Tem-se então

$$\begin{aligned}
 (\varphi_1 + \varphi_2) * \psi_1 &= \varphi_1 * \psi_1 + \varphi_2 * \psi_1, & (a\varphi_1) * \psi_1 &= a(\varphi_1 * \psi_1), \\
 \varphi_1 * (\psi_1 + \psi_2) &= \varphi_1 * \psi_1 + \varphi_1 * \psi_2, & \varphi_1 * (a\psi_1) &= a(\varphi_1 * \psi_1).
 \end{aligned}$$

Dem: Trata-se de uma consequência das propriedades do integral das funções mensuráveis positivas em II.1.20, na alínea c) de II.1.16 e em II.1.25. \square

III.5.10 (Convolução e conjuntos de medida nula) Sejam $\varphi, \widehat{\varphi}, \psi, \widehat{\psi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ aplicações mensuráveis tais que $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x)$ quase sempre e $\psi(x) = \widehat{\psi}(x)$ quase sempre. Tem-se então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,¹⁴⁶ $\varphi * \psi(x) = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}(x)$.

Dem: Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, tem-se $\psi(y) = \widehat{\psi}(y)$ quase sempre, portanto também $\varphi(x - y)\psi(y) = \varphi(x - y)\widehat{\psi}(y)$ quase sempre, o que implica que

$$\begin{aligned} \varphi * \psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y)\psi(y) d\lambda_n(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y)\widehat{\psi}(y) d\lambda_n(y) = \varphi * \widehat{\psi}(x). \end{aligned}$$

A igualdade $\varphi * \widehat{\psi}(x) = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}(x)$, da qual decorre a conclusão, prova-se de maneira análoga (tendo em conta a invariância por translação e por simetria da medida de Lebesgue) ou, ainda mais facilmente, aplicando o que acabamos de ver e a propriedade comutativa da convolução. \square

III.5.11 (Aplicação da desigualdade de Hölder) Sejam $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis. Tem-se então:

a) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi * \psi(x) \leq \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_1,$$

em particular, $\|\varphi * \psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_1$.

b) Sejam $p > 1$ e $q > 1$ dois expoentes conjugados (cf. III.1.15). Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se então

$$\varphi * \psi(x) \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_q,$$

em particular, $\|\varphi * \psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_q$.¹⁴⁷

Dem: a) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano com $\lambda_n(A) = 0$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, $\varphi(x) \leq \|\varphi\|_\infty$. Sendo $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, podemos considerar o boreliano $A_x = x - A$ de \mathbb{R}^n que, tendo em conta a invariância por translação e simetria da medida de Lebesgue, verifica ainda $\lambda_n(A_x) = 0$ e tem-se então, para cada $y \in \mathbb{R}^n \setminus A_x$, $\varphi(x - y) \leq \|\varphi\|_\infty$, pelo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \varphi * \psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_x} \varphi(x - y)\psi(y) d\lambda_n(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_x} \|\varphi\|_\infty \psi(y) d\lambda_n(y) = \\ &= \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_x} \psi(y) d\lambda_n(y) = \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_1. \end{aligned}$$

b) Sendo $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, podemos considerar a função mensurável

¹⁴⁶Não só quase sempre...

¹⁴⁷Reparar que a) não é mais do que o caso limite de b) em que $p = \infty$ e $q = 1$ e que não é necessário enunciar explicitamente o caso limite $p = 1$ e $q = \infty$, tendo em conta a comutatividade do produto de convolução.

$\varphi_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por $\varphi_x(y) = \varphi(x - y)$, para a qual se tem, tendo em conta a invariância por translação e simetria da medida de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x(y)^p d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y)^p d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)^p d\lambda_n(z),$$

isto é, $\|\varphi_x\|_p = \|\varphi\|_p$. Podemos assim escrever, tendo em conta a desigualdade de Hölder em III.1.17,

$$\begin{aligned} \varphi * \psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y)\psi(y) d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x(y)\psi(y) d\lambda_n(y) \leq \\ &\leq \|\varphi_x\|_p \|\psi\|_q = \|\varphi\|_p \|\psi\|_q. \end{aligned} \quad \square$$

III.5.12 (Desigualdade de Young) Sejam $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ duas aplicações mensuráveis e $p \geq 1$, $q \geq 1$ e $r \geq 1$ números reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Tem-se então

$$\|\varphi * \psi\|_r \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_q. \quad 148$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

a) Vamos provar a desigualdade do enunciado com a hipótese suplementar de se ter $\|\varphi\|_p = \|\psi\|_q = 1$. Consideremos as medidas μ e μ' nos borelianos de \mathbb{R}^n definidas respetivamente por

$$\mu(A) = \int_A \varphi(x)^p d\lambda_n(x), \quad \mu'(A) = \int_A \psi(x)^q d\lambda_n(x),$$

medidas que, por hipótese, verificam $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ e $\mu'(\mathbb{R}^n) = 1$.

Reparemos agora que, para cada real $s \geq 1$, a função $g_s: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $g_s(t) = t^s$ é crescente, com limite $+\infty$ para $t \rightarrow +\infty$ e derivável em cada ponto e com derivada $g'_s(t) = st^{s-1}$, portanto também crescente, em particular g_s é uma função convexa.

Aplicando a desigualdade de Jensen para a função g_p (cf. III.1.12), notando A_0 o boreliano de \mathbb{R}^n constituído pelos pontos x tais que $\psi(x) = 0$, para o qual $\mu'(A_0) = 0$, e reparando que

$$p + q - pq = pq\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1\right) = \frac{pq}{r},$$

vemos que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

¹⁴⁸Reparar que o resultado precedente é o caso limite deste em que $r = \infty$. Reparar também que um dos casos particulares deste resultado é aquele em que $p = q = r = 1$ e que, nesse caso, vimos em III.5.6 que temos mesmo uma igualdade. Reparar também na diferença relativamente à situação tratada em III.2.34, em que, em vez do produto de convolução, temos a multiplicação usual.

$$\begin{aligned}
\varphi * \psi(x)^p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \psi(y) d\lambda_n(y) \right)^p = \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus A_0} \varphi(x-y) \psi(y)^{1-q} \psi(y)^q d\lambda_n(y) \right)^p = \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus A_0} \varphi(x-y) \psi(y)^{1-q} d\mu'(y) \right)^p \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_0} \varphi(x-y)^p \psi(y)^{p-pq} d\mu'(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_0} \varphi(x-y)^p \psi(y)^{p+q-pq} d\lambda_n(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)^p \psi(y)^{pq/r} d\lambda_n(y).
\end{aligned}$$

Tendo em conta a comutatividade do produto de convolução, a desigualdade anterior também pode ser escrita na forma

$$\varphi * \psi(x)^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)^{pq/r} \varphi(y)^p d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)^{pq/r} d\mu(y).$$

Reparemos agora que de $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ deduzimos que

$$\frac{1}{p} = \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{r}$$

portanto $p \leq r$ e $\frac{r}{p} \geq 1$. Podemos então aplicar de novo a desigualdade de Jensen, agora para a função g_s com $s = \frac{r}{p}$, para concluir que

$$\begin{aligned}
\varphi * \psi(x)^r &= (\varphi * \psi(x)^p)^s \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)^{pq/r} d\mu(y) \right)^s \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\psi(x-y)^{pq/r})^s d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)^q d\mu(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)^q \varphi(y)^p d\lambda_n(y).
\end{aligned}$$

Resulta daqui, por integração, tendo em conta o teorema de Fubini e a invariância por translação da medida de Lebesgue, que

$$\begin{aligned}
\|\varphi * \psi\|_r^r &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi * \psi(x)^r d\lambda_n(x) \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)^q \varphi(y)^p d\lambda_n(y) \right) d\lambda_n(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)^q \varphi(y)^p d\lambda_n(x) \right) d\lambda_n(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)^q d\lambda_n(z) \right) \varphi(y)^p d\lambda_n(y) = \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)^q d\lambda_n(z) \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)^p d\lambda_n(y) \right) = 1,
\end{aligned}$$

e portanto também

$$\|\varphi * \psi\|_r \leq 1 = \|\varphi\|_p \|\psi\|_q,$$

que é a desigualdade que pretendíamos estabelecer.

b) Vamos agora mostrar que a desigualdade do enunciado é trivialmente verdadeira nos casos em que $\|\varphi\|_p = 0$ ou $\|\psi\|_q = 0$. Ora, se for $\|\psi\|_q = 0$, vem também

$$0 = \|\psi\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)^q d\lambda_n(y),$$

donde $\psi(y)^q = 0$ quase sempre, portanto também, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x-y)\psi(y) = 0$ quase sempre e

$$\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y) d\lambda_n(y) = 0,$$

e, no caso em que $\|\varphi\|_p = 0$, o que acabamos de verificar e a propriedade comutativa em III.5.7 garantem-nos que também

$$\varphi * \psi(x) = \psi * \varphi(x) = 0,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Verificámos assim que, sempre que $\|\varphi\|_p = 0$ ou $\|\psi\|_q = 0$, tem-se $\varphi * \psi = 0$, e portanto, trivialmente,

$$\|\varphi * \psi\|_r = 0 = \|\varphi\|_p \|\psi\|_q.$$

c) Notemos agora que a desigualdade do enunciado é ainda trivialmente verdadeira no caso em que, dos dois valores $\|\varphi\|_p$ e $\|\psi\|_q$, um deles é $+\infty$ e o outro é diferente de 0, uma vez que o segundo membro da desigualdade é então $+\infty$.

d) Resta-nos provar a desigualdade do enunciado no caso em que se tem simultaneamente $0 < \|\varphi\|_p < +\infty$ e $0 < \|\psi\|_q < +\infty$. Ora, notando $a = \|\varphi\|_p$ e $b = \|\psi\|_q$, podemos considerar as funções $\hat{\varphi}, \hat{\psi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ definidas por

$$\widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{a} \varphi(x), \quad \widehat{\psi}(x) = \frac{1}{b} \psi(x),$$

para as quais se tem trivialmente $\|\widehat{\varphi}\|_p = \|\widehat{\psi}\|_q = 1$ e

$$\widehat{\varphi * \psi}(x) = \frac{1}{ab} \varphi * \psi(x)$$

pelo que, tendo em conta o que se viu no caso particular estudado em a),

$$\|\varphi * \psi\|_r = ab \|\widehat{\varphi * \psi}\|_r \leq ab = \|\varphi\|_p \|\psi\|_q,$$

como queríamos. □

Vamos agora estudar o produto de convolução no contexto mais geral das aplicações com valores vetoriais, para o que supomos estar na posse de uma “multiplicação” conveniente entre os vetores dos espaços vetoriais de chegada, no contexto referido na alínea b) de II.2.9, mais precisamente, naquele em que temos três espaços de Banach F, G, H e uma aplicação bilinear contínua $\xi: F \times G \rightarrow H$, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$, $w \times z = \xi(w, z)$. Nessa situação, como se verifica em cursos de topologia ou de análise funcional (cf., por exemplo, [9]), a continuidade da aplicação bilinear ξ é equivalente à existência de uma constante $M \geq 0$ tal que, sempre que $w \in F$ e $z \in G$, $\|w \times z\| \leq M \|w\| \|z\|$.

Não nos devemos deixar atemorizar pela generalidade desta situação: Entre os exemplos mais frequentes de aplicação, estão aquele em que os três espaços vetoriais são iguais ao corpo \mathbb{K} dos escalares, \mathbb{R} ou \mathbb{C} , com o valor absoluto como norma, e a multiplicação como aplicação bilinear, e aquele em que $G = H$ é um espaço de Banach, F é o corpo dos escalares e a aplicação bilinear é a multiplicação dos escalares pelos vetores.

III.5.13 Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$, $w \times z = \xi(w, z) \in H$ e consideremos $M \geq 0$ tal que se tenha $\|\xi(w, z)\| \leq M \|w\| \|z\|$, para cada $(w, z) \in F \times G$. Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ duas aplicações topologicamente mensuráveis, por outras palavras $f \in \mathbf{Mens}(\mathbb{R}^n, F)$ e $g \in \mathbf{Mens}(\mathbb{R}^n, G)$.

Considerando as aplicações mensuráveis $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ definidas por $\varphi(x) = \|f(x)\|$ e $\psi(x) = \|g(x)\|$ e o seu produto de convolução

$$\varphi * \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) \psi(y) d\lambda_n(y),$$

definimos o *domínio de convolução* $\mathcal{D}_{f,g} \subset \mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\varphi * \psi(x) < +\infty$, conjunto esse que é um boreliano de \mathbb{R}^n .

Dizemos que f e g são *fortemente convolucionáveis* se $\mathcal{D}_{f,g} = \mathbb{R}^n$ e podemos então definir uma aplicação topologicamente mensurável

$$f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \times g(y) d\lambda_n(y),$$

a que se dá o nome de *produto de convolução* de f e g . Mais geralmente, dizemos que f e g são *fracamente convolucionáveis* se $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f,g}) = 0$ e podemos então definir uma aplicação topologicamente mensurável

$$f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H, \quad f * g(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \times g(y) d\lambda_n(y), & \text{se } x \in \mathcal{D}_{f,g} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathcal{D}_{f,g}, \end{cases}$$

a que se dá o nome de *produto de convolução* de f e g .¹⁴⁹

Dem: O facto de $\mathcal{D}_{f,g}$ ser um boreliano de \mathbb{R}^n é uma consequência de a aplicação $\varphi * \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ser mensurável (cf. III.5.6).

Tendo em conta II.2.7 e II.2.9, podemos considerar uma aplicação topologicamente mensurável $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow H$, $(x, y) \mapsto f(x - y) \times g(y)$. O facto de, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto f(x - y) \times g(y)$ ser uma aplicação topologicamente mensurável resulta de aplicar o teorema de Fubini em II.4.10 àquela aplicação e o facto de se ter

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x - y) \times g(y)\| d\lambda_n(y) &\leq M \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x - y)\| \|g(y)\| d\lambda_n(y) = \\ &= M \varphi * \psi(x) \end{aligned}$$

implica que, para cada $x \in \mathcal{D}_{f,g}$, aquela aplicação é mesmo integrável. Mais uma vez pelo teorema de Fubini, vemos que, no caso em que f e g são fracamente convolucionáveis, a restrição de $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ a $\mathcal{D}_{f,g}$ é topologicamente mensurável, e portanto esta aplicação é topologicamente mensurável, uma vez que tem restrição constante, e portanto também topologicamente mensurável, a $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f,g}$. \square

III.5.14 (Comutatividade) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$, $w \times z = \xi(w, z) \in H$. Consideremos também a aplicação bilinear contínua $\xi': G \times F \rightarrow H$, definida por $\xi'(z, w) = \xi(w, z)$, notando \times' e $*'$ a multiplicação e a convolução associadas a ξ' .¹⁵⁰ Dadas aplicações topologicamente mensuráveis $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$, tem-se então:

a) Coincidem os domínios de convolução $\mathcal{D}_{f,g}$ e $\mathcal{D}_{g,f}$, em particular f e g são

¹⁴⁹A definição de $f * g$ nos pontos de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f,g}$ destina-se apenas garantir que ficamos com uma aplicação de domínio \mathbb{R}^n , não tendo qualquer significado essencial. É por esse motivo que só apresentamos a definição do produto de convolução no caso em que $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f,g}) = 0$.

¹⁵⁰Nos casos em que não há perigo de confusão sobre o significado da notação, é costume escrever simplesmente \times e $*$, em vez de \times' e $*'$. Esses casos incluem aquele em que $F \neq G$ (ou estamos a raciocinar em geral, admitindo essa possibilidade) e aquele em que $F = G$ e a aplicação $\xi: F \times F \rightarrow H$ é comutativa, ou seja, $\xi' = \xi$.

fortemente convolucionáveis (respectivamente, fracamente convolucionáveis) se, e só se, g e f são fortemente convolucionáveis (respectivamente, fracamente convolucionáveis).

b) Se f e g são fracamente convolucionáveis, tem-se

$$f * g = g *' f: \mathbb{R}^n \rightarrow H.$$

Dem: O facto de se ter $\mathcal{D}_{f,g} = \mathcal{D}_{g,f}$ é uma consequência da propriedade comutativa da convolução de funções positivas em III.5.7. No caso em que f e g são fracamente convolucionáveis, o teorema trivial de mudança de variáveis e a invariância por translação e por simetria da medida de Lebesgue (cf. II.5.7 e II.5.13), garante que, para cada $x \in \mathcal{D}_{f,g} = \mathcal{D}_{g,f}$,

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \times g(y) d\lambda_n(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \tau_x(-z)) \times g(\tau_x(-z)) d\lambda_n(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \times g(x-z) d\lambda_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-z) \times 'f(z) d\lambda_n(z) = g *' f(x), \end{aligned}$$

igualdade que é trivialmente verificada também para $x \notin \mathcal{D}_{f,g} = \mathcal{D}_{g,f}$. \square

III.5.15 (Convolução e conjuntos de medida nula) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua.

Sejam $f, \widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ e $g, \widehat{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ aplicações topologicamente mensuráveis tais que $f(x) = \widehat{f}(x)$ quase sempre e $g(x) = \widehat{g}(x)$ quase sempre. Tem-se então:

a) Coincidem os domínios de convolução $\mathcal{D}_{f,g}$ e $\mathcal{D}_{\widehat{f},\widehat{g}}$, em particular, se f e g são fortemente convolucionáveis (respectivamente, fracamente convolucionáveis), também \widehat{f} e \widehat{g} são fortemente convolucionáveis (respectivamente, fracamente convolucionáveis).

b) Se f e g são fracamente convolucionáveis, então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,¹⁵¹

$$f * g(x) = \widehat{f} * \widehat{g}(x).$$

Dem: O facto de se ter $\mathcal{D}_{f,g} = \mathcal{D}_{\widehat{f},\widehat{g}}$ é uma consequência direta de III.5.10. Suponhamos que f e g são fracamente convolucionáveis e seja $x \in \mathcal{D}_{f,g}$ fixado. Tem-se $g(y) = \widehat{g}(y)$ quase sempre, portanto também

$$f(x-y) \times g(y) = f(x-y) \times \widehat{g}(y)$$

quase sempre, o que implica que

¹⁵¹Não só quase sempre...

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \times g(y) \, d\lambda_n(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \times \widehat{g}(y) \, d\lambda_n(y) = f * \widehat{g}(x). \end{aligned}$$

Esta igualdade é trivialmente também verificada para $x \notin \mathcal{D}_{f,g}$.

Para concluir a demonstração, bastará verificarmos que se tem também $\mathcal{D}_{f,\widehat{g}} = \mathcal{D}_{\widehat{f},g}$ e que, no caso em que f e g são fracamente convolucionáveis, $f * \widehat{g} = \widehat{f} * g$. Essa verificação poderia ser feita de modo análogo ao anterior (embora com um argumento suplementar, envolvendo a invariância por simetria e translação da medida de Lebesgue), mas é mais fácil utilizar a conclusão parcial já estabelecida e a propriedade comutativa em III.5.14 para garantir que

$$\mathcal{D}_{f,\widehat{g}} = \mathcal{D}_{\widehat{g},f} = \mathcal{D}_{\widehat{g},\widehat{f}} = \mathcal{D}_{\widehat{f},g}$$

e que, no caso em que f e g são fracamente convolucionáveis,

$$f * \widehat{g}(x) = \widehat{g} * f(x) = \widehat{g} * \widehat{f}(x) = \widehat{f} * g(x). \quad \square$$

III.5.16 Nas condições do resultado precedente, e como consequência deste, podemos definir, dadas as classes de equivalência $[f] \in Mens(\mathbb{R}^n, F)$ e $[g] \in Mens(\mathbb{R}^n, G)$, o seu domínio de convolução $\mathcal{D}_{[f],[g]} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}_{[f],[g]} = \mathcal{D}_{f,g}$, e dizer que as classes são fortemente convolucionáveis se $\mathcal{D}_{[f],[g]} = \mathbb{R}^n$ e que elas são fracamente convolucionáveis se $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{[f],[g]}) = 0$. Do mesmo modo, no caso em que as classes são fracamente convolucionáveis, podemos definir o seu produto de convolução $[f] * [g]: \mathbb{R}^n \rightarrow H$, pondo $[f] * [g] = f * g$, produto esse que é assim um elemento de $Mens(\mathbb{R}^n, H)$ e não apenas uma classe de equivalência.¹⁵²

III.5.17 (**Bilinearidade “no contexto forte”**) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua. Tem-se então:

a) Sejam a um escalar, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ uma aplicação topologicamente mensurável e, para cada $j \in \{1, 2\}$, $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ uma aplicação topologicamente mensurável tais que f_j e g sejam fortemente convolucionáveis. Tem-se então que tanto $f_1 + f_2$ e g como $a f_1$ e g são fortemente convolucionáveis e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2) * g(x) &= f_1 * g(x) + f_2 * g(x), \\ (a f_1) * g(x) &= a(f_1 * g)(x). \end{aligned}$$

b) Sejam a um escalar, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ uma aplicação topologicamente mensurável

¹⁵²É claro que não há qualquer inconveniente em utilizar a notação $[f] * [g]$ para designar também o elemento de $Mens(\mathbb{R}^n, H)$ associado, desde que seja claro qual o contexto em que nos colocamos.

vel e, para cada $j \in \{1, 2\}$, $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ uma aplicação topologicamente mensurável tais que f e g_j sejam fortemente convolucionáveis. Tem-se então que tanto f e $g_1 + g_2$ como f_1 e ag_1 são fortemente convolucionáveis e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f*(g_1 + g_2)(x) &= f*g_1(x) + f*g_2(x), \\ f*(ag_1)(x) &= a(f*g_1)(x). \end{aligned}$$

Dem: O facto de termos aplicações fortemente mensuráveis resulta das propriedades da convolução das funções positivas em III.5.8 e III.5.9, tendo em conta as desigualdades

$$\begin{aligned} \|f_1(x) + f_2(x)\| &\leq \|f_1(x)\| + \|f_2(x)\|, \\ \|g_1(x) + g_2(x)\| &\leq \|g_1(x)\| + \|g_2(x)\|. \end{aligned}$$

As igualdades no enunciado são então uma consequência direta das propriedades do integral de funções vectoriais em II.2.34 e na alínea a) de II.2.36. \square

III.5.18 (**Bilinearidade “no contexto fraco”**) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua. Tem-se então:

a) Sejam a um escalar, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ uma aplicação topologicamente mensurável e, para cada $j \in \{1, 2\}$, $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ uma aplicação topologicamente mensurável tais que f_j e g sejam fracamente convolucionáveis. Tem-se então que tanto $f_1 + f_2$ e g como af_1 e g são fracamente convolucionáveis e, quase sempre,

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)*g(x) &= f_1*g(x) + f_2*g(x), \\ (af_1)*g(x) &= a(f_1*g)(x). \end{aligned}$$

b) Sejam a um escalar, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ uma aplicação topologicamente mensurável e, para cada $j \in \{1, 2\}$, $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ uma aplicação topologicamente mensurável tais que f e g_j sejam fracamente convolucionáveis. Tem-se então que tanto f e $g_1 + g_2$ como f_1 e ag_1 são fracamente convolucionáveis e, quase sempre,

$$\begin{aligned} f*(g_1 + g_2)(x) &= f*g_1(x) + f*g_2(x), \\ f*(ag_1)(x) &= a(f*g_1)(x). \end{aligned}$$

Dem: Tendo em conta as propriedades da convolução das funções positivas em III.5.8 e III.5.9 e a desigualdade

$$\|f_1(x) + f_2(x)\| \leq \|f_1(x)\| + \|f_2(x)\|,$$

concluimos que $\mathcal{D}_{f_1, g} \cap \mathcal{D}_{f_2, g} \subset \mathcal{D}_{f_1 + f_2, g}$ e que $\mathcal{D}_{f_1, g} \subset \mathcal{D}_{af_1, g}$.

Como consequência das propriedades do integral de funções vectoriais em II.2.34 e na alínea a) de II.2.36, concluimos agora que as duas igualdades em a) são válidas respetivamente para cada $x \in \mathcal{D}_{f_1, g} \cap \mathcal{D}_{f_2, g}$ e para cada $x \in \mathcal{D}_{f_1, g}$, onde, por ser $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f_j, g}) = 0$, vem também

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{D}_{f_1,g} \cap \mathcal{D}_{f_2,g})) = \lambda_n((\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f_1,g}) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f_2,g})) = 0. \quad 153$$

A justificação de b) é análoga, ou, alternativamente, temos uma consequência de a), tendo em conta a comutatividade do produto de convolução. \square

III.5.19 (Condições suficientes para a convolucionabilidade forte) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua e consideremos uma constante $M \geq 0$ tal que $\|\xi(w, w')\| \leq M\|w\|\|w'\|$.

Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ aplicações topologicamente mensuráveis. Tem-se então que, em qualquer das seguintes três condições, f e g são fortemente convolucionáveis e $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é limitada e uniformemente contínua:

H₁) Se $[f] \in L^1(\mathbb{R}^n, F)$ e $[g] \in L^\infty(\mathbb{R}^n, G)$. Neste caso, tem-se

$$\|[f * g]\|_\infty \leq M\|[f]\|_1\|[g]\|_\infty.$$

H₂) Se $[f] \in L^\infty(\mathbb{R}^n, F)$ e $[g] \in L^1(\mathbb{R}^n, G)$. Neste caso, tem-se

$$\|[f * g]\|_\infty \leq M\|[f]\|_\infty\|[g]\|_1.$$

H₃) Se $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n, F)$ e $[g] \in L^q(\mathbb{R}^n, G)$, onde $p > 1$ e $q > 1$ são expoentes conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Neste caso, tem-se

$$\|[f * g]\|_\infty \leq M\|[f]\|_p\|[g]\|_q.$$

Dem: Coloquemo-nos sob as hipóteses em **H₁)**. Podemos então escrever, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tendo em conta a alínea a) de III.5.11 e a comutatividade do produto de convolução de funções positivas,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x - y)\|\|g(y)\| d\lambda_n(y) \leq \|[f]\|_1\|[g]\|_\infty < +\infty,$$

o que mostra que as aplicações são de facto fortemente convolucionáveis, e concluimos também que

¹⁵³De facto, verifica-se facilmente que a segunda igualdade é válida, mais geralmente, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, por ambos os membros serem identicamente nulos, no caso em que $a = 0$, e quando $a \neq 0$, por ambos os membros serem nulos para cada $x \notin \mathcal{D}_{f_1,g} = \mathcal{D}_{af_1,g}$. O facto de não se passar o mesmo com a primeira igualdade é o “castigo” que sofremos pela arbitrariedade da definição que demos do produto de convolução nos pontos fora do domínio de convolução e resulta de que podem existir pontos em $\mathcal{D}_{f_1+f_2,g}$ que não estão nem em $\mathcal{D}_{f_1,g}$ nem em $\mathcal{D}_{f_2,g}$.

$$\begin{aligned} \|f * g(x)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \times g(y) d\lambda_n(y) \right\| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y) \times g(y)\| d\lambda_n(y) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} M \|f(x-y)\| \|g(y)\| d\lambda_n(y) \leq M \| [f] \|_1 \| [g] \|_\infty, \end{aligned}$$

e portanto a aplicação $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é limitada e com

$$\| [f * g] \|_\infty \leq M \| [f] \|_1 \| [g] \|_\infty.$$

Por outro lado, dado $\delta > 0$, e afastando já os casos em que $[g] = 0$ e em que $M = 0$ (casos em que o produto de convolução é identicamente 0), podemos aplicar III.5.5 para garantir a existência de $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que $\|w\| < \varepsilon$,

$$\| \tau_w([f]) - [f] \|_1 = \| \tau_w([f]) - \tau_0([f]) \|_1 < \frac{\delta}{M \| [g] \|_\infty}$$

e então sempre que $\|x - y\| < \varepsilon$, podemos aplicar o que já verificámos, com a função $\tau_{y-x}(f) - f$ no lugar de f , para concluir que

$$\begin{aligned} \|f * g(x) - f * g(y)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-z) - f(y-z)) \times g(y) d\lambda_n(y) \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{y-x}(f)(y-z) - f(y-z)) \times g(y) d\lambda_n(y) \right\| \leq \\ &\leq M \| \tau_{y-x}([f]) - [f] \|_1 \| [g] \|_\infty < \delta, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade uniforme da aplicação $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$.

Para obtermos a mesma conclusão sob as hipóteses H_2) basta termos em conta o que já verificámos e a propriedade de comutatividade em III.5.14.

Para obtermos ainda a mesma conclusão sob as hipóteses H_3), basta repetirmos o que fizemos no caso das hipóteses H_1), aplicando a alínea b) de III.5.11 em vez da respetiva alínea a) (sem necessitar de referir a comutatividade) e utilizando a norma $\| \cdot \|_p$ no lugar da norma $\| \cdot \|_1$ e a norma $\| \cdot \|_q$ no lugar da norma $\| \cdot \|_\infty$. \square

III.5.20 (Condição suficiente para a convolucionabilidade fraca) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua e consideremos uma constante $M \geq 0$ tal que $\| \xi(w, w') \| \leq M \|w\| \|w'\|$.

Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ aplicações topologicamente mensuráveis tais que $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n, F)$ e $[g] \in L^q(\mathbb{R}^n, G)$, onde $p \geq 1$ e $q \geq 1$ verificam $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Tem-se então que f e g são fracamente convolucionáveis e, sendo $r \geq 1$ o definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, tem-se $[f * g] \in L^r(\mathbb{R}^n, H)$ e

$$\| [f * g] \|_r \leq M \| [f] \|_p \| [g] \|_q.$$

Dem: Sendo $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ as aplicações mensuráveis definidas por $\varphi(x) = \|f(x)\|$ e $\psi(x) = \|g(x)\|$, tem-se $\|\varphi\|_p = \| [f] \|_p < +\infty$ e $\|\psi\|_q = \| [g] \|_q < +\infty$ pelo que, tendo em conta a desigualdade de Young III.5.12,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi * \psi(x)^r d\lambda_n(x) = \|\varphi * \psi\|_r^r \leq \|\varphi\|_p^r \|\psi\|_q^r < +\infty,$$

o que, tendo em conta II.1.29, implica a existência de um boreliano $Y \subset \mathbb{R}^n$, com $\lambda_n(Y) = 0$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus Y$, $\varphi * \psi(x) < +\infty$, por outras palavras, $\mathbb{R}^n \setminus Y \subset \mathcal{D}_{f,g}$. Temos assim $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f,g} \subset Y$, portanto $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f,g}) = 0$, o que mostra que f e g são fracamente convolucionáveis. Podemos agora escrever, para cada $x \in \mathcal{D}_{f,g}$,

$$\begin{aligned} \|f * g(x)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \times g(y) d\lambda_n(y) \right\| \leq \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y)\| \|g(y)\| d\lambda_n(y) = M \varphi * \psi(x), \end{aligned}$$

igualdade trivialmente também válida para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}_{f,g}$, donde

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f * g(x)\|^r d\lambda_n(x) \right)^{1/r} &\leq \left(M^r \int_{\mathbb{R}^n} \varphi * \psi(x)^r d\lambda_n(x) \right)^{1/r} = \\ &= M \|\varphi * \psi\|_r \leq M \|\varphi\|_p \|\psi\|_q = M \| [f] \|_p \| [g] \|_q, \end{aligned}$$

como queremos. □

III.5.21 (Outras condições suficientes para a convolucionabilidade forte I)

Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua.

Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ uma aplicação contínua e de suporte compacto (cf. III.4.8) e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ uma aplicação localmente integrável (cf. III.4.15). Tem-se então que f e g são fortemente convolucionáveis e a aplicação $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é contínua.

Dem: Lembrando que a continuidade é uma propriedade local, basta provarmos que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a bola aberta $B_r(x_0)$ está contida no domínio de convolução $\mathcal{D}_{f,g}$ e a restrição de $f * g$ a esta bola aberta é contínua. Fixemos então $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto, que podemos já supor não vazio, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \notin K$ e seja R o máximo em K da função contínua $x \mapsto \|f(x)\|$. Notando $\overline{B}_r(x_0)$ a bola fechada de centro 0 e raio r , consideremos o compacto $K' = \overline{B}_r(x_0) - K$, imagem do compacto $\overline{B}_r(x_0) \times K$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pela aplicação contínua $(w, z) \mapsto w - z$. Consideremos uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\|\xi(w, w')\| \leq M \|w\| \|w'\|.$$

Considerando $x \in B_r(x_0)$, tem-se $f(x - y) = 0$ sempre que $x - y \notin K$, isto é, sempre que $y \notin x - K$, em particular, sempre que $y \notin K'$, e daqui resulta que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x - y)\| \|g(y)\| \leq R \mathbb{I}_{K'}(y) \|g(y)\|,$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x - y)\| \|g(y)\| d\lambda_n(y) \leq R \int_{K'} \|g(y)\| d\lambda_n(y) < +\infty,$$

portanto $x \in \mathcal{D}_{f,g}$, e, por outro lado,

$$\|f(x - y) \times g(y)\| \leq M \|f(x - y)\| \|g(y)\| \leq MR \mathbb{I}_{K'}(y) \|g(y)\|,$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^n} MR \mathbb{I}_{K'}(y) \|g(y)\| = MR \int_{K'} \|g(y)\| d\lambda_n(y) < +\infty,$$

pelo que podemos aplicar o teorema de continuidade do integral paramétrico (cf. II.6.1) à aplicação $\mathbb{R}^n \times B_r(x_0) \rightarrow H$, $(y, x) \mapsto f(x - y) \times g(y)$ para concluir que é contínua a aplicação $B_r(x_0) \rightarrow H$,

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \times g(y) d\lambda_n(y) = f * g(x). \quad \square$$

III.5.22 (Caso do suporte compacto) Suponhamos que, para além das hipóteses do resultado precedente, a aplicação localmente integrável $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ é também de suporte compacto¹⁵⁴. Tem-se então que a aplicação contínua $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é de suporte compacto.

Mais precisamente, se $K, L \subset \mathbb{R}^n$ são dois compactos tais que $f(x) = 0$ para cada $x \notin K$ e $g(x) = 0$ para cada $x \notin L$, então $K + L \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto tal que $f * g(x) = 0$ para cada $x \notin K + L$.

Dem: O facto de $K + L$ ser compacto resulta de se tratar da imagem do compacto $K \times L \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pela aplicação contínua $(x, y) \mapsto x + y$. A conclusão resulta agora de que, se $x \notin K + L$, então, para todo o $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x - y) \times g(y) = 0$, e portanto

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \times g(y) d\lambda_n(y) = 0. \quad \square$$

III.5.23 (Outras condições suficientes para a convolucionabilidade forte II)

Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua.

Sejam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ uma aplicação integrável e de suporte compacto (cf.

¹⁵⁴Em particular, é mesmo integrável.

III.4.8) e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ uma aplicação contínua. Tem-se então que f e g são fortemente convolucionáveis e a aplicação $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é contínua.

Dem: Lembrando que a continuidade é uma propriedade local, basta provarmos que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a bola aberta $B_r(x_0)$ está contida no domínio de convolução $\mathcal{D}_{f,g}$ e a restrição de $f * g$ a esta bola aberta é contínua. Vamos, para isso, utilizar a propriedade comutativa do produto de convolução em III.5.14, que implica que $x \in \mathcal{D}_{f,g}$ se, e só se,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f(y)\| \|g(x-y)\| d\lambda_n(y)$$

e que, para um tal x ,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \times g(x-y) d\lambda_n(y).$$

Fixemos então $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto, que podemos já supor não vazio, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \notin K$ e, notando $\overline{B}_r(x_0)$ a bola fechada de centro 0 e raio r , consideremos o compacto $K' = \overline{B}_r(x_0) - K$ e seja R o máximo em K' da função contínua $x \mapsto \|g(x)\|$. Consideremos uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\|\xi(w, w')\| \leq M \|w\| \|w'\|.$$

Considerando $x \in B_r(x_0)$, tem-se $\|g(x-y)\| \leq R$ sempre que $y \in K$ e daqui resulta que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(y)\| \|g(x-y)\| \leq R \|f(y)\|,$$

donde

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x-y)\| \|g(y)\| d\lambda_n(y) \leq R \int_{K'} \|f(y)\| d\lambda_n(y) < +\infty,$$

portanto $x \in \mathcal{D}_{f,g}$, e, por outro lado,

$$\|f(y) \times g(x-y)\| \leq M \|f(y)\| \|g(x-y)\| \leq MR \|f(y)\|,$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^n} MR \|f(y)\| = MR \int_{\mathbb{R}^n} \|f(y)\| d\lambda_n(y) < +\infty,$$

pelo que podemos aplicar o teorema de continuidade do integral paramétrico (cf. II.6.1) à aplicação $\mathbb{R}^n \times B_r(x_0) \rightarrow H$, $(y, x) \mapsto f(y) \times g(x-y)$ para concluir que é contínua a aplicação $B_r(x_0) \rightarrow H$,

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \times g(y) d\lambda_n(y) = f * g(x). \quad \square$$

Repare-se que, ao contrário do que acontecia em III.5.19, nos dois resultados precedentes apenas garantimos que a aplicação $f*g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é contínua, não sendo assim necessariamente limitada nem uniformemente contínua.

Note-se, no entanto, que, se, nestes resultados, fizermos hipóteses mais fortes, já poderemos aplicar III.5.19 para concluir que $f*g$ é limitada e uniformemente contínua:

No caso de III.5.21 bastará nomeadamente pedir que em vez de g ser simplesmente localmente integrável, se tenha $[g] \in L^p(\mathbb{R}^n, G)$ para algum p com $1 \leq p \leq +\infty$ (cf. III.4.21), uma vez que, sendo $1 \leq q \leq +\infty$ o expoente conjugado de p (portanto com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), tem-se necessariamente $[f] \in L^q(\mathbb{R}^n, F)$ (cf. III.4.9).

No caso de III.5.23, bastará simplesmente exigir que g seja limitada, portanto com $[g] \in L^\infty(\mathbb{R}^n, G)$, visto que, por hipótese, $[f] \in L^1(\mathbb{R}^n, F)$. Vamos agora examinar dois casos em que existe uma permutabilidade entre o produto de convolução e a derivação. Recordemos que uma aplicação, definida num aberto de \mathbb{R}^n e com valores num espaço vetorial normado, se diz *de classe* C^p , onde $p \geq 0$ é um inteiro, se for contínua e com derivadas parciais contínuas até à ordem p e que ela se diz *de classe* C^∞ se for de classe C^p para todo o p .

III.5.24 (Casos de derivabilidade do produto de convolução I) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua.

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ uma aplicação contínua e de suporte compacto, tal que, para um certo $1 \leq i \leq n$, exista, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ e a aplicação $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ seja contínua. Seja $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ uma aplicação localmente integrável. Tem-se então que tanto f e g como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e g são fortemente convolucionáveis, a aplicação $f*g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é contínua e admite, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ uma derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}*g\right)(x),$$

e a aplicação

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f*g) = \frac{\partial f}{\partial x_i}*g: \mathbb{R}^n \rightarrow H,$$

é contínua.

Dem: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto, que podemos já supor não vazio, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \notin K$ e, reparando que se tem então também $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ para cada $x \notin K$, seja R o máximo em K da função contínua $x \mapsto \|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\|$.

Tendo em conta III.5.21, vemos que f e g são fortemente convolucionáveis, e com $f*g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é contínua, e que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e g são fortemente convolucionáveis, e com $\frac{\partial f}{\partial x_i}*g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ contínua. Resta-nos mostrar que, para cada

$x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, $f * g$ tem derivada parcial em relação à variável i em x_0 dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x_0)$$

e, para isso, basta mostrarmos que isso acontece com a restrição de $f * g$ a uma certa bola aberta $B_r(x_0)$, onde, para fixar ideias, consideramos em \mathbb{R}^n a norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$. Notando $\overline{B}_r(x_0)$ a bola fechada de centro 0 e raio r , consideremos o compacto $K' = \overline{B}_r(x_0) - K$, imagem do compacto $\overline{B}_r(x_0) \times K$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pela aplicação contínua $(w, z) \mapsto w - z$. Consideremos uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\|\xi(w, w')\| \leq M \|w\| \|w'\|.$$

Considerando $x \in B_r(x_0)$, tem-se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) = 0$ sempre que $x - y \notin K$, isto é, sempre que $y \notin x - K$, em particular, sempre que $y \notin K'$, e daqui resulta que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \times g(y) \right\| \leq M \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right\| \|g(y)\| \leq MR \mathbb{I}_{K'}(y) \|g(y)\|,$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^n} MR \mathbb{I}_{K'}(y) \|g(y)\| = MR \int_{K'} \|g(y)\| d\lambda_n(y) < +\infty,$$

pelo que, aplicando o teorema de derivação do integral paramétrico II.6.2 à aplicação $\mathbb{R}^n \times]x_{0i} - r, x_{0i} + r[$,

$$(y, x_i) \mapsto f((x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{ni}) - y) \times g(y),$$

concluimos que a restrição da função $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ a $B_r(x_0)$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \times g(y) d\lambda_n(y)$$

tem efetivamente derivada em ordem à variável i no ponto x_0 igual a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 - y) \times g(y) d\lambda_n(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x_0). \quad \square$$

III.5.25 (Corolário) Nas condições anteriores, se a aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ é de classe C^p , onde $1 \leq p \leq +\infty$, e a aplicação $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ é localmente integrável, então a aplicação $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é também de classe C^p .

Dem: O caso em que $p = 1$ resulta diretamente do resultado precedente e o caso em que p é finito decorre então imediatamente por indução, se nos lembrarmos que uma aplicação é de classe C^{p+1} se, e só se, tem derivadas

parciais em relação a cada uma das variáveis e estas são de classe C^p . O caso $p = +\infty$ é uma consequência do caso em que p é finito. \square

III.5.26 (Casos de derivabilidade do produto de convolução II) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua.

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ uma aplicação integrável e de suporte compacto. Seja $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ uma aplicação contínua tal que, para um certo $1 \leq i \leq n$, exista, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a derivada parcial $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ e a aplicação $\frac{\partial g}{\partial x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ seja contínua. Tem-se então que tanto f e g como f e $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ são fortemente convolucionáveis, a aplicação $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é contínua e admite, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, uma derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = (f * \frac{\partial g}{\partial x_i})(x),$$

e a aplicação

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow H,$$

é contínua.

Dem: Tendo em conta III.5.23, sabemos que f e g são fortemente convolucionáveis, e com $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ contínua, e que f e $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ são fortemente convolucionáveis, e com $f * \frac{\partial g}{\partial x_i}: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ contínua. Resta-nos mostrar que, para cada $1 \leq i \leq n$ e cada $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, $f * g$ tem derivada parcial em relação à variável i em x_0 dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x_0) = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)$$

e, para isso, basta mostrarmos que isso acontece com a restrição de $f * g$ a uma certa bola aberta $B_r(x_0)$, onde, para fixar ideias, consideramos em \mathbb{R}^n a norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$. Vamos, para isso, utilizar a propriedade comutativa do produto de convolução em III.5.14, que implica que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \times g(x - y) d\lambda_n(y),$$

$$f * \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(x - y) d\lambda_n(y).$$

Fixemos então $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto, que podemos já supor não vazio, tal que $f(x) = 0$, para cada $x \notin K$ e, notando $\overline{B}_r(x_0)$ a bola fechada de centro 0 e raio r , consideremos o compacto $K' = \overline{B}_r(x_0) - K$ e seja R o máximo em K' da função contínua $x \mapsto \|\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\|$. Consideremos uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\|\xi(w, w')\| \leq M\|w\|\|w'\|.$$

Considerando $x \in B_r(x_0)$, tem-se $\|\frac{\partial g}{\partial x_i}(x - y)\| \leq R$ sempre que $y \in K$ e daqui resulta que, para cada $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(y) \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(x - y)\| \leq M\|f(y)\|\|\frac{\partial g}{\partial x_i}(x - y)\| \leq MR\|f(y)\|,$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^n} MR\|f(y)\| = MR \int_{\mathbb{R}^n} \|f(y)\| d\lambda_n(y) < +\infty,$$

pelo que, aplicando o teorema de derivação do integral paramétrico II.6.2 à aplicação $\mathbb{R}^n \times]x_{0i} - r, x_{0i} + r[$,

$$(y, x_i) \mapsto f(y) \times g((x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{ni}) - y),$$

concluimos que a restrição da função $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ a $B_r(x_0)$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \times g(x - y) d\lambda_n(y)$$

tem efetivamente derivada em ordem à variável i no ponto x_0 igual a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0 - y) d\lambda_n(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x_0). \quad \square$$

III.5.27 (Corolário) Nas condições anteriores, se a aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ é integrável e de suporte compacto e a aplicação $g: \mathbb{R}^n \rightarrow G$ de classe C^p , onde $1 \leq p \leq +\infty$, então a aplicação $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ é também de classe C^p .

Dem: O caso em que $p = 1$ resulta diretamente do resultado precedente e o caso em que p é finito decorre então imediatamente por indução, se nos lembrarmos que uma aplicação é de classe C^{p+1} se, e só se, tem derivadas parciais em relação a cada uma das variáveis e estas são de classe C^p . O caso $p = +\infty$ é uma consequência do caso em que p é finito. \square

Exercícios

Ex III.5.1 (Associatividade do produto de convolução no contexto positivo)

Consideremos aplicações mensuráveis $\varphi, \psi, \rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$.

a) Utilizar o teorema de Fubini para funções positivas para mostrar que

$$(\varphi * \psi) * \rho = (\varphi * \rho) * \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+.$$

b) Deduzir de a) e da propriedade comutativa em III.5.7 que se tem

$$(\varphi*\psi)*\rho = \varphi*(\psi*\rho): \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Ex III.5.2 (**Exemplo de associatividade do produto de convolução no contexto vetorial**) Seja E um espaço de Banach sobre \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Sejam $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ e $h: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ aplicações topologicamente mensuráveis e consideremos as aplicações mensuráveis $\varphi, \psi, \rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ definidas por

$$\varphi(x) = |f(x)|, \quad \psi(x) = |g(x)|, \quad \rho(x) = \|h(x)\|.$$

a) Suponhamos que $(\varphi*\psi)*\rho(x) < +\infty$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, e que, tanto f e g como f e h , são fracamente convolucionáveis. Mostrar que, tanto $f*g$ e h como $f*h$ e g são fortemente convolucionáveis e que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f*g)*h(x) = (f*h)*h(x).$$

b) Suponhamos que $(\varphi*\psi)*\rho(x) < +\infty$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, e que, tanto f e g como g e h , são fracamente convolucionáveis. Mostrar que, tanto $f*g$ e h como f e $g*h$ são fortemente convolucionáveis e que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f*g)*h(x) = f*(g*h)(x).$$

Sugestão: Reparar que se tem um consequência da conclusão de a), tendo em conta as propriedades comutativas do produto de convolução em III.5.7 e III.5.14.

a') Suponhamos que $(\varphi*\psi)*\rho(x) < +\infty$, quase sempre, e que, tanto f e g como f e h , são fracamente convolucionáveis. Mostrar que, tanto $f*g$ e h como $f*h$ e g são fracamente convolucionáveis e que se tem quase sempre

$$(f*g)*h(x) = (f*h)*h(x).$$

b') Suponhamos que $(\varphi*\psi)*\rho(x) < +\infty$, quase sempre, e que, tanto f e g como g e h , são fracamente convolucionáveis. Mostrar que, tanto $f*g$ e h como f e $g*h$ são fracamente convolucionáveis e que se tem quase sempre

$$(f*g)*h(x) = f*(g*h)(x).$$

Ex III.5.3 (**Caso concreto de aplicabilidade do exercício III.5.2**) Seja E um espaço de Banach sobre \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Sejam $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ e $h: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ aplicações topologicamente mensuráveis com $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $[g] \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ e $[h] \in L^s(\mathbb{R}^n, E)$, onde $1 \leq p, q, s \leq +\infty$. Mostrar que:

1) Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 2$, então, tanto f e g como g e h , são fracamente convolucionáveis, tanto $f*g$ e h como f e $g*h$ são fortemente convolucionáveis, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f*g)*h(x) = f*(g*h)(x)$$

e $(f*g)*h = f*(g*h): \mathbb{R}^n \rightarrow E$ é limitada e uniformemente contínua.

2) Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} > 2$ e $1 \leq t < +\infty$ é o definido por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 2 + \frac{1}{t},$$

então, tanto f e g como g e h , são fracamente convolucionáveis, tanto $f * g$ e h como f e $g * h$ são fracamente convolucionáveis, tem-se quase sempre

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$$

e $[(f * g) * h] = [f * (g * h)] \in L^t(\mathbb{R}^n, E)$.

Ex III.5.4 a) Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ dois borelianos e consideremos as respectivas indicatrizes $\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$. Mostrar que o produto de convolução $\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ está definido por

$$\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B(x) = \lambda_n((x - A) \cap B).$$

b) Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ dois borelianos com $\lambda_n(A) > 0$ e $\lambda_n(B) > 0$. Mostrar que o conjunto $A + B$, das somas de um vetor de A com um vetor de B , tem interior não vazio.

Sugestão: Começar por reparar que se pode supor $\lambda_n(A) < +\infty$ e $\lambda_n(B) < +\infty$, se necessário substituindo A e B por $A \cap [-k, k]^n$ e $B \cap [-k, k]^n$, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Utilizar III.5.19 e III.5.6 para verificar que o produto de convolução $\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua com integral não nulo e deduzir que qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B(x_0) \neq 0$ é um ponto interior a $A + B$.

c) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano com $\lambda_n(A) > 0$. Mostrar que se pode garantir, mais precisamente, que 0 é um ponto interior ao conjunto $A - A$, das diferenças entre elementos de A .

Sugestão: Proceder como na alínea precedente, mas notando agora que

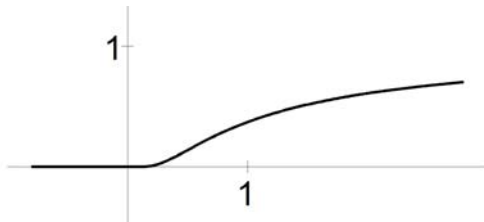
$$\mathbb{I}_{-A} * \mathbb{I}_A(0) = \lambda_n(A) > 0.$$

§6. Aplicações do produto de convolução e derivadas fracas.

Nesta secção vamos começar por utilizar as propriedades do produto de convolução estabelecidas anteriormente para obter, no contexto dos abertos de \mathbb{R}^n , resultados que já encontrámos na secção III.4, no contexto dos espaços localmente compactos, como o lema da Urysohn, o teorema da partição da unidade ou o teorema de densidade em III.4.14, mas com as aplicações contínuas substituídas por funções de classe C^∞ .

III.6.1 (**Lema**) Tem lugar uma aplicação de classe C^∞ , $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1[$, definida por

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & , \text{ se } t > 0 \end{cases}.$$



Dem: Seja, mais geralmente, para cada inteiro $p \geq 0$, $\varphi_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$\varphi_p(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } t \leq 0 \\ \frac{1}{t^p} e^{-1/t} & , \text{ se } t > 0 \end{cases},$$

aplicação que é contínua uma vez que se verifica, por indução em p , utilizando a regra de Cauchy para levantar indeterminações, que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s^p e^{-s} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^p}{e^s} = 0.$$

A aplicação φ do enunciado não é mais do que a aplicação φ_0 . Para cada $t \neq 0$, a aplicação φ_p é derivável em t e com

$$\varphi_p'(t) = -p \varphi_{p+1}(t) + \varphi_{p+2}(t)$$

e, tendo em conta a continuidade de φ_p e do segundo membro da igualdade anterior, concluímos que a igualdade anterior é ainda válida para $t = 0$. É agora imediato concluir, por indução em k , que todas as funções φ_p são de classe C^k , para todo o k , e portanto de classe C^∞ . \square

III.6.2 (**A função seno**) Seja $n \geq 1$ fixado. Sendo $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1[$ a função do lema precedente e considerando em \mathbb{R}^n a sua norma euclidiana, podemos considerar

$$a = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(1 - \|x\|^2) d\lambda_n(x),$$

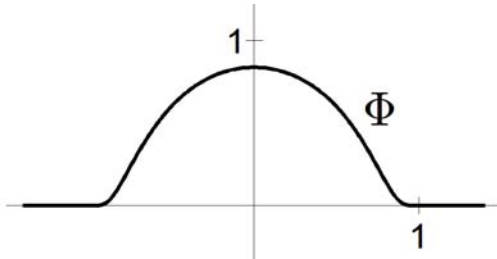
que verifica $0 < a < +\infty$, e definimos a *função seno*

$$\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[, \quad \Phi(x) = \frac{1}{a} \varphi(1 - \|x\|^2).$$

Esta função é de classe C^∞ e de suporte compacto e verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) d\lambda_n(x) = 1,$$

tendo-se, mais precisamente, $\Phi(x) > 0$ se, e só se, $x \in B_1(0)$.



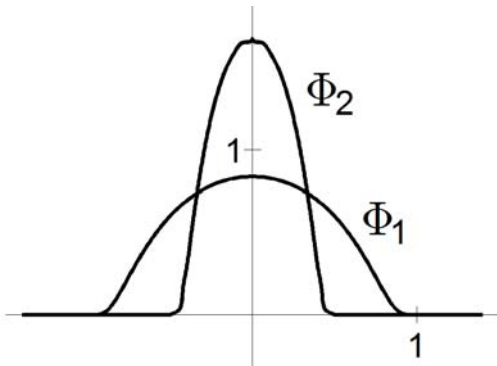
Mais geralmente, por transformação homotética da função sino Φ , definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, uma função de classe C^∞ e de suporte compacto

$$\Phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[, \quad \Phi_k(x) = k^n \Phi(kx),$$

a qual verifica ainda

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(x) d\lambda_n(x) = 1,$$

tendo-se $\Phi_k(x) > 0$ se, e só se, $x \in B_{1/k}(0)$.



Dem: O facto de a aplicação $x \mapsto \varphi(1 - \|x\|^2)$ ser de classe C^∞ resulta de que, para $x = (x_1, \dots, x_n)$ em \mathbb{R}^n , tem-se $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Por outro lado, $\varphi(1 - \|x\|^2) > 0$ se, e só se, $1 - \|x\|^2 > 0$ isto é, se, e só se, $\|x\| < 1$, o que implica que a aplicação $x \mapsto \varphi(1 - \|x\|^2)$ tem suporte compacto e não é igual a 0 quase sempre, e portanto é efetivamente $0 < a < +\infty$. Concluimos daqui que a aplicação Φ está bem definida, é de classe C^∞ e de suporte compacto e verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) d\lambda_n(x) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(1 - \|x\|^2) d\lambda_n(x) = 1,$$

tendo-se também $\Phi(x) > 0$ se, e só se, $x \in B_1(0)$. É agora imediato que, para cada $k \in \mathbb{N}$, Φ_k é de classe C^∞ , tendo-se $\Phi_k(x) = 0$ se, e só se $kx \in B_1(0)$, isto é, $x \in B_{1/k}(0)$, em particular Φ_k é de suporte compacto. Quanto ao integral, considerando o isomorfismo $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\xi(y) = \frac{1}{k}y$, cujo coeficiente de dilatação é $c_\xi = \frac{1}{k^n}$ (cf. II.5.16), podemos reparar que ξ é compatível com as medidas quando se considera no domínio a medida $\frac{1}{k^n}\lambda_n$ e no espaço de chegada a medida λ_n pelo que, tendo em conta II.1.37 e o teorema trivial de mudança de variáveis II.1.38, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(x) d\lambda_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k\left(\frac{1}{k}y\right) d\left(\frac{1}{k^n}\lambda_n\right)(y) = \\ &= \frac{1}{k^n} \int_{\mathbb{R}^n} k^n \Phi(y) d\lambda_n(y) = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Como primeira aplicação do produto de convolução e das aplicações Φ_k que acabamos de referir, podemos estabelecer, no contexto de \mathbb{R}^n , uma versão C^∞ do lema de Urysohn em III.4.11.

III.6.3 (Versão C^∞ do lema de Urysohn) Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, com $K \subset U$. Existe então uma aplicação de classe C^∞ $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi \prec U$ ¹⁵⁵ e $\varphi(x) = 1$, para cada $x \in K$.

Dem: Podemos afastar o caso trivial em que $K = \emptyset$, caso em que se toma para φ a aplicação 0. Seja $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in K$, $B_\delta(x) \subset U$ (a possibilidade de escolher um tal δ é trivial se $U = \mathbb{R}^n$ e, caso contrário, basta tomar para δ o mínimo para $x \in K$ da função contínua que a x associa a distância $d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$). Escolhamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{2}$ e consideremos os compactos

$$\begin{aligned} K' &= K + \overline{B}_{\frac{1}{k}}(0) = \bigcup_{x \in K} \overline{B}_{\frac{1}{k}}(x), \\ K'' &= K + \overline{B}_{\frac{2}{k}}(0) = \bigcup_{x \in K} \overline{B}_{\frac{2}{k}}(x) \subset U, \end{aligned}$$

imagem dos compactos $K \times \overline{B}_{\frac{1}{k}}(0)$ e $K \times \overline{B}_{\frac{2}{k}}(0)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pela aplicação contínua $(u, v) \mapsto u + v$, reparando que, pela desigualdade triangular, para cada $z \in K'$, $\overline{B}_{\frac{1}{k}}(z) \subset K''$. Uma vez que $\lambda_n(K') < +\infty$, e portanto a função indicatriz $\mathbb{I}_{K'}: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ é integrável, em particular localmente integrável, podemos aplicar o corolário III.5.25 para garantir a existência de

¹⁵⁵Cf. a notação em III.4.10.

uma aplicação de classe C^∞

$$\varphi = \Phi_k * \mathbb{I}_{K'}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

onde Φ_k é a função referida em III.6.2. Tendo em conta a comutatividade do produto de convolução, φ também está definida por

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) \mathbb{I}_{K'}(x-y) d\lambda_n(y) = \int_{x-K'} \Phi_k(y) d\lambda_n(y).$$

Resulta daqui que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$0 \leq \varphi(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) d\lambda_n(y) = 1,$$

que, para cada $x \in K$, tem-se

$$\Phi_k(y) \neq 0 \Rightarrow y \in B_{\frac{1}{k}}(0) \Rightarrow x-y \in K' \Rightarrow y \in x-K',$$

e portanto

$$\varphi(x) = \int_{x-K'} \Phi_k(y) d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) d\lambda_n(y) = 1$$

e que, para cada $x \notin K''$, tem-se

$$y \in x-K' \Rightarrow \exists_{z \in K'} y = x-z \Rightarrow \exists_{z \in K'} x = z+y \Rightarrow y \notin \overline{B}_{\frac{1}{k}}(0) \Rightarrow \Phi_k(y) = 0,$$

e portanto

$$\varphi(x) = \int_{x-K'} \Phi_k(y) d\lambda_n(y) = 0,$$

o que mostra que φ verifica as propriedades no enunciado. \square

O resultado precedente permite-nos adaptar trivialmente a demonstração do teorema da partição da unidade em III.4.12 para obter, no contexto de \mathbb{R}^n , uma versão C^∞ desse resultado

III.6.4 (Partição C^∞ da unidade de um compacto) Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e $(U_j)_{j \in J}$ uma família finita de abertos de \mathbb{R}^n tal que $K \subset \bigcup U_j$. Existem então aplicações $\varphi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , onde $j \in J$, tais que:

- a) Para cada $j \in J$, $\varphi_j \prec U_j$.¹⁵⁶
- b) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{j \in J} \varphi_j(x) \leq 1$.
- c) Para cada $x \in K$, $\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = 1$.

¹⁵⁶Cf. a notação em III.4.10.

Costuma-se dizer que as funções φ_j constituem uma *partição da unidade* de classe C^∞ do compacto K subordinada à cobertura aberta finita constituída pelos U_j .

Dem: Vamos dividir a demonstração em duas partes:

1) Vamos provar a existência de conjuntos compactos $K_j \subset U_j$, onde $j \in J$, tais que $K \subset \bigcup K_j$.

Subdem: Consideremos, para cada $x \in K$, um índice $j_x \in J$ tal que $x \in U_{j_x}$ e uma vizinhança compacta C_x de x , tal que $C_x \subset U_{j_x}$. Pela propriedade das coberturas dos compactos, escolhamos então uma parte finita K_0 de K tal que se tenha ainda

$$K \subset \bigcup_{x \in K_0} \text{int}(C_x).$$

Sendo, para cada $j \in J$,

$$K_j = \bigcup_{\substack{x \in K_0 \\ j_x = j}} C_x,$$

cada K_j é um compacto (união finita de compactos), está contido em U_j e K está contido na união dos K_j .

2) Pela versão do lema de Urysohn em III.6.3, podemos considerar, para cada $j \in J$, uma aplicação $\hat{\varphi}_j: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , tal que $\hat{\varphi}_j \prec U_j$ e $\hat{\varphi}_j(x) = 1$, para cada $x \in K_j$ e definir uma aplicação $\hat{\varphi}: X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ por

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{j \in J} \hat{\varphi}_j(x),$$

vindo então que, para cada $x \in K$, existe j tal que $x \in K_j$, e portanto $\hat{\varphi}(x) \geq \hat{\varphi}_j(x) = 1$. Consideremos o aberto V de \mathbb{R}^n , contendo K , constituído pelos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\hat{\varphi}(x) > 0$. Mais uma vez pelo resultado referido, vai existir uma aplicação $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ tal que $\psi \prec V$ e $\psi(x) = 1$, para cada $x \in K$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se $\hat{\varphi}(x) + (1 - \psi(x)) > 0$, visto que, para $x \in V$, $\hat{\varphi}(x) > 0$ e, para $x \notin V$, $\psi(x) = 0$. Podemos assim definir aplicações $\varphi_j: X \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ por

$$\varphi_j(x) = \frac{\hat{\varphi}_j(x)}{\hat{\varphi}(x) + (1 - \psi(x))},$$

tendo-se $\varphi_j \prec U_j$, por ser $\hat{\varphi}_j \prec U_j$. Vem, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = \frac{\hat{\varphi}(x)}{\hat{\varphi}(x) + (1 - \psi(x))} \leq 1$$

e, para cada $x \in K$, $1 - \psi(x) = 0$, e portanto

$$\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = \frac{\widehat{\varphi}(x)}{\widehat{\varphi}(x) + (1 - \psi(x))} = 1. \quad \square$$

Veremos adiante nesta secção que as funções $\Phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$, definidas em III.6.2, jogam o papel de *funções suavizadoras* (em inglês *mollifiers*) por permitirem, com o auxílio do produto de convolução, obter aproximações de classe C^∞ de aplicações com menos regularidade. O próximo resultado é um primeiro exemplo desse facto.

III.6.5 (Aproximação C^∞ das funções contínuas) Sejam E um espaço de Banach e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Em particular f é localmente integrável (cf. III.4.18) pelo que, tendo em conta III.5.25, podemos considerar aplicações $\Phi_k * f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ de classe C^∞ , tendo-se então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_k * f(x) \rightarrow f(x)$ e esta convergência é uniforme sobre cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Dem: Consideremos um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. Tendo em conta a formulação forte da continuidade uniforme de f no compacto K , podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que se tenha $\|f(z) - f(x)\| < \delta$, sempre $x \in K$, $z \in \mathbb{R}^n$ e $\|x - z\| < \varepsilon$. Sendo k_0 tal que $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$, vamos verificar que, para cada $k \geq k_0$ e $x \in K$ tem-se $\|\Phi_k * f(x) - f(x)\| \leq \delta$, o que demonstrará o resultado. Fixemos então $k \geq k_0$ e $x \in K$. Lembrando a comutatividade do produto de convolução em III.5.14, tem-se então

$$\begin{aligned} \|\Phi_k * f(x) - f(x)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) f(x - y) d\lambda_n(y) - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) d\lambda_n(y) \right) f(x) \right\| = \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(y) (f(x - y) - f(x)) d\lambda_n(y) \right\| \leq \\ &\leq \int_{B_{1/k}(0)} \Phi_k(y) \|f(x - y) - f(x)\| d\lambda_n(y) \leq \\ &\leq \int_{B_{1/k}(0)} \Phi_k(y) \delta d\lambda_n(y) = \delta. \end{aligned} \quad \square$$

III.6.6 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, sobre cujos borelianos consideramos a medida restrição da medida de Lebesgue λ_n , e E um espaço de Banach. Notamos

$$\mathcal{C}_c^\infty(U, E) \subset \mathcal{C}_c(U, E) \subset \mathcal{Mens}(U, E)$$

o conjunto das aplicações $f: U \rightarrow E$ de classe C^∞ e de suporte compacto e

$$\mathcal{C}_c^\infty(U, E) \subset C_c(U, E) \subset \mathcal{Mens}(U, E)$$

o conjunto das respectivas classes de equivalência (cf. as definições de $\mathcal{C}_c(U, E)$ e $C_c(U, E)$ em III.4.8 e III.4.14), conjuntos esses que são trivialmente subespaços vetoriais.

Repare-se que, tendo em conta III.4.9, tem-se

$$C_c^\infty(U, E) \subset L^p(U, E),$$

para cada $1 \leq p \leq +\infty$.

Repare-se também que, se $f \in C_c^\infty(U, E)$ então, para cada $1 \leq i \leq n$, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ também pertence a $C_c^\infty(U, E)$; mais precisamente, se $K \subset U$ é um compacto com $f(x) = 0$ para cada $x \in U \setminus K$, então tem-se também $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ para cada $x \in U \setminus K$.

III.6.7 (Versão mais forte de III.4.23) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e E um espaço de Banach e consideremos a aplicação bilinear

$$\begin{aligned} C_c(U, \mathbb{R}) \times L_{loc}^1(U, E) &\rightarrow E, \\ (\varphi, [g]) &\mapsto \langle \varphi, [g] \rangle = \int_U \varphi(x) g(x) d\lambda_n(x). \end{aligned}$$

Se $[g] \in L_{loc}^1(U, E)$ é tal que $\langle \varphi, [g] \rangle = 0$, para todo o $\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$, então $[g] = 0$, isto é, $g(x) = 0$ quase sempre.

Dem: Tendo em conta III.4.23, bastará provar que se tem, mais geralmente, $\langle \varphi, [g] \rangle = 0$, para todo o $\varphi \in C_c(U, \mathbb{R})$. Fixemos então um tal $\varphi \in C_c(U, \mathbb{R})$, que podemos já supor diferente da função 0.

Seja $K \subset U$ um compacto tal que $\varphi(x) = 0$, para cada $x \in U \setminus K$. Podemos então considerar $\varepsilon > 0$ tal que o compacto $K' = K + \overline{B}_\varepsilon(0) \supset K$ esteja ainda contido em U (a existência de um tal ε é trivial se $U = \mathbb{R}^n$ e, caso contrário, basta tomar ε menor que o mínimo estritamente positivo para $x \in K$ da distância de x ao conjunto fechado $\mathbb{R}^n \setminus U$, que é função contínua de x). Seja $\widehat{\varphi}: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ o prolongamento de φ que toma o valor 0 fora de U , função ainda com suporte compacto e cuja continuidade decorre da continuidade das suas restrições aos abertos U e $\mathbb{R}^n \setminus K$ de união \mathbb{R}^n , esta última por ser identicamente 0.

Seja $\delta > 0$ arbitrário. Aplicando III.6.5, concluímos a existência de $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$, a aplicação de classe C^∞ e de suporte compacto $\Phi_k * \widehat{\varphi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verifica, para cada $x \in K'$,

$$|\Phi_k * \widehat{\varphi}(x) - \widehat{\varphi}(x)| < \delta$$

e, tendo em conta III.5.22, $\Phi_k * \widehat{\varphi}(x) = 0$ para cada $x \notin K + \overline{B}_{1/k}(0)$. Fixando $k \geq k_0$ tal que $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$, tem-se assim, em particular, $\Phi_k * \widehat{\varphi}(x) = 0$ para cada $x \notin K'$ e podemos considerar a restrição ψ de $\Phi_k * \widehat{\varphi}$ a U , que pertence a $C_c^\infty(U, E)$ e verifica $|\varphi(x) - \psi(x)| < \delta$, para cada $x \in K'$, e $\psi(x) = \varphi(x) = 0$, para cada $x \in U \setminus K'$. Uma vez que, por hipótese, $\langle \psi, [g] \rangle = 0$, concluímos daqui que

$$\begin{aligned} \|\langle \varphi, [g] \rangle\| &= \|\langle \varphi, [g] \rangle - \langle \psi, [g] \rangle\| = \left\| \int_U (\varphi(x) - \psi(x))g(x) d\lambda_n(x) \right\| \leq \\ &\leq \int_{K'} |\varphi(x) - \psi(x)| \|g(x)\| d\lambda_n(x) \leq \delta \int_{K'} \|g(x)\| d\lambda_n(x) \end{aligned}$$

(lembrar que, por hipótese, g tem restrição integrável ao compacto K') e daqui deduzimos, tendo em conta a arbitrariedade de δ , que $\|\langle \varphi, [g] \rangle\| = 0$, como queríamos. \square

III.6.8 (Corolário) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e E um espaço de Banach e consideremos a correspondente aplicação bilinear

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c(U, \mathbb{R}) \times L_{loc}^1(U, E) &\rightarrow E, \\ (\varphi, [g]) &\mapsto \langle \varphi, [g] \rangle = \int_U \varphi(x) g(x) d\lambda_n(x). \end{aligned}$$

Se $[g], [h] \in L_{loc}^1(U, E)$ são tais que $\langle \varphi, [g] \rangle = \langle \varphi, [h] \rangle$, para todo o $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R})$, então $[g] = [h]$, isto é, $g(x) = h(x)$ quase sempre.

Dem: Basta atender a que, para todo o $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R})$, vem

$$\langle \varphi, [g] - [h] \rangle = \langle \varphi, [g] \rangle - \langle \varphi, [h] \rangle = 0,$$

portanto $[g] - [h] = 0$. \square

Estamos agora em condições de abordar a definição das derivadas fracas, que constituem, de certo modo, uma generalização das derivadas parciais usuais, que também faz sentido nalgumas situações em que estas não existem.

III.6.9 Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $[f] \in L_{loc}^1(U, E)$ (cf. III.4.17). Diz-se que um elemento $[g] \in L_{loc}^1(U, E)$ é uma *derivada fraca* de $[f]$ relativamente à variável i se, para cada função de classe C^∞ de suporte compacto $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R})$, tem-se

$$\langle \varphi, [g] \rangle = - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, [f] \right\rangle$$

(cf. III.6.7), por outras palavras,

$$\int_U \varphi(x) g(x) d\lambda_n(x) = - \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) f(x) d\lambda_n(x).$$

No caso particular em que $n = 1$, é redundante explicitar qual a variável envolvida na derivação, pelo que dizemos simplesmente que g é uma *derivada fraca* de f .

III.6.10 (Unicidade das derivadas fracas) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $[f] \in L_{loc}^1(U, E)$ admitindo como derivadas fracas

relativamente à variável i tanto $[g] \in L_{loc}^1(U, E)$ como $[h] \in L_{loc}^1(U, E)$. Tem-se então $[g] = [h]$, isto é, $g(x) = h(x)$ quase sempre.

Tendo em conta a unicidade, faz sentido notar, para cada $[f] \in L_{loc}^1(U, E)$ que admita derivada fraca relativamente à variável i , $D_i[f] \in L_{loc}^1(U, E)$ essa derivada fraca.¹⁵⁷ Como antes, no caso em que $n = 1$, usamos simplesmente a notação $D[f]$, em vez de $D_1[f]$.

Dem: Para cada $\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$, vem

$$\langle \varphi, [g] \rangle = - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, [f] \right\rangle = \langle \varphi, [h] \rangle,$$

pelo que a conclusão resulta diretamente de III.6.8. □

Vamos agora examinar um resultado que faz a ponte entre as derivadas fracas e as derivadas usuais, resultado que será cómodo preceder de um lema. Em cada caso, separamos o caso em que o domínio tem dimensão 1 daquele em que a dimensão é $n \geq 2$, uma vez que, no segundo caso, podemos, sem dificuldade, admitir a existência de uma singularidade.

III.6.11 (Lema) Seja E um espaço de Banach.

a) Sejam $U \subset \mathbb{R}$ um aberto e $f: U \rightarrow E$ uma função contínua de suporte compacto tal que, para cada $t \in U$, exista a derivada $f'(t) \in E$ e que a aplicação $f': U \rightarrow E$ seja contínua. Tem-se então que esta última aplicação é também de suporte compacto e verifica

$$\int_U f'(t) dt = 0.$$

b) Sejam $n \geq 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $x_0 \in U$ uma possível singularidade.¹⁵⁸ Sejam $1 \leq i \leq n$ e $f, f_i: U \rightarrow E$ duas aplicações integráveis, de suporte compacto, cujas restrições a $U \setminus \{x_0\}$ sejam contínuas e tais que, para cada $x \in U \setminus \{x_0\}$, exista a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$. Tem-se então

$$\int_U f_i(x) d\lambda_n(x) = 0.$$

Dem: a) Seja $K \subset U$ um compacto tal que $f(t) = 0$ para cada $t \in U \setminus K$. Podemos considerar a extensão $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow E$ que vale 0 nos pontos não pertencentes a U , aplicação essa que é contínua e com derivada contínua, por isso acontecer às suas restrições aos abertos U e $\mathbb{R} \setminus K$ de união \mathbb{R} , esta última por ser identicamente 0. Seja $R > 0$ tal que $K \subset]-R, R[$. Tendo em conta a fórmula de Barrow (cf. II.3.10), obtemos

¹⁵⁷Podemos assim substituir o artigo indefinido em “uma derivada fraca” pelo correspondente artigo definido.

¹⁵⁸Repare-se que, no caso em que $n = 1$, não admitimos a existência de singularidade.

$$\int_U f'(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}'(t) dt = \int_{[-R,R]} \widehat{f}'(t) dt = \widehat{f}(R) - \widehat{f}(-R) = 0.$$

b) Seja $K \subset U$ um compacto tal que $f(x) = 0$ para cada $x \in U \setminus K$, podendo já supor-se $x_0 \in K$, se necessário substituindo K por $K \cup \{x_0\}$. Podemos considerar as extensões $\widehat{f}, \widehat{f}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ que valem 0 nos pontos não pertencentes a U , aplicações essas que são integráveis, com restrições contínuas a $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ e com $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(x) = \widehat{f}_i(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$, por isso acontecer às suas restrições aos abertos $U \setminus \{x_0\}$ e $\mathbb{R}^n \setminus K$ de união $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$, estas últimas identicamente 0. Em particular tem-se ainda $\widehat{f}_i(x) = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Notando

$$\widehat{x}_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_{i-1}}, x_{0_{i+1}}, \dots, x_{0_n}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

a fórmula de Barrow implica que, para cada

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\widehat{x}_0\},$$

tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_i(x_1, \dots, x_n) dx_i &= \int_{[-R,R]} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_i = \\ &= \widehat{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, R, x_{i+1}, \dots, x_n) - \widehat{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, -R, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Reparando que $\lambda_{n-1}(\{\widehat{x}_0\}) = 0$,¹⁵⁹ podemos agora aplicar o teorema de Fubini (II.4.10), depois de fazer uma mudança trivial de variável (cf. a alínea a) de II.5.5) para deduzir que

$$\begin{aligned} \int_U f_i(x) d\lambda_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}_i(x) d\lambda_n(x) = \\ &= \int_{(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\widehat{x}_0\}) \times \mathbb{R}} \widehat{f}_i(x) d(\lambda_{n-1} \otimes \lambda)((x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_i) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\widehat{x}_0\}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_i \right) d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\widehat{x}_0\}} 0 d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

III.6.12 (Comparação com as derivadas usuais) Seja E um espaço de Banach.

a) Sejam $U \subset \mathbb{R}$ um aberto e $f: U \rightarrow E$ uma função contínua tal que, para cada $t \in U$, exista a derivada $f'(t) \in E$ e que a aplicação $f': U \rightarrow E$ seja contínua. Tem-se então que $[f'] \in L_{loc}^1(U, E)$ é uma derivada fraca de

¹⁵⁹É para isso que necessitamos da hipótese $n \geq 2$.

$[f] \in L^1_{loc}(U, E)$, por outras palavras, $D[f] = [f']$.

b) Sejam $n \geq 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $x_0 \in U$ uma possível singularidade.¹⁶⁰ Sejam $1 \leq i \leq n$ e $f, f_i: U \rightarrow E$ duas aplicações localmente integráveis cujas restrições a $U \setminus \{x_0\}$ sejam contínuas e tais que, para cada $x \in U \setminus \{x_0\}$, exista a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$. Tem-se então que $[f_i] \in L^1_{loc}(U, E)$ é uma derivada fraca de $[f] \in L^1_{loc}(U, E)$ relativamente à variável i , por outras palavras, $D_i[f] = [f_i]$.

c) Combinando as conclusões de a) e b), a última no caso em que não existe singularidade, podemos resumir:

Sejam $n \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \rightarrow E$ uma aplicação contínua tal que, para um certo $1 \leq i \leq n$, admita em cada $x \in U$, uma derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ e que a aplicação $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow E$ seja contínua. Tem-se então que $[\frac{\partial f}{\partial x_i}] \in L^1_{loc}(U, E)$ é uma derivada fraca de $[f] \in L^1_{loc}(U, E)$ relativamente à variável i , por outras palavras $D_i[f] = [\frac{\partial f}{\partial x_i}]$.

Dem: a) O facto de termos elementos de $L^1_{loc}(U, E)$ resulta de toda a aplicação contínua ser localmente integrável (cf. III.4.18). Seja agora $\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$ arbitrário. Sendo $K \subset U$ um compacto tal que $\varphi(t) = 0$, para cada $t \in U \setminus K$, tem-se também $\varphi'(t) = 0$, para cada $t \in U \setminus K$, e podemos considerar a aplicação contínua de suporte compacto $\tilde{f}: U \rightarrow E$ definida por

$$\tilde{f}(t) = \varphi(t)f(t),$$

que é derivável em cada ponto e com

$$\tilde{f}'(t) = \varphi'(t)f(t) + \varphi(t)f'(t),$$

em particular com $\tilde{f}': U \rightarrow E$ contínua e $\tilde{f}'(t) = 0$, para cada $t \in U \setminus K$. Tendo em conta a alínea a) do lema III.6.11, vem

$$0 = \int_U \tilde{f}'(t) dt = \int_U \varphi'(t)f(t) dt + \int_U \varphi(t)f'(t) dt,$$

o que implica que se tem efetivamente

$$\int_U \varphi(t) f'(t) dt = - \int_U \varphi'(t) f(t) dt.$$

b) Seja $\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$ arbitrário. Sendo $K \subset U$ um compacto tal que $\varphi(x) = 0$, para cada $x \in U \setminus K$, tem-se também $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = 0$, para cada $x \in U \setminus K$, e, tendo em conta a alínea b) de III.4.22, podemos considerar as aplicações integráveis, de suporte compacto, $\tilde{f}: U \rightarrow E$ e $\tilde{f}_i: U \rightarrow E$ definidas por

¹⁶⁰Repare-se que, no caso em que $n = 1$, não admitimos a existência de singularidade. Ver a alínea b) do exercício III.6.1 para um contraexemplo.

$$\tilde{f}(x) = \varphi(x)f(x), \quad \tilde{f}_i(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)f(x) + \varphi(x)f_i(x).$$

Estas aplicações têm restrições contínuas a $U \setminus \{x_0\}$ e, para cada $x \in U \setminus \{x_0\}$, tem-se $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) = \tilde{f}_i(x)$. Tendo em conta a alínea b) do lema III.6.11, vem assim

$$0 = \int_U \tilde{f}_i(x) d\lambda_n(x) = \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)f(x) d\lambda_n(x) + \int_U \varphi(x)f_i(x) d\lambda_n(x),$$

o que implica que se tem efetivamente

$$\int_U \varphi(x)f_i(x) d\lambda_n(x) = - \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)f(x) d\lambda_n(x).$$

c) No caso em que $n = 1$, temos uma mera reformulação de a) e no caso em que $n \geq 2$, começamos por afastar o caso trivial em que $U = \emptyset$ e fixando arbitrariamente $x_0 \in U$, reparamos que, uma vez que as aplicações contínuas são localmente integráveis, temos uma consequência direta de b). \square

III.6.13 (Compatibilidade com as restrições) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $[f] \in L^1_{loc}(U, E)$ admitindo $[g] \in L^1_{loc}(U, E)$ como derivada fraca relativamente à variável i . Para cada aberto $V \subset U$ tem-se então que $[f|_V] \in L^1_{loc}(U, E)$ admite $[g|_V] \in L^1_{loc}(U, E)$ como derivada fraca relativamente à variável i , ou seja,

$$D_i([f|_V]) = (D_i[f])|_V.$$

Dem: O facto de $f|_V$ e $g|_V$ serem ainda localmente integráveis é trivial. Reparamos agora que, se $\varphi \in C_c^\infty(V, \mathbb{R})$, é nula fora dum compacto $K \subset V$, podemos considerar o prolongamento $\hat{\varphi}: U \rightarrow \mathbb{R}$ de φ que é nulo em $V \setminus U$ e que, por ser, mais geralmente, nulo em $V \setminus K$, pertence a $C_c^\infty(U, \mathbb{R})$, tendo-se então

$$\begin{aligned} \int_V \varphi(x) \frac{\partial f|_V}{\partial x_i}(x) d\lambda_n(x) &= \int_U \hat{\varphi}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) d\lambda_n(x) = \\ &= - \int_U \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_i}(x) f(x) d\lambda_n(x) = - \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) f|_V(x) d\lambda_n(x). \quad \square \end{aligned}$$

III.6.14 (A derivada fraca tem carácter local) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $[f], [g] \in L^1_{loc}(U, E)$ e $1 \leq i \leq n$. Suponhamos que existe uma família $(U_j)_{j \in J}$ de abertos de \mathbb{R}^n , de união U , tal que, para cada $j \in J$, $[f|_{U_j}] \in L^1_{loc}(U_j, E)$ admita $[g|_{U_j}] \in L^1_{loc}(U_j, E)$ como derivada fraca relativamente à variável i . Tem-se então que $[f]$ admite $[g]$ como derivada fraca relativamente à variável i .

Dem: Seja $\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$. Seja $K \subset U$ um compacto tal que $\varphi(x) = 0$ para

cada $x \in U \setminus K$ e, tendo em conta a propriedade das coberturas dos compactos, seja $I \subset J$ finito tal que $K \subset \bigcup_{j \in I} U_j$. Tendo em conta a versão do

teorema da partição da unidade em III.6.4, consideremos funções $\psi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , onde $j \in I$, tais que cada, para cada $j \in I$, exista um compacto $K_j \subset U_j$ com $\psi_j(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus K_j$ e que se tenha, para cada $x \in K$, $\sum_{j \in I} \psi_j(x) = 1$. Podemos considerar, para cada $j \in I$,

uma função $\varphi_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida por $\varphi_j(x) = \psi_j(x)\varphi(x)$, para qual se tem, não só $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R})$, mas também $\varphi_j|_{U_j} \in \mathcal{C}_c^\infty(U_j, \mathbb{R})$, por ser $\varphi_j(x) = 0$ para cada $x \in U \setminus K_j$. É claro que se tem também, para cada $x \in U \setminus K_j$, $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) = 0$. Uma vez que, para cada $x \in U$, $\varphi(x) = \sum_{j \in I} \varphi_j(x)$,

já que, para cada $x \notin K$, ambos os membros são 0, deduzimos que se tem também, para cada $x \in U$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \sum_{j \in I} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x),$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_U \varphi(x) g(x) d\lambda_n(x) &= \sum_{j \in I} \int_U \varphi_j(x) g(x) d\lambda_n(x) = \\ &= \sum_{j \in I} \int_{U_j} \varphi_j|_{U_j}(x) g|_{U_j}(x) d\lambda_n(x) = \\ &= - \sum_{j \in I} \int_{U_j} \frac{\partial \varphi_j|_{U_j}}{\partial x_i}(x) f|_{U_j}(x) d\lambda_n(x) = \\ &= - \sum_{j \in I} \int_U \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) f(x) d\lambda_n(x) = \\ &= - \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) f(x) d\lambda_n(x), \end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

III.6.15 (Enunciado alternativo do carácter local) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $[f], [g] \in L_{loc}^1(U, E)$ e $1 \leq i \leq n$. Suponhamos que, para cada $x_0 \in U$, existe um aberto V de \mathbb{R}^n , com $x_0 \in V \subset U$, tal que $[f|_V] \in L_{loc}^1(U_j, E)$ admita $[g|_V] \in L_{loc}^1(U_j, E)$ como derivada fraca relativamente à variável i . Tem-se então que $[f]$ admite $[g]$ como derivada fraca relativamente à variável i .

Dem: Sendo, para cada $x \in U$, V_x um aberto com $x \in V_x \subset U$ nas condições do enunciado, a família $(V_x)_{x \in U}$ verifica as hipóteses em III.6.14. □

III.6.16 (Linearidade da derivação fraca) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq i \leq n$. Tem-se então:

a) Se $[f_1], [f_2] \in L^1_{loc}(U, E)$ admitem respetivamente $[g_1], [g_2] \in L^1_{loc}(U, E)$ como derivadas fracas relativamente à variável i , e se a é um escalar de E , então $[f_1 + f_2]$ e $[af_1]$ admitem respetivamente $[g_1 + g_2]$ e $[ag_1]$ como derivadas fracas relativamente à mesma variável. Por outras palavras,

$$D_i([f_1] + [f_2]) = D_i[f_1] + D_i[f_2], \quad D_i(a[f_1]) = aD_i[f_1].$$

b) Se F é outro espaço de Banach, $\xi: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear contínua e $[f] \in L^1_{loc}(U, E)$ admite $[g] \in L^1_{loc}(U, E)$ como derivada fraca relativamente à variável i , então $[\xi \circ f] \in L^1_{loc}(U, F)$ admite $[\xi \circ g]$ como derivada fraca relativamente à mesma variável.

Dem: O facto de $[f_1 + f_2]$ e $[af_1]$ admitir $[g_1 + g_2]$ como derivada fraca relativamente à variável i resulta de que, para cada $\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$, vem

$$\begin{aligned} \int_U \varphi(x) (g_1(x) + g_2(x)) d\lambda_n(x) &= \\ &= \int_U \varphi(x) g_1(x) d\lambda_n(x) + \int_U \varphi(x) g_2(x) d\lambda_n(x) = \\ &= - \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) f_1(x) d\lambda_n(x) - \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) f_2(x) d\lambda_n(x) = \\ &= - \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) (f_1(x) + f_2(x)) d\lambda_n(x). \end{aligned}$$

A afirmação em a) relativa ao produto pelo escalar a pode-se demonstrar analogamente, ou resulta de utilizar b) com a aplicação linear $\xi: E \rightarrow E$, $\xi(w) = aw$. Quanto a b), podemos escrever, para cada $\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \int_U \varphi(x) \xi(g(x)) d\lambda_n(x) &= \int_U \xi(\varphi(x)g(x)) d\lambda_n(x) = \\ &= \xi\left(\int_U \varphi(x) g(x) d\lambda_n(x)\right) = \xi\left(- \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) f(x) d\lambda_n(x)\right) = \\ &= - \int_U \xi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) f(x)\right) d\lambda_n(x) = - \int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \xi(f(x)) d\lambda_n(x), \end{aligned}$$

o que implica a conclusão. □

Até agora, o único resultado que encontrámos e que nos permite identificar derivadas fracas foi aquele em que a função é contínua, admite derivada parcial, no sentido usual, em todos os pontos (com uma eventual singularidade no caso em que $n \geq 2$) e esta derivada parcial é contínua (cf. III.6.12). Examinamos agora duas situações em que podemos garantir a existência de derivadas fracas sem que as hipóteses referidas sejam verificadas.

III.6.17 (Derivadas fracas e integral indefinido) Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, E um espaço de Banach, $f: J \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável e $t_0 \in J$ um elemento fixado e consideremos o correspondente integral indefinido

$$\widehat{f}: J \rightarrow E, \quad \widehat{f}(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

(cf. II.3.5). Tem-se então que \widehat{f} é uma aplicação contínua, em particular localmente integrável, e $[f]$ é a derivada fraca de $[\widehat{f}]$, isto é, $D[\widehat{f}] = [f]$.

Dem: Seja $\varphi \in C_c^\infty(J, \mathbb{R})$ arbitrário e consideremos $a \leq b$ em J tal que, para cada $t \in J \setminus [a, b]$, $\varphi(t) = 0$, e portanto também $\varphi'(t) = 0$ e reparemos que, por continuidade, tem-se ainda $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Reparemos que, pelas propriedades usuais do integral indefinido (cf. II.3.4), tem-se, para cada $t \in J$,

$$\widehat{f}(t) = c + \int_a^t f(s) ds,$$

com $c = \int_{t_0}^a f(s) ds$, e que

$$\int_a^b c \varphi'(t) dt = c(\varphi(b) - \varphi(a)) = 0.$$

Podemos agora escrever, tendo em conta o teorema de Fubini em II.4.10,

$$\begin{aligned} \int_J \varphi'(t) \widehat{f}(t) dt &= \int_{[a,b]} \varphi'(t) \left(\int_a^t f(s) ds \right) dt = \\ &= \int_{[a,b]} \varphi'(t) \left(\int_{[a,b]} \mathbb{I}_{[a,t]}(s) f(s) ds \right) dt = \\ &= \int_{[a,b] \times [a,b]} \varphi'(t) \mathbb{I}_{[s,b]}(t) f(s) d\lambda_2(s, t) = \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} \mathbb{I}_{[s,b]}(t) \varphi'(t) dt \right) f(s) ds = \\ &= \int_{[a,b]} (\varphi(b) - \varphi(s)) f(s) ds = - \int_J \varphi(s) f(s) ds, \end{aligned}$$

o que mostra que \widehat{f} é efetivamente a derivada fraca de f . □

III.6.18 (Limites e derivadas fracas) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq i \leq n$. Seja $[f_k]$, onde $k \in \mathbb{N}$, uma sucessão de elementos de $L_{loc}^1(U, E)$ convergente em $L_{loc}^1(U, E)$ para $[f] \in L_{loc}^1(U, E)$. Suponhamos que cada $[f_k]$ admite uma derivada fraca $D_i[f_k] \in L_{loc}^1(U, E)$ e que a sucessão destas derivadas fracas converge em $L_{loc}^1(U, E)$ para um certo $[g] \in L_{loc}^1(U, E)$. Tem-se então que $[g] = D_i[f]$, isto é, $[f]$ admite $[g]$ como

derivada fraca relativamente à variável i .¹⁶¹

Dem: Seja $\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$ arbitrário. Tendo em conta III.4.22, tem-se

$$\langle \varphi, D_i[f_k] \rangle \rightarrow \langle \varphi, [g] \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, [f_k] \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, [f] \right\rangle,$$

pelo que, uma vez que $\langle \varphi, D_i[f_k] \rangle = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, [f_k] \right\rangle$, concluímos que

$$\langle \varphi, [g] \rangle = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, [f] \right\rangle. \quad \square$$

Há ainda outras propriedades das derivadas usuais que, admitem versões no contexto das derivadas fracas, mas com justificações que não são facilmente obtidas de modo direto. Pensamos, por exemplo, em propriedades envolvendo a derivada fraca de um produto ou sobre o que se poderá dizer sobre uma função com derivadas fracas identicamente 0, relativamente a cada uma das variáveis. Essas propriedades serão estabelecidas adiante com o auxílio de teoremas de aproximação por aplicações de classe C^∞ , que utilizam a convolução com as funções suavizadoras $\Phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$, definidas em III.6.2, e que, por esse motivo, envolvem, à partida, apenas funções cujo domínio é a totalidade de \mathbb{R}^n . Antes de examinar esses resultados de aproximação, estabelecemos por isso dois lemas que permitirão obter resultados sobre aplicações definidas em abertos de \mathbb{R}^n a partir de resultados que pressupõem a totalidade de \mathbb{R}^n como domínio.

III.6.19 (Lema sobre a derivada fraca de um produto) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq i \leq n$. Seja $[f] \in L_{loc}^1(U, E)$ admitindo $[g] = D_i[f] \in L_{loc}^1(U, E)$ como derivada fraca relativamente à variável i . Se $\psi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$, podemos considerar o produto

$$[\psi][f] = [\psi f] \in L_{loc}^1(U, E),$$

o qual vai admitir uma derivada fraca relativamente a variável i , dada por

$$D_i([\psi][f]) = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right][f] + [\psi]D_i[f].$$

Dem: Notemos que o facto de se ter $[\psi][f] = [\psi f] \in L_{loc}^1(U, E)$ resulta da alínea a) de III.4.22, resultado que implica também que

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right][f] \in L_{loc}^1(U, E), \quad [\psi]D_i[f] \in L_{loc}^1(U, E)$$

e portanto a sua soma também pertence a $L_{loc}^1(U, E)$. Seja agora

¹⁶¹Este resultado, apesar de ser de justificação elementar, está no centro da importância que as derivadas fracas têm nas aplicações à Análise Funcional.

$\varphi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$ arbitrário. Uma vez que se tem também $\varphi\psi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$, vem

$$\begin{aligned} \int_U \varphi(x)\psi(x)g(x) d\lambda_n(x) &= \langle \varphi\psi, [g] \rangle = -\left\langle \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i}, [f] \right\rangle = \\ &= -\int_U \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\psi(x)f(x)d\lambda_n(x) - \int_U \varphi(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)f(x) d\lambda_n(x) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \langle \varphi, [\frac{\partial\psi}{\partial x_i}f] + [\psi g] \rangle &= \\ &= \int_U \varphi(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)f(x) d\lambda_n(x) + \int_U \varphi(x)\psi(x)g(x) d\lambda_n(x) = \\ &= -\int_U \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\psi(x)f(x)d\lambda_n(x) = -\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, [\psi f] \right\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

III.6.20 (Lema de extensão do domínio) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $[f] \in L_{loc}^1(U, E)$. Seja $V \subset U$ um aberto tal que exista um compacto K com $V \subset K \subset U$. Existe então $[\widehat{f}] \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ verificando as seguintes propriedades:

1) As classes $[f]$ e $[\widehat{f}]$ têm a mesma restrição a V .

2) Para cada $1 \leq i \leq n$ tal que $[f]$ tenha derivada fraca $D_i[f] \in L_{loc}^1(U, E)$ relativamente à variável i , $[\widehat{f}]$ tem derivada fraca $D_i[\widehat{f}] \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ relativamente à mesma variável.

3) Existe um compacto $K' \subset U$ tal que $[\widehat{f}]$ tem restrição nula a $\mathbb{R}^n \setminus K'$.

Dem: Tendo em conta a versão C^∞ do lema de Urysohn em III.6.3, podemos considerar uma aplicação $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ e um compacto $K' \subset U$ tais que $\psi(x) = 1$, para cada $x \in K$, e $\psi(x) = 0$, para cada $x \notin K'$. Reparemos que, para cada $x \notin K'$, tem-se também $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x) = 0$. Seja $\widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ a aplicação topologicamente mensurável definida por

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} \psi(x)f(x), & \text{se } x \in U \\ 0, & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

e reparemos que \widehat{f} é integrável, por ter restrição localmente integrável ao aberto U (cf. a alínea a) de III.4.22) e portanto restrição integrável ao compacto $K' \subset U$, e ter restrição 0 a $\mathbb{R}^n \setminus K'$. Uma vez que, para cada $x \in V$, vem $\psi(x) = 1$, e portanto $\widehat{f}(x) = f(x)$, vemos que $[f]$ e $[\widehat{f}]$ têm a mesma restrição a V . Suponhamos agora que $1 \leq i \leq n$ é tal que $[f]$ tenha derivada fraca $D_i[f] = [f_i] \in L_{loc}^1(U, E)$ relativamente à variável i . Seja $\widehat{f}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ a aplicação topologicamente mensurável definida por

$$\widehat{f}_i(x) = \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)f(x) + \psi(x)f_i(x), & \text{se } x \in U \\ 0, & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

e reparemos que, pela mesma razão que \widehat{f} , a aplicação \widehat{f}_i é integrável. Tendo em conta o lema III.6.19, $[\widehat{f}_i]_{/U} \in L^1(U, E)$ é uma derivada fraca relativamente à variável i de $[\widehat{f}]_{/U}$ e, por exemplo por III.6.12, $[\widehat{f}_i]_{/\mathbb{R}^n \setminus K'} = [0]$ é também a derivada fraca de $[\widehat{f}]_{/\mathbb{R}^n \setminus K'} = [0]$ relativamente à mesma variável. Uma vez que \mathbb{R}^n é a união dos abertos U e $\mathbb{R}^n \setminus K'$, deduzimos finalmente de III.6.14 que $[\widehat{f}]$ tem derivada fraca $D_i[\widehat{f}] = [\widehat{f}_i]$ relativamente à variável \square

Passemos agora aos resultados de aproximação que referimos atrás.

III.6.21 (Lema — aproximação C^∞ das funções contínuas de suporte compacto) Sejam E um espaço de Banach e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ uma aplicação contínua e de suporte compacto. Tem-se então que as funções $\Phi_k * g: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ são de classe C^∞ e de suporte compacto e, para cada $1 \leq p < +\infty$,

$$[\Phi_k * g] \rightarrow [g]$$

em $L^p(\mathbb{R}^n, E)$.

Dem: Como verificámos em III.4.9, o facto de se ter $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$ implica que $[g] \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$. Uma vez que g é, em particular, localmente integrável (aliás, mesmo integrável), já sabemos, por III.5.25 e III.5.22, que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\Phi_k * g: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ é de classe C^∞ e de suporte compacto, e portanto também se tem $[\Phi_k * g] \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$. De facto, este último resultado diz-nos, mais precisamente, que, sendo $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto tal que $g(x) = 0$, para cada $x \notin K$, então tem-se $\Phi_k * g(x) = 0$, para cada x não pertencente ao compacto $K + \overline{B}_{1/k}(0)$.

Provemos agora a convergência em $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ referida no enunciado, para o que aplicaremos III.6.5 ao compacto $K' = K + \overline{B}_1(0)$.

Tem-se $\Phi_k * g(x) = 0 = g(x)$, para cada $x \notin K'$, e portanto

$$\begin{aligned} \|[\Phi_k * g] - [g]\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\Phi_k * g(x) - g(x)\|^p d\lambda_n(y) \right)^{1/p} = \\ &= \left(\int_{K'} \|\Phi_k * g(x) - g(x)\|^p d\lambda_n(y) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

pelo que afastando já o caso trivial em que $\lambda_n(K') = 0$, e portanto $\|[\Phi_k * g] - [g]\|_p = 0$, vemos que, dado $\delta > 0$, podemos escolher $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$ e $x \in K'$

$$\|\Phi_k * g(x) - g(x)\| < \frac{\delta}{\lambda_n(K')^{1/p}},$$

tando-se assim, para cada $k \geq k_0$,

$$\|[\Phi_k * g] - [g]\|_p \leq \left(\int_{K'} \frac{\delta^p}{\lambda_n(K')} d\lambda_n(y) \right)^{1/p} = \delta,$$

o que prova a convergência em $L^p(\mathbb{R}^n, E)$. \square

III.6.22 (Aproximação C^∞ em $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ e em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$) Sejam E um espaço de Banach e $[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$. Tem-se então, para as correspondentes aplicações $\Phi_k * f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ de classe C^∞ (cf. III.5.25), que a sucessão dos $[\Phi_k * f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$ converge para $[f]$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$.

Além disso, no caso em que $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$, com $1 \leq p < +\infty$, tem-se $[\Phi_k * f] \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$, $\|[\Phi_k * f]\|_p \leq \|[f]\|_p$ e $[\Phi_k * f] \rightarrow [f]$ em $L^p(\mathbb{R}^n, E)$.

Dem: Começemos por supor que $[f] \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$, com $1 \leq p < +\infty$ e lembremos que, por III.4.21, tem-se, em particular, $[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$. Reparando que $[\Phi_k] \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\|\Phi_k\|_1 = 1$, resulta de III.5.20 que se tem efetivamente $[\Phi_k * f] \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$ e

$$\|[\Phi_k * f]\|_p \leq \|\Phi_k\|_1 \|[f]\|_p = \|[f]\|_p.$$

Seja agora $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta o teorema de densidade III.4.14, podemos considerar uma aplicação contínua e de suporte compacto $g: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ tal que $\|[f] - [g]\|_p < \frac{\delta}{3}$ e, aplicando o lema III.6.21 a g , concluímos a existência de $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$, $\|[\Phi_k * g] - [g]\|_p < \frac{\delta}{3}$. Como, mais uma vez por III.5.20,

$$\|[\Phi_k * f] - [\Phi_k * g]\|_p = \|[\Phi_k] * [f - g]\|_p \leq \|[\Phi_k]\|_1 \|[f - g]\|_p < \frac{\delta}{3},$$

concluímos finalmente que, para cada $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \|[\Phi_k * f] - [f]\|_p &\leq \|[\Phi_k * f] - [\Phi_k * g]\|_p + \|[\Phi_k * g] - [g]\|_p + \\ &+ \|[g] - [f]\|_p < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

o que prova que $[\Phi_k * f] \rightarrow [f]$ em $L^p(\mathbb{R}^n, E)$.

Suponhamos agora que se tem apenas $[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto arbitrário. Considerando o compacto $K' = K + \overline{B}_1(0)$ de \mathbb{R}^n , o facto de se ter $[f]_{/K'} \in L^1(K', E)$ implica que, sendo $\hat{f} = \mathbb{I}_{K'} f$, tem-se $[\hat{f}] \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ e portanto, pelo que vimos no início, $[\Phi_k * \hat{f}] \rightarrow [\hat{f}]$ em $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ e portanto também $[\Phi_k * \hat{f}]_{/K} \rightarrow [\hat{f}]_{/K}$ em $L^1(K, E)$. Mas, para cada $x \in K$, tem-se $\hat{f}(x) = f(x)$ e, uma vez que $\Phi_k(x - y) = 0$ para cada $y \notin K'$,

$$\begin{aligned} \Phi_k * \hat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(x - y) \hat{f}(y) d\lambda_n(y) = \int_{K'} \Phi_k(x - y) \hat{f}(y) d\lambda_n(y) = \\ &= \int_{K'} \Phi_k(x - y) f(y) d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(x - y) f(y) d\lambda_n(y) = \Phi_k * f(x), \end{aligned}$$

pelo que podemos concluir que $[\Phi_k * f]_{/K} \rightarrow [f]_{/K}$ em $L^1(K, E)$. Ficou assim provado que $[\Phi_k * f] \rightarrow [f]$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$. \square

III.6.23 (Suavização de uma derivada fraca) Sejam E um espaço de Banach e $[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$ admitindo uma derivada fraca $D_i[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$ relativamente à variável i . Tem-se então que as aproximações $\Phi_k * f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ e $\Phi_k * g: \mathbb{R}^n \rightarrow E$, de classe C^∞ , verificam, para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial(\Phi_k * f)}{\partial x_i}(x) = \Phi_k * D_i[f](x).$$

Dem: Seja $x \in \mathbb{R}^n$ fixado. Podemos então considerar a função C^∞ de \mathbb{R}^n para \mathbb{R} que a y associa $\Phi_k(x - y)$, que é de suporte compacto, por ser nula fora da bola $\overline{B}_{1/k}(x)$, e cuja derivada em ordem à variável i em cada ponto y é igual a $-\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(x - y)$. Sendo $D_i[f] = [g]$ e tendo em conta a definição da derivada fraca e III.5.24, tem-se assim

$$\begin{aligned} \Phi_k * D_i[f](x) &= \Phi_k * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(x - y)g(y) d\lambda_n(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(x - y)f(y) d\lambda_n(y) = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} * f(x) = \\ &= \frac{\partial(\Phi_k * f)}{\partial x_i}(x). \end{aligned} \quad \square$$

III.6.24 (Corolário — suavização num aberto) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $[f] \in L^1_{loc}(U, E)$. Seja $V \subset U$ um aberto tal que exista um compacto K com $V \subset K \subset U$. Existe então uma sucessão de funções $f_k: U \rightarrow E$ de classe C^∞ tal que:

a) $[f_k]_{/V} \rightarrow [f]_{/V}$ em $L^1(V, E)$;

b) Para cada $1 \leq i \leq n$ tal que exista a derivada fraca $D_i[f] \in L^1_{loc}(U, E)$, tem-se $[\frac{\partial f_k}{\partial x_i}]_{/V} \rightarrow D_i[f]_{/V}$ em $L^1(V, E)$.

Dem: Tendo em conta o lema de extensão do domínio III.6.20, podemos considerar $\widehat{[f]} \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ com $\widehat{[f]}_{/V} = [f]_{/V}$ tal que, para cada $1 \leq i \leq n$ nas condições referidas em b), exista a derivada fraca $D_i\widehat{[f]} \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$. Tendo em conta III.6.22, temos aplicações $\Phi_k * \widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow E$, de classe C^∞ , para as quais as classes $[\Phi_k * \widehat{f}] \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ convergem para $\widehat{[f]}$ neste espaço. Definindo então as aplicações $f_k: U \rightarrow E$ de classe C^∞ como sendo as restrições das aplicações $\Phi_k * \widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow E$, vem que $[f_k]_{/V}$ converge para $\widehat{[f]}_{/V} = [f]_{/V}$ em $L^1(V, E)$. Além disso, para cada $1 \leq i \leq n$ nas condições de b), resulta de III.6.23 que, para cada $x \in V$,

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \Phi_k * \hat{f}}{\partial x_i}(x) = \Phi_k * D_i[\hat{f}](x),$$

onde, mais uma vez por III.6.22, $[\Phi_k * D_i[\hat{f}]] \rightarrow D_i[\hat{f}]$ em $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ e portanto, por restrição $[\frac{\partial f_k}{\partial x_i}]_{/V} \rightarrow D_i[\hat{f}]_{/V} = D_i[f]_{/V}$ em $L^1(V, E)$. \square

Vamos agora aplicar o corolário precedente, para estabelecer um resultado sobre a derivada fraca de um produto.

III.6.25 (Regra de derivação dum produto) Sejam F, G, H três espaços de Banach e $\xi: F \times G \rightarrow H$ uma aplicação bilinear contínua, que encaramos como uma “multiplicação”, notando, para cada $w \in F$ e $z \in G$, $w \times z = \xi(w, z) \in H$.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq i \leq n$, $f: U \rightarrow F$ uma aplicação contínua, admitindo derivada parcial em relação à variável i em cada ponto e com $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow F$ contínua, e $[g] \in L^1_{loc}(U, G)$, admitindo uma derivada fraca $D_i[g] \in L^1_{loc}(U, G)$ relativamente à variável i . Tem-se então que $[f] \times [g] \in L^1_{loc}(U, H)$ admite derivada fraca relativamente à variável i dada por

$$D_i([f] \times [g]) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \times [g] + [f] \times D_i[g] \in L^1_{loc}(U, H).$$

Dem: Começemos por reparar que o facto de se ter $[f] \times [g] \in L^1_{loc}(U, H)$ e

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \times [g] + [f] \times D_i[g] \in L^1_{loc}(U, H)$$

é uma consequência da alínea a) de III.4.22.

Tendo em conta o resultado de localização em III.6.15, para provarmos o resultado bastará provar que, para cada $x_0 \in U$, existe um aberto $V \subset U$, com $x_0 \in V$ tal que a restrição a V de $[f] \times [g]$ admita como derivada fraca relativamente à variável i a restrição a V de $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \times [g] + [f] \times D_i[g]$.

Seja então $x_0 \in U$ arbitrário, e consideremos $r > 0$ tal que o compacto $K = \overline{B}_r(x_0)$ esteja contido em U . Seja V o aberto $B_r(x_0)$, que verifica $x_0 \in V \subset K$.

Tendo em conta III.6.24, podemos considerar uma sucessão de funções $g_k: U \rightarrow E$ de classe C^∞ com

$$[g_k]_{/V} \rightarrow [g]_{/V} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right]_{/V} \rightarrow D_i[g]_{/V}$$

em $L^1(V, E)$. Lembrando a alínea e) de II.3.6, sabemos que a aplicação contínua $f \times g_k: U \rightarrow H$ admite em cada $x \in U$ uma derivada parcial

$$\frac{\partial(f \times g_k)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \times g_k(x) + f(x) \times \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x)$$

pelo que concluímos, em particular, que $\frac{\partial(f \times g_k)}{\partial x_i}: U \rightarrow H$ é contínua e portanto, por III.6.12, $[\frac{\partial(f \times g_k)}{\partial x_i}] = D_i[f \times g_k]$. Tendo em conta III.4.22 e III.4.20, vemos que, em $L^1_{loc}(V, H)$,

$$\begin{aligned} [f \times g_k]_{/V} &= [f]_{/V} \times [g_k]_{/V} \rightarrow [f]_{/V} \times [g]_{/V}, \\ [\frac{\partial(f \times g_k)}{\partial x_i}]_{/V} &\rightarrow [\frac{\partial f}{\partial x_i}]_{/V} \times [g]_{/V} + [f]_{/V} \times D_i[g]_{/V}, \end{aligned}$$

e daqui deduzimos finalmente, tendo em conta III.6.18, que

$$D_i([f]_{/V} \times [g]_{/V}) = [\frac{\partial f}{\partial x_i}]_{/V} \times [g]_{/V} + [f]_{/V} \times D_i[g]_{/V},$$

como queríamos. □

Vamos agora examinar um segundo resultado previsto, mas não evidente, nomeadamente sobre o que se poderá esperar de uma classe $[f]$, com $f: U \rightarrow E$, com derivadas fracas iguais a 0 em relação a todas as variáveis. É claro que, se o domínio não for um aberto conexo, não devemos esperar que f tenha que ser constante, uma vez que isso já não acontece no contexto das derivadas usuais. Mas também não podemos esperar que f tenha que ser constante, no caso em que U é conexo, uma vez que podemos alterar os valores de f num conjunto de medida nula sem alterar a classe de equivalência $[f]$. O que poderemos esperar é que, no caso em que o domínio é um aberto conexo, a função f seja quase sempre igual a uma certa constante. Veremos adiante que isso efetivamente acontece mas convirá começar por examinar a noção de classe localmente constante, noção que é mais manejável por não necessitar que o domínio seja conexo.

III.6.26 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, E um espaço de Banach e $[f] \in Mens(U, E)$.

1) Dizemos que a classe $[f]$ é *constante, com valor* $w_0 \in E$, se se tem $f(x) = w_0$ quase sempre. Observe-se que, se $U \neq \emptyset$, o facto de se ter $\lambda_n(U) > 0$ implica que uma classe constante não pode ter mais que um valor.

Repare-se que, uma vez que as aplicações constantes são contínuas, podemos concluir que, se $[f] \in Mens(U, E)$ é uma classe constante, então tem-se $[f] \in L^1_{loc}(U, E)$.

2) Dado $x_0 \in U$, diz-se que a classe $[f]$ é *localmente constante em* x_0 , com valor $w_0 \in E$, se existe um aberto V com $x_0 \in V \subset U$ tal que a classe $[f]_{/V} = [f|_V]$ seja constante, com valor w_0 . Como em 1), uma classe $[f]$ localmente constante em x_0 não pode ter mais que um valor (se $[f|_V]$ é

constante com valor w_0 e $[f|_{V'}]$ é constante com valor w_1 , então $[f|_{V \cap V'}]$ é constante com ambos os valores w_0 e w_1).

3) Diz-se que a classe $[f]$ é *localmente constante* se é localmente constante em cada ponto de U (com um valor que poderá variar de ponto para ponto).

Note-se que, lembrando a alínea b) de III.4.16 e o referido em 1), se $[f] \in Mens(U, E)$ é uma classe localmente constante, então tem-se $[f] \in L_{loc}^1(U, E)$.

III.6.27 (Classes localmente constantes e classes constantes) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, E um espaço de Banach e $[f] \in Mens(U, E)$. Tem-se então:

a) Se $[f]$ é uma classe constante, com valor w_0 , então $[f]$ é uma classe localmente constante, com o mesmo valor w_0 em todos os pontos.

b) Se $[f]$ é uma classe localmente constante, com o mesmo valor w_0 em todos os pontos, então $[f]$ é uma classe constante, com valor w_0 .

Dem: A afirmação de a) é trivial. Suponhamos então que $[f]$ é localmente constante, com o mesmo valor w_0 em todos os pontos. Consideremos uma família contável $(V_j)_{j \in J}$ cujo conjunto dos termos seja uma base de abertos de \mathbb{R}^n e notemos J' o conjunto dos índices j tais que $V_j \subset U$ e $[f|_{V_j}]$ seja constante de valor w_0 . Para cada $j \in J'$, podemos considerar um boreliano $A_j \subset V_j$, com $\lambda_n(A_j) = 0$ e $f(x) = w_0$ para cada $x \in V_j \setminus A_j$. Tem-se então que $A = \bigcup_{j \in J'} A_j$ é um boreliano contido em U , com $\lambda_n(A) = 0$ e vamos

verificar que $f(x) = w_0$, para cada $x \in U \setminus A$, o que mostrará que $[f]$ é efetivamente uma classe constante com valor w_0 . Ora, se $x \in U \setminus A$, podemos considerar um aberto V com $x \in V \subset U$ tal que $[f|_V]$ seja constante de valor w_0 e escolher $j \in J$ tal que $x \in V_j \subset V$, tendo-se então também $[f|_{V_j}]$ constante de valor w_0 , isto é, $j \in J'$, e por ser $x \notin A_j$, tem-se efetivamente $f(x) = w_0$. \square

III.6.28 (Classes localmente constantes de domínio conexo) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo, E um espaço de Banach e $[f] \in Mens(U, E)$ uma classe localmente constante. Tem-se então que $[f]$ é mesmo uma classe constante.

Dem: Vamos afastar já o caso trivial em que $U = \emptyset$. Seja $x_0 \in U$ fixado e seja $w_0 \in E$ tal que $[f]$ seja localmente constante em x_0 , com valor w_0 . Seja U' o conjunto dos $x \in U$ tais que $[f]$ seja localmente constante em x com valor w_0 . Se $x_1 \in U'$, podemos considerar um aberto V com $x_1 \in V \subset U$ tal que $[f|_V]$ seja constante com valor w_0 e então vem $V \subset U'$. Provámos assim que U' é aberto. Analogamente, se $x_1 \in U \setminus U'$, podemos considerar um aberto V com $x_1 \in V \subset U$ tal que $[f|_V]$ seja constante com valor $w_1 \neq w_0$ e então vem $V \subset U \setminus U'$. Provámos assim que $U \setminus U'$ também é aberto. Uma vez que U é conexo e que $x_0 \in U'$, concluímos que $U \setminus U' = \emptyset$, isto é, que $U' = U$. Provámos assim que $[f]$ é localmente constante com o mesmo valor w_0 em todos os pontos donde deduzimos, por III.6.27, que $[f]$ é uma classe constante com valor w_0 . \square

III.6.29 (Lema — limites de classes localmente constantes) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, E um espaço de Banach e, para cada $k \in \mathbb{N}$, $[f_k] \in L^1_{loc}(U, E)$ uma classe localmente constante. Supondo que $[f_k] \rightarrow [f] \in L^1_{loc}(U, E)$ em $L^1_{loc}(U, E)$, tem-se então que $[f]$ é uma classe localmente constante. Além disso, para cada $x_0 \in U$, tem-se $w_k \rightarrow w$, onde w_k e w são os valores dos $[f_k]$ e de $[f]$ como aplicações localmente constantes em x_0 .

Dem: Seja $x_0 \in U$ arbitrário. Sejam w_k os valores das classes $[f_k]$ como classes localmente constantes em x_0 . Seja $r > 0$ tal que a bola fechada $K = \overline{B}_r(x_0)$, que é um compacto, esteja contida em U . Uma vez que o aberto $V = B_r(x_0)$ é conexo, resulta de III.6.28 que se tem $f_{k/V}(x) = w_k$ quase sempre. Por hipótese, $[f_{k/K}] \rightarrow [f/K]$ em $L^1(K, E)$, e portanto também $[f_{k/V}] \rightarrow [f/V]$ em $L^1(V, E)$ (cf. III.2.7), e, sendo

$$a = \lambda_n(V) \in]0, +\infty[,$$

deduzimos de III.2.10 que

$$aw_k = \int_V f_k(x) d\lambda_n(x) \rightarrow \int_V f(x) d\lambda_n(x),$$

portanto $w_k \rightarrow w$ em E , com

$$w = \frac{1}{a} \int_V f(x) d\lambda_n(x) \in E.$$

Mas, de se ter

$$\int_V \|w - f_k(x)\| d\lambda_n(x) = \int_V \|w - w_k\| d\lambda_n(x) = a\|w - w_k\| \rightarrow 0,$$

concluimos que $[f_{k/V}]$ converge em $L^1(V, E)$ para a classe da aplicação constante de valor w pelo que a unicidade do limite num espaço vetorial normado implica que $f_{k/V}(x) = w$ quase sempre, em particular que $[f]$ é localmente constante com valor w em x_0 . Tendo em conta a arbitrariedade de x_0 , provámos, em particular, que $[f]$ é localmente constante. \square

III.6.30 (Lema — derivadas nulas quando o domínio é \mathbb{R}^n) Sejam E um espaço de Banach e $[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$ admitindo, para cada $1 \leq i \leq n$, uma derivada fraca $D_i[f] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que, para cada $1 \leq i \leq n$, $D_i[f/V] = 0$. Tem-se então que $[f/V]$ é localmente constante.

Dem: Seja, para cada $1 \leq i \leq n$, $D_i[f] = [g_i]$, onde se tem, por III.6.13, $[g_i/V] = 0$. Seja $x_0 \in U$ arbitrário. Seja $r > 0$ tal que $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset U$ e seja k_0 tal que $\frac{1}{k_0} < r$. Para cada $x \in B_r(x_0)$ e $k \geq k_0$, resulta de III.6.23 que a aplicação $\Phi_{k*}f$, de classe C^∞ , verifica

$$\frac{\partial(\Phi_k * f)}{\partial x_i}(x) = \Phi_k * g_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_k(x-y)g_i(y) d\lambda_n(y)$$

e portanto, uma vez que, para cada y tal que $\Phi_k(x-y) \neq 0$, tem-se $\|x-y\| < \frac{1}{k} < r$, donde $y \in B_{2r}(x_0) \subset U$, vem

$$\frac{\partial(\Phi_k * f)}{\partial x_i}(x) = \int_U \Phi_k(x-y)g_i(y) d\lambda_n(y) = 0.$$

O facto de o aberto $B_r(x_0)$ ser conexo implica assim que a restrição a $B_r(x_0)$ da aplicação $\Phi_k * f$ tem um valor constante w_k . Mas, por III.6.22, a sucessão das classes $[\Phi_k * f]$ converge em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$ para $[f]$, e portanto a sucessão das classes $[\Phi_k * f]_{/B_r(x_0)}$ converge em $L^1_{loc}(B_r(x_0), E)$ para $[f]_{/B_r(x_0)}$. Tendo em conta o lema III.6.29 e III.6.28, concluímos que $[f]_{/B_r(x_0)}$ é uma classe localmente constante, e portanto constante. Acabámos assim de provar que a classe $[f]_U$ é localmente constante. \square

III.6.31 (Teorema das derivadas nulas) Sejam E um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $[f] \in L^1_{loc}(U, E)$ admitindo, para cada $1 \leq i \leq n$, uma derivada fraca $D_i[f] = 0 \in L^1_{loc}(U, E)$. Tem-se então que $[f]$ é uma classe localmente constante.

Dem: Seja $x_0 \in U$ arbitrário. Seja $r > 0$ tal que o compacto $\overline{B}_r(x_0)$ esteja contido em U . Tendo em conta o lema de extensão III.6.20, podemos considerar uma classe $[\hat{f}] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$ admitindo, para cada $1 \leq i \leq n$, uma derivada fraca $D_i[\hat{f}] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, E)$ e tal que $[f]_{/B_r(x_0)} = [\hat{f}]_{/B_r(x_0)}$. Em particular tem-se, para cada $1 \leq i \leq n$, $D_i[\hat{f}]_{/B_r(x_0)} = D_i[f]_{/B_r(x_0)} = 0$, pelo que, pelo lema III.6.30, $[f]_{/B_r(x_0)} = [\hat{f}]_{/B_r(x_0)}$ é uma classe localmente constante. O facto de $B_r(x_0)$ ser um aberto conexo implica então, por III.6.28, que $[f]_{/B_r(x_0)}$ é mesmo uma classe constante, o que, tendo em conta a arbitrariedade de x_0 , implica que $[f]$ é uma classe localmente constante. \square

Já sem relação com as derivadas fracas, aproveitamos ainda as propriedades do produto de convolução com as funções suavizadoras $\Phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ para examinar, no contexto dos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$, um melhoramento do teorema de densidade em III.4.14.

III.6.32 (Lema) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, E um espaço de Banach e $1 \leq p < +\infty$. Se $g \in \mathcal{C}_c(U, E)$, então existe um compacto $K' \subset U$, com $g(x) = 0$ para cada $x \in U \setminus K'$, verificando a seguinte propriedade: Para cada $\delta > 0$, existe $h \in \mathcal{C}^\infty(U, E)$ tal que $h(x) = 0$ para cada $x \in U \setminus K'$ e

$$\|[g] - [h]\|_p < \delta.$$

Dem: Seja $K \subset U$ um compacto tal que $g(x) = 0$, para cada $x \in U \setminus K$.

Podemos então considerar $\varepsilon > 0$ tal que o compacto $K' = K + \overline{B}_\varepsilon(0) \supset K$ esteja ainda contido em U (a existência de um tal ε é trivial se $K = \emptyset$ ou $U = \mathbb{R}^n$ e, caso contrário, basta tomar ε menor que o mínimo estritamente positivo para $x \in K$ da distância de x ao conjunto fechado $\mathbb{R}^n \setminus U$, que é função contínua de x). É claro que se tem ainda $g(x) = 0$ para cada $x \in U \setminus K'$. Seja $\widehat{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ o prolongamento de g que toma o valor 0 fora de U , aplicação ainda com suporte compacto e cuja continuidade decorre da continuidade das suas restrições aos abertos U e $\mathbb{R}^n \setminus K$ de união \mathbb{R}^n , esta última por ser identicamente 0. Seja $\delta > 0$. Aplicando III.6.21 e III.5.22, concluímos a existência de $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq k_0$, a aplicação de classe C^∞ e de suporte compacto $\Phi_k * \widehat{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ verifica

$$\|[\Phi_k * \widehat{g}] \rightarrow [\widehat{g}]\|_p < \delta$$

e $\Phi_k * \widehat{g}(x) = 0$ para cada $x \notin K + \overline{B}_{1/k}(0)$. Fixando $k \geq k_0$ tal que $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$, tem-se assim, em particular $\Phi_k * \widehat{g}(x) = 0$ para cada $x \notin K'$ e podemos considerar a restrição h de $\Phi_k * \widehat{g}$ a U , que pertence a $C_c^\infty(U, E)$ e verifica

$$\|[g] - [h]\|_p = \|[\widehat{g}] - \Phi_k * \widehat{g}\|_p < \delta. \quad \square$$

III.6.33 (Densidade de $C_c^\infty(U, E)$ em $L^p(U, E)$) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, E um espaço de Banach e $1 \leq p < +\infty$. Tem-se então que $C_c^\infty(U, E)$ é um subespaço vetorial denso de $L^p(U, E)$.

Dem: Seja $[f] \in L^p(U, E)$ e $\delta > 0$. Tendo em conta III.4.14, podemos considerar uma aplicação contínua de suporte compacto $g: U \rightarrow E$ tal que $\|[f] - [g]\|_p < \frac{\delta}{2}$. Tendo em conta o lema III.6.32, existe $[h] \in C_c^\infty(U, E)$ tal que $\|[g] - [h]\|_p < \frac{\delta}{2}$ e obtemos então

$$\|[f] - [h]\|_p \leq \|[f] - [g]\|_p + \|[g] - [h]\|_p < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

o que prova a densidade pretendida. □

Exercícios

Ex III.6.1 Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

a) Verificar que f e g são localmente integráveis e utilizar III.6.17 para mostrar que, apesar de f não admitir derivada no ponto 0, $[f]$ admite $[g]$ como derivada fraca.

b) Verificar que, apesar de se ter $g'(x) = 0$ para todo o $x \neq 0$, a classe $[0]$ não é uma derivada fraca de $[g]$.

Ex III.6.2 Sejam $U \subset \mathbb{R}$ um aberto, E um espaço de Banach e $g: U \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável tal que $[g]$ admita uma derivada fraca $[f] \in L^1_{loc}(U, E)$. Mostrar que $[g]$ é uma classe contínua, isto é (cf. III.2.4) que existe $\hat{g}: U \rightarrow E$ contínua com $[\hat{g}] = [g]$.

Sugestão: Lembrando que todo o aberto de \mathbb{R} é a união de uma família contável de intervalos abertos disjuntos dois a dois (as suas componentes conexas), reduzir a conclusão ao caso em que U é um intervalo aberto J . nesse caso, ter em conta III.6.17, reparando que, por III.6.31 e III.6.28 duas classes com a mesma derivada fraca diferem de uma classe constante.

Ex III.6.3 Sejam $n \geq 2$ e $\alpha < n - 1$ um número real. Seja $f_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^\alpha}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

onde a norma considerada é a euclidiana (cf. o exercício II.5.6). Verificar que f_α é localmente integrável e que $[f_\alpha]$ admite derivada fraca relativamente a cada uma das variáveis e reparar que, no caso em que $\alpha > 0$, $[f_\alpha]$ não é uma classe contínua (cf. III.2.4). **Sugestão:** Utilizar a alínea b) de III.6.12.

Ex III.6.4 (**Exemplo de um espaço de Sobolev**) Sejam $n \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e E um espaço de Hilbert, isto é, um espaço de Banach cuja norma está definida a partir de um produto interno por $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$ (por exemplo \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Recordemos que, como referido em III.2.31, o espaço de Banach $L^2(U, E)$ é então um espaço de Hilbert, com o produto interno definido por

$$\langle [f], [g] \rangle_{L^2} = \int_U \langle f(x), g(x) \rangle d\lambda_n(x).$$

É usual notar $H^1(U, E)$ (ou $W^{1,2}(U, E)$) o subconjunto de $Mens(U, E)$ constituído pelas classes $[f]$ que pertencem a $L^2(U, E)$ (em particular são localmente integráveis) e têm derivadas fracas em relação a cada uma das variáveis, com $D_i[f] \in L^2(U, E)$.

Os espaços $H^1(U, E)$ fazem parte de uma família mais larga de espaços muito importantes em Análise Funcional, conhecidos como *espaços de Sobolev* e que podem envolver derivadas fracas de ordem superior a 1 e espaços L^p em vez dos espaços L^1 .

a) Verificar que $H^1(U, E)$ é um subespaço vetorial de $Mens(U, E)$ e que se pode definir um produto interno neste espaço vetorial por

$$\langle [f], [g] \rangle_{H^1} = \langle [f], [g] \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \langle D_i[f], D_i[g] \rangle_{L^2}.$$

b) Verificar que $H^1(U, E)$ é um espaço de Hilbert, isto é, que é completo para a norma associada ao produto interno referido em a). **Sugestão:** Ter em

conta III.6.18, assim como o facto de a convergência em $L^2(U, E)$ implicar a convergência em $L^1_{loc}(U, E)$ (cf. III.4.21).

Ex III.6.5 (Mudança de variáveis e derivadas fracas) Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos e $f: V \rightarrow U$ um difeomorfismo de classe C^1 (cf. II.5.23). Seja E um espaço de Banach. Na resolução das questões seguintes convirá ter presente os teoremas de mudança de variáveis II.5.26 e II.5.27, aplicados ao difeomorfismo inverso $f^{-1}: U \rightarrow V$.

a) Mostrar que, se $g: U \rightarrow E$ é uma aplicação localmente integrável, então a composta $g \circ f: V \rightarrow E$ é também localmente integrável e que, se $[g] = [\hat{g}]$ em $L^1_{loc}(U, E)$, então $[g \circ f] = [\hat{g} \circ f]$ em $L^1_{loc}(V, E)$, o que mostra que fica bem definida uma aplicação, trivialmente linear,

$$L^1_{loc}(U, E) \rightarrow L^1_{loc}(V, E), \quad [g] \mapsto [g] \circ f = [g \circ f].$$

b) Mostrar que, se $[g_n] \rightarrow [g]$ em $L^1_{loc}(U, E)$, então $[g_n] \circ f \rightarrow [g] \circ f$ em $L^1_{loc}(V, E)$ (cf. III.4.19). **Sugestão:** Lembrar III.4.22.

c) Suponhamos que $[g] \in L^1_{loc}(U, E)$ admite derivadas fracas relativamente a todas as variáveis. Mostrar que $[g] \circ f$ admite derivadas fracas relativamente a todas as variáveis e que, sendo

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

tem-se

$$D_i([g] \circ f) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right] \times (D_j[g] \circ f).$$

Sugestão: No caso em que $g: U \rightarrow E$ é uma aplicação de classe C^1 , reparar que temos uma consequência imediata do teorema de derivação da função composta. Em geral, reparar que o segundo membro está em $L^1_{loc}(V, E)$ e que, tendo em conta o resultado de localização em III.6.15, bastará provar que, para cada aberto \hat{V} contido num subconjunto compacto de V a restrição de $[g] \circ f$ a \hat{V} admite a restrição a \hat{V} do segundo membro como derivada fraca relativamente à variável i . Para isso, considerar $\hat{U} = f(\hat{V})$ e aplicar o corolário III.6.24 para aproximar em $L^1(\hat{U}, E)$ a restrição de $[g]$ por uma sucessão de restrições de classes de aplicações $g_n: U \rightarrow E$ de classe C^∞ de forma compatível com cada uma das suas derivadas fracas, aplicando no fim o resultado III.6.18, sobre a derivada fraca de um limite.

§7. Medidas vetoriais e resultados de dualidade.

III.7.1 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e E um espaço de Banach. Dizemos que uma aplicação $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ é uma *medida vetorial* ou, se quisermos ser mais precisos, uma *E -medida* se se verificam as seguintes propriedades (comparar com I.2.10):

1) $\omega(\emptyset) = 0$; ¹⁶²

2) (**Aditividade**) Qualquer que seja a família contável $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos disjuntos dois a dois, pertencentes a \mathcal{M} ,

$$\omega\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sum_{j \in J} \omega(A_j),$$

com a família dos vetores $\omega(A_j)$ absolutamente somável (cf. II.2.47 e II.2.48)¹⁶³.

Nos casos particulares em que $E = \mathbb{R}$ e $E = \mathbb{C}$, em ambos os casos com o valor absoluto como norma, usamos alternativamente os nomes de *medida real* e *medida complexa*, respetivamente.

Num contexto em que se trabalhe com medidas vetoriais, é costume utilizar a designação “*medida positiva*” para as medidas definidas em I.2.10. Note-se que as medidas positivas não são necessariamente medidas reais uma vez que, ao contrário destas últimas, podem tomar o valor $+\infty$.

III.7.2 Se $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ é uma medida vetorial, então, sempre que $B \subset A$ são conjuntos mensuráveis, tem-se

$$\omega(A \setminus B) = \omega(A) - \omega(B).$$

Dem: Basta tender a que se tem $A = B \cup (A \setminus B)$, com $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$, donde, pela propriedade de aditividade, $\omega(A) = \omega(B) + \omega(A \setminus B)$. \square

III.7.3 Se $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ é uma medida vetorial, então:

a) Sendo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão crescente de subconjuntos pertencentes a \mathcal{M} (isto é, supondo que $A_n \subset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), tem-se

¹⁶²De facto esta hipótese é desnecessária, por resultar da aditividade em 2), se repararmos que se tem $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$.

¹⁶³A condição de termos a soma de uma família absolutamente somável é mais forte do que a condição usual de termos apenas uma família somável e veremos adiante que ela implica que as medidas vetoriais que utilizamos são apenas aquelas que têm variação total finita. De qualquer modo, são apenas estas últimas as que nos interessarão e, ao exigir esta condição mais forte, limitamos o conhecimento que seria necessário possuir sobre famílias somáveis mais gerais.

$$\omega\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \omega(A_n).$$

b) Sendo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão decrescente de subconjuntos pertencentes a \mathcal{M} (isto é, supondo que $A_n \supset A_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$), tem-se

$$\omega\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim \omega(A_n).$$

Dem: Temos uma demonstração análoga à do resultado correspondente para medidas positivas (cf. 5) e 7) de I.2.12): Nas hipóteses de a), consideramos os conjuntos $B_p \in \mathcal{M}$, onde $p \in \mathbb{N}$, disjuntos dois a dois, definidos por $B_1 = A_1$ e $B_{p+1} = A_{p+1} \setminus A_p$ e reparamos que $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} B_p = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p$ e que $\bigcup_{p \leq n} B_p = A_n$. Tem-se assim, lembrando a alínea e) de II.2.47,

$$\omega\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p\right) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \omega(B_p) = \lim \sum_{p=1}^n \omega(B_p) = \lim \omega(A_n).$$

Nas hipóteses de b), reparamos que os $X \setminus A_n$ constituem uma sucessão crescente de união $X \setminus (\bigcap A_n)$, pelo que, aplicando a),

$$\begin{aligned} \omega\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \omega(X) - \omega(X \setminus (\bigcap A_n)) = \omega(X) - \lim \omega(X \setminus A_n) = \\ &= \lim (\omega(X) - \omega(X \setminus A_n)) = \lim \omega(A_n). \end{aligned} \quad \square$$

III.7.4 (A medida de variação total) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma medida vetorial. Pode-se então definir uma *medida positiva associada* $|\omega|: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, também chamada *medida de variação total* de ω , pela condição de, para cada $A \in \mathcal{M}$, $|\omega|(A)$ ser o supremo das somas $\sum_{i \in I} \|\omega(B_i)\|$ com $(B_i)_{i \in I}$ família finita de conjuntos

de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e com $B_i \subset A$. Além disso:

a) Para cada $A, B \in \mathcal{M}$, com $B \subset A$, tem-se $\|\omega(B)\| \leq |\omega|(A)$, em particular $\|\omega(A)\| \leq |\omega|(A)$;

b) Se $A \in \mathcal{M}$, tem-se $|\omega|(A) = 0$ se, e só se, $\omega(B) = 0$, para todo o $B \in \mathcal{M}$ com $B \subset A$.

c) Se $a \in X$ é tal que $\{a\} \in \mathcal{M}$, então $|\omega|(\{a\}) = \|\omega(\{a\})\|$

Dem: Começemos por reparar que, para cada $A \in \mathcal{M}$ existem sempre famílias finitas $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois contidos em A , como as famílias com um único conjunto igual a B , onde $B \in \mathcal{M}$ e $B \subset A$ (por exemplo $B = A$), o que mostra que faz sentido considerar o

¹⁶⁴Reparar que, ao contrário do que sucedia no resultado referido, não há aqui lugar a exigir que uma certa medida seja finita, uma vez que as medidas vetoriais são sempre finitas.

supremo referido e que se tem $\|\omega(B)\| \leq |\omega(A)|$, para cada B nas condições referidas. Se for $\omega(B) = 0$, para todo o $B \subset A$, todas as somas cujo supremo define $|\omega(A)|$ são iguais a 0, o que mostra que $|\omega(A)| = 0$. Reciprocamente, se $|\omega(A)| = 0$, então, para cada $B \in \mathcal{M}$ com $B \subset A$, tem-se

$$\|\omega(B)\| \leq |\omega(A)| = 0,$$

portanto $\omega(B) = 0$. Em particular, já podemos concluir que $|\omega(\emptyset)| = 0$. No caso em que $\{a\} \in \mathcal{M}$, tem-se mesmo $|\omega(\{a\})| = \|\omega(\{a\})\|$, uma vez que já sabemos que $\|\omega(\{a\})\| \leq |\omega(\{a\})|$ e a desigualdade oposta resulta de que, para cada família finita $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e contidos em $\{a\}$, ou estes conjuntos são todos vazios ou há um igual a $\{a\}$ e os restantes são vazios, em qualquer caso $\sum \|\omega(B_i)\| \leq \|\omega(\{a\})\|$. Observemos também que, dados $A, A' \in \mathcal{M}$ com $A \subset A'$, tem-se $|\omega(A)| \leq |\omega(A')|$, uma vez que, para cada família finita $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e contidos em A , estes conjuntos estão também contidos em A' .

Sejam agora $(A_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e $A = \bigcup_{j \in J} A_j$ e provemos que $|\omega(A)| = \sum_{j \in J} |\omega(A_j)|$, o que terminará a demonstração. Dividimos essa prova em duas partes, em cada uma das quais justificamos uma desigualdade.

1) Mostremos que se tem

$$\sum_{j \in J} |\omega(A_j)| \leq |\omega(A)|.$$

Subdem: Para provarmos esta desigualdade basta mostrarmos que, para cada parte finita $I \subset J$, $\sum_{j \in I} |\omega(A_j)| \leq |\omega(A)|$ e podemos já supor que $|\omega(A)|$

é finito, o que implica que se tem também $|\omega(A_j)| < +\infty$ para cada $j \in I$. Fixemos então um tal conjunto finito $I \subset J$, que podemos já supor não vazio, seja n o número de elementos de I e seja $\delta > 0$ arbitrário. Para cada $j \in I$, podemos considerar uma família finita $(B_{j,k})_{k \in K_j}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e contidos em A_j tal que

$$\sum_{k \in K_j} \|\omega(B_{j,k})\| > |\omega(A_j)| - \frac{\delta}{n}.$$

A família finita de todos estes conjuntos $B_{j,k}$, com $j \in I$ e $k \in K_j$, é então constituída por conjuntos disjuntos dois a dois e contidos em A e vemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j \in I} |\omega(A_j)| \right) - \delta &= \sum_{j \in I} \left(|\omega(A_j)| - \frac{\delta}{n} \right) < \sum_{j \in I} \left(\sum_{k \in K_j} \|\omega(B_{j,k})\| \right) \leq \\ &\leq |\omega(A)|. \end{aligned}$$

Tendo em conta a arbitrariedade de δ , concluímos que

$$\sum_{j \in I} |\omega|(A_j) \leq |\omega|(A),$$

como queríamos.

2) Provemos agora a desigualdade oposta

$$|\omega|(A) \leq \sum_{j \in J} |\omega|(A_j).$$

Subdem: Tendo em conta a definição de $|\omega|(A)$ como um supremo, basta mostrarmos que, para cada família finita $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e contidos em A ,

$$\sum_{i \in I} \|\omega(B_i)\| \leq \sum_{j \in J} |\omega|(A_j).$$

Ora, dada uma tal família, vemos que, para cada $i \in I$, $B_i = \bigcup_{j \in J} (B_i \cap A_j)$,

com estes conjuntos disjuntos dois a dois, e que, para cada $j \in J$, os conjuntos $B_i \cap A_j$, com $i \in I$, são disjuntos dois a dois e contidos em A_j pelo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|\omega(B_i)\| &= \sum_{i \in I} \left\| \sum_{j \in J} \omega(B_i \cap A_j) \right\| \leq \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} \|\omega(B_i \cap A_j)\| \right) = \\ &= \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} \|\omega(B_i \cap A_j)\| \right) \leq \sum_{j \in J} |\omega|(A_j), \end{aligned}$$

como queríamos. □

III.7.5 (A medida de variação total é finita) Sejam E um espaço de Banach, (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma E -medida. Tem-se então que a medida de variação total $|\omega|: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ verifica $|\omega|(X) < +\infty$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes, cada uma eventualmente com a sua própria demonstração.

1) Começemos por reparar que, tendo em conta a condição 2) na definição em III.7.1, qualquer que seja a família contável $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois, tem-se $\sum_{j \in J} \|\omega(A_j)\| < +\infty$.

2) Apenas para efeito desta demonstração, vamos dizer que um conjunto $A \in \mathcal{M}$ é ω -limitado se existir $K \geq 0$ tal que, para cada $B \in \mathcal{M}$ com $B \subset A$, $\|\omega(B)\| \leq K$.¹⁶⁵

3) Se $A, A' \in \mathcal{M}$ são dois conjuntos ω -limitados, então $A \cup A'$ é também ω -limitado.

Subdem: Sejam $K, K' \geq 0$ tais que $\|\omega(B)\| \leq K$, para cada $B \subset A$, e

¹⁶⁵É claro que, depois de demonstrado este resultado, podemos concluir que todo o conjunto é ω -limitado, bastando tomar $|\omega|(X)$ como constante K .

$\|\omega(B)\| \leq K'$, para cada $B \subset A'$, para cada $B \subset A \cup A'$ tem-se então $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$, com $(B \cap A) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, pelo que

$$\|\omega(B)\| = \|\omega(B \cap A) + \omega(B \setminus A)\| \leq \|\omega(B \cap A)\| + \|\omega(B \setminus A)\| \leq K + K'.$$

4) Se $A \in \mathcal{M}$ não é ω -limitado, então existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $B \subset A$, $\|\omega(B)\| \geq 1$ e $A \setminus B$ não é ω -limitado.

Subdem: Seja $A' \subset A$, com $A' \in \mathcal{M}$ e $\|\omega(A')\| \geq \|\omega(A)\| + 1$. Considerando então $A'' = A \setminus A'$, tem-se

$$\|\omega(A'')\| = \|\omega(A) - \omega(A')\| = \|\omega(A') - \omega(A)\| \geq \|\omega(A') - \omega(A)\| \geq 1.$$

Uma vez que $A = A' \cup A''$, deduzimos de 3) que pelo menos um dos dois conjuntos A' e A'' não é ω -limitado, bastando agora tomar $B = A'$, se A'' não é ω -limitado, e $B = A''$ se A' é ω -limitado.

5) (Fim da primeira parte) O espaço todo X é ω -limitado.

Subdem: Suponhamos, por absurdo, que X não era ω -limitado. Vamos construir recursivamente uma sucessão $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|\omega(X_n)\| \geq 1$ e $X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)$ não é ω -limitado. Ter-se-á então $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\omega(X_n)\| = +\infty$, o

que é absurdo, tendo em conta 1). Para fazer a construção recursiva referida, começamos por utilizar 4), com $A = X$, para considerar $X_1 \in \mathcal{M}$ tal que $\|\omega(X_1)\| \geq 1$ e que $X \setminus X_1$ não seja ω -limitado e, supondo já construídos X_1, \dots, X_n nas condições referidas, utilizamos de novo 4), com $A = X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)$, para considerar $X_{n+1} \subset X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)$, tal que $X_{n+1} \in \mathcal{M}$, $\|\omega(X_{n+1})\| \geq 1$ e

$$(X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)) \setminus X_{n+1} = X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_{n+1})$$

não ω -limitado.

6) Vamos mostrar que, se $A \in \mathcal{M}$ verifica $|\omega|(A) = +\infty$, então existe uma família finita $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} , disjuntos dois a dois e contidos em A , tal que $\sum \|\omega(B_i)\| \geq 1$ e $|\omega|(A \setminus \bigcup B_i) = +\infty$.¹⁶⁶

Subdem: Tendo em conta a conclusão de 5), podemos considerar $K \geq 1$ tal que, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\|\omega(A)\| \leq K$. O facto de se ter $|\omega|(A) = +\infty$ permite-nos considerar uma família finita $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ de conjuntos de \mathcal{M} , disjuntos dois a dois e contidos em A , tal que $\sum \|\omega(B_i)\| \geq 3K$, podendo já supor-se, se necessário juntando o conjunto $A \setminus \bigcup B_i$, que se tem mesmo $\bigcup B_i = A$. Seja $n_0 \leq n$ o menor natural tal que

$$\sum_{i=1}^{n_0} \|\omega(B_i)\| \geq K.$$

O facto de se ter $\|\omega(B_{n_0})\| \leq K$ implica que

¹⁶⁶Comparar com 4).

$$\sum_{i=1}^{n_0} \|\omega(B_i)\| \leq 2K$$

e portanto $n_0 < n$ e

$$\sum_{i=n_0+1}^n \|\omega(B_i)\| \geq K.$$

Reparando que se tem $A = A' \cup A''$, com

$$A' = \bigcup_{i=1}^{n_0} B_i, \quad A'' = \bigcup_{i=n_0+1}^n B_i,$$

o facto de $|\omega|$ ser uma medida com $|\omega|(A) = +\infty$ implica que se tem $|\omega|(A') = +\infty$ ou $|\omega|(A'') = +\infty$ pelo que, para obter as condições requeridas, basta tomar $I = \{1, \dots, n_0\}$ se $|\omega|(A'') = +\infty$ e $I = \{n_0 + 1, \dots, n\}$ se $|\omega|(A') = +\infty$.

7) Vamos mostrar que $|\omega|(X) < +\infty$, o que terminará a demonstração.

Subdem: Suponhamos, por absurdo, que $|\omega|(X) = +\infty$. Vamos construir recursivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma família finita $(B_{n,i})_{i \in I_n}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois de modo que, notando X_n a união dos $B_{n,i}$ com $i \in I_n$, se tenha, para cada n , $B_{n+1,i} \subset X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)$

$$\sum_{i \in I_n} \|\omega(B_{n,i})\| \geq 1, \quad |\omega|(X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)) = +\infty.$$

Para o fazermos, basta aplicar 6), com $A = X$, para construir a família $(B_{1,i})_{i \in I_1}$, e, supondo construídos os $B_{k,i}$, $i \in I_k$, para $1 \leq k \leq n$, basta aplicar 6), com $A = X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n)$ para construir os $B_{n+1,i}$, com $i \in I_{n+1}$. Feita esta construção recursiva, podemos agora considerar a família contável de todos os conjuntos mensuráveis $B_{n,i}$, com $n \in \mathbb{N}$ e, para cada n , $i \in I_n$, conjuntos esses que são disjuntos dois a dois, e tem-se

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_n} \|\omega(B_{n,i})\| \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} 1 = +\infty,$$

o que é absurdo, tendo em conta 1). □

III.7.6 (Exemplos) a) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e E um espaço de Banach. Tem-se então que a aplicação constante $0: \mathcal{M} \rightarrow E$ é uma E -medida, para a qual vem $|0|(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$.

b) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma medida positiva finita. Tem-se então que μ é uma \mathbb{R} -medida e $|\mu| = \mu$.

Dem: A conclusão de a) é trivial e, quanto a b), é evidente que uma medida positiva finita é uma \mathbb{R} -medida. Resta-os mostrar que, no contexto de b), tem-se $|\mu|(A) = \mu(A)$, para cada $A \in \mathcal{M}$. Ora, como já vimos em III.7.4,

tem-se $\mu(A) = |\mu(A)| \leq |\mu|(A)$ e a desigualdade oposta resulta da definição de $|\mu|(A)$ como um supremo, uma vez que, para cada família finita $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e contidos em A , vem

$$\sum_{i \in I} |\mu(B_i)| = \sum_{i \in I} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \leq \mu(A). \quad \square$$

III.7.7 Sejam E um espaço de Banach, (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\omega, \omega': \mathcal{M} \rightarrow E$ duas E -medidas. Tem-se então que $\omega + \omega': \mathcal{M} \rightarrow E$ é também uma E -medida e, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$|\omega + \omega'| (A) \leq |\omega|(A) + |\omega'| (A).$$

Dem: Tem-se $(\omega + \omega')(\emptyset) = \omega(\emptyset) + \omega'(\emptyset) = 0$. Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois, tem-se

$$\omega\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sum_{j \in J} \omega(A_j), \quad \omega'\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sum_{j \in J} \omega'(A_j),$$

em ambos os casos com famílias absolutamente somáveis no segundo membro, pelo que, tendo em conta a caracterização das somas das famílias absolutamente somáveis como integrais para medida de contagem (cf. II.2.48), concluímos da aditividade do integral que

$$(\omega + \omega')\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \omega\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) + \omega'\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sum_{j \in J} (\omega(A_j) + \omega'(A_j)),$$

com a família do segundo membro absolutamente somável, e portanto $\omega + \omega'$ é efetivamente uma E -medida. Seja agora $A \in \mathcal{M}$ e consideremos uma família finita arbitrária $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e contidos em A . Tem-se então

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|(\omega + \omega')(B_i)\| &\leq \sum_{i \in I} (\|\omega(B_i)\| + \|\omega'(B_i)\|) = \\ &= \sum_{i \in I} \|\omega(B_i)\| + \sum_{i \in I} \|\omega'(B_i)\| \leq \\ &\leq |\omega|(A) + |\omega'| (A), \end{aligned}$$

donde, tendo em conta a arbitrariedade da família,

$$|\omega + \omega'| (A) \leq |\omega|(A) + |\omega'| (A). \quad \square$$

III.7.8 Sejam E e F espaços de Banach, $\alpha: E \rightarrow F$ uma aplicação linear contínua e $M \geq 0$ tal que $\|\alpha(w)\| \leq M\|w\|$, para cada $w \in E$.¹⁶⁷ Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma E -medida. Tem então

¹⁶⁷Lembrar que a existência de um tal $M \geq 0$ é equivalente à continuidade da aplicação linear α .

lugar uma F -medida $\alpha_*\omega: \mathcal{M} \rightarrow F$ definida por $\alpha_*\omega(A) = \alpha(\omega(A))$, cuja medida de variação total associada verifica $|\alpha_*\omega|(A) \leq M|\omega|(A)$, para cada $A \in \mathcal{M}$.

Dem: Tem-se

$$\alpha_*\omega(\emptyset) = \alpha(\omega(\emptyset)) = \alpha(0) = 0.$$

Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois, tem-se

$$\omega\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sum_{j \in J} \omega(A_j),$$

com a família do segundo membro absolutamente somável, pelo que, tendo em conta a caracterização das somas das famílias absolutamente somáveis como integrais para medida de contagem (cf. II.2.48), concluímos de II.2.35 que

$$\alpha_*\omega\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \alpha\left(\sum_{j \in J} \omega(A_j)\right) = \sum_{j \in J} \alpha(\omega(A_j)) = \sum_{j \in J} \alpha_*\omega(A_j),$$

com a família do segundo membro absolutamente somável, e portanto $\alpha_*\omega$ é efetivamente uma F -medida. Seja agora $A \in \mathcal{M}$ e consideremos uma família finita arbitrária $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e contidos em A . Tem-se então

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|(\alpha_*\omega)(B_i)\| &= \sum_{i \in I} \|(\alpha(\omega(B_i)))\| \leq \sum_{i \in I} M\|\omega(B_i)\| = \\ &= M \sum_{i \in I} \|\omega(B_i)\| \leq M|\omega|(A), \end{aligned}$$

donde, tendo em conta a arbitrariedade da família,

$$|\alpha_*\omega|(A) \leq M|\omega|(A). \quad \square$$

III.7.9 (Corolário) Sejam E um espaço de Banach sobre o corpo \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma E -medida. Para cada escalar $a \in \mathbb{K}$, tem-se então que $a\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ é também uma E -medida e, para cada $A \in \mathcal{M}$, $|a\omega|(A) = |a||\omega|(A)$.

Dem: O facto de $a\omega$ ser uma E -medida e a desigualdade $|a\omega|(A) \leq |a||\omega|(A)$ resultam da propriedade precedente, relativa à aplicação linear contínua $\alpha_a: E \rightarrow E$ definida por $\alpha_a(x) = ax$, para a qual se tem $\|\alpha_a(x)\| = |a|\|x\|$ e $\alpha_{a_*}\omega = a\omega$. No caso em que $a = 0$, esta desigualdade implica trivialmente a igualdade pretendida e, no caso em que $a \neq 0$, a desigualdade oposta resulta de se ter

$$|a||\omega|(A) = |a|\left|\frac{1}{a}a\omega\right|(A) \leq |a|\left|\frac{1}{a}\right||a\omega|(A) = |a||\omega|(A). \quad \square$$

III.7.10 (No caso particular $E = \mathbb{C}$) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ uma medida complexa. Podemos então considerar uma nova medida complexa $\bar{\omega}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, dita *conjugada* de ω , definida por

$$\bar{\omega}(A) = \overline{\omega(A)},$$

para a qual se tem $|\bar{\omega}| = |\omega|$.

Dem: Trata-se do caso particular de III.7.8, em que tomamos para $\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a aplicação linear real definida por $\alpha(a) = \bar{a}$ (reparar que $\bar{\bar{\omega}} = \omega$). \square

Na secção I.4 estudámos resultados de existência e de unicidade do prolongamento de uma medida positiva definida num semianel à σ -álgebra gerada, resultados que foram utilizados, em particular, na construção da medida de Lebesgue e, mais geralmente, das medidas de Lebesgue-Stieltjes. Apesar de não nos debruçarmos aqui sobre a existência de prolongamentos no contexto das medidas vetoriais, estabelecemos em seguida um resultado simples de unicidade nesse contexto, que nos será útil adiante.

III.7.11 (Unicidade do prolongamento como medida vetorial) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ um semianel σ -total de partes de X (cf. I.4.3), cuja σ -álgebra gerada seja \mathcal{M} . Tem-se então:

a) Seja $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma medida vetorial tal que $\omega(B) = 0$, para cada $B \in \mathcal{S}$. Tem-se então $\omega = 0$.

b) Sejam $\omega, \omega': \mathcal{M} \rightarrow E$ duas medidas vetoriais tais que $\omega(B) = \omega'(B)$, para cada $B \in \mathcal{S}$. Tem-se então $\omega = \omega'$.

Dem: a) Seja $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma medida vetorial tal que $\omega(B) = 0$, para cada $B \in \mathcal{S}$. Sejam $A \in \mathcal{M}$ e $\delta > 0$ arbitrários. Tendo em conta I.4.12, a medida positiva finita $|\omega|: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é o prolongamento de Hahn da sua restrição a \mathcal{S} e portanto, pela caracterização desse prolongamento em I.4.8, existe uma família contável $(B_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois e com $A \subset B = \bigcup B_j$, tal que $\sum |\omega|(B_j) < |\omega|(A) + \delta$. Deduzimos daqui que

$$|\omega|(B \setminus A) = |\omega|(B) - |\omega|(A) = \sum_{j \in J} |\omega|(B_j) - |\omega|(A) < \delta.$$

Uma vez que

$$\omega(B) = \sum_{j \in J} \omega(B_j) = 0,$$

vemos agora que

$$\|\omega(A)\| = \|\omega(B) - \omega(A)\| = \|\omega(B \setminus A)\| \leq |\omega|(B \setminus A) < \delta,$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de δ , implica que $\|\omega(A)\| = 0$, ou seja, $\omega(A) = 0$.

b) Se $\omega, \omega': \mathcal{M} \rightarrow E$ são duas medidas vetoriais tais que $\omega(B) = \omega'(B)$, para cada $B \in \mathcal{S}$, então $\omega - \omega'$ é uma medida vetorial que toma o valor 0 em cada $B \in \mathcal{S}$ e portanto, tendo em conta a), $\omega - \omega' = 0$, donde $\omega = \omega'$. \square

III.7.12 (**Medida definida por uma função integrável**) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida positiva. Se E é um espaço de Banach e $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação integrável, então tem lugar uma medida vetorial associada $\mu_{(f)}: \mathcal{M} \rightarrow E$, definida por

$$\mu_{(f)}(A) = \int_A f_{/A}(x) d\mu_{/A}(x) = \int_X \mathbb{I}_A(x) f(x) d\mu(x)$$

(cf. II.2.40), cuja medida de variação total $|\mu_{(f)}|$ é a medida positiva $\mu_{(\varphi)}$, associada à função mensurável $\varphi: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\varphi(x) = \|f(x)\|$.

Dem: O facto de $\mu_{(f)}$ ser uma E -medida resulta de II.2.40 e II.2.50. Resta-nos mostrar que, dado $A \in \mathcal{M}$, tem-se

$$|\mu_{(f)}|(A) = \mu_{(\varphi)}(A) = \int_A \|f(x)\| d\mu(x),$$

dividindo a prova deste facto em duas partes.

1) Vamos verificar que

$$|\mu_{(f)}|(A) \leq \int_A \|f(x)\| d\mu(x).$$

Subdem: Seja $(B_i)_{i \in I}$ uma família finita de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e contidos em A . Tem-se então

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|\mu_{(f)}(B_i)\| &= \sum_{i \in I} \left\| \int_{B_i} f(x) d\mu(x) \right\| \leq \sum_{i \in I} \int_{B_i} \|f(x)\| d\mu(x) = \\ &= \int_{\cup B_i} \|f(x)\| d\mu(x) \leq \int_A \|f(x)\| d\mu(x), \end{aligned}$$

pelo que, tendo em conta a definição de $|\mu_{(f)}|(A)$ como um supremo, concluímos a desigualdade pretendida.

2) Vamos verificar que

$$|\mu_{(f)}|(A) \geq \int_A \|f(x)\| d\mu(x).$$

Subdem: Para provar a desigualdade enunciada basta provar que, dado $\delta > 0$ arbitrário, tem-se

$$(1) \quad |\mu_{(f)}|(A) \geq \int_A \|f(x)\| d\mu(x) - \delta.$$

Fixemos então $\delta > 0$. Tendo em conta II.2.29, podemos considerar uma sucessão de aplicações em escada $f_n: X \rightarrow E$ tais que, para cada $x \in X$,

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$. Uma vez que $\|f_n(x)\| \rightarrow \|f(x)\|$, o teorema da convergência dominada para funções positivas mostra que

$$\int_A \|f_n(x)\| d\mu(x) \rightarrow \int_A \|f(x)\| d\mu(x)$$

e portanto, para provar (1), bastará mostrar a existência de n_0 tal que, para cada $n \geq n_0$,

$$(2) \quad |\mu_{(f)}|(A) \geq \int_A \|f_n(x)\| d\mu(x) - \delta.$$

Uma vez que, para cada $x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0$, com

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x)\| + \|f(x)\| \leq 3\|f(x)\|,$$

deduzimos, mais uma vez do teorema da convergência dominada, que

$$\int_X \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) \rightarrow 0,$$

o que nos permite fixar n_0 tal que, para cada $n \geq n_0$,

$$\int_X \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) \leq \delta.$$

Consideremos então $n \geq n_0$ arbitrário e provemos a desigualdade (2), o que terminará a demonstração. Lembrando II.2.17, consideremos uma família finita $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e com $\mu(X_i) < +\infty$ tal que $f_n(x)$ tenha um valor constante $w_i \in E$ para cada $x \in X_i$ e que $f_n(x) = 0$ para cada $x \notin \bigcup X_i$. O conjunto A contém então os conjuntos mensuráveis $A \cap X_i$, disjuntos dois a dois, pelo que

$$\begin{aligned} |\mu_{(f)}|(A) &\geq \sum_{i \in I} \|\mu_{(f)}(A \cap X_i)\| = \sum_{i \in I} \left\| \int_{A \cap X_i} f(x) d\mu(x) \right\| = \\ &= \sum_{i \in I} \left\| \int_{A \cap X_i} f_n(x) d\mu(x) - \int_{A \cap X_i} f_n(x) - f(x) d\mu(x) \right\| \geq \\ &\geq \sum_{i \in I} \left(\left\| \int_{A \cap X_i} f_n(x) d\mu(x) \right\| - \left\| \int_{A \cap X_i} f_n(x) - f(x) d\mu(x) \right\| \right) \geq \\ &\geq \sum_{i \in I} \left(\mu(A \cap X_i) \|w_i\| - \int_{A \cap X_i} \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) \right) = \\ &= \int_A \|f_n(x)\| d\mu(x) - \int_{\bigcup (A \cap X_i)} \|f_n(x) - f(x)\| d\mu(x) \geq \\ &\geq \int_A \|f_n(x)\| d\mu(x) - \delta, \end{aligned}$$

o que prova (2). □

III.7.13 (Complemento de unicidade) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida positiva σ -finita. Se E é um espaço de Banach e $f, g: X \rightarrow E$ são aplicações integráveis então $\mu_{(f)} = \mu_{(g)}: \mathcal{M} \rightarrow E$, se, e só se, $f(x) = g(x)$ quase sempre.

Dem: Se $f(x) = g(x)$ quase sempre, então, para cada $A \in \mathcal{M}$, tendo em conta II.2.43,

$$\mu_{(f)}(A) = \int_A f(x) d\mu(x) = \int_A g(x) d\mu(x) = \mu_{(g)}(A).$$

Reciprocamente, se, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu_{(f)}(A) = \mu_{(g)}(A)$, então, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\int_A f(x) - g(x) d\mu(x) = \mu_{(f)}(A) - \mu_{(g)}(A) = 0$$

donde, aplicando II.2.46 ao semianel constituído pelos $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) < +\infty$, $f(x) - g(x) = 0$ quase sempre, isto é, $f(x) = g(x)$ quase sempre. \square

III.7.14 (No caso particular $E = \mathbb{C}$) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida positiva. Se $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação integrável e se notarmos $\overline{f}: X \rightarrow \mathbb{C}$ a aplicação definida por $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$, tem-se que \overline{f} é também integrável e a medida $\mu_{\overline{f}}$ é a conjugada da medida μ_f .

Dem: Para cada $A \in \mathcal{M}$, a igualdade

$$\overline{\int_X f(x) d\mu(x)} = \int_X \overline{f(x)} d\mu(x)$$

é simplesmente um caso particular de II.2.35, onde a aplicação linear envolvida é a aplicação linear real $\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\alpha(a) = \overline{a}$. \square

Vamos agora verificar como se podem estender sem dificuldade às medidas vetoriais os resultados sobre a decomposição de Lebesgue de uma medida, estudados na secção III.3.

III.7.15 (Decomposição de Lebesgue para medidas vetoriais) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach, $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida positiva e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma medida vetorial. Generalizando III.3.1 e III.3.5, diz-se que ω é μ -absolutamente contínua se, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$, $\omega(A) = 0$ e que ω é μ -singular se existir $B \in \mathcal{M}$ com $\mu(B) = 0$ tal que $\omega(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $A \subset X \setminus B$.¹⁶⁸ Como em III.3.5, chama-se *decomposição de Lebesgue* de ω a um par ordenado (ω_a, ω_s) de

¹⁶⁸Reparar que, no caso em que ω é uma medida positiva, a condição $\omega(X \setminus B) = 0$ implica trivialmente que $\omega(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $A \subset X \setminus B$.

E -medidas, com ω_a μ -absolutamente contínua, ω_s μ -singular e, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\omega(A) = \omega_a(A) + \omega_s(A)$.

III.7.16 Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach, $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida positiva e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma medida vetorial. Sendo $|\omega|: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ a medida de variação total de ω , tem-se então:

a) A medida ω é μ -absolutamente contínua se, e só se, a medida de variação total $|\omega|$ é μ -absolutamente contínua.

b) A medida ω é μ -singular se, e só se, a medida de variação total $|\omega|$ é μ -singular.

Dem: **a)** Suponhamos que ω é μ -absolutamente contínua. Se $A \in \mathcal{M}$ verifica $\mu(A) = 0$, então, para cada $B \in \mathcal{M}$ com $B \subset A$, tem-se $\mu(B) = 0$, donde $\omega(B) = 0$ o que, como referido em III.7.4, implica que $|\omega|(A) = 0$. Concluimos assim que $|\omega|$ é μ -absolutamente contínua. Reciprocamente, se $|\omega|$ é μ -absolutamente contínua, então, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$, tem-se $\|\omega(A)\| \leq |\omega|(A) = 0$, donde $\omega(A) = 0$, o que mostra que ω é μ -absolutamente contínua.

b) Se ω é μ -singular, então existe $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$ tal que, para cada $B \in \mathcal{M}$ com $B \subset X \setminus A$, $\omega(B) = 0$ o que, como referido em III.7.4, implica que $|\omega|(X \setminus A) = 0$, portanto $|\omega|$ é μ -singular. Reciprocamente, se $|\omega|$ é μ -singular, então existe $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$ tal que $|\omega|(X \setminus A) = 0$ e então, para cada $B \in \mathcal{M}$ com $B \subset X \setminus A$, tem-se $|\omega|(B) = 0$, donde também $\omega(B) = 0$, o que mostra que ω é μ -singular. \square

III.7.17 (**Unicidade da decomposição de Lebesgue**)¹⁶⁹ Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, E um espaço de Banach e (ω_a, ω_s) uma decomposição de Lebesgue de uma medida vetorial $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$. Sendo $B \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(B) = 0$ e $\omega_s(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $A \subset X \setminus B$, tem-se então, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\omega_a(A) = \omega(A \setminus B), \quad \omega_s(A) = \omega(A \cap B).$$

Em consequência, se (ω_a, ω_s) e (ω'_a, ω'_s) são duas decomposições de Lebesgue duma mesma medida $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$, então $\omega_a = \omega'_a$ e $\omega_s = \omega'_s$.

Dem: O facto de ω_a ser μ -absolutamente contínua implica que, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $A \subset B$, vem $\mu(A) = 0$, donde $\omega_a(A) = 0$. Para cada $A \in \mathcal{M}$, A é a união dos conjuntos disjuntos $A \cap B$ e $A \setminus B$ que pertencem a \mathcal{M} e estão respectivamente contidos em B e em $X \setminus B$, em particular verificam $\omega_a(A \cap B) = 0$ e $\omega_s(A \setminus B) = 0$, e portanto, por ser $\omega = \omega_a + \omega_s$, vem

$$\begin{aligned} \omega_a(A) &= \omega_a(A \cap B) + \omega_a(A \setminus B) = \omega_a(A \setminus B) + \omega_s(A \setminus B) = \omega(A \setminus B), \\ \omega_s(A) &= \omega_s(A \cap B) + \omega_s(A \setminus B) = \omega_s(A \cap B) + \omega_a(A \cap B) = \omega(A \cap B). \end{aligned}$$

No caso em que (ω_a, ω_s) e (ω'_a, ω'_s) são duas decomposições de Lebesgue duma mesma medida $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$, podemos considerar $B, B' \in \mathcal{M}$ com

¹⁶⁹Comparar com III.3.7.

$\mu(B) = 0$, $\mu(B') = 0$, tais que $\omega_s(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $A \subset X \setminus B$, e $\omega'_s(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $A \subset X \setminus B'$, e então, sendo $B'' = B \cup B'$, tem-se ainda $\mu(B'') = 0$ e, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $A \subset X \setminus B''$, $\omega_s(A) = 0$ e $\omega'_s(A) = 0$ pelo que, pelo que vimos atrás, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\omega_a(A) &= \omega(A \setminus B'') = \omega'_a(A), \\ \omega_s(A) &= \omega(A \cap B'') = \omega'_s(A).\end{aligned}$$

□

III.7.18 (Existência da decomposição de Lebesgue) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida σ -finita, E um espaço de Banach e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma medida vetorial. Consideremos uma decomposição de Lebesgue da medida finita $|\omega|: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida pela medida positiva μ -absolutamente contínua $|\omega|_a: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e pela medida positiva μ -singular $|\omega|_s: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e seja $B \in \mathcal{M}$, com $\mu(B) = 0$ e $|\omega|_s(X \setminus B) = 0$. Podem então definir-se medidas vetoriais $\omega_a, \omega_s: \mathcal{M} \rightarrow E$ por

$$\omega_a(A) = \omega(A \setminus B), \quad \omega_s(A) = \omega(A \cap B),$$

para as quais se tem $|\omega_a| = |\omega|_a: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $|\omega_s| = |\omega|_s: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$, e estas medidas definem uma decomposição de Lebesgue de ω .

Dem: Vamos dividir a prova em várias partes:

a) Começemos por mostrar que as aplicações $\omega_a, \omega_s: \mathcal{M} \rightarrow E$, definidas no enunciado, são medidas vetoriais que verificam

$$|\omega_a|(A) \leq |\omega|_a(A), \quad |\omega_s|(A) \leq |\omega|_s(A).$$

Subdem: Tem-se trivialmente $\omega_a(\emptyset) = \omega_s(\emptyset) = 0$ e, se A é união de uma família contável $(A_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois, os conjuntos $A \setminus B$ e $A \cap B$ são respetivamente as uniões das famílias dos $A_j \setminus B$ e dos $A_j \cap B$, em cada caso constituídas por conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois, pelo que

$$\begin{aligned}\omega_a(A) &= \omega\left(\bigcup_{j \in J} (A_j \setminus B)\right) = \sum_{j \in J} \omega(A_j \setminus B) = \sum_{j \in J} \omega_a(A_j), \\ \omega_s(A) &= \omega\left(\bigcup_{j \in J} (A_j \cap B)\right) = \sum_{j \in J} \omega(A_j \cap B) = \sum_{j \in J} \omega_s(A_j),\end{aligned}$$

em ambos os casos com as família absolutamente somáveis, o que mostra que ω_a e ω_s são efetivamente medidas vetoriais. Por outro lado, dado $A \in \mathcal{M}$, consideremos uma família finita arbitrária $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{M} contidos em A e disjuntos dois a dois. Reparando que os $B_i \setminus B$ são disjuntos dois a dois e contidos em $A \setminus B$ e que os $B_i \cap B$ são disjuntos dois a dois e contidos em $A \cap B$ e tendo em conta a caracterização de $|\omega|_a$ e $|\omega|_s$ em III.3.7, assim como a caracterização das medidas de variação total, vemos que

$$\sum_{i \in I} \|\omega_a(B_i)\| = \sum_{i \in I} \|\omega(B_i \setminus B)\| \leq |\omega|(A \setminus B) = |\omega|_a(A),$$

$$\sum_{i \in I} \|\omega_s(B_i)\| = \sum_{i \in I} \|\omega(B_i \cap B)\| \leq |\omega|(A \cap B) = |\omega|_s(A),$$

e portanto

$$|\omega_a|(A) \leq |\omega|_a(A), \quad |\omega_s|(A) \leq |\omega|_s(A).$$

b) Para cada $A \in \mathcal{M}$, A é a união dos conjuntos $A \setminus B$ e $A \cap B$, que são disjuntos, pelo que

$$\omega(A) = \omega(A \setminus B) + \omega(A \cap B) = \omega_a(A) + \omega_s(A).$$

c) Vamos verificar que ω_a é uma medida μ -absolutamente contínua e que ω_s é uma medida μ -singular, e portanto que elas constituem uma decomposição de Lebesgue da medida vetorial ω .

Subdem: Se $A \in \mathcal{M}$ verifica $\mu(A) = 0$, vem

$$0 = |\omega|_a(A) = |\omega|(A \setminus B),$$

portanto também

$$\omega_a(A) = \omega(A \setminus B) = 0,$$

o que mostra que ω_a é μ -absolutamente contínua. Por outro lado, se $A \in \mathcal{M}$ verifica $A \subset X \setminus B$, então

$$\omega_s(A) = \omega(A \cap B) = \omega(\emptyset) = 0,$$

o que mostra que ω_s é μ -singular.

d) Vamos mostrar finalmente que, para cada $A \in \mathcal{M}$, as desigualdades obtidas em a) são mesmo igualdades:

$$|\omega_a|(A) = |\omega|_a(A), \quad |\omega_s|(A) = |\omega|_s(A),$$

o que terminará a demonstração.

Subdem: Suponhamos, por absurdo, que pelo menos uma das desigualdades estabelecidas em a) era estrita. Seja $(B_i)_{i \in I}$ uma família finita arbitrária de conjuntos de \mathcal{M} contidos em A e disjuntos dois a dois. Uma vez que, para cada $i \in I$, B_i é a união disjunta dos conjuntos $B_i \setminus B$ e $B_i \cap B$ e reparando que os conjuntos $B_i \setminus B$ são disjuntos dois a dois e contidos em $A \setminus B$ e que os conjuntos $B_i \cap B$ são disjuntos dois a dois e contidos em $A \cap B$, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} \|\omega(B_i)\| &= \sum_{i \in I} \|\omega(B_i \setminus B) + \omega(B_i \cap B)\| \leq \\
&\leq \sum_{i \in I} \|\omega(B_i \setminus B)\| + \sum_{i \in I} \|\omega(B_i \cap B)\| = \\
&= \sum_{i \in I} \|\omega_a(B_i)\| + \sum_{i \in I} \|\omega_s(B_i)\| \leq |\omega_a|(A) + |\omega_s|(A)
\end{aligned}$$

e portanto, considerando o supremo das somas no primeiro membro,

$$|\omega|(A) \leq |\omega_a|(A) + |\omega_s|(A) < |\omega|_a(A) + |\omega|_s(A) = |\omega|(A),$$

o que era absurdo. \square

Vamos agora exigir mais sobre o espaço de Banach E onde a medida vetorial toma valores, nomeadamente que se trata de um espaço de Hilbert, e verificar que, nesse caso, qualquer medida vetorial $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ é da forma $\mu_{(f)}$ para uma medida positiva $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e uma aplicação μ -integrável $f: X \rightarrow E$ convenientes (de facto, podemos tomar $\mu = |\omega|$). Daqui deduziremos facilmente uma versão do teorema de Radon-Nikodym para medidas vetoriais.

III.7.19 (Decomposição polar numa medida vetorial) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Hilbert sobre \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma medida vetorial e consideremos a correspondente medida positiva $\mu = |\omega|: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Existe então uma aplicação μ -integrável $f: X \rightarrow E$ tal que $\omega = \mu_{(f)}$ e $\|f(x)\| = 1$ quase sempre.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

1) Uma vez que a medida μ é finita, relativamente a esta medida as aplicações em escada são as mesmas que as aplicações simples (cf. II.2.16). Consideremos o espaço vetorial $\mathcal{S}(X, E)$ das aplicações simples $g: X \rightarrow E$. Vamos provar a existência de uma aplicação linear $\Phi_0: \mathcal{S}(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ tal que, para cada aplicação em escada $g: X \rightarrow E$ e cada família finita $(X_j)_{j \in J}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que $g(x)$ tome o valor constante w_j para $x \in X_j$,

$$\Phi_0(g) = \sum_{j \in J} \langle w_j, \omega(X_j) \rangle. \quad 170$$

Subdem: Para mostrar que a aplicação Φ_0 está bem definida, o que temos que verificar é que, dada outra família finita $(X'_k)_{k \in K}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que $g(x)$ tome o valor constante w'_k para $x \in X'_k$, tem-se

¹⁷⁰A existência de uma tal “partição adaptada” foi estabelecida em II.2.17.

$$\sum_{j \in J} \langle w_j, \omega(X_j) \rangle = \sum_{k \in K} \langle w'_k, \omega(X'_k) \rangle$$

e isso resulta de que

$$\sum_{j \in J} \langle w_j, \omega(X_j) \rangle = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} \langle w_j, \omega(X_j \cap X'_k) \rangle \right) = \sum_{(j,k) \in J \times K} \langle w_j, \omega(X_j \cap X'_k) \rangle$$

e, por troca dos papéis das duas partições, também

$$\sum_{k \in K} \langle w'_k, \omega(X'_k) \rangle = \sum_{(j,k) \in J \times K} \langle w'_k, \omega(X_j \cap X'_k) \rangle$$

onde, para cada par $(j, k) \in J \times K$

$$\langle w_j, \omega(X_j \cap X'_k) \rangle = \langle w'_k, \omega(X_j \cap X'_k) \rangle$$

uma vez que ambos os membros desta igualdade são 0, no caso em que $X_j \cap X'_k = \emptyset$, e, caso contrário, $w_j = w'_k$, já que ambos os vetores são iguais a $f(x)$, para x em $X_j \cap X'_k$.¹⁷¹ A linearidade da aplicação Φ_0 é uma consequência direta da definição, desde que nos lembremos que, dadas duas aplicações simples, existe uma partição simultaneamente adaptada a ambas (cf. II.2.23).

2) Consideremos o espaço vectorial $St(X, E)$ das classes de equivalência de aplicações em escada $g: X \rightarrow E$ que, como referido em III.2.26 e III.2.31, é um subespaço vectorial denso do espaço de Hilbert $L^2(X, E)$ (onde a medida positiva considerada é a medida μ). Tem então lugar uma aplicação linear contínua $\Phi: St(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $\Phi([g]) = \Phi_0(g)$, para a qual se tem

$$|\Phi([g])| \leq \mu(X)^{1/2} \|[g]\|_2.$$

Subdem: Consideremos uma família finita $(X_j)_{j \in J}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que $g(x)$ tome o valor constante w_j para $x \in X_j$. Podemos então escrever, tendo em conta duas vezes a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e notando $\varphi(x) = \|g(x)\|$,

$$\begin{aligned} |\Phi_0(g)| &\leq \sum_{j \in J} |\langle w_j, \omega(X_j) \rangle| \leq \sum_{j \in J} \|w_j\| \|\omega(X_j)\| \leq \sum_{j \in J} \|w_j\| \mu(X_j) = \\ &= \int_X \|g(x)\| d\mu(x) = |\langle [1], [\varphi] \rangle| \leq \|[1]\|_2 \|\varphi\|_2 = \mu(X)^{1/2} \|[g]\|_2. \end{aligned}$$

Concluimos daqui, em particular, que se $[g] = [\hat{g}]$ em $St(X, E)$, então

$$|\Phi_0(g) - \Phi_0(\hat{g})| = |\Phi_0(g - \hat{g})| \leq \mu(X)^{1/2} \|[g] - [\hat{g}]\|_2 = 0,$$

¹⁷¹Comparar com II.2.19, reparando que agora a situação é mais simples por não ser necessário lidar com o problema levantado por conjuntos de medida infinita.

portanto $\Phi_0(g) = \Phi_0(\widehat{g})$, o que mostra que fica bem definida uma aplicação linear $\Phi: St(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ por $\Phi([g]) = \Phi_0(g)$, a qual vai verificar a desigualdade enunciada.

3) Vamos mostrar a existência de $[f] \in L^2(X, E)$ tal que, para todo o $[g] \in St(X, E)$,

$$\Phi([g]) = \langle [g], [f] \rangle = \int_X \langle g(x), f(x) \rangle d\mu(x).$$

Subdem: O teorema de Topologia sobre a extensão de aplicações lineares contínuas definidas em subespaços vetoriais densos garante a existência de uma única aplicação linear contínua $\overline{\Phi}: L^2(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ que prolongue a aplicação linear contínua $\Phi: St(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ definida em 2). Pelo teorema da representação de Riesz, sobre funcionais lineares contínuos num espaço de Hilbert, vai existir assim $[f] \in L^2(X, E)$ tal que, para todo o $[g] \in L^2(X, E)$, $\overline{\Phi}([g]) = \langle [g], [f] \rangle$, em particular, para cada $[g] \in St(X, E)$, $\Phi([g]) = \langle [g], [f] \rangle$.

4) Tendo em conta III.2.12, vemos que, em particular, a aplicação $f: X \rightarrow E$ é integrável e vamos mostrar que ela verifica as condições referidas no enunciado. Seja $A \in \mathcal{M}$ e consideremos $w \in E$ arbitrário. Tomando em 3), para g , a função simples $g(x) = \mathbb{I}_A(x)w$, obtemos, considerando a aplicação linear, no sentido real, $E \rightarrow \mathbb{K}$, $z \mapsto \langle w, z \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle w, \omega(A) \rangle &= \Phi([g]) = \int \langle \mathbb{I}_A(x)w, f(x) \rangle d\mu(x) = \\ &= \int_A \langle w, f(x) \rangle d\mu(x) = \left\langle w, \int_A f(x) d\mu(x) \right\rangle, \end{aligned}$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de w , implica que

$$\omega(A) = \int_A f(x) d\mu(x) = \mu_{(f)}(A),$$

portanto $\omega = \mu_{(f)}$. Reparámos agora que, tendo em conta III.7.12, tem-se, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\int_A 1 d\mu(x) = \mu(A) = |\omega|(A) = |\mu_{(f)}|(A) = \int_A \|f(x)\| d\mu(x)$$

e daqui deduzimos, tendo em conta a alínea c) de III.3.3, que $\|f(x)\| = 1$ quase sempre. \square

III.7.20 (Corolário) Sob as hipóteses anteriores, se afastarmos o caso trivial em que $E = \{0\}$, pode-se mesmo garantir a existência de uma aplicação μ -integrável $f: X \rightarrow E$ tal que $\omega = \mu_{(f)}$ e $\|f(x)\| = 1$, para todo o $x \in X$.

Dem: Sendo $\widehat{f}: X \rightarrow E$ uma aplicação μ -integrável tal que $\omega = \mu_{(\widehat{f})}$ e $\|\widehat{f}(x)\| = 1$ quase sempre, basta escolher $w_0 \in E \setminus \{0\}$ e definir $f: X \rightarrow E$

por

$$f(x) = \begin{cases} \widehat{f}(x), & \text{se } \|\widehat{f}(x)\| = 1 \\ \frac{w_0}{\|w_0\|}, & \text{se } \|\widehat{f}(x)\| \neq 1 \end{cases} \quad \square$$

III.7.21 (Teorema de Radon-Nikodym para medidas vetoriais) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Hilbert, $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida positiva σ -finita e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma medida vetorial μ -absolutamente contínua. Existe então uma função μ -integrável $g: X \rightarrow E$ tal que $\omega = \mu(g)$.

Dem: Tendo em conta III.7.19, sabemos que, sendo $\widehat{\mu} = |\omega|$ a medida positiva associada a ω , existe uma função $\widehat{\mu}$ -integrável $f: X \rightarrow E$ tal que $\omega = \widehat{\mu}(f)$. Reparemos agora que, sempre que $A \in \mathcal{M}$ verifica $\mu(A) = 0$, tem-se, para cada $B \subset A$ em \mathcal{M} , $\mu(B) = 0$, portanto, por hipótese, $\omega(B) = 0$, e daqui concluímos que se tem também $\widehat{\mu}(A) = |\omega|(A) = 0$. Podemos assim aplicar o teorema de Radon-Nikodym em III.3.9 para garantir a existência de uma aplicação mensurável $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\widehat{\mu} = \mu(\varphi)$. Tem-se então que a aplicação topologicamente mensurável $g: X \rightarrow E$ definida por $g(x) = \varphi(x)f(x)$ verifica

$$\int_X \|g(x)\| d\mu(x) = \int_X \varphi(x)\|f(x)\| d\mu(x) = \int_X \|f(x)\| d\widehat{\mu}(x) < +\infty,$$

sendo assim μ -integrável, e vem, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\omega(A) = \int_A f(x) d\widehat{\mu}(x) = \int_A \varphi(x)f(x) d\mu(x) = \int_A g(x) d\mu(x),$$

o que mostra que se tem efetivamente $\omega = \mu(g)$. □

Vamos agora utilizar o estudo que fizemos das medidas vetoriais, em especial daquelas com valores num espaço de Hilbert E sobre o corpo \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , para estudar resultados de dualidade envolvendo os espaços $L^p(X, E)$, onde (X, \mathcal{M}, μ) é um espaço de medida que, para simplificar certos enunciados, suporemos sempre σ -finito. Como motivação, recordamos que, como se viu em III.2.31, $L^2(X, E)$ é um espaço de Hilbert, com o produto interno definido por

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x),$$

em particular, por uma propriedade geral dos espaços de Hilbert, que já tivemos a ocasião de utilizar¹⁷², para cada $[g] \in L^2(X, E)$ tem lugar uma aplicação linear contínua $\xi_{[g]}: L^2(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$, definida por

$$\xi_{[g]}([f]) = \langle [f], [g] \rangle,$$

¹⁷²Ver qualquer texto introdutório de Análise Funcional, por exemplo, [9].

e podemos mesmo afirmar (teorema da representação de Riesz) que toda a aplicação linear contínua $L^2(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ é da forma $\xi_{[g]}$, para um único $[g] \in L^2(X, E)$.

Começamos por referir um artifício técnico trivial que permite ultrapassar comodamente o embaraço de aplicar resultados que envolvem uma aplicação bilinear à situação em que trabalhamos com o produto interno de um espaço de Hilbert complexo que, como é bem conhecido, é antilinear na segunda variável.

III.7.22 (Nota técnica trivial) a) Se E é um espaço vetorial complexo, podemos considerar sobre o mesmo conjunto uma nova estrutura de espaço vetorial complexo, em que a soma está definida do mesmo modo que na estrutura inicial mas o produto de um escalar complexo a por um vetor w é, por definição, o produto do conjugado \bar{a} por w , relativamente à estrutura original. Notamos \bar{E} este novo espaço vetorial complexo e dizemos que ele é o *espaço vetorial complexo conjugado* de E . É claro que o espaço vetorial conjugado de \bar{E} é o espaço E . No caso em que E é um espaço vetorial real, é por vezes cómodo usar a notação \bar{E} como sinónima de E (o conjugado de um número real é ele mesmo...).

b) Uma norma sobre o espaço vetorial complexo E é também uma norma sobre o espaço conjugado \bar{E} . Em particular, se E é um espaço de Banach, o mesmo acontece com \bar{E} . Uma aplicação integrável, definida num espaço de medida positiva e com valores num espaço de Banach E , é também integrável, e com o mesmo integral, como aplicação com valores em \bar{E} (a multiplicação por escalares que não sejam reais não joga nenhum papel na definição do integral).

c) Se (X, \mathcal{M}) é um espaço mensurável, E é um espaço de Banach e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ é uma E -medida, então ω é também uma \bar{E} -medida (como antes, a multiplicação pelos escalares não joga nenhum papel na definição das medidas vetoriais).

d) Lembremos que, se E e F são espaços vetoriais complexos, uma aplicação *antilinear* $\alpha: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear, no sentido real, que verifica $\alpha(aw) = \bar{a}\alpha(w)$, para cada $a \in \mathbb{C}$ e $w \in E$. Uma aplicação antilinear $\alpha: E \rightarrow F$ é assim a mesma coisa que uma aplicação linear $\alpha: \bar{E} \rightarrow F$ e que uma aplicação linear $\alpha: E \rightarrow \bar{F}$. Em particular, se E é um espaço de Hilbert complexo, o produto interno, apesar de não ser, em geral, bilinear, como aplicação $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, já é bilinear, como aplicação $E \times \bar{E} \rightarrow \mathbb{C}$.

III.7.23 Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida σ -finito¹⁷³, E um espaço de Hilbert sobre o corpo \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , e $1 \leq p \leq +\infty$ e $1 \leq q \leq +\infty$ dois

¹⁷³De facto, como se constata pela demonstração, a hipótese de a medida ser σ -finita é aqui totalmente desnecessária. Só a impomos para podermos retomar as mesmas hipóteses em III.7.24, resultado em que ela intervém na demonstração de um dos casos limites.

expoentes conjugados¹⁷⁴. Podemos então definir, para cada $[f] \in L^p(X, E)$ e $[g] \in L^q(X, E)$, um produto $\langle [f], [g] \rangle \in \mathbb{K}$ por

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x),$$

e ficamos com uma aplicação bilinear contínua

$$L^p(X, E) \times \overline{L^q(X, E)} \rightarrow \mathbb{K}, \quad ([f], [g]) \mapsto \langle [f], [g] \rangle$$

(cf. a noção de espaço vetorial conjugado em III.7.22), para a qual se tem

$$|\langle [f], [g] \rangle| \leq \| [f] \|_p \times \| [g] \|_q.$$

Dem: Se $[f] \in L^p(X, E)$ e $[g] \in L^q(X, E)$, o facto de o produto interno de E ser uma aplicação bilinear contínua $E \times \overline{E} \rightarrow \mathbb{K}$ implica que é topologicamente mensurável a função $X \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f(x), g(x) \rangle| \leq \| f(x) \| \| g(x) \|$$

implica, pela desigualdade de Hölder (cf. III.1.17 e III.2.18) que aquela função é integrável, e com

$$\left| \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x) \right| \leq \int_X \| f(x) \| \| g(x) \| d\mu(x) \leq \| [f] \|_p \times \| [g] \|_q.$$

É agora fácil constatar que ficamos com uma aplicação bem definida

$$L^p(X, E) \times \overline{L^q(X, E)} \rightarrow \mathbb{K}, \quad ([f], [g]) \mapsto \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x)$$

(isto é, que o integral não se altera quando se substitui f e g por aplicações topologicamente mensuráveis iguais quase sempre a estas) e que esta aplicação é bilinear e verifica a desigualdade no enunciado, em particular é contínua. \square

Recordemos que, se F e G são espaços de Banach e $\lambda: F \rightarrow G$ é uma aplicação linear contínua, a sua norma $\| \lambda \|$ é o menor dos números $M \geq 0$ tais que, para cada $v \in F$, $\| \lambda(v) \| \leq M \| v \|$ e pode ser também caracterizada, no caso em que $F \neq \{0\}$, como o supremo dos quocientes $\| \lambda(v) \| / \| v \|$, com $v \neq 0$ em F .

III.7.24 Nas condições de III.7.23, para cada $[g] \in L^q(X, E)$, tem lugar uma aplicação linear contínua $\xi_{[g]}: L^p(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$, definida por

¹⁷⁴Por outras palavras, ou $1 < p < +\infty$ e $1 < q < +\infty$ verificam $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ou $p = 1$ e $q = +\infty$, ou $p = +\infty$ e $q = 1$.

$$\xi_{[g]}([f]) = \langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x),$$

cuja norma é $\|\xi_{[g]}\| = \|[g]\|_q$. Fica assim definida uma aplicação linear contínua injetiva de $\overline{L^q(X, E)}$ para o dual $L(L^p(X, E); \mathbb{K})$, que a $[g]$ associa $\xi_{[g]}$.

Dem: A linearidade de $\xi_{[g]}: L^p(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ é simplesmente a linearidade na primeira variável da aplicação $([f], [g]) \mapsto \langle [f], [g] \rangle$ e a continuidade desta aplicação linear é uma consequência de se ter

$$|\xi_{[g]}([f])| = |\langle [f], [g] \rangle| \leq \|[f]\|_p \times \|[g]\|_q,$$

desigualdade que implica também que $\|\xi_{[g]}\| \leq \|[g]\|_q$. A linearidade na segunda variável da aplicação referida implica agora que é linear contínua, de $\overline{L^q(X, E)}$ para $L(L^p(X, E); \mathbb{K})$, a aplicação $[g] \mapsto \xi_{[g]}$, aplicação que poderemos concluir que é injetiva se provarmos que $\|\xi_{[g]}\| = \|[g]\|_q$. Resta-nos assim provar esta última igualdade, para o que podemos já afastar o caso trivial em que $\|[g]\|_q = 0$, por outras palavras, podemos já supor que não se tem $g(x) = 0$ quase sempre. Tratamos separadamente os casos em que $q < +\infty$ e em que $q = +\infty$.

A) Suponhamos que $q < +\infty$. Uma vez que $\|\xi_{[g]}\| \leq \|[g]\|_q$, para provarmos a igualdade $\|\xi_{[g]}\| = \|[g]\|_q$ basta-nos encontrar $[f] \in L^p(X, E)$ tal que se tenha

$$(1) \quad |\xi_{[g]}([f])| = |\langle [f], [g] \rangle| = \|[f]\|_p \times \|[g]\|_q.$$

Consideremos a aplicação topologicamente mensurável $f: X \rightarrow E$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \|g(x)\|^{q-2} g(x), & \text{se } g(x) \neq 0 \\ 0, & \text{se } g(x) = 0 \end{cases}$$

No caso em que $q = 1$, e portanto $p = \infty$, tem-se $\|f(x)\| = 1$, se $g(x) \neq 0$ e $\|f(x)\| = 0$, caso contrário, pelo que $[f] \in L^\infty(X, E)$ e $\|[f]\|_\infty = 1$. No caso em que $q > 1$, e portanto $p < +\infty$, tem-se

$$(2) \quad (q-1)p = pq - p = pq\left(1 - \frac{1}{q}\right) = q$$

e portanto, para cada $x \in X$,

$$\|f(x)\|^p = \|g(x)\|^{(q-1)p} = \|g(x)\|^q,$$

donde, mais uma vez tendo em conta (2), $[f] \in L^p(X, E)$ e

$$(3) \quad \begin{aligned} \| [f] \|_p &= \left(\int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \\ &= \left(\int_X \|g(x)\|^q d\mu(x) \right)^{1/p} = (\| [g] \|_q)^{q/p} = (\| [g] \|_q)^{q-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $x \in X$, $\langle f(x), g(x) \rangle = \|g(x)\|^q$ donde

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X \|g(x)\|^q d\mu(x) = \| [g] \|_q^q$$

pelo que, no caso em que $q = 1$, temos

$$\langle [f], [g] \rangle = \| [g] \|_1 = \| [f] \|_\infty \times \| [g] \|_1,$$

o que implica (1), e, no caso em que $q > 1$, temos

$$\langle [f], [g] \rangle = (\| [g] \|_q)^{q-1} \times \| [g] \|_q = \| [f] \|_p \times \| [g] \|_q,$$

o que, mais uma vez, implica (1).

B) Supomos agora que $[g] \in L^\infty(X, E)$. Uma vez que $\| \xi_{[g]} \| \leq \| [g] \|_\infty$, para provarmos a igualdade $\| \xi_{[g]} \| = \| [g] \|_\infty$ basta-nos mostrar que, fixado arbitrariamente $0 < a < \| [g] \|_\infty$, podemos encontrar $[f] \in L^1(X, E)$ tal que se tenha

$$(4) \quad | \xi_{[g]}([f]) | = | \langle [f], [g] \rangle | > \| [f] \|_1 \times a.$$

Ora, o facto de não se ter $\|g(x)\| \leq a$ quase sempre permite-nos considerar $A \in \mathcal{M}$, com $\mu(A) > 0$ tal que $\|g(x)\| > a$ para cada $x \in A$, podendo já supor-se que $\mu(A) < +\infty$, se necessário considerando uma família contável $(X_j)_{j \in J}$ de conjuntos de \mathcal{M} com união X e $\mu(X_j) < +\infty$ ¹⁷⁵ e substituindo A por $A \cap X_j$, para um índice j conveniente. Seja então $f: X \rightarrow E$ a aplicação topologicamente mensurável definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\|g(x)\|}, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Tem-se

$$\int_X \|f(x)\| d\mu(x) = \int_A 1 d\mu(x) = \mu(A),$$

donde $[f] \in L^1(X, E)$ e $\| [f] \|_1 = \mu(A)$, e, tendo em conta II.2.44,

¹⁷⁵É para o podermos fazer que precisamos da hipótese de μ ser σ -finita.

$$\begin{aligned} \langle [f], [g] \rangle &= \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x) = \int_A \|g(x)\| d\mu(x) > \\ &> \int_A a d\mu(x) = a\mu(A) = \| [f] \|_1 \times a, \end{aligned}$$

o que implica (4). □

Vamos agora estabelecer o teorema de dualidade que afirma que, no caso em que $1 \leq p < +\infty$, e portanto $1 < q \leq +\infty$, a aplicação linear injetiva referida no resultado precedente é mesmo um isomorfismo. Começamos com um lema que corresponde ao caso particular em que X tem medida finita.

III.7.25 (Lema de dualidade) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$, E um espaço de Hilbert sobre o corpo \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , e $1 \leq p < +\infty$. Seja $1 < q \leq +\infty$ o expoente conjugado de p . Se

$$\Phi: L^p(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$$

é uma aplicação linear contínua, então existe $[g] \in L^q(X, E)$ tal que $\Phi = \xi_{[g]}$, isto é, tal que, para cada $[f] \in L^p(X, E)$,

$$\Phi([f]) = \langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x).$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas, cada uma com a sua própria demonstração:

1) Vamos verificar que, para cada $A \in \mathcal{M}$, existe um, e um só, $\omega(A) \in E$ tal que, para cada $w \in E$,

$$\langle w, \omega(A) \rangle = \Phi([\mathbb{I}_A w]),$$

tendo-se então $\|\omega(A)\| \leq \|\Phi\| \mu(A)^{1/p}$.

Subdem: Começemos por reparar que, por ser $\mu(X) < +\infty$, e portanto também $\mu(A) < +\infty$, podemos escrever

$$\int_X \|\mathbb{I}_A(x)w\|^p d\mu(x) = \int_A \|w\|^p d\mu(x) = \mu(A)\|w\|^p < +\infty,$$

o que mostra que se tem $[\mathbb{I}_A w] \in L^p(X, E)$ e $\|[\mathbb{I}_A w]\|_p \leq \mu(A)^{1/p} \|w\|$, donde

$$|\Phi([\mathbb{I}_A w])| \leq \|\Phi\| \|[\mathbb{I}_A w]\|_p \leq \|\Phi\| \mu(A)^{1/p} \|w\|.$$

Concluimos daqui que, fixado $A \in \mathcal{M}$, tem lugar uma aplicação linear contínua de E para \mathbb{K} , que a w associa $\Phi([\mathbb{I}_A w])$, e que esta aplicação linear contínua tem uma norma menor ou igual a $\|\Phi\| \mu(A)^{1/p}$ pelo que, pelo teorema da representação de Riesz, sobre funcionais lineares contínuos num

espaço de Hilbert, existe um único $\omega(A) \in E$ tal que, para cada $w \in E$,

$$\Phi([\mathbb{I}_A w]) = \langle w, \omega(A) \rangle,$$

elemento esse que verifica $\|\omega(A)\| \leq \|\Phi\| \mu(A)^{1/p}$.

2) Vamos percorrer meio caminho no sentido de mostrar que a aplicação $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ é uma medida vetorial, mais precisamente, vamos mostrar que $\omega(\emptyset) = 0$ e que, se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família finita de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois, então, sendo $A = \bigcup_{j \in J} A_j$, tem-se $\omega(A) = \sum_{j \in J} \omega(A_j)$.

Subdem: Uma vez que, para cada $x \in X$, $\mathbb{I}_A(x) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j}(x)$, vem,

para cada $w \in E$,

$$\langle w, \omega(A) \rangle = \Phi([\mathbb{I}_A w]) = \sum_{j \in J} \Phi([\mathbb{I}_{A_j} w]) = \sum_{j \in J} \langle w, \omega(A_j) \rangle = \langle w, \sum_{j \in J} \omega(A_j) \rangle$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de w , implica que se tem efetivamente $\omega(A) = \sum_{j \in J} \omega(A_j)$. A igualdade $\omega(\emptyset) = 0$ pode ser demonstrada de forma

análoga mas também resulta de se ter $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, donde $\omega(\emptyset) = \omega(\emptyset) + \omega(\emptyset)$.

3) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família finita de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois, então, sendo $A = \bigcup_{j \in J} A_j$, tem-se

$$\sum_{j \in J} \|\omega(A_j)\| \leq \|\Phi\| \mu(A)^{1/p}.$$

Subdem: Para cada $j \in J$, ponhamos $w_j = 0$ se $\omega(A_j) = 0$ e $w_j = \frac{\omega(A_j)}{\|\omega(A_j)\|}$ caso contrário, reparando que, em qualquer dos casos $\|w_j\| \leq 1$ e

$$\langle w_j, \omega(A_j) \rangle = \|\omega(A_j)\|.$$

Podemos então escrever, uma vez que a função simples $\sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j} w_j$ toma o valor w_j em A_j e o valor 0 em $X \setminus A$,

$$\begin{aligned} \left\| \left[\sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j} w_j \right] \right\|_p &= \left(\int_X \left\| \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j}(x) w_j \right\|^p d\mu(x) \right)^{1/p} = \\ &= \left(\sum_{j \in J} \int_{A_j} \|w_j\|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j \in J} \int_{A_j} 1 d\mu(x) \right)^{1/p} = \\ &= \left(\sum_{j \in J} \mu(A_j) \right)^{1/p} = \mu(A)^{1/p} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \|\omega(A_j)\| &= \sum_{j \in J} \langle w_j, \omega(A_j) \rangle = \sum_{j \in J} \Phi(\mathbb{I}_{A_j} w_j) = \Phi\left(\left[\sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j} w_j\right]\right) \leq \\ &\leq \|\Phi\| \left\| \left[\sum_{j \in J} \mathbb{I}_{A_j} w_j\right] \right\|_p \leq \|\Phi\| \mu(A)^{1/p}. \end{aligned}$$

4) Seja agora, mais geralmente, $(A_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e seja $A = \bigcup_{j \in J} A_j$. Vamos verificar que a família dos $\omega(A_j) \in E$ é absolutamente somável, com $\sum_{j \in J} \|\omega(A_j)\| \leq \|\Phi\| \mu(A)^{1/p}$, e que $\omega(A) = \sum_{j \in J} \omega(A_j)$. Em particular, ficará provado que $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ é uma medida vetorial.

Subdem: Para cada parte finita $I \subset J$, podemos aplicar a conclusão de 3) à família dos A_j , com $j \in J$, cuja união está contida em A , para deduzir que

$$\sum_{j \in I} \|\omega(A_j)\| \leq \|\Phi\| \mu\left(\bigcup_{j \in I} A_j\right)^{1/p} \leq \|\Phi\| \mu(A)^{1/p}$$

pelo que a definição da soma infinita como supremo das somas finitas implica que se tem efetivamente $\sum_{j \in J} \|\omega(A_j)\| \leq \|\Phi\| \mu(A)^{1/p}$. Em particular, a

família dos $\omega(A_j)$, com $j \in J$, é absolutamente somável, e portanto somável. Seja agora $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $\|\Phi\| \varepsilon^{1/p} < \delta$. Tendo em conta o facto de se ter $\mu(A) = \sum_{j \in J} \mu(A_j) < +\infty$, podemos considerar um

parte finita $I_0 \subset J$ tal que, para cada parte finita $I \subset J$, com $I \supset I_0$, se tenha

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{j \in I} A_j\right) = \mu(A) - \sum_{j \in I} \mu(A_j) < \varepsilon.$$

Por outro lado, aplicando 2), à família finita de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e de união A constituída pelos A_j , com $j \in I$, e por $A \setminus \bigcup_{j \in I} A_j$,

vemos que

$$\omega(A) = \omega\left(A \setminus \bigcup_{j \in I} A_j\right) + \sum_{j \in I} \omega(A_j),$$

donde, lembrando a conclusão de 1),

$$\begin{aligned} \left\| \omega(A) - \sum_{j \in I} \omega(A_j) \right\| &= \left\| \omega\left(A \setminus \bigcup_{j \in I} A_j\right) \right\| \leq \\ &\leq \|\Phi\| \mu\left(A \setminus \bigcup_{j \in I} A_j\right)^{1/p} \leq \|\Phi\| \varepsilon^{1/p} < \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que se tem efetivamente $\omega(A) = \sum_{j \in J} \omega(A_j)$.

5) Vamos verificar a existência de uma aplicação integrável $g: X \rightarrow E$ tal que $\omega = \mu_{(g)}$ isto é, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\omega(A) = \int_A g(x) d\mu(x).$$

Subdem: Temos uma consequência do teorema de Radon-Nikodym para medidas vetoriais (cf. III.7.21), desde que mostremos que se tem $\omega(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) = 0$. Ora, isso resulta de se ter então, para cada $w \in E$, $\mathbb{I}_A(x)w = 0$ quase sempre, donde $[\mathbb{I}_A w] = 0$, e portanto

$$\langle w, \omega(A) \rangle = \Phi([\mathbb{I}_A w]) = 0 = \langle w, 0 \rangle.$$

6) Tem-se $[g] \in L^1(X, E)$ e vamos mostrar que, qualquer que seja a aplicação simples $f: X \rightarrow E$, tem-se $[f] \in L^\infty(X, E) \subset L^p(X, E)$ e

$$\Phi([f]) = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x) = \langle [f], [g] \rangle.$$

Subdem: O facto de se ter $[g] \in L^1(X, E)$ é simplesmente uma tradução de $g: X \rightarrow E$ ser integrável. É evidente que, se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação simples, então $[f] \in L^\infty(X, E)$ e a inclusão $L^\infty(X, E) \subset L^p(X, E)$ resulta de se ter $\mu(X) < +\infty$ (cf. III.2.23). Seja agora $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e de união X tal que $f(x)$ tenha o valor constante w_j para $x \in X_j$. Tem-se, para cada $x \in X$, $f(x) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{X_j}(x)w_j$, pelo que obtemos

$$\begin{aligned} \Phi([f]) &= \sum_{j \in J} \Phi(\mathbb{I}_{X_j} w_j) = \sum_{j \in J} \langle w_j, \omega(X_j) \rangle = \sum_{j \in J} \left\langle w_j, \int_{X_j} g(x) d\mu(x) \right\rangle = \\ &= \sum_{j \in J} \int_{X_j} \langle w_j, g(x) \rangle d\mu(x) = \int_X \left\langle \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{X_j}(x)w_j, g(x) \right\rangle d\mu(x) = \\ &= \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x). \end{aligned}$$

7) Sendo $1 < q \leq +\infty$ o expoente conjugado de p , suponhamos que $Y \in \mathcal{M}$ é tal que $[g|_Y] \in L^q(Y, E)$. Vamos mostrar que, para cada aplicação topologicamente mensurável $f: Y \rightarrow E$ tal que $[f] \in L^p(Y, E)$, notando $\bar{f}: X \rightarrow E$ a aplicação topologicamente mensurável que prolonga f e é nula em $X \setminus Y$, que pertence trivialmente a $L^p(X, E)$, tem-se

$$\Phi([\bar{f}]) = \int_Y \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x).$$

Subdem: Tendo em conta III.2.26, podemos considerar uma sucessão

de aplicações em escada $f_n: Y \rightarrow E$ tal que $[f_n] \rightarrow [f]$ em $L^p(Y, E)$ e então, notando $\bar{f}_n: X \rightarrow E$ as aplicações em escada que prolongam os f_n e são nulas em $X \setminus Y$, tem-se $\|[f] - [f_n]\| = \|\bar{f} - \bar{f}_n\|$, e portanto também $\bar{f}_n \rightarrow \bar{f}$ em $L^p(X, E)$. Tendo em conta a continuidade da aplicação linear $\Phi: L^p(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ e da aplicação bilinear $L^p(Y, E) \times \overline{L^q(Y, E)} \rightarrow \mathbb{K}$ referida em III.7.23 e a conclusão de 6), vemos agora que

$$\begin{aligned} \Phi([\bar{f}]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi([\bar{f}_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \langle \bar{f}_n(x), g(x) \rangle d\mu(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y \langle f_n(x), g|_Y(x) \rangle d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle [f_n], [g|_Y] \rangle = \\ &= \langle [f], [g|_Y] \rangle = \int_Y \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x). \end{aligned}$$

8) Vamos agora mostrar que, de facto, tem-se mesmo $[g] \in L^q(X, E)$ e que, para cada $[f] \in L^p(X, E)$, $\Phi([f]) = \langle [f], [g] \rangle$, o que terminará a demonstração.

Subdem: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $X_n \in \mathcal{M}$,

$$X_n = \{x \in X \mid \|g(x)\| \leq n\}$$

e reparemos que os X_n constituem uma sucessão crescente de união X . Para cada n , tem-se, por definição $[g|_{X_n}] \in L^\infty(X_n, E)$ e portanto, por III.2.23, também $[g|_{X_n}] \in L^q(X_n, E)$. Podemos assim aplicar a conclusão de 7) para deduzir que, para cada aplicação topologicamente mensurável $f: X_n \rightarrow E$ tal que $[f] \in L^p(X, E)$, notando \bar{f} a aplicação topologicamente mensurável que prolonga f e é nula em $X \setminus X_n$, tem-se

$$\langle [f], [g|_{X_n}] \rangle = \int_{X_n} \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x) = \Phi([\bar{f}]) \leq \|\Phi\| \|\bar{f}\|_p = \|\Phi\| \| [f] \|_p$$

e portanto, tendo em conta III.7.24, concluímos que $\|[g|_{X_n}]\|_q \leq \|\Phi\|$.

Vamos verificar por fim que se pode deduzir daqui $[g] \in L^q(X, E)$, o que, aplicando a conclusão de 7) com $Y = X$, implicará, em particular, que se tem efetivamente $\Phi([f]) = \langle [f], [g] \rangle$, para cada $[f] \in L^p(X, E)$. Dividimos essa verificação em dois casos:

No caso em que $q = +\infty$, existe, para cada n , um conjunto $A_n \in \mathcal{M}$, com $A_n \subset X_n$ e $\mu(A_n) = 0$, tal que $\|g(x)\| \leq \|\Phi\|$ para cada $x \in X_n \setminus A_n$ e então a união A dos A_n é um conjunto de \mathcal{M} com $\mu(A_n) = 0$ tal que $\|g(x)\| \leq \|\Phi\|$ para cada $x \in X \setminus A$, o que mostra que se tem efetivamente $[g] \in L^\infty(X, E)$.

Supondo agora que $q < +\infty$, a desigualdade $\|[g|_{X_n}]\|_q \leq \|\Phi\|$ é traduzida por

$$\int_X \mathbb{I}_{X_n}(x) \|g(x)\|^q d\mu(x) \leq \|\Phi\|^q$$

pelo que, uma vez que as funções que a x associam $\mathbb{I}_{X_n}(x) \|g(x)\|^q$ constituem uma sucessão crescente convergente, para cada x , para $\|g(x)\|^q$, deduzimos do teorema da convergência monótona que

$$\int_X \|g(x)\|^q d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \mathbb{I}_{X_n}(x) \|g(x)\|^q d\mu(x) \leq \|\Phi\|^q < +\infty,$$

o que mostra que se tem efetivamente $[g] \in L^q(X, E)$. \square

III.7.26 (Teorema de dualidade) Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida σ -finito, E um espaço de Hilbert sobre o corpo \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , e $1 \leq p < +\infty$. Seja $1 < q \leq +\infty$ o expoente conjugado de p . Se

$$\Phi: L^p(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$$

é uma aplicação linear contínua, então existe $[g] \in L^q(X, E)$ tal que $\Phi = \xi_{[g]}$, isto é, tal que, para cada $[f] \in L^p(X, E)$,

$$\Phi([f]) = \langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x). \quad 176$$

Dem: Vamos utilizar o lema de Rudin em III.3.4 para deduzir este resultado do caso já estudado no lema precedente. Esse lema garante-nos a existência de uma medida finita $\mu': \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida por $\mu' = \mu_{(\rho)}$, para uma certa aplicação mensurável $\rho: X \rightarrow]0, +\infty[$, para a qual se tem, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\mu'(A) = 0$ se, e só se $\mu(A) = 0$.

Em particular coincidem as relações de equivalência no espaço das aplicações topologicamente mensuráveis $X \rightarrow E$ associadas a μ e a μ' , o que dá ao espaço vetorial $Mens(X, E)$ das classes de equivalência um significado que não depende de qual dessas duas medidas se considera, tal como sucede ao seu subespaço vetorial $L^\infty(X, E)$. Isso já não sucede com os subespaços $L^r(X, E)$, com $1 \leq r < +\infty$, pelo que reservaremos aquela notação para os associados à medida μ e usaremos a notação alterada $L^{r'}(X, E)$ quando considerarmos a medida μ' , usando a notação $\|\cdot\|_{r'}$ para a respetiva norma.

Feitas estas observações, vemos que se pode considerar um isomorfismo

$$\Gamma: Mens(X, E) \rightarrow Mens(X, E), \quad \Gamma([f]) = [\bar{f}],$$

onde $\bar{f}(x) = \rho(x)^{1/p} f(x)$, e portanto $f(x) = \rho(x)^{-1/p} \bar{f}(x)$. A igualdade

$$\int_X \|\bar{f}(x)\|^p d\mu(x) = \int_X \|f(x)\|^p \rho(x) d\mu(x) = \int_X \|f(x)\|^p d\mu'(x)$$

mostra que o isomorfismo Γ aplica $L^{p'}(X, E)$ sobre $L^p(X, E)$ e que se tem $\|\Gamma([f])\|_p = \|[f]\|_{p'}$, em particular o isomorfismo é contínuo. Temos assim, por composição, uma aplicação linear contínua $\Phi \circ \Gamma: L^{p'}(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ e o

¹⁷⁶Podemos dizer que $[g]$ “representa” o funcional linear contínuo Φ . A aplicação linear injetiva referida em III.7.24 é assim, neste caso, um isomorfismo.

lema precedente garante a existência de $[\hat{g}] \in L'^q(X, E)$ tal que, para cada $[f] \in L'^p(X, E)$,

$$\begin{aligned}\Phi([\bar{f}]) &= \Phi \circ \Gamma([f]) = \int_X \langle f(x), \hat{g}(x) \rangle d\mu'(x) = \\ &= \int_X \langle f(x), \hat{g}(x) \rangle \rho(x) d\mu(x) = \int_X \langle \bar{f}(x), \hat{g}(x) \rangle \rho(x)^{1-\frac{1}{p}} d\mu(x).\end{aligned}$$

No caso em que $p = 1$, e portanto $q = +\infty$, a igualdade anterior diz-nos que

$$\Phi([\bar{f}]) = \int_X \langle \bar{f}(x), \hat{g}(x) \rangle d\mu(x),$$

onde $[\hat{g}] \in L'^\infty(X, E) = L^\infty(X, E)$, que é a conclusão pretendida, desde que se tome $g = \hat{g}$. No caso em que $p > 1$, tem-se $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ e a igualdade referida diz-nos que

$$\Phi([\bar{f}]) = \int_X \langle \bar{f}(x), g(x) \rangle d\mu(x),$$

desde que se defina $g(x) = \rho(x)^{1/q} \hat{g}(x)$, o que é mais uma vez a conclusão pretendida, por ser

$$\int_X \|g(x)\|^q d\mu(x) = \int_X \|\hat{g}(x)\|^q \rho(x) d\mu(x) = \int_X \|\hat{g}(x)\|^p d\mu'(x) < +\infty,$$

e portanto $[g] \in L^q(X, E)$. □

III.7.27 (Uma variante trivial no caso $E = \mathbf{C}$) 1 No caso particular em que o espaço de Hilbert E , sobre o corpo \mathbb{K} , é o próprio \mathbb{K} , naturalmente com o produto interno habitual $\langle a, b \rangle = a \times \bar{b}$, no contexto de um espaço de medida σ -finito (X, \mathcal{M}, μ) , para cada par de expoentes conjugados $1 \leq p \leq +\infty$ e $1 \leq q \leq +\infty$, a aplicação bilinear

$$L^p(X, \mathbb{K}) \times \overline{L^q(X, \mathbb{K})} \rightarrow \mathbb{K}, \quad ([f], [g]) \mapsto \langle [f], [g] \rangle,$$

definida em III.7.23, está definida, mais explicitamente por

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X f(x) \times \overline{g(x)} d\mu(x).$$

É claro que, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e portanto a conjugação é a identidade, temos uma aplicação bilinear

$$L^p(X, \mathbb{R}) \times L^q(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([f], [g]) \mapsto \langle [f], [g] \rangle,$$

definida explicitamente por

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_X f(x) \times g(x) d\mu(x).$$

2) Já no caso em que $E = \mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos considerar uma aplicação bilinear contínua distinta da anteriormente referida, embora trivialmente redutível a esta,

$$L^p(X, \mathbb{C}) \times L^q(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad ([f], [g]) \mapsto \langle [f], [g] \rangle',$$

definida por

$$\langle [f], [g] \rangle' = \int_X f(x) \times g(x) d\mu(x) = \langle [f], [\bar{g}] \rangle.$$

Em contextos em que não se considera importante examinar a situação geral dos espaços de Hilbert, é esta a única aplicação bilinear que é costume considerar, escrevendo-se, conseqüentemente, $\langle [f], [g] \rangle$ em vez de $\langle [f], [g] \rangle'$.

3) Como consequência trivial do que verificámos em III.7.24 e III.7.26 vemos que, para cada $[g] \in L^q(X, \mathbb{C})$, tem lugar uma aplicação linear contínua

$$\xi'_{[g]}: L^p(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \xi'_{[g]}([f]) = \langle [f], [g] \rangle',$$

portanto $\xi'_{[g]} = \xi_{[\bar{g}]}$, para a qual se tem ainda $\|\xi'_{[g]}\| = \|[g]\|_q$, e ficamos com uma aplicação linear contínua injetiva

$$L^q(X, \mathbb{C}) \rightarrow L(L^p(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}), \quad [g] \mapsto \xi'_{[g]},$$

a qual é mesmo um isomorfismo no caso em que $1 \leq p < +\infty$ (ou, o que é equivalente, $1 < q \leq +\infty$).

Como segunda aplicação da decomposição polar de uma medida, referida em III.7.19, vamos agora definir, de modo simples, o integral de uma aplicação relativamente a uma medida vetorial. Como preço que temos que pagar por essa simplificação, apenas examinaremos o caso das medidas vetoriais com valores num espaço de Hilbert, o que será suficiente para o que pretendemos. Uma via alternativa, que inclui o caso das medidas com valores num espaço de Banach, mas que implica um caminho ligeiramente mais longo, será proposta adiante, como exercício para o leitor interessado (cf. o exercício III.7.5).

III.7.28 Sejam E e G espaços de Banach, F um espaço de Hilbert e $\xi: E \times F \rightarrow G$ uma aplicação bilinear contínua, para a qual, para $w \in E$ e $z \in F$, usamos a notação $w \times z$ como alternativa a $\xi(w, z)$. Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, $\omega: \mathcal{M} \rightarrow F$ uma F -medida e $\mu = |\omega|: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ a medida de variação total de ω . Dizemos que uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é *integrável*, relativamente a ω , se, e só se, ela é integrável relativamente a $\mu = |\omega|$ e, para uma tal aplicação, pode-se definir o seu integral, relativamente a ω , que notaremos

$$\int f \times d\omega \quad \text{ou} \quad \int f(x) \times d\omega(x)$$

pela condição de se ter

$$\int f(x) \times d\omega(x) = \int f(x) \times g(x) d\mu(x) \in G,$$

onde $g: X \rightarrow E$ é uma aplicação μ -integrável com $\|g(x)\| = 1$ quase sempre, tal que $\omega = \mu_{(g)}$ (cf. III.7.19).

Dem: Seja $M \geq 0$ tal que $\|\xi(w, z)\| \leq M\|w\|\|z\|$, para cada $w \in E$ e $z \in F$. Sendo $g: X \rightarrow E$ uma aplicação μ -integrável com $\|g(x)\| = 1$ quase sempre, tal que $\omega = \mu_{(g)}$, vemos que a aplicação topologicamente mensurável $X \rightarrow G$, $x \mapsto f(x) \times g(x)$ verifica quase sempre

$$\|f(x) \times g(x)\| \leq M\|f(x)\|\|g(x)\| \leq M\|f(x)\|,$$

o que implica que

$$\int \|f(x) \times g(x)\| d\mu(x) \leq \int M\|f(x)\| d\mu(x) = M \int \|f(x)\| d\mu(x) < +\infty,$$

e portanto temos mesmo uma aplicação integrável. O facto de o integral $\int f(x) \times d\omega(x)$ ficar bem definido pela igualdade no enunciado resulta de que, se também fosse $\omega = \mu_{(\hat{g})}$, para outra aplicação μ -integrável $\hat{g}: X \rightarrow E$, tinha-se, por III.7.13, $g(x) = \hat{g}(x)$ quase sempre, donde

$$\int f(x) \times g(x) d\mu(x) = \int f(x) \times \hat{g}(x) d\mu(x).$$

III.7.29 Usamos o sinal \times na notação do integral para sublinhar que este tem implícito uma aplicação bilinear à qual associámos o mesmo sinal. Um caso particular importante em que essa aplicação bilinear é especialmente natural é aquele em que $G = E$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} , $F = \mathbb{K}$ e a aplicação bilinear contínua $E \times \mathbb{K} \rightarrow E$ é a multiplicação pelos escalares. Nesse caso usaremos também a notação mais habitual

$$\int f(x) d\omega(x)$$

como alternativa a $\int f(x) \times d\omega(x)$. Repare-se que não há risco de confusão, no caso em que olhamos uma medida positiva finita $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{K}$ como \mathbb{K} -medida, uma vez que o integral $\int f(x) d\mu(x)$, quando se olha para μ como medida vetorial, coincide com o integral para a medida positiva (Reparar que se tem $\mu = \mu_{(1)}$).

III.7.30 (**Propriedades triviais do integral**) No contexto de III.7.28, tem-se:

a) Se $f, \hat{f}: X \rightarrow E$ são integráveis e a é um escalar, então $f + \hat{f}$ e af são

integráveis e

$$\int (f(x) + \widehat{f}(x)) \times d\omega(x) = \int f(x) \times d\omega(x) + \int \widehat{f}(x) \times d\omega(x),$$

$$\int (af(x)) \times d\omega(x) = a \int f(x) \times d\omega(x).$$

b) Se $M \geq 0$ é tal que $\|\xi(w, z)\| \leq M\|w\|\|z\|$ e $f: X \rightarrow E$ é integrável, então

$$\left\| \int f(x) \times d\omega(x) \right\| \leq M \int \|f(x)\| d|\omega|(x).$$

c) Se $f, \widehat{f}: X \rightarrow E$ são aplicações integráveis com $f(x) = \widehat{f}(x)$ quase sempre (relativamente à medida positiva $|\omega|$)¹⁷⁷, então

$$\int f(x) \times d\omega(x) = \int \widehat{f}(x) \times d\omega(x).$$

d) Suponhamos que $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação simples e seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois e de união X tal que $f(x)$ tenha o valor constante w_j para $x \in X_j$. Tem-se então

$$\int f(x) \times d\omega(x) = \sum_{j \in J} w_j \times \omega(X_j).$$

Dem: Sendo $\mu = |\omega|$, seja $g: X \rightarrow F$ uma aplicação topologicamente mensurável, com $\|g(x)\| = 1$ quase sempre, tal que $\omega = \mu_{(g)}$. Tem-se então:

a) Trata-se de uma consequência imediata da definição, tendo em conta as propriedades de linearidade do integral no contexto das medidas positivas.

b) Vem

$$\left\| \int f(x) \times d\omega(x) \right\| = \left\| \int f(x) \times g(x) d\mu(x) \right\| \leq \int \|f(x) \times g(x)\| d\mu(x) \leq$$

$$\leq \int M \|f(x)\| \|g(x)\| d\mu(x) = M \int \|f(x)\| d\mu(x).$$

c) Trata-se de uma consequência de que, por ser $f(x) = \widehat{f}(x)$ quase sempre, tem-se também $f(x) \times g(x) = \widehat{f}(x) \times g(x)$ quase sempre.

¹⁷⁷Repare-se que os conjuntos mensuráveis A com $\omega(A) = 0$ não jogam um papel análogo àquele que é jogado no contexto das medidas positivas, em particular não permitem definir uma noção conveniente da verificação quase sempre de uma propriedade, uma vez que eles podem conter conjuntos de medida diferente de 0. A expressão “quase sempre” é sempre utilizada relativamente a uma medida positiva apropriada.

d) Uma vez que, para cada $x \in X$, $f(x) = \sum_{j \in J} \mathbb{I}_{X_j}(x) w_j$, obtemos

$$\begin{aligned} \int f(x) \times d\omega(x) &= \sum_{j \in J} \int \mathbb{I}_{X_j}(x) w_j \times d\omega(x) = \\ &= \sum_{j \in J} \int \mathbb{I}_{X_j}(x) w_j \times g(x) d\mu(x) = \\ &= \sum_{j \in J} w_j \times \int_{X_j} g(x) d\mu(x) = \\ &= \sum_{j \in J} w_j \times \mu_{(g)}(X_j) = \sum_{j \in J} w_j \times \omega(X_j). \quad \square \end{aligned}$$

O próximo resultado tem uma natureza semelhante mas uma demonstração não tão direta.

III.7.31 (Linearidade relativamente à medida) Sejam E e G espaços de Banach, F um espaço de Hilbert e $\xi: E \times F \rightarrow G$ uma aplicação bilinear contínua, para a qual, para $w \in E$ e $z \in F$, usamos a notação $w \times z$ como alternativa a $\xi(w, z)$. Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, $\omega, \omega': \mathcal{M} \rightarrow F$ duas F -medidas e a um escalar. Se $f: X \rightarrow E$ é integrável relativamente a ω e a ω' , então f é também integrável relativamente a $\omega + \omega'$ e a $a\omega$ e tem-se

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int f(x) \times d(\omega + \omega')(x) = \int f(x) \times d\omega(x) + \int f(x) d\omega'(x), \\ \text{b)} \quad & \int f(x) \times d(a\omega)(x) = a \int f(x) \times d\omega(x). \end{aligned}$$

Além disso, qualquer aplicação topologicamente mensurável $f: X \rightarrow E$ é integrável relativamente à medida vetorial $0: \mathcal{M} \rightarrow F$ e

$$\text{c)} \quad \int f(x) d0(x) = 0.$$

Dem: Suponhamos primeiro que $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação simples e seja $(X_j)_{j \in J}$ uma família finita de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e de união X tal que $f(x)$ tenha o valor constante $w_j \in E$ para cada $x \in X_j$. Tem-se então

$$\begin{aligned}
\int f(x) \times d(\omega + \omega')(x) &= \sum_{j \in J} w_j \times (\omega + \omega')(X_j) = \\
&= \sum_{j \in J} w_j \times \omega(X_j) + \sum_{j \in J} w_j \times \omega'(X_j) = \\
&= \int f(x) \times d\omega(x) + \int f(x) d\omega'(x)
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
\int f(x) \times d(a\omega)(x) &= \sum_{j \in J} w_j \times (a\omega)(X_j) = a \sum_{j \in J} w_j \times \omega(X_j) = \\
&= a \int f(x) d\omega(x).
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que a aplicação topologicamente mensurável $f: X \rightarrow E$ é integrável reativamente a cada uma das medidas vetoriais ω e ω' , portanto também integrável relativamente às medidas positivas $|\omega|$ e $|\omega'|$. Lembrando a monotonia do integral das funções positivas relativamente à medida em II.1.36 e o facto de se ter $|\omega + \omega'| (A) \leq |\omega| (A) + |\omega'| (A)$, para cada $A \in \mathcal{M}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_X \|f(x)\| d|\omega + \omega'| (x) &\leq \int_X \|f(x)\| d(|\omega| + |\omega'|)(x) = \\
&= \int_X \|f(x)\| d|\omega|(x) + \int_X \|f(x)\| d|\omega'| (x) < +\infty
\end{aligned}$$

e, analogamente

$$\int_X \|f(x)\| d|a\omega|(x) = \int_X \|f(x)\| d(|a||\omega|)(x) = |a| \int_X \|f(x)\| d(|\omega|)(x) < +\infty,$$

o que implica, em particular, que a aplicação f é também integrável relativamente a $\omega + \omega'$ e a $a\omega$. Consideremos agora, lembrando II.2.29, um sucessão de aplicações simples $f_n: X \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $\|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\|$, concluimos que esta sucessão é dominada para qualquer das medidas $|\omega|$, $|\omega'|$, $|\omega + \omega'|$ e $|a\omega|$ pelo que podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \int f(x) \times d(\omega + \omega') &= \lim \int f_n(x) \times d(\omega + \omega')(x) = \\
 &= \lim \left(\int f_n(x) \times d\omega(x) + \int f_n(x) \times d\omega'(x) \right) = \\
 &= \lim \left(\int f_n(x) \times d\omega(x) \right) + \lim \left(\int f_n(x) \times d\omega'(x) \right) = \\
 &= \int f(x) \times d\omega(x) + \int f(x) d\omega'(x)
 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
 \int f(x) \times d(a\omega)(x) &= \lim \int f_n(x) \times d(a\omega)(x) = \\
 &= a \lim \int f_n(x) \times d\omega(x) = \\
 &= a \int f(x) d\omega(x),
 \end{aligned}$$

o que prova a) e b). Quanto a c), também se podia dar uma prova simples do mesmo tipo, mas é mais fácil notar que se trata de uma consequência de b), com $a = 0$, uma vez que o facto de qualquer aplicação topologicamente mensurável ser integrável para a medida vetorial 0 é uma consequência de se ter $|0| = 0$ e de o integral de qualquer função mensurável positiva para a medida positiva 0 ser igual a 0 , em particular finito. \square

Vamos agora utilizar um dos resultados de dualidade para examinar um análogo do teorema da Riesz em III.4.27, no contexto das medidas vetoriais definidas nos borelianos de um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável. Como já fizémos anteriormente, consideramos apenas o caso em que o espaço vetorial envolvido é um espaço de Hilbert.

III.7.32 Sejam X um espaço topológico localmente compacto e separado e E um espaço de Banach. Lembremos que o conjunto $C_c(X, E)$ de todas as aplicações contínuas de suporte compacto $f: X \rightarrow E$ é um subespaço vetorial do espaço de todas as aplicações de X para E (cf. III.4.8). De facto, lembrando que uma função contínua num compacto é sempre limitada, $C_c(X, E)$ é mesmo um subespaço vetorial do espaço de todas as aplicações limitadas e, como tal, admite uma norma induzida pela norma natural deste, norma essa que será notada $\| \cdot \|_\infty$ e que, afastado o caso trivial em que $X = \emptyset$, está definida por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| = \max_{x \in X} \|f(x)\|$$

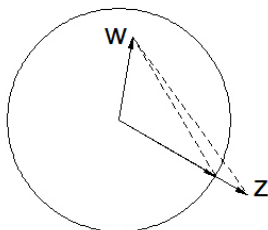
(lembrar que uma função contínua real atinge um máximo sobre cada com-

pacto não vazio). Naturalmente, se $X = \emptyset$ tem-se necessariamente $f = 0$ e define-se $\|f\|_\infty = 0$.

É conveniente estarmos atentos a uma possível confusão com a notação para a norma que referimos: No caso em que está definida uma medida de Radon μ nos borelianos de X , cada $f \in C_c(X, E)$ tem uma classe de equivalência $[f] \in Mens(X, E)$ que pertence a $L^\infty(X, E)$ (cf. III.4.9) mas não devemos esperar que se tenha necessariamente $\|f\|_\infty = \|[f]\|_\infty$, uma vez que o segundo membro, ao contrário do primeiro, faz intervir a medida μ , através da consideração de propriedades que se verificam quase sempre. O exercício III.7.6 adiante esclarece melhor esta questão, examinando, em particular, uma situação em que podemos garantir a igualdade.

III.7.33 (Lema geométrico elementar) Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , munido de um produto interno, sobre o qual consideramos a norma associada. Sejam $w, z \in E$ com $\|w\| \leq 1$ e $\|z\| \geq 1$. Tem-se então

$$\|w - z\| \geq \left\| w - \frac{z}{\|z\|} \right\|.$$



Dem: Sendo $\hat{z} = \frac{z}{\|z\|}$, tem-se $\|\hat{z}\| = 1$ e $z = \|z\|\hat{z}$, pelo que a desigualdade do enunciado ficará estabelecida se verificarmos que é crescente em $[1, +\infty[$ a função

$$\varphi(t) = \|w - t\hat{z}\|^2 = \langle w - t\hat{z}, w - t\hat{z} \rangle = \|w\|^2 + t^2 - 2t\Re(\langle w, \hat{z} \rangle)$$

(reparar que $\varphi(1) = \|w - \hat{z}\|^2$ e $\varphi(\|z\|) = \|w - z\|^2$). Ora isso resulta de que φ é derivável em cada t e com

$$\varphi'(t) = 2t - 2\Re(\langle w, \hat{z} \rangle) \geq 0,$$

uma vez que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\Re(\langle w, \hat{z} \rangle) \leq |\langle w, \hat{z} \rangle| \leq \|w\|\|\hat{z}\| \leq 1. \quad \square$$

III.7.34 (O funcional associado a uma medida vetorial) Sejam X um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável, E um espaço de Hilbert sobre \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , e $\omega: \mathcal{B}_X \rightarrow E$ uma medida vetorial nos borelianos de X . Podemos então considerar a medida positiva associada $|\omega|: \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$, que é uma medida de Radon em X , e tem lugar um *funcional*

linear associado a ω ,

$$\Phi_\omega: \mathcal{C}_c(X, E) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Phi_\omega(f) = \int f(x) \times d\omega(x),$$

onde a aplicação bilinear contínua $E \times \overline{E} \rightarrow \mathbb{K}$ envolvida é, naturalmente, o produto interno.¹⁷⁸ Além disso:

a) A aplicação linear $\Phi_\omega: \mathcal{C}_c(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ é contínua com norma $\|\Phi_\omega\| = |\omega|(X)$.

b) O funcional linear positivo $\Phi_{|\omega|}$ associado à medida positiva $|\omega|$ (cf. III.4.26) verifica a condição de, para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$ (cf. III.4.25), $\Phi_{|\omega|}(\varphi)$ ser o supremo dos números reais $|\Phi_\omega(f)|$, com $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$ verificando $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes, afastando desde já o caso trivial em que $E = \{0\}$, caso em que se tem $\omega = 0$, e portanto também $|\omega| = 0$:

1) O facto de $|\omega|$ ser uma medida de Radon, isto é de os compactos de X terem medida finita, resulta de que, como acontece com qualquer medida vetorial, tem-se mesmo $|\omega|(X) < +\infty$.

2) Vamos verificar que tem lugar uma aplicação linear $\Phi_\omega: \mathcal{C}_c(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ definida pela fórmula no enunciado e que esta aplicação é contínua e com norma $\|\Phi_\omega\| \leq |\omega|(X)$.

Subdem: O facto de cada $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$ ser integrável relativamente à medida ω resulta de que, por III.4.9, f é integrável relativamente à medida de Radon $|\omega|$. O facto de a aplicação $\Phi_\omega: \mathcal{C}_c(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ ser linear resulta das propriedades de linearidade do integral na alínea a) de III.7.30. Tendo em conta a alínea b) do mesmo resultado, com $M = 1$, tem-se

$$|\Phi_\omega(f)| \leq \int_X \|f(x)\| d|\omega|(x) \leq \int_X \|f\|_\infty d|\omega|(x) = |\omega|(X) \|f\|_\infty,$$

o que mostra que a aplicação linear $\Phi_\omega: \mathcal{C}_c(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ é contínua e com norma $\|\Phi_\omega\| \leq |\omega|(X)$.

3) Tendo em conta III.7.20, sendo $\mu = |\omega|$, podemos considerar uma aplicação μ -integrável $h: X \rightarrow E$ com $\|h(x)\| = 1$, para cada $x \in X$, tal que $\omega = \mu_{(h)}$ e então, para cada aplicação integrável $f: X \rightarrow E$, relativamente a ω ,

$$\int f(x) \times d\omega(x) = \int \langle f(x), h(x) \rangle d|\omega|(x).$$

4) Vamos provar a existência, para cada $\delta > 0$, de uma aplicação $g \in \mathcal{C}_c(X, E)$ tal que $\|g(x)\| \leq 1$, para cada $x \in X$, e

¹⁷⁸Repare-se que, no caso em que $E = \mathbb{R}$, com a multiplicação como produto interno, e ω é uma medida positiva finita, esta aplicação linear Φ_ω não é mais do que a definida em III.4.26.

$$\int \|h(x) - g(x)\| d\mu(x) < \delta.$$

Subdem: O teorema de densidade em III.4.14, com $p = 1$, garante a existência de $\widehat{g} \in \mathcal{C}_c(X, E)$ tal que

$$\int \|h(x) - \widehat{g}(x)\| d\mu(x) < \delta.$$

Podemos então definir $g \in \mathcal{C}_c(X, E)$ por

$$g(x) = \begin{cases} \widehat{g}(x), & \text{se } \|\widehat{g}(x)\| \leq 1 \\ \frac{\widehat{g}(x)}{\|\widehat{g}(x)\|}, & \text{se } \|\widehat{g}(x)\| \geq 1 \end{cases}$$

(tem restrições contínuas a dois subconjuntos fechados de X de união X e é nula sempre que \widehat{g} for nula), que verifica $\|g(x)\| \leq 1$, para cada $x \in X$, e, tendo em conta o lema geométrico III.7.33, vem, para cada $x \in X$,

$$\|h(x) - g(x)\| \leq \|h(x) - \widehat{g}(x)\|,$$

portanto também

$$\int \|h(x) - g(x)\| d\mu(x) \leq \int \|h(x) - \widehat{g}(x)\| d\mu(x) < \delta.$$

5) Vamos agora verificar, em complemento ao que se viu em 2), que se tem mesmo $\|\Phi_\omega\| = |\omega|(X)$, o que terminará a verificação da conclusão de a).

Subdem: Podemos já afastar o caso trivial em que $|\omega|(X) = 0$. Seja $0 < \delta < |\omega|(X)$ arbitrário. Tendo em conta o que se viu em 4), existe $g \in \mathcal{C}_c(X, E)$ com $\|g\|_\infty \leq 1$ e $\int \|g(x) - h(x)\| d\mu(x) < \delta$. Vemos agora que

$$\begin{aligned} |\omega|(X) &= \int \langle h(x), h(x) \rangle d\mu(x) = \\ &= \int \langle h(x) - g(x), h(x) \rangle d\mu(x) + \int \langle g(x), h(x) \rangle d\mu(x) = \\ &= \int \langle h(x) - g(x), h(x) \rangle d\mu(x) + \Phi_\omega(g) \end{aligned}$$

e portanto, por ser

$$\begin{aligned} \left| \int \langle h(x) - g(x), h(x) \rangle d\mu(x) \right| &\leq \int |\langle h(x) - g(x), h(x) \rangle| d\mu(x) \leq \\ &\leq \int \|h(x) - g(x)\| d\mu(x) < \delta, \end{aligned}$$

vemos que

$$|\omega|(X) = \|\omega|(X)\| < \delta + |\Phi_\omega(g)|,$$

em particular $|\Phi_\omega(g)| > 0$, e portanto $g \neq 0$, donde finalmente

$$\frac{|\Phi_\omega(g)|}{\|g\|_\infty} \geq |\Phi_\omega(g)| > |\omega|(X) - \delta.$$

6) Vamos justificar finalmente a conclusão de b).

Subdem: Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$. Para cada $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$ verificando $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$ para cada $x \in X$ tem-se

$$\begin{aligned} |\Phi_\omega(f)| &= \left| \int f(x) \times d\omega(x) \right| \leq \int \|f(x)\| d\mu(x) \leq \\ &\leq \int \varphi(x) d\mu(x) = \Phi_{|\omega|}(\varphi). \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar que, para cada $\delta > 0$, existe $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$ verificando $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$, tal que

$$|\Phi_\omega(f)| > \Phi_{|\omega|}(\varphi) - \delta,$$

para o que podemos afastar o caso trivial em que $\varphi = 0$ e considerar $M = \|\varphi\|_\infty > 0$. Mais uma vez pelo que vimos em 4), podemos considerar $g \in \mathcal{C}_c(X, E)$, com $\|g(x)\| \leq 1$, para cada $x \in X$, e

$$\int \|h(x) - g(x)\| d\mu(x) < \frac{\delta}{M}.$$

Podemos então definir $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$ por $f(x) = \varphi(x)g(x)$, que verifica $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$, e de se ter

$$\begin{aligned} \Phi_{|\omega|}(\varphi) &= \int \varphi(x) d\mu(x) = \int \langle \varphi(x)h(x), h(x) \rangle d\mu(x) = \\ &= \int \langle \varphi(x)(h(x) - g(x)), h(x) \rangle d\mu(x) + \int \langle f(x), h(x) \rangle d\mu(x) = \\ &= \int \langle \varphi(x)(h(x) - g(x)), h(x) \rangle d\mu(x) + \Phi_\omega(f), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \left| \int \langle \varphi(x)(h(x) - g(x)), h(x) \rangle d\mu(x) \right| &\leq \int |\langle \varphi(x)(h(x) - g(x)), h(x) \rangle| d\mu(x) \leq \\ &\leq \int \varphi(x) \|h(x) - g(x)\| d\mu(x) \leq \\ &\leq M \int \|h(x) - g(x)\| d\mu(x) < \delta \end{aligned}$$

vemos que

$$\Phi_{|\omega|}(\varphi) = |\Phi_{|\omega|}(\varphi)| < \delta + |\Phi_{\omega}(f)|$$

ou seja $|\Phi_{\omega}(f)| > \Phi_{|\omega|}(\varphi) - \delta$, como queríamos. \square

III.7.35 (Linearidade na medida vetorial) Nas condições anteriores, fica definida uma aplicação antilinear do espaço das E -medidas $\omega: \mathcal{B}_X \rightarrow E$ para o espaço das aplicações lineares contínuas $\mathcal{C}_c(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$, que a ω associa Φ_{ω} . Mais precisamente, dadas medidas vetoriais $\omega, \omega': \mathcal{B}_X \rightarrow E$ e um escalar $a \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\Phi_{\omega+\omega'} = \Phi_{\omega} + \Phi_{\omega'}, \quad \Phi_{a\omega} = \bar{a} \Phi_{\omega}.$$

Dem: Trata-se de uma consequência direta da linearidade do integral, relativamente à medida, referida em III.7.31, tendo em atenção o facto de a aplicação bilinear envolvida, o produto interno, sê-lo enquanto aplicação $E \times \bar{E} \rightarrow \mathbb{K}$, e não enquanto aplicação $E \times E \rightarrow E$. \square

III.7.36 (Versão do teorema de Riesz para medidas vetoriais) Sejam X um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável, E um espaço de Hilbert sobre \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , e $\Phi: \mathcal{C}_c(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação linear contínua. Existe então uma, e uma só, medida vetorial $\omega: \mathcal{B}_X \rightarrow E$ nos borelianos de X tal que $\Phi = \Phi_{\omega}$, isto é, tal que, para cada $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$,

$$\Phi(f) = \int f(x) \times d\omega(x).$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes.

1) Vamos começar por provar a unicidade, isto é, que se $\omega, \omega': \mathcal{B}_X \rightarrow E$ são medidas vetoriais tais que $\Phi_{\omega} = \Phi_{\omega'}$, então tem-se $\omega = \omega'$.

Subdem: Tendo em conta a linearidade em III.7.35, que implica que $\Phi_{\omega} - \Phi_{\omega'} = \Phi_{\omega-\omega'}$, bastará mostrar que se tem $\omega = 0$, sempre que $\Phi_{\omega} = 0$. Ora isso resulta da alínea a) de III.7.34 visto que se tem então

$$|\omega|(X) = \|\Phi_{\omega}\| = 0,$$

e portanto, para cada boreliano A , $\|\omega(A)\| \leq |\omega|(A) = 0$ e $\omega(A) = 0$.

2) Podemos definir, para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$, um elemento $\Lambda(\varphi) \in \mathbb{R}_+$, como sendo o supremo dos $|\Phi(f)|$, com $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$ verificando $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$. Tem-se, além disso,

$$\Lambda(\varphi) \leq \|\Phi\| \|\varphi\|_{\infty},$$

em particular $\Lambda(0) = 0$.

Subdem: Começamos por notar que existe pelo menos um elemento $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$ verificando $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$, nomeadamente $f = 0$. Além disso, para cada f nestas condições tem-se $\|f\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty}$, portanto

$$|\Phi(f)| \leq \|\Phi\| \|f\|_\infty \leq \|\Phi\| \|\varphi\|_\infty$$

o que garante que o supremo $\Lambda(\varphi)$ é finito e verifica a desigualdade enunciada.

3) Se $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$ e $a \in \mathbb{R}_+$, então

$$\Lambda(a\varphi) = a\Lambda(\varphi).$$

Subdem: Podemos já supor $a > 0$, uma vez que o caso $a = 0$ é simplesmente a igualdade $\Lambda(0) = 0$. Reparemos agora que, para cada $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$ que verifica $\|f(x)\| \leq a\varphi(x)$, para cada $x \in X$, tem-se também $\|\frac{1}{a}f(x)\| \leq \varphi(x)$, para cada $x \in X$, donde

$$\frac{1}{a}|\Phi(f)| = |\Phi(\frac{1}{a}f)| \leq \Lambda(\varphi),$$

ou seja, $|\Phi(f)| \leq a\Lambda(\varphi)$, o que implica, tendo em conta a definição de $\Lambda(a\varphi)$ como um supremo, que $\Lambda(a\varphi) \leq a\Lambda(\varphi)$. Para a desigualdade oposta, reparamos que, utilizando a conclusão a que já chegámos, com $\frac{1}{a}$ no lugar de a e $a\varphi$ no lugar de φ , pode-se escrever

$$a\Lambda(\varphi) = a\Lambda(\frac{1}{a}a\varphi) \leq a\frac{1}{a}\Lambda(a\varphi) = \Lambda(a\varphi).$$

4) Sendo $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$, tem-se

$$\Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi) \leq \Lambda(\varphi + \psi).$$

Subdem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Podemos considerar $f, g \in \mathcal{C}_c(X, E)$, com $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$ e $\|g(x)\| \leq \psi(x)$, para cada $x \in X$, tais que

$$|\Phi(f)| > \Lambda(\varphi) - \frac{\delta}{2}, \quad |\Phi(g)| > \Lambda(\psi) - \frac{\delta}{2}.$$

Consideremos $a, b \in \mathbb{K}$, com $|a| = |b| = 1$ tais que

$$|\Phi(f)| = a\Phi(f), \quad |\Phi(g)| = b\Phi(g)$$

(se $\Phi(f) = 0$, tomar $a = 1$ e, caso contrário, tomar $a = \frac{|\Phi(f)|}{\Phi(f)}$ e analogamente para b). Podemos então considerar $h = af + bg \in \mathcal{C}_c(X, E)$, para o qual se tem, para cada $x \in X$,

$$\|h(x)\| \leq \|af(x)\| + \|bg(x)\| = \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \varphi(x) + \psi(x)$$

e vem

$$\Phi(h) = a\Phi(f) + b\Phi(g) = |\Phi(f)| + |\Phi(g)|$$

e portanto

$$\Lambda(\varphi + \psi) \geq |\Phi(h)| = \Phi(h) > \Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi) - \delta$$

o que implica a desigualdade enunciada, tendo em conta a arbitrariedade de δ .

5) Vamos agora verificar que, para $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$, tem-se mesmo

$$\Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi) = \Lambda(\varphi + \psi),$$

faltando-nos portanto apenas provar que

$$\Lambda(\varphi + \psi) \leq \Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi).$$

Subdem: Seja $h \in \mathcal{C}_c(X, E)$ arbitrário, verificando a desigualdade $\|h(x)\| \leq \varphi(x) + \psi(x)$, para cada $x \in X$. Consideremos as aplicações $f, g: X \rightarrow E$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\psi(x)}h(x), & \text{se } \varphi(x) + \psi(x) > 0 \\ 0, & \text{se } \varphi(x) + \psi(x) = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)+\psi(x)}h(x), & \text{se } \varphi(x) + \psi(x) > 0 \\ 0, & \text{se } \varphi(x) + \psi(x) = 0 \end{cases},$$

que verificam $f(x) + g(x) = h(x)$, para cada $x \in X$. Apesar de isso não ser eventualmente claro à primeira vista, a aplicação f , e portanto também a aplicação $g = h - f$, é contínua. Com efeito, sendo V o aberto de X constituído pelos pontos com $\varphi(x) + \psi(x) > 0$, a função tem restrição contínua a V , e portanto é contínua nos pontos de V , e a continuidade num ponto $x_0 \in X \setminus V$ resulta da continuidade de h nesse ponto e de se ter $f(x_0) = h(x_0) = 0$ e portanto, para cada $x \in X$,

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|f(x)\| \leq \|h(x)\| = \|h(x) - h(x_0)\|.$$

O facto de se ter $f(x) = g(x) = 0$, sempre que $h(x) = 0$ implica que se tem também $f, g \in \mathcal{C}_c(X, E)$ e, por ser $\|h(x)\| \leq \varphi(x) + \psi(x)$, tem-se, para cada $x \in X$, $\|f(x)\| \leq \varphi(x)$ e $\|g(x)\| \leq \psi(x)$. Vemos agora que

$$\|\Phi(h)\| = \|\Phi(f) + \Phi(g)\| \leq \|\Phi(f)\| + \|\Phi(g)\| \leq \Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi),$$

donde, tendo em conta a arbitrariedade de h , $\Lambda(\varphi + \psi) \leq \Lambda(\varphi) + \Lambda(\psi)$.

6) Existe uma medida de Radon $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $\mu(X) \leq \|\Phi\|$, tal que, para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$,

$$\Lambda(\varphi) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

Subdem: Tendo em conta III.4.28, a aplicação $\Lambda: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida em 2) admite um único prolongamento a uma aplicação linear $\bar{\Lambda}: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, o qual vai ser um funcional linear positivo, e, por aplicação do teorema de Riesz em III.4.27, podemos considerar uma única medida de Radon $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ tal que $\bar{\Lambda} = \Phi_\mu$ para a qual, em particular, $\mu(X)$ é o supremo dos números reais da forma $\bar{\Lambda}(\varphi) = \Lambda(\varphi)$ com $\varphi \prec X$ (cf. a

notação em III.4.10). Uma vez que, para cada φ nessas condições, tem-se $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, e portanto, pelo que se viu em 2), $\Lambda(\varphi) \leq \|\Phi\|$, concluímos que $\mu(X) \leq \|\Phi\|$, em particular a medida de Radon μ é finita. Para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$ tem-se então

$$\Lambda(\varphi) = \bar{\Lambda}(\varphi) = \Phi_\mu(\varphi) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

7) Vamos concluir finalmente a existência de uma medida vetorial $\omega: \mathcal{B}_X \rightarrow E$ tal que, para cada $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$,

$$\Phi(f) = \int f(x) \times d\omega(x).$$

Subdem: Para cada $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$, tem-se, considerando $\varphi \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$, $\varphi(x) = \|f(x)\|$,

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(\varphi) = \int \varphi(x) d\mu(x) = \|[f]\|_1,$$

onde a classe de equivalência de f e a norma $\|\cdot\|_1$ são, naturalmente, as relativas à medida positiva μ (que é a única que temos presente). Em particular, se $f(x) = 0$ μ -quase sempre, então $\Phi(f) = 0$, e portanto, se $f(x) = \hat{f}(x)$ μ -quase sempre, então $\Phi(f) = \Phi(\hat{f})$, o que permite definir uma aplicação linear contínua do espaço vetorial $\mathcal{C}_c(X, E)$, das classes de equivalência de elementos de $\mathcal{C}_c(C, E)$, com a norma $\|\cdot\|_1$, para \mathbb{K} , que a $[f]$ associa $\Phi(f)$. Uma vez que, por III.4.14, $\mathcal{C}_c(X, E)$ é um subespaço vetorial denso de $L^1(X, E)$, o teorema de Topologia sobre a extensão das aplicações lineares contínuas garante a existência de uma única aplicação linear contínua $\bar{\Phi}: L^1(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$ tal que, para cada $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$, $\bar{\Phi}([f]) = \Phi(f)$. Aplicando agora o resultado de dualidade em III.7.26, concluímos a existência de $[g] \in L^\infty(X, E)$ tal que, para cada $[f] \in L^1(X, E)$,

$$\bar{\Phi}([f]) = \int \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x).$$

Tendo em conta III.2.23, tem-se também $[g] \in L^1(X, E)$ e portanto podemos considerar a medida vetorial $\omega = \mu_{(g)}: \mathcal{B}_X \rightarrow E$, para a qual

$$\Phi(f) = \bar{\Phi}([f]) = \int \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x) = \int f(x) \times d\omega(x). \quad \square$$

III.7.37 (Uma variante trivial no caso $E = \mathbb{C}$, no mesmo espírito que em

III.7.27) 1) No caso particular em que o espaço de Hilbert E , sobre o corpo \mathbb{K} , é o próprio \mathbb{K} , naturalmente com o produto interno habitual $\langle a, b \rangle = a \times \bar{b}$, no contexto de um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável X , para cada medida $\omega: \mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{K}$, o funcional

linear associado $\Phi_\omega: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, definido em III.7.34, está definido por

$$\Phi_\omega(f) = \int f(x) \times d\omega(x),$$

onde a aplicação bilinear envolvida é o produto interno, isto é, a aplicação $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $(a, b) \mapsto a \times \bar{b}$. Em particular, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (e portanto a conjugação é a identidade) o produto interno é simplesmente a multiplicação $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e, de acordo com a convenção em III.7.29, podemos escrever simplesmente

$$\Phi_\omega(f) = \int f(x) d\omega(x).$$

2) Já no caso em que $E = \mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos considerar um funcional linear $\Phi'_\omega: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, distinto de Φ_ω definido por

$$\Phi'_\omega(f) = \int f(x) d\omega(x),$$

portanto com a multiplicação $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como aplicação bilinear envolvida, em vez do produto interno.

Em contextos em que não se considera importante examinar a situação geral das medidas vetoriais e se examinam portanto apenas as medidas reais e complexas, é este o funcional linear que é costume considerar, usando-se, conseqüentemente, a notação Φ_ω no lugar de Φ'_ω .

3) As propriedades dos funcionais lineares Φ'_ω , no espírito de III.7.34, assim como o análogo do teorema de Riesz em III.7.36, resultam trivialmente das propriedades estabelecidas nesse resultado, para os funcionais Φ_ω , desde que repararmos que se tem $\Phi'_\omega = \Phi_{\bar{\omega}}$, onde $\bar{\omega}$ é a medida conjugada de ω , definida em III.7.10.

Esta igualdade resulta simplesmente de que, sendo $\mu = |\omega| = |\bar{\omega}|$ e sendo $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação μ -integrável com $|g(x)| = 1$, para cada $x \in X$, e $\omega = \mu_{(g)}$, tem-se, por III.7.14, $\bar{\omega} = \mu_{(\bar{g})}$, e portanto

$$\begin{aligned} \Phi'_\omega(f) &= \int f(x) d\omega(x) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x) = \\ &= \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x) = \int f(x) \times d\bar{\omega}(x) = \Phi_{\bar{\omega}}(f). \end{aligned}$$

Também como conseqüência da mesma igualdade $\Phi'_\omega = \Phi_{\bar{\omega}}$, vemos que, diferentemente da situação referida em III.7.35, a aplicação do espaço das medidas vetoriais complexas para o espaço das aplicações lineares contínuas $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, que a ω associa Φ'_ω , é agora linear, em vez de antilinear.

Exercícios

Ex III.7.1 (**Propriedade minimizante da medida de variação total**) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, E um espaço de Banach e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow E$ uma E -medida. Mostrar que, se $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é uma medida positiva tal que, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\|\omega(A)\| \leq \mu(A)$, então, para cada $A \in \mathcal{M}$, $|\omega|(A) \leq \mu(A)$.

Ex III.7.2 (**O espaço de Banach das E -medidas**) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e E um espaço de Banach. Reparar que, tendo em conta III.7.7, III.7.9 e a alínea a) de III.7.6, o conjunto $\mathbf{Med}(X, E)$ das E -medidas é um espaço vetorial.

a) Verificar que $\mathbf{Med}(X, E)$ é um espaço vetorial normado desde que se defina $\|\omega\| = |\omega|(X)$.

b) Verificar que o espaço vetorial normado $\mathbf{Med}(X, E)$ é um espaço de Banach.

Sugestão generosa: Consideremos uma sucessão de Cauchy de medidas vetoriais $\omega_n: \mathcal{M} \rightarrow E$.

1) Mostrar que, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\|\omega_m(A) - \omega_n(A)\| \leq |\omega_m - \omega_n|(A) \leq \|\omega_m - \omega_n\|$$

e deduzir que a sucessão de vetores $\omega_n(A)$ de E é de Cauchy, o que permite definir $\omega(A) \in E$ como o limite desta sucessão de vetores.

2) Seja $(A_j)_{j \in J}$ uma família contável de conjuntos de \mathcal{M} disjuntos dois a dois e notemos A a união dos A_j . Seja $\delta > 0$ arbitrário e fixemos n_0 tal que, para $m, n \geq n_0$, $\|\omega_m - \omega_n\| \leq \delta$. Mostrar que, para cada parte finita I de J ,

$$\sum_{j \in I} \|\omega_m(A_j) - \omega_n(A_j)\| \leq |\omega_m - \omega_n|(A) \leq \|\omega_m - \omega_n\|$$

e deduzir, por passagem ao limite, que, se $n \geq n_0$,

$$(1) \quad \sum_{j \in I} \|\omega(A_j) - \omega_n(A_j)\| \leq \delta$$

e portanto

$$\sum_{j \in I} \|\omega(A_j)\| \leq \delta + \sum_{j \in I} \|\omega_n(A_j)\| \leq \delta + |\omega_n|(A),$$

o que permite concluir que a família dos $\omega(A_j)$ é absolutamente somável. Mostrar que, para cada parte finita I de J , tem-se, lembrando (1),

$$\begin{aligned} \|\omega(A) - \sum_{j \in I} \omega(A_j)\| &\leq \|\omega_{n_0}(A) - \sum_{j \in I} \omega_{n_0}(A_j)\| + \\ &\quad + \|\omega(A) - \omega_{n_0}(A)\| + \sum_{j \in I} \|\omega(A_j) - \omega_{n_0}(A_j)\| \leq \\ &\leq \|\omega_{n_0}(A) - \sum_{j \in I} \omega_{n_0}(A_j)\| + 2\delta \end{aligned}$$

e concluir que, sempre que I contém uma certa parte finita I_0 de J ,

$$\|\omega(A) - \sum_{j \in I} \omega(A_j)\| \leq 3\delta,$$

o que implica que $\omega(A) = \sum_{j \in J} \omega(A_j)$, que é a única propriedade não trivial que é preciso estabelecer para concluir que ω é uma medida vetorial.

3) Reparar que a fórmula (1), estabelecida em 2), implica que, para cada $n \geq n_0$,

$$\|\omega - \omega_n\| = |\omega - \omega_n|(X) \leq \delta,$$

concluindo assim que a sucessão das E -medidas ω_n converge para a E -medida ω em $\mathbf{Med}(X, E)$.

Ex III.7.3 (Decomposição de Jordan de uma medida real) Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável e $\omega: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma medida real.

a) Mostrar que existem medidas positivas finitas únicas $\omega_+, \omega_-: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tais que, para cada $A \in \mathcal{M}$,

$$\omega(A) = \omega_+(A) - \omega_-(A), \quad |\omega|(A) = \omega_+(A) + \omega_-(A)$$

(diz-se que ω_+ e ω_- definem a *decomposição de Jordan* de ω).

b) Mostrar que as medidas positivas ω_+ e ω_- são mutuamente singulares (cf. III.3.5). **Sugestão:** Considerar uma função $f: X \rightarrow \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ nas condições do corolário III.7.20 e considerar o conjunto B dos $x \in X$ tais que $f(x) = 1$.

c) Utilizar a conclusão do exercício III.7.1 para mostrar que, dadas medidas positivas finitas $\mu, \hat{\mu}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tais que $\omega(A) = \mu(A) - \hat{\mu}(A)$, para cada $A \in \mathcal{M}$, então, para cada $A \in \mathcal{M}$, $\omega_+(A) \leq \mu(A)$ e $\omega_-(A) \leq \hat{\mu}(A)$ e deduzir que, se μ e $\hat{\mu}$ são mutuamente singulares, então $\mu = \omega_+$ e $\hat{\mu} = \omega_-$. **Sugestão:** Sendo $B \in \mathcal{M}$ com $\mu(B) = 0$ e $\hat{\mu}(X \setminus B) = 0$, considerar uma medida positiva finita $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\rho(A) = \mu(A) - \omega_+(A) = \hat{\mu}(A) - \omega_-(A)$$

e deduzir que $\rho = 0$ por ser $\rho(A) = 0$ tanto para $A \subset B$ como para $A \subset X \setminus B$.

Ex III.7.4 (Contraexemplo para quem conheça o teorema de Hahn-Banach — cf. Lang [7]) Consideremos a medida de Lebesgue nos borelianos do

intervalo $[0, 1]$. Seja

$$C([0, 1], \mathbb{R}) = C_c([0, 1], \mathbb{R}) \subset L^\infty([0, 1], \mathbb{R})$$

o espaço vetorial das classes de equivalência de funções contínuas $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Verificar que, para cada função contínua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se

$$\| [f] \|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

(por outras palavras, o supremo essencial coincide, neste caso, com o supremo e é mesmo um máximo).

b) Verificar que se pode definir uma aplicação linear contínua

$$\Phi: C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi([f]) = f(1),$$

onde $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e consideramos em $C([0, 1], \mathbb{R})$ a norma $\| \cdot \|_\infty$. Utilizando o teorema de Hahn-Banach, concluir a existência de uma aplicação linear contínua

$$\bar{\Phi}: L^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

que prolongue Φ .

c) Mostrar que, no entanto, não existe $[g] \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$ que “represente” $\bar{\Phi}$, isto é, tal que

$$\bar{\Phi}([f]) = \int_0^1 f(x)g(x) dx,$$

para cada $[f] \in L^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. **Sugestão:** Se existisse um tal $[g]$, viria, em particular, para cada $n \geq 1$,

$$\int_0^1 x^n g(x) dx = 1,$$

quando o teorema da convergência dominada implica que aqueles integrais constituem uma sucessão convergente para 0.

Ex III.7.5 (Construção alternativa mais geral do integral para uma medida vetorial) Sejam E , F e G espaços de Banach e $\xi: E \times F \rightarrow G$ uma aplicação bilinear contínua, para a qual, para $w \in E$ e $z \in F$, usamos a notação $w \times z$ como alternativa a $\xi(w, z)$. Sejam (X, \mathcal{M}) um espaço mensurável, $\omega: \mathcal{M} \rightarrow F$ uma F -medida e $\mu = |\omega|: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ a medida de variação total de ω .

a) Verificar que é possível definir o integral de uma função simples $f: X \rightarrow E$, relativamente à medida vetorial ω , por

$$\int f \times d\omega = \int f(x) \times d\omega(x) = \sum_{j \in J} w_j \times \omega(X_j) \in G,$$

onde $(X_j)_{j \in J}$ é uma família finita arbitrária de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois e de união X tal que $f(x)$ tenha o valor constante $w_j \in E$ para cada $x \in X_j$. **Sugestão:** Examinar o que foi feito na secção II.2, para definir o integral de uma aplicação em escada para uma medida positiva, reparando que a situação é agora mais simples por não haver conjuntos de medida infinita,

b) Enunciar e justificar as propriedades de linearidade do integral das aplicações simples e mostrar que, sendo $M \geq 0$ tal que $\|\xi(w, z)\| \leq M\|w\|\|z\|$, para cada $w \in E$ e $z \in F$, tem-se, para cada aplicação simples $f: X \rightarrow E$,

$$\left\| \int f(x) \times d\omega(x) \right\| \leq M \int \|f(x)\| d\mu(x).$$

c) Dizemos que uma aplicação $f: X \rightarrow E$ é *integrável*, relativamente à medida vetorial ω , se ela for integrável relativamente à medida positiva $\mu = |\omega|$. Mostrar que para uma tal aplicação, pode-se definir o seu integral

$$\int f \times d\omega = \int f(x) \times d\omega(x) \in G$$

como sendo o limite dos integrais $\int f_n(x) \times d\omega(x)$, onde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão dominada de aplicações simples $f_n: X \rightarrow E$ (cf. II.2.28, com a medida positiva $\mu = |\omega|$) tal que, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Verificar ainda que as aplicações simples são integráveis e o seu integral, como definido nesta alínea, coincide com o seu integral definido em a).

Sugestão: Examinar o que foi feito para definir o integral das aplicações integráveis, para uma medida positiva, em II.2.30.

d) Enunciar e justificar as propriedades de linearidade do integral das aplicações integráveis, relativamente à função integranda.

e) Enunciar e justificar as propriedades de linearidade do integral das aplicações integráveis, relativamente à medida vetorial considerada.

f) Suponhamos agora que partimos de uma medida positiva $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, que consideramos uma aplicação μ -integrável $g: X \rightarrow F$ e que consideramos a correspondente medida vetorial $\mu_{(g)}: \mathcal{M} \rightarrow F$. Mostrar que, se $f: X \rightarrow E$ é uma aplicação integrável relativamente à medida vetorial $\mu_{(g)}$ então a aplicação $f \times g: X \rightarrow G$ é integrável relativamente à medida positiva μ e

$$\int f(x) \times d\mu_{(g)}(x) = \int f(x) \times g(x) d\mu(x).$$

Concluir, em particular, que, no caso em que F é um espaço de Hilbert, o integral definido neste exercício coincide com o definido em III.7.28.

Ex III.7.6 Sejam E um espaço de Banach, X um espaço topológico localmente compacto, separado e com base contável e $\mu: \mathcal{B}_X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ uma medida de Radon. Seja $f \in \mathcal{C}_c(X, E)$, com a correspondente classe de equivalência $[f] \in L^\infty(X, E)$.

a) Reparar que se tem sempre

$$\|[f]\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

e dar um exemplo de uma situação em que esta desigualdade seja estrita.

b) Mostrar que, no caso em que μ é uma medida de Radon estritamente positiva, por exemplo a medida de Lebesgue nos borelianos de um aberto de \mathbb{R}^n (cf. o exercício III.4.1), tem-se mesmo

$$\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

§8. O integral indefinido revisitado.

Nesta secção vamos examinar um resultado clássico sobre a derivabilidade do integral indefinido que complementa os que foram estudados na secção II.3. Seguimos essencialmente a via utilizada no livro de Rudin [10], que passa por resultados que implicam o referido e que podem ser enunciados no contexto mais geral de \mathbb{R}^n , embora com as simplificações que foram possíveis pelo facto de não irmos tão longe como nesse livro.

Nesta secção, e salvo aviso em contrário, a norma que consideraremos em \mathbb{R}^n será a norma euclidiana, associada ao produto interno usual e continuaremos a notar λ_n a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R}^n .

III.8.1 (**Lema**)¹⁷⁹ Consideremos uma família de bolas abertas $B_{r_j}(x_j)$ de \mathbb{R}^n , onde $j \in J$, e seja W a sua união. Para cada real $a < \lambda_n(W)$ existe então uma parte finita $I \subset J$ tal que os $B_{r_i}(x_i)$, com $i \in I$, sejam disjuntos dois a dois e com

$$\sum_{i \in I} \lambda_n(B_{r_i}(x_i)) > \frac{a}{3^n}.$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em duas partes:

a) Começemos por mostrar que, para cada parte finita $J_0 \subset J$, existe uma parte finita $I \subset J_0$ tal que os $B_{r_i}(x_i)$, com $i \in I$, sejam disjuntos dois a dois e que, para cada $j \in J_0 \setminus I$, exista $i \in I$ com $B_{r_j}(x_j) \subset B_{3r_i}(x_i)$.

Subdem: Os casos em que J_0 é vazio ou tem um único elemento são

¹⁷⁹Este lema é atribuído a Wiener em Rudin [10].

triviais, uma vez que podemos tomar $I = J_0$. Provemos a nossa afirmação por indução no número de elementos de J_0 , para o que supomos a afirmação verdadeira quando J_0 tem k elementos e examinamos o que acontece quando J_0 tem $k + 1$ elementos. Consideremos então $j_0 \in J_0$ tal que $r_{j_0} \leq r_j$ para cada $j \in J_0$ e apliquemos a hipótese de indução ao conjunto $J'_0 = J_0 \setminus \{j_0\}$. Existe assim uma parte finita $I' \subset J'_0$ tal que os $B_{r_i}(x_i)$, com $i \in I'$, sejam disjuntos dois a dois e que, para cada $j \in J'_0 \setminus I'$, exista $i \in I'$ com $B_{r_j}(x_j) \subset B_{3r_i}(x_i)$. No caso em $B_{r_{j_0}}(x_{j_0}) \cap B_{r_i}(x_i) = \emptyset$, para cada $i \in I'$, obtemos trivialmente o resultado pretendido com $I = I' \cup \{j_0\}$. No caso em que existe $i \in I'$ tal que $B_{r_{j_0}}(x_{j_0}) \cap B_{r_i}(x_i) \neq \emptyset$, obtemos o resultado pretendido com $I = I'$, uma vez que, sendo y um elemento daquela intersecção, vem, para cada $x \in B_{r_{j_0}}(x_{j_0})$,

$$d(x_i, x) \leq d(x_i, y) + d(y, x_{j_0}) + d(x_{j_0}, x) \leq r_i + 2r_{j_0} \leq 3r_i,$$

o que mostra que $B_{r_{j_0}}(x_{j_0}) \subset B_{3r_i}(x_i)$.

b) Passamos agora à demonstração do resultado. Tendo em conta a regularidade interior da medida de Lebesgue (cf. a alínea c) de III.4.6), consideremos um compacto $K \subset W$ tal que $a < \lambda_n(K)$. Podemos então considerar uma parte finita $J_0 \subset J$ tal que K esteja contido na união dos $B_{r_j}(x_j)$ com $j \in J_0$ e, aplicando o que se viu em a), uma parte finita $I \subset J_0$ tal que os $B_{r_i}(x_i)$, com $i \in I$, sejam disjuntos dois a dois e que, para cada $j \in J_0 \setminus I$, exista $i \in I$ com $B_{r_j}(x_j) \subset B_{3r_i}(x_i)$. Uma vez que, tendo em conta o comportamento da medida de Lebesgue com as translações e as homotetias, tem-se

$$\lambda_n(B_{3r_i}(x_i)) = \lambda_n(B_{3r_i}(0)) = 3^n \lambda_n(B_{r_i}(0)) = 3^n \lambda_n(B_{r_i}(x_i)),$$

e que

$$K \subset \bigcup_{j \in J_0} B_{r_j}(x_j) \subset \bigcup_{i \in I} B_{3r_i}(x_i),$$

vemos agora que

$$a < \lambda_n(K) \leq \sum_{i \in I} \lambda_n(B_{3r_i}(x_i)) = 3^n \sum_{i \in I} \lambda_n(B_{r_i}(x_i)). \quad \square$$

III.8.2 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, μ uma medida positiva de Radon nos borelianos de U (cf. III.4.1) e $x_0 \in U$. Sendo $r_0 > 0$ com $B_{r_0}(x_0) \subset U$ para cada $0 < r < r_0$, a bola aberta $B_r(x_0)$ está contida na correspondente bola fechada, que é um compacto contido em U , e portanto tem-se $\mu(B_r(x_0)) < +\infty$, o que nos permite considerar o quociente

$$\frac{\mu(B_r(x_0))}{\lambda_n(B_r(x_0))} \in \mathbb{R}_+,$$

que pode ser encarado intuitivamente como uma *densidade média* da medida μ na bola $B_r(x_0)$. Vamos dizer que a medida de Radon μ tem *densidade nula no ponto* x_0 se se tiver

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B_r(x_0))}{\lambda_n(B_r(x_0))} = 0.$$

Uma observação simples, que nos será por vezes útil, é que, no caso em que μ tem densidade nula em x_0 , considerando as bolas fechadas $\overline{B}_r(x_0)$ tem-se também

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(\overline{B}_r(x_0))}{\lambda_n(B_r(x_0))} = 0.$$

Dem: Basta atender a que, por ser $\overline{B}_r(x_0) \subset B_{2r}(x_0)$ e

$$\lambda_n(B_{2r}(x_0)) = \lambda_n(2 B_r(x_0)) = 2^n \lambda_n(B_r(x_0)),$$

tem-se

$$\frac{\mu(\overline{B}_r(x_0))}{\lambda_n(B_r(x_0))} \leq \frac{\mu(B_{2r}(x_0))}{\lambda_n(B_r(x_0))} = 2^n \frac{\mu(B_{2r}(x_0))}{\lambda_n(B_{2r}(x_0))},$$

onde o segundo membro tem limite 0 quando r tende para 0. □

III.8.3 (Teorema da densidade nula) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, μ uma medida positiva de Radon nos borelianos de U e $A \subset U$ um boreliano com $\mu(A) = 0$. Tem-se então que o conjunto A' , dos pontos $x \in A$ tais que μ tem densidade nula em x , é um boreliano tal que $\lambda_n(A \setminus A') = 0$ (podemos assim dizer que *quase todos* os pontos de A são pontos onde μ tem densidade nula).

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

a) Será cómodo considerarmos uma medida $\overline{\mu}$ nos borelianos de \mathbb{R}^n , definida por $\overline{\mu}(A) = \mu(A \cap U)$, medida cuja restrição aos borelianos de U é a medida μ e que pode ser encarada como a imagem directa da medida μ pela inclusão de U em \mathbb{R}^n (cf. I.5.13).¹⁸⁰

b) Para cada $r > 0$, é mensurável a função $A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, x \mapsto \overline{\mu}(B_r(x))$.

Subdem: Trata-se de uma consequência directa do teorema de Fubini para conjuntos (cf. a alínea a) de II.4.6), considerando o produto $A \times \mathbb{R}^n$, em que no primeiro fator se considera a medida induzida pela medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R}^n e no segundo a medida $\overline{\mu}$, e considerando o subconjunto aberto, em particular boreliano, C de $A \times \mathbb{R}^n$ constituído pelos pares (x, y) com $x \in A$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $\|x - y\| < r$.

c) Para cada $\delta > 0$, vamos notar A_δ o conjunto dos $x \in A$ tais que existe $r_1 > 0$ tal que para cada $0 < r < r_1$

¹⁸⁰Observe-se, no entanto, que, ao contrário de μ , a medida $\overline{\mu}$ não é necessariamente uma medida de Radon.

$$\frac{\bar{\mu}(B_r(x))}{\lambda_n(B_r(x))} \leq \delta.$$

Tem-se então que A_δ é um boreliano.

Subdem: Começemos por notar que, fixado $r_1 > 0$, a condição de se ter $\frac{\bar{\mu}(B_r(x))}{\lambda_n(B_r(x))} \leq \delta$ para todo o real r com $0 < r < r_1$ é equivalente à de isso acontecer para todo o racional r com $0 < r < r_1$. Com efeito, se a condição se verificar para todo o racional r entre 0 e r_1 , dado um irracional r entre 0 e r_1 , podemos considerar uma sucessão crescente de racionais $s_p > 0$ com $s_p \rightarrow r$ e então o facto de $B_r(x)$ ser a união da sucessão crescente de bolas $B_{s_p}(x)$ implica que $\bar{\mu}(B_{s_p}(x)) \rightarrow \bar{\mu}(B_r(x))$ e $\lambda_n(B_{s_p}(x)) \rightarrow \lambda_n(B_r(x))$ e portanto, por se ter, para cada p , $\frac{\bar{\mu}(B_{s_p}(x))}{\lambda_n(B_{s_p}(x))} \leq \delta$, concluímos, por passagem ao limite, que se tem efetivamente $\frac{\bar{\mu}(B_r(x))}{\lambda_n(B_r(x))} \leq \delta$.

Uma vez que, pela invariância por translação da medida de Lebesgue, tem-se $\lambda_n(B_r(x)) = \lambda_n(B_r(0))$, concluímos de b) que, para cada $r > 0$, é boreliano o conjunto $A_{\delta,r}$ dos $x \in A$ tais que $\frac{\bar{\mu}(B_r(x))}{\lambda_n(B_r(x))} \leq \delta$. Concluímos daqui que, para cada $r_1 > 0$, o conjunto \hat{A}_{δ,r_1} dos $x \in A$ tais que, para todo o $0 < r < r_1$, $\frac{\bar{\mu}(B_r(x))}{\lambda_n(B_r(x))} \leq \delta$ é também boreliano, uma vez que, como notado atrás, é a intersecção contável dos $A_{\delta,r}$ com r racional entre 0 e r_1 . Reparando finalmente que A_δ vai ser a união contável dos \hat{A}_{δ,r_1} com r_1 racional maior que 0, podemos concluir que A_δ é efetivamente um boreliano.

d) Vamos agora mostrar que, para cada $\delta > 0$, tem-se $\lambda_n(A \setminus A_\delta) = 0$.

Subdem: Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Tendo em conta a regularidade exterior da medida μ (cf. a alínea b) de III.4.6), seja V um aberto de \mathbb{R}^n , com $A \subset V \subset U$, tal que $\mu(V) < \varepsilon$. Para cada $x \in A \setminus A_\delta$, depois de considerar uma bola aberta de centro x contida em V , podemos, pela caracterização dos pontos de A_δ , considerar $r_x > 0$ menor que o respetivo raio de modo que se tenha

$$B_{r_x}(x) \subset V, \quad \frac{\mu(B_{r_x}(x))}{\lambda_n(B_{r_x}(x))} > \delta.$$

Sendo $a < \lambda_n(A \setminus A_\delta)$ arbitrário, vem também

$$a < \lambda_n\left(\bigcup_{x \in A \setminus A_\delta} B_{r_x}(x)\right)$$

pelo que, pelo lema III.8.1, podemos considerar uma parte finita I de $A \setminus A_\delta$ tal que as bolas abertas $B_{r_x}(x)$ com $x \in I$ sejam disjuntas duas a duas e com

$$\sum_{x \in I} \lambda_n(B_{r_x}(x)) > \frac{a}{3^n}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
 a < 3^n \sum_{x \in I} \lambda_n(B_{r_x}(x)) &\leq \frac{3^n}{\delta} \sum_{x \in I} \mu(B_{r_x}(x)) = \\
 &= \frac{3^n}{\delta} \mu\left(\bigcup_{x \in I} B_{r_x}(x)\right) \leq \frac{3^n}{\delta} \mu(V) < \frac{3^n \varepsilon}{\delta}.
 \end{aligned}$$

Tendo em conta a arbitrariedade de a , concluímos agora que

$$\lambda_n(A \setminus A_\delta) \leq \frac{3^n \varepsilon}{\delta}$$

e portanto, pela arbitrariedade de ε , $\lambda_n(A \setminus A_\delta) = 0$.

e) Reparemos agora que $x \in A$ é um ponto de densidade nula se, e só se, para todo o $\delta > 0$, $x \in A_\delta$ o que é trivialmente equivalente à condição de se ter $x \in A_{1/k}$, para todo o $k \in \mathbb{N}$. Concluímos assim que $A' = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_{1/k}$, o que implica que A' é um boreliano e que

$$\lambda_n(A \setminus A') = \lambda_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A \setminus A_{1/k}\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(A \setminus A_{1/k}) = 0. \quad \square$$

III.8.4 (Resultado fundamental para a derivabilidade) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, E um espaço de Banach e $f: U \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável (cf. III.4.15).

Dado $x_0 \in U$, existe $r_0 > 0$ com $B_{r_0}(x_0) \subset U$ e então, para cada $0 < r < r_0$, a bola aberta $B_r(x_0)$ está contida na correspondente bola fechada, que é um compacto contido em U , e portanto, por ser também localmente integrável a aplicação $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ tem-se

$$\int_{B_r(x_0)} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x) < +\infty,$$

o que nos permite considerar o quociente

$$\frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x),$$

que pode ser encarado intuitivamente como uma média na bola aberta da função $x \mapsto \|f(x) - f(x_0)\|$.

Existe então um boreliano $Y \subset U$, com $\lambda_n(Y) = 0$ tal que, para cada $x_0 \in U \setminus Y$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x) = 0.$$

Dem: Uma vez que $f(X) \subset E$ é separável, podemos considerar uma parte contável densa \mathcal{C} de $f(X)$. Para cada $w \in \mathcal{C}$ e cada racional $a > 0$, notemos

$$C_{w,a} = \{x \in U \mid \|f(x) - w\| \geq a\},$$

$$U_{w,a} = U \setminus C_{w,a} = \{x \in U \mid \|f(x) - w\| < a\},$$

que são borelianos de U e seja $\mu_{w,a}$ a medida positiva nos borelianos de U definida por

$$\mu_{w,a}(X) = \int_{X \cap C_{w,a}} \|f(x) - w\| d\lambda_n(x) = \int_X \|f(x) - w\| \mathbb{I}_{C_{w,a}}(x) d\lambda_n(x),$$

medida que é uma medida de Radon, uma vez que é localmente integrável a aplicação $x \mapsto f(x) - w$ e que se tem portanto, quando X é compacto,

$$\mu_{w,a}(X) \leq \int_X \|f(x) - w\| d\lambda_n(x) < +\infty.$$

Para cada $w \in \mathcal{C}$ e cada racional $a > 0$, tem-se $\mu_{w,a}(U_{w,a}) = 0$ pelo que podemos aplicar o teorema da densidade nula (cf. III.8.3) para deduzir a existência de um boreliano $A_{w,a} \subset U_{w,a}$ tal que $\lambda_n(U_{w,a} \setminus A_{w,a}) = 0$ e que, para cada $x \in A_{w,a}$, a medida $\mu_{w,a}$ tenha densidade nula em x . Uma vez que a classe dos pares (w, a) , com $w \in \mathcal{C}$ e $a > 0$ racional é contável, podemos considerar o boreliano $Y \subset U$, com $\lambda_n(Y) = 0$, definido por

$$Y = \bigcup_{\substack{w \in \mathcal{C} \\ a > 0, a \in \mathbb{Q}}} U_{w,a} \setminus A_{w,a},$$

boreliano que vamos mostrar que verifica a condição no enunciado. Consideremos então $x_0 \in U \setminus Y$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Fixemos um racional a tal que $0 < a < \frac{\delta}{3}$ e seja $w \in \mathcal{C}$ tal que $\|f(x_0) - w\| < a$. Tem-se então $x_0 \in U_{w,a}$ e portanto, por ser $x_0 \notin Y$, $x_0 \in A_{w,a}$. O facto de a medida $\mu_{w,a}$ ter densidade nula em x_0 implica a existência de $r_1 > 0$ tal que, para cada $0 < r < r_1$,

$$\frac{\mu_{w,a}(B_r(x_0))}{\lambda_n(B_r(x_0))} < \frac{\delta}{3},$$

e portanto

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - w\| d\lambda_n(x) = \\ & = \int_{B_r(x_0) \cap C_{w,a}} \|f(x) - w\| d\lambda_n(x) + \int_{B_r(x_0) \cap U_{w,a}} \|f(x) - w\| d\lambda_n(x) \leq \\ & \leq \mu_{w,a}(B_r(x_0)) + \int_{B_r(x_0) \cap U_{w,a}} a d\lambda_n(x) < \\ & < \frac{\delta}{3} \lambda_n(B_r(x_0)) + a \lambda_n(B_r(x_0)) < \frac{2\delta}{3} \lambda_n(B_r(x_0)), \end{aligned}$$

donde também

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x) \leq \\ & \leq \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - w\| + \|w - f(x_0)\| d\lambda_n(x) \\ & < \frac{2\delta}{3} \lambda_n(B_r(x_0)) + a \lambda_n(B_r(x_0)) < \delta \lambda_n(B_r(x_0)), \end{aligned}$$

por outras palavras,

$$\frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x) < \delta.$$

Ficou assim provado que se tem

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x) = 0. \quad \square$$

III.8.5 (Corolário) Nas hipóteses do resultado precedente, existe um boreliano $Y \subset U$, com $\lambda_n(Y) = 0$, tal que, para cada $x_0 \in U \setminus Y$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x) d\lambda_n(x) = f(x_0).$$

Dem: Trata-se de uma consequência da conclusão do resultado precedente, com o mesmo conjunto Y , bastando reparar que se tem

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x) d\lambda_n(x) - f(x_0) \right\| = \\ & = \left\| \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x) d\lambda_n(x) - \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x_0) d\lambda_n(x) \right\| = \\ & = \left\| \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x) - f(x_0) d\lambda_n(x) \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x). \quad \square \end{aligned}$$

III.8.6 (Aplicação à derivação do integral indefinido) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com extremidades finitas ou infinitas, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável (cf. II.3.1 ou III.4.15)¹⁸¹. Seja $t_0 \in J$ e consideremos o correspondente integral

¹⁸¹Voltamos aqui à opção de considerar apenas intervalos abertos como domínios, para simplificar os enunciados, tendo presente o facto já referido anteriormente de uma função definida num intervalo fechado numa ou em ambas as extremidades poder ser naturalmente prolongada a um intervalo aberto que o contém.

indefinido $\widehat{f}: J \rightarrow E$, definido por

$$\widehat{f}(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx$$

(cf. II.3.5). Tem-se então $\widehat{f}'(t) = f(t)$ quase sempre.

Dem: Tendo em conta III.8.4, concluímos a existência de um boreliano $Y \subset J$, com $\lambda(Y) = 0$, tal que, para cada t_1 em $J \setminus Y$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2r} \int_{]t_1-r, t_1+r[} \|f(x) - f(t_1)\| dx = 0.$$

Seja $t_1 \in J \setminus Y$. Uma vez que, para cada $r > 0$ com $[t_1 - r, t_1 + r] \subset J$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int_{]t_1, t_1+r[} \|f(x) - f(t_1)\| dx &\leq 2 \times \left(\frac{1}{2r} \int_{]t_1-r, t_1+r[} \|f(x) - f(t_1)\| dx \right), \\ \frac{1}{r} \int_{]t_1-r, t_1[} \|f(x) - f(t_1)\| dx &\leq 2 \times \left(\frac{1}{2r} \int_{]t_1-r, t_1+r[} \|f(x) - f(t_1)\| dx \right), \end{aligned}$$

e portanto também

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{]t_1, t_1+r[} \|f(x) - f(t_1)\| dx &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{]t_1-r, t_1[} \|f(x) - f(t_1)\| dx &= 0, \end{aligned}$$

deduzimos de se ter

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\widehat{f}(t_1 + r) - \widehat{f}(t_1)}{r} - f(t_1) \right\| &= \left\| \frac{1}{r} \int_{]t_1, t_1+r[} f(x) dx - f(t_1) \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{r} \int_{]t_1, t_1+r[} f(x) - f(t_1) dx \right\| \leq \frac{1}{r} \int_{]t_1, t_1+r[} \|f(x) - f(t_1)\| dx \end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\widehat{f}(t_1) - \widehat{f}(t_1 - r)}{r} - f(t_1) \right\| &= \left\| \frac{1}{r} \int_{]t_1-r, t_1[} f(x) dx - f(t_1) \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{r} \int_{]t_1-r, t_1[} f(x) - f(t_1) dx \right\| \leq \frac{1}{r} \int_{]t_1-r, t_1[} \|f(x) - f(t_1)\| dx \end{aligned}$$

que os limites à direita e à esquerda, quando $t \rightarrow t_1$, de

$$\frac{\widehat{f}(t) - \widehat{f}(t_1)}{t - t_1}$$

são ambos iguais a $f(t_1)$, o que mostra que \widehat{f} tem derivada em t_1 igual a $f(t_1)$. \square

No caso em que a função $f: J \rightarrow E$ é integrável, e não só localmente integrável, existe um enunciado que é trivialmente equivalente ao anterior e é por vezes de utilização mais natural.

III.8.7 (Versão alternativa da derivada do integral indefinido) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $f: J \rightarrow E$ uma aplicação integrável. Podemos então definir uma variante do integral indefinido $\tilde{f}: J \rightarrow E$, por

$$\tilde{f}(t) = \lambda_{(f)}(]c, t]) = \int_{]c, t]} f(x) dx,$$

que, fixado $t_0 \in J$, se relaciona com o referido em III.8.6 pela condição de se ter, para cada $t \in J$,

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t_0) + \int_{t_0}^t f(x) dx.$$

Em consequência, tem-se também $\tilde{f}'(t) = f(t)$ quase sempre.

Dem: Tudo o que temos que justificar é a fórmula que relaciona a aplicação \tilde{f} com o integral indefinido referido em III.8.6, visto que a conclusão será então uma consequência do resultado referido, tendo em conta o facto de as constantes terem derivada 0 e de a derivada de uma soma ser a soma das derivadas. Ora, se $t \geq t_0$, tem-se a união disjunta $]c, t] =]c, t_0] \cup]t_0, t]$, donde

$$\tilde{f}(t) = \lambda_{(f)}(]c, t]) = \lambda_{(f)}(]c, t_0]) + \lambda_{(f)}(]t_0, t]) = \tilde{f}(t_0) + \int_{t_0}^t f(x) dx$$

e, se $t < t_0$, tem-se a união disjunta $]c, t_0] =]c, t] \cup]t, t_0]$, donde

$$\tilde{f}(t_0) = \lambda_{(f)}(]c, t_0]) = \lambda_{(f)}(]c, t]) + \lambda_{(f)}(]t, t_0]) = \tilde{f}(t) + \int_t^{t_0} f(x) dx$$

o que implica, mais uma vez, que

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t_0) + \int_{t_0}^t f(x) dx. \quad \square$$

Podemos perguntarmo-nos o que se poderá dizer sobre a derivabilidade de uma aplicação definida de modo análoga à aplicação \tilde{f} , mas com a medida λ -absolutamente contínua $\lambda_{(f)}$ substituída por uma medida λ -singular.

Os resultados estudados nesta secção também nos permitem responder simplesmente a esta questão.

III.8.8 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $\omega: \mathcal{B} \rightarrow E$ uma medida vetorial nos borelianos de J que seja λ -singular (cf. III.7.15). Sendo $h: J \rightarrow E$ a aplicação definida por

$$h(t) = \omega(]c, t]),$$

tem-se então $h'(t) = 0$ quase sempre (relativamente à medida de Lebesgue λ).

Dem: Tendo em conta III.7.16, a medida positiva $|\omega|: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ também é λ -singular pelo que podemos considerar um boreliano $Y' \subset J$ tal que $\lambda(Y') = 0$ e $|\omega|(J \setminus Y') = 0$. Tendo em conta o teorema da densidade nula (cf. III.8.3), existe um boreliano $Y'' \subset J \setminus Y'$ com $\lambda(Y'') = 0$ tal que, para cada $t_1 \in (J \setminus Y') \setminus Y''$, a medida positiva $|\omega|$ tenha densidade nula em t_1 . Sendo $Y = Y' \cup Y''$, tem-se $\lambda(Y) = 0$. Seja $t_1 \in J \setminus Y = (J \setminus Y') \setminus Y''$. Tendo em conta a observação em III.8.2, tem-se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\omega|([t_1 - r, t_1 + r])}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\omega|(\overline{B}_r(t_1))}{\lambda(B_r(t_1))} = 0$$

e, reparando que, para $t > t_1$, tem-se $]c, t] =]c, t_1] \cup]t_1, t]$, com estes conjuntos disjuntos, e que, para $t < t_1$, tem-se $]c, t_1] =]c, t] \cup]t, t_1]$, com estes conjuntos disjuntos, vemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h(t_1 + r) - h(t_1)}{r} \right\| &= \frac{\|\omega(]c, t_1 + r]) - \omega(]c, t_1])\|}{r} = \frac{\|\omega(]t_1, t_1 + r])\|}{r} \leq \\ &\leq \frac{|\omega|([t_1, t_1 + r])}{r} \leq 2 \frac{|\omega|([t_1 - r, t_1 + r])}{2r} \end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h(t_1) - h(t_1 - r)}{r} \right\| &= \frac{\|\omega(]c, t_1]) - \omega(]c, t_1 - r])\|}{r} = \frac{\|\omega(]t_1 - r, t_1])\|}{r} \leq \\ &\leq \frac{|\omega|([t_1 - r, t_1])}{r} \leq 2 \frac{|\omega|([t_1 - r, t_1 + r])}{2r} \end{aligned}$$

pelo que, uma vez que em ambos os casos a expressão à direita tende para 0 quando $r \rightarrow 0$, concluímos que os limites à direita e à esquerda, quando $t \rightarrow t_1$, de

$$\frac{h(t) - h(t_1)}{t - t_1}$$

são ambos iguais a 0, ou seja, $h'(t_1) = 0$. □

Exercícios

Ex III.8.1 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, E um espaço de Banach e $f: U \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável. Define-se o conjunto de Lebesgue de f como sendo o conjunto $L_f \subset U$ dos pontos $x_0 \in U$ tais que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_n(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x) = 0.$$

Verificar que L_f é um boreliano (e, portanto, tendo em conta III.8.4, $\lambda_n(U \setminus L_f) = 0$).

Sugestão: Seguir ideias semelhantes às utilizadas na demonstração de III.8.3, começando por considerar o prolongamento \bar{f} de f a \mathbb{R}^n que é nulo fora de U .¹⁸² Como na alínea c) dessa demonstração, mostrar que, para cada $y \in U$, tem-se $y \in L_f$ se, e só se, para cada racional $\delta > 0$, existe um racional $r_1 > 0$ tal que, para cada racional r , com $0 < r < r_1$,

$$\frac{1}{\lambda_n(B_r(y))} \int_{B_r(y)} \|\bar{f}(x) - f(y)\| d\lambda_n(x) \leq \delta.$$

Tal como na alínea b) da demonstração referida, utilizar o teorema de Fubini, agora na versão II.4.9, para mostrar que, para cada $r > 0$, é mensurável a função $U \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$y \mapsto \int_{B_r(y)} \|\bar{f}(x) - f(y)\| d\lambda_n(x).$$

Ex III.8.2 Vamos dizer que uma sucessão de borelianos X_p de \mathbb{R}^n concentra-se substancialmente no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se existir uma constante $c > 0$ e uma sucessão de reais estritamente positivos $r_p \rightarrow 0$ tal que $X_p \subset B_{r_p}(x_0)$ e

$$\frac{\lambda_n(X_p)}{\lambda_n(B_{r_p}(x_0))} \geq c. \quad 183$$

a) Lembrando que todas as normas de \mathbb{R}^n são equivalentes, mostrar que, dada outra norma de \mathbb{R}^n , sendo $r_p \rightarrow 0$ com $r_p > 0$ e notando $B'_{r_p}(x_0)$ as bolas para essa nova norma, a sucessão dos $B'_{r_p}(x_0)$ concentra-se substancialmente no ponto x_0 .

b) Sendo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r_p \rightarrow 0$ com $r_p > 0$, mostrar que as sucessões de intervalos $]x_0, x_0 + r[$ e $]x_0 - r, x_0[$ concentram-se substancialmente no ponto x_0 .

¹⁸²Prolongamento esse que não é necessariamente localmente integrável.

¹⁸³Rudin, em [10], utiliza a expressão “shrinks nicely”.

c) Mostrar que a sucessão de intervalos $]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}[$ não se concentra substancialmente no ponto 0 (apesar de, num sentido óbvio, concentrar-se no ponto 0).

d) (Alternativa ao resultado fundamental para a derivabilidade) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, E um espaço de Banach e $f: U \rightarrow E$ uma aplicação localmente integrável. Mostrar que existe um boreliano $Y \subset U$, com $\lambda_n(Y) = 0$, tal que, qualquer que seja $x_0 \in U \setminus Y$ e a sucessão de borelianos $X_p \subset U$ que se concentre substancialmente em x_0 ,

$$\lim_p \frac{1}{\lambda_n(X_p)} \int_{X_p} \|f(x) - f(x_0)\| d\lambda_n(x) = 0,$$

onde a sucessão está definida para todo o p suficientemente grande. Deduzir daqui, como em III.8.5, que para cada $x_0 \in U \setminus Y$, tem-se então também

$$\lim_p \frac{1}{\lambda_n(X_p)} \int_{X_p} f(x) d\lambda_n(x) = f(x_0).$$

Ex III.8.3 (Pontos de densidade de um boreliano) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um boreliano. Diz-se que um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de densidade* de A se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda_n(A \cap B_r(x_0))}{\lambda_n(B_r(x_0))} = 1.$$

a) Verificar que se x_0 é um ponto interior dum boreliano A , então x_0 é um ponto de densidade de A .

b) Utilizar as propriedades de invariância da medida de Lebesgue para mostrar que, se x_0 é um ponto de densidade de A , então $-x_0$ é um ponto de densidade de $-A$ e, para cada $w \in \mathbb{R}^n$, $w + x_0$ é um ponto de densidade de $w + A$.

c) Verificar que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de densidade de A se, e só se,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda_n(B_r(x_0) \setminus A)}{\lambda_n(B_r(x_0))} = 0.$$

d) Deduzir de c) que, se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de densidade de cada um de dois borelianos A e A' , então x_0 é também um ponto de densidade de $A \cap A'$ e que, se x_0 é um ponto de densidade dum boreliano A e $B \supset A$ é outro boreliano, então x_0 é também um ponto de densidade de B .

e) Deduzir de c) que, se $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo e se x_0 é um ponto de densidade de um boreliano A , então $\xi(x_0)$ é um ponto de densidade de $\xi(A)$.

Sugestão: Sendo $a = \|\xi^{-1}\| > 0$ e c_ξ o coeficiente de dilatação de ξ , tem-se

$$\lambda_n(B_r(\xi(x_0)) \setminus \xi(A)) \leq \lambda_n(\xi(B_{ar}(x_0)) \setminus \xi(A)) \leq c_\xi \lambda_n(B_{ar}(x_0) \setminus A).$$

f) Verificar que, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um boreliano, então existe um boreliano $Y \subset \mathbb{R}^n$, com $\lambda_n(Y) = 0$, tal que cada $x_0 \in A \setminus Y$ é um ponto de densidade de A e cada $x_0 \in (\mathbb{R}^n \setminus A) \setminus Y$ é um ponto de densidade de $\mathbb{R}^n \setminus A$ (em

particular, quase todos os pontos de A são pontos de densidade de A).

Sugestão: Aplicar o resultado fundamental III.8.4 à função indicatriz $\mathbb{I}_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

g) Tendo em conta f), mostrar que, se A é um boreliano, então existe um ponto de densidade de A se, e só se, $\lambda_n(A) > 0$.

Ex III.8.4 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $A' \subset \mathbb{R}^n$ dois borelianos e notemos, como é habitual,

$$A + A' = \{x + y\}_{x \in A, y \in A'}, \quad A - A' = \{x - y\}_{x \in A, y \in A'}.$$

a) (Um lema) Mostrar que, se 0 é um ponto de densidade tanto de A como de A' , então 0 é um ponto interior de $A - A'$.

Sugestão: Começar por fixar $r > 0$ tal que

$$\frac{\lambda_n(B_r(0) \cap A)}{\lambda_n(B_r(0))} > \frac{2}{3}, \quad \frac{\lambda_n(B_r(0) \cap A')}{\lambda_n(B_r(0))} > \frac{2}{3},$$

e deduzir que se pode fixar $r' > r$ tal que

$$\lambda_n(B_r(0) \cap A) > \frac{1}{2} \lambda_n(B_{r'}(0)), \quad \lambda_n(B_r(0) \cap A') > \frac{1}{2} \lambda_n(B_{r'}(0)).$$

Mostrar então que, se $z \in \mathbb{R}^n$ verifica $\|z\| < r' - r$, então $z \in A - A'$, uma vez que $B_r(0) \cap A$ e $z + (B_r(0) \cap A')$ são subconjuntos de $B_{r'}(0)$ com medidas grandes de mais para poderem ser disjuntos.

b) Deduzir de a) e das propriedades na alínea b) do exercício III.8.3 que, se x_0 é um ponto de densidade de A e y_0 é um ponto de densidade de A' , então $x_0 - y_0$ e $x_0 + y_0$ são pontos de densidade de $A - A'$ e de $A + A'$, respetivamente.¹⁸⁴

c) Utilizar b) para obter justificações alternativas para as conclusões das alíneas b) e c) do exercício III.5.4.

¹⁸⁴Enunciado que inclui a conclusão de a) como caso particular.

§9. Aplicações de variação limitada e medidas de Lebesgue-Stieltjes vetoriais.

Nas secções I.3 e I.4 estudámos a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a uma função crescente $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto não vazio $J =]c, d[$, com extremidades finitas ou infinitas. O nosso objectivo nesta secção é tentar definir analogamente uma medida de Lebesgue-Stieltjes vetorial, associada a uma aplicação $g: J \rightarrow E$, onde E é um espaço de Banach. O facto de limitarmos a nossa atenção aos intervalos abertos, como domínios da aplicação g , tem uma justificação análoga à desenvolvida, a propósito das medidas de Lebesgue-Stieltjes ordinárias, nas observações que sucedem a I.3.11, tendo assim a ver com o pouco interesse em definir explicitamente medidas que sejam restrição de outras já definidas em intervalos abertos. Quanto às condições a impor à aplicação g , espera-se que exista uma que substitua a de g ser uma função crescente que no contexto dos espaços vetoriais não faz qualquer sentido. Essa hipótese será a de que g seja de variação limitada, noção que vamos estudar em seguida.

III.9.1 Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação. Definimos a *variação total* de g como sendo o supremo $V(g) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ de todas as somas finitas $\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\|$, onde, para cada i , $a_i < b_i$ pertencem a $]c, d[$ e os intervalos abertos $]a_i, b_i[$ são disjuntos dois a dois. Consideramos também uma função

$$T_g:]c, d[\rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+,$$

a que chamaremos *função variação total* associada a g , definindo, para cada $x \in]c, d[$, $T_g(x)$ como sendo o supremo de todas as somas finitas $\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\|$ anteriormente referidas para as quais $a_i, b_i \in]c, x[$.

Dados $x < y$ em $]c, d[$, notaremos ainda $T_g(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ o supremo de todas as somas finitas $\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\|$ anteriormente referidas para as quais $a_i, b_i \in [x, y]$.

Dizemos que g é uma aplicação de *variação limitada* se $V(g) < +\infty$.¹⁸⁵

¹⁸⁵Tal como já referimos a propósito de outras situações, não haveria dificuldade em considerar como possíveis domínios das aplicações de variação limitada também intervalos não necessariamente abertos. Preferimos não o fazer para manter os enunciados menos pesados e porque o estudo do que se passa com um intervalo que é fechado numa das suas extremidades, ou em ambas, pode ser reduzido trivialmente ao caso dos intervalos

III.9.2 (Nota) Tendo em conta aplicações futuras à construção das medidas de Lebesgue-Stieltjes, em que se utilizam intervalos semiabertos $]a, b]$, é útil observar desde já que, sempre que temos intervalos $]a_i, b_i[$, com $a_i < b_i$, disjuntos dois a dois, os correspondentes intervalos semiabertos $]a_i, b_i]$ são ainda disjuntos dois a dois.¹⁸⁶

Dem: Se b_i pertencesse a $]a_j, b_j]$, com $j \neq i$, então, sendo $\varepsilon > 0$ menor que $b_i - a_i$ e $b_i - a_j$, $b_i - \varepsilon$ pertencia simultaneamente a $]a_i, b_i[$ e a $]a_j, b_j]$. \square

III.9.3 (Trivialidades) Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação. Registamos as seguintes propriedades que são todas consequências do facto de o supremo de um conjunto não vazio contido em $\overline{\mathbb{R}}_+$ ser maior ou igual ao supremo de qualquer dos seus subconjuntos não vazios:

a) Se $c \leq c' < d' \leq d$, tem-se

$$V(g|_{]c', d'[}) \leq V(g),$$

em particular, se g é de variação limitada, o mesmo acontece a $g|_{]c', d'[}$.

b) Para cada $a \in]c, d[$, tem-se

$$V(g|_{]c, a[}) \leq T_g(a) \leq V(g),$$

em particular podemos escrever $T_g:]c, d[\rightarrow [0, V(g)]$.

c) Se $x < y$ em $]c, d[$, tem-se

$$\begin{aligned} \|g(y) - g(x)\| &\leq T_g(x, y) \leq T_g(y), \\ T_g(x) &\leq V(g|_{]c, y[}) \leq T_g(y), \end{aligned}$$

em particular a função $T_g:]c, d[\rightarrow [0, V(g)]$ é crescente (no sentido lato).

III.9.4 (Exemplos) Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação.

a) Se g é constante, então g é de variação limitada e $V(g) = 0$.

b) Se $E = \mathbb{R}$ e g é uma função crescente e limitada, então g é de variação limitada e, notando $g(c^+)$ e $g(d^-)$ os limites laterais nas extremidades,

$$V(g) = g(d^-) - g(c^+).$$

c) Suponhamos que g é derivável em cada $x \in]c, d[$, e que a derivada $g':]c, d[\rightarrow E$ é contínua e integrável. Então g é de variação limitada e

abertos, considerando um prolongamento ao intervalo em que as extremidades em questão são infinitas que é constante na aderência cada um dos intervalos acrescentados. Por exemplo, o estudo duma aplicação g de domínio $]c, d]$, com $d \in \mathbb{R}$ e c finito ou infinito, fica reduzido ao estudo do seu prolongamento a $]c, +\infty[$ que toma o valor $g(d)$ para cada $x > d$.

¹⁸⁶Já os intervalos fechados $[a_i, b_i]$ não teriam que o ser.

$$V(g) \leq \int_{]c,d[} \|g'(x)\| dx. \quad 187$$

Dem: a) Temos uma consequência do facto de para cada família de intervalos abertos $]a_i, b_i[$ nas condições da definição ser $\|g(b_i) - g(a_i)\| = 0$ para cada i .

b) Vamos começar por mostrar que, para cada família finita não vazia $(]a_i, b_i])_{i \in I}$, de intervalos abertos disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$, tem-se

$$\sum_{i \in I} (g(b_i) - g(a_i)) \leq g(b) - g(c^+),$$

onde b é o maior dos b_i . Mostramos isso por indução no número de elementos de I , o caso em que I tem 1 elemento sendo uma consequência de ser $b_i = b$ e $g(a_i) \geq g(c^+)$. Suponhamos o resultado válido quando I tem p elementos e vejamos o que se pode dizer quando I tem $p + 1$ elementos. Lembrando que, como referido na nota III.9.2, os intervalos $]a_i, b_i]$ são ainda disjuntos dois a dois, seja i_0 o índice para o qual b_i é máximo e reparemos que, para cada $i \neq i_0$, tem que ser $b_i \leq a_{i_0}$. Sendo $b' \leq a_{i_0}$ o maior dos b_i com $i \neq i_0$, obtemos, aplicando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (g(b_i) - g(a_i)) &= g(b) - g(a_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} (g(b_i) - g(a_i)) \leq \\ &\leq g(b) - g(a_{i_0}) + g(b') - g(c^+) \leq g(b) - g(c^+), \end{aligned}$$

o que termina a prova por indução. Uma vez que para cada família nas condições referidas tem-se

$$\sum_{i \in I} |g(b_i) - g(a_i)| = \sum_{i \in I} (g(b_i) - g(a_i)) \leq g(b) - g(c^+) \leq g(d^-) - g(c^+),$$

obtemos, por passagem ao supremo,

$$V(g) \leq g(d^-) - g(c^+),$$

em particular $V(g) < +\infty$. Seja agora $\delta > 0$ arbitrário. Podemos então considerar $a < b$ em $]c, d[$ tais que

$$g(a) < g(c^+) + \frac{\delta}{2}, \quad g(b) > g(d^-) - \frac{\delta}{2},$$

e tem-se então

¹⁸⁷De facto, pode-se provar que esta desigualdade é mesmo uma igualdade, mas é mais fácil verificar isso depois de estudarmos as medidas de Lebesgue-Stieltjes vectoriais. Propomos esse resultado como exercício no fim da secção (cf. o exercício III.9.6).

$$V(g) \geq |g(b) - g(a)| = g(b) - g(a) > g(d^-) - g(c^+) - \delta,$$

donde, tendo em conta a arbitrariedade de δ ,

$$V(g) \geq g(d^-) - g(c^+),$$

o que garante a igualdade dos dois membros.

c) Consideremos uma família finita $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$, de intervalos abertos disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$. Tem-se então

$$\|g(b_i) - g(a_i)\| = \left\| \int_{]a_i, b_i[} g'(x) dx \right\| \leq \int_{]a_i, b_i[} \|g'(x)\| dx,$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| &\leq \sum_{i \in I} \int_{]a_i, b_i[} \|g'(x)\| dx = \int_{\cup]a_i, b_i[} \|g'(x)\| dx \\ &\leq \int_{]c, d[} \|g'(x)\| dx, \end{aligned}$$

pelo que, considerando o supremo das somas finitas no segundo membro, obtemos a desigualdade pretendida. \square

III.9.5 (Linearidade) Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e E um espaço de Banach. Se $g, h:]c, d[\rightarrow E$ são aplicações de variação limitada e a é um escalar de E , então $g + h$ e ag são também de variação limitada e

$$V(g + h) \leq V(g) + V(h), \quad V(ag) = |a|V(g).$$

Dem: Consideremos uma família finita $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$, de intervalos abertos disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$. Tem-se então

$$\begin{aligned} \|(g + h)(b_i) - (g + h)(a_i)\| &= \|(g(b_i) - g(a_i)) + (h(b_i) - h(a_i))\| \leq \\ &\leq \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|h(b_i) - h(a_i)\| \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|(g + h)(b_i) - (g + h)(a_i)\| &\leq \\ &\leq \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \sum_{i \in I} \|h(b_i) - h(a_i)\| \leq V(g) + V(h), \end{aligned}$$

e portanto, considerando o supremo das somas no primeiro membro,

$$V(g + h) \leq V(g) + V(h).$$

Analogamente,

$$\sum_{i \in I} \|ag(b_i) - ag(a_i)\| = |a| \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq |a| V(g),$$

donde $V(ag) \leq |a| V(g)$. No caso em que $a = 0$ temos automaticamente a igualdade e, se $a \neq 0$, temos também a igualdade, uma vez que a desigualdade oposta deduz-se da anterior, reparando que

$$|a| V(g) = |a| V\left(\frac{1}{a} ag\right) \leq |a| \left|\frac{1}{a}\right| V(ag) = V(ag). \quad \square$$

III.9.6 (Exemplo) Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função decrescente e limitada. Tem-se então que g é de variação limitada e

$$V(g) = g(c^+) - g(d^-).$$

Dem: Trata-se de uma consequência de aplicar o que foi visto na alínea b) do exemplo III.9.4 à aplicação crescente e limitada $-g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$, para a qual se tem $V(-g) = V(g)$. \square

Os próximos resultados estabelecem algumas relações entre as quantidades $T_g(x)$, $T_g(x, y)$ e $V(g)$ introduzidas em III.9.1, que complementam as desigualdades triviais referidas em III.9.3.

III.9.7 Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação. Tem-se, para cada $x < y$ em $]c, d[$,

$$T_g(y) = T_g(x) + T_g(x, y).$$

Além disso, $V(g)$ é tanto o supremo dos $T_g(x, y)$, com $x < y$ em $]c, d[$, como o supremo dos $T_g(y)$, com $y \in]c, d[$, e portanto também¹⁸⁸

$$V(g) = \lim_{y \rightarrow d^-} T_g(y).$$

Dem: Seja $x < y$ em $]c, d[$. Seja $(]a_j, b_j])_{j \in J}$ uma família finita arbitrária de intervalos abertos disjuntos dois a dois, com $a_j < b_j$ em $]c, y[$. Seja J' o conjunto dos $j \in J$ tais que $b_j \leq x$ e J'' o conjunto daqueles para os quais $a_j \geq x$. Se x não pertence a nenhum $]a_j, b_j[$, J é a união disjunta de J' e J'' , donde

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \|g(b_j) - g(a_j)\| &= \sum_{j \in J'} \|g(b_j) - g(a_j)\| + \sum_{j \in J''} \|g(b_j) - g(a_j)\| \leq \\ &\leq T_g(x) + T_g(x, y). \end{aligned}$$

¹⁸⁸Como acontece com o limite à esquerda de qualquer função crescente.

Se existe j_0 tal que $x \in]a_{j_0}, b_{j_0}[$, J é a união disjunta de J' , J'' e $\{j_0\}$ e portanto também

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \|\omega_g(A_j)\| &= \sum_{j \in J'} \|g(b_j) - g(a_j)\| + \\ &\quad + \sum_{j \in J''} \|g(b_j) - g(a_j)\| + \|g(b_{j_0}) - g(a_{j_0})\| \leq \\ &\leq \left(\sum_{j \in J'} \|g(b_j) - g(a_j)\| + \|g(x) - g(a_{j_0})\| \right) + \\ &\quad + \left(\sum_{j \in J''} \|g(b_j) - g(a_j)\| + \|g(b_{j_0}) - g(x)\| \right) \leq \\ &\leq T_g(x) + T_g(x, y). \end{aligned}$$

Tendo em conta a arbitrariedade da família dos $]a_j, b_j[$, concluímos que

$$(1) \quad T_g(y) \leq T_g(x) + T_g(x, y),$$

o que implica já a igualdade desejada no caso em que $T_g(y) = +\infty$. Suponhamos agora que $T_g(y) < +\infty$, o que implica que se tem também $T_g(x) < +\infty$ e $T_g(x, y) < +\infty$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos uma família finita $(]a'_k, b'_k[)_{k \in K}$ de intervalos abertos disjuntos dois a dois com $a'_k < b'_k$ em $]c, x]$ e uma família finita $(]a''_i, b''_i[)_{i \in I}$ de intervalos abertos disjuntos dois a dois com $a''_i < b''_i$ em $[x, y]$ tais que

$$\sum_{k \in K} \|g(b'_k) - g(a'_k)\| > T_g(x) - \frac{\delta}{2}, \quad \sum_{i \in I} \|g(b''_i) - g(a''_i)\| > T_g(x, y) - \frac{\delta}{2}.$$

Considerando então a família formada pelos intervalos $]a'_k, b'_k[$ e pelos intervalos $]a''_i, b''_i[$, todos disjuntos dois a dois e com extremidades em $]a, y]$, concluímos que

$$T_g(y) \geq \sum_{k \in K} \|g(b'_k) - g(a'_k)\| + \sum_{i \in I} \|g(b''_i) - g(a''_i)\| > T_g(x) + T_g(x, y) - \delta,$$

portanto, tendo em conta a arbitrariedade de δ ,

$$T_g(y) \geq T_g(x) + T_g(x, y),$$

o que, combinado com (1), garante que $T_g(y) = T_g(x) + T_g(x, y)$.

Já sabemos que

$$T_g(x, y) \leq T_g(y) \leq V(g),$$

para cada $x < y$ em $]c, d[$. Seja agora $k < V(g)$ arbitrário. Por definição, existe uma família finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$, tal que

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| > k$$

e, sendo $x \in]c, d[$ o menor dos a_i e $y \in]c, d[$ o maior dos b_i , tem-se que todas as extremidades estão em $[x, y]$, o que implica que

$$T_g(y) \geq T_g(x, y) \geq \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| > k.$$

Ficou assim provado que $V(g)$ é efetivamente o supremo dos $T_g(x, y)$ e o supremo dos $T_g(y)$. \square

III.9.8 Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach, $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação e $a \in]c, d[$ tal que g tenha limite à esquerda no ponto a , que notaremos $g(a^-)$. Tem-se então

$$T_g(a) = V(g)_{]c, a[} + \|g(a) - g(a^-)\|.$$

Dem: Vamos começar por verificar que se tem

$$(1) \quad T_g(a) \leq V(g)_{]c, a[} + \|g(a) - g(a^-)\|,$$

para o que podemos já supor que o segundo membro é finito. Seja $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ uma família finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, a[$. Se nenhum dos b_i é igual a a , tem-se

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq V(g)_{]c, a[} \leq V(g)_{]c, a[} + \|g(a) - g(a^-)\|.$$

Se $a = b_{i_0}$, escolhamos uma sucessão de elementos $x_n \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$ com $x_n \rightarrow a$. Reparando que, para cada n os intervalos $]a_i, b_i[$, com $i \neq i_0$, e $]a_{i_0}, x_n[$ são disjuntos dois a dois e têm as extremidades contidas em $]c, a[$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| &= \sum_{i \neq i_0} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|g(a) - g(a_{i_0})\| \leq \\ &\leq \sum_{i \neq i_0} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|g(x_n) - g(a_{i_0})\| + \\ &\quad + \|g(a) - g(x_n)\| \leq V(g)_{]c, a[} + \|g(a) - g(x_n)\| \end{aligned}$$

e portanto, por ser $\|g(a) - g(x_n)\| \rightarrow \|g(a) - g(a^-)\|$, mais uma vez,

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq V(g)_{]c, a[} + \|g(a) - g(a^-)\|.$$

Tendo em conta a arbitrariedade da família dos $]a_i, b_i[$, podemos assim concluir a desigualdade (1).

Vamos agora provar a desigualdade oposta, para o que podemos já supor que $T_g(a) < +\infty$. Seja $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ uma família finita de intervalos abertos

disjuntos dois a dois e com extremidades em $]c, a[$. Consideremos uma sucessão $x_n \rightarrow a$, com cada x_n menor que a e maior que o máximo dos b_i . Uma vez que, para cada n , a família constituída pelos $]a_i, b_i[$ e por $]x_n, a[$ é formada por intervalos abertos disjuntos dois a dois e com extremidades em $]c, a]$, podemos escrever

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|g(a) - g(x_n)\| \leq T_g(a),$$

donde, uma vez que $\|g(a) - g(x_n)\| \rightarrow \|g(a) - g(a^-)\|$,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|g(a) - g(a^-)\| &\leq T_g(a), \\ \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| &\leq T_g(a) - \|g(a) - g(a^-)\|, \end{aligned}$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade da família dos $]a_i, b_i[$, implica que

$$V(g_{/]c, a]) \leq T_g(a) - \|g(a) - g(a^-)\|,$$

e portanto, como queríamos,

$$T_g(a) \geq V(g_{/]c, a]) + \|g(a) - g(a^-)\|. \quad \square$$

III.9.9 Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach, $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação, e $x < y$ em $]c, d[$ tais que g tenha limite à direita no ponto x , que notaremos $g(x^+)$. Tem-se então

$$T_g(x, y) = T_{g_{/]x, d]}(y) + \|g(x^+) - g(x)\|$$

e portanto, no caso em que g também tem limite à esquerda no ponto y ,

$$T_g(x, y) = V(g_{/]x, y]) + \|g(y) - g(y^-)\| + \|g(x^+) - g(x)\|.$$

Dem: Vamos começar por verificar que se tem

$$(1) \quad T_g(x, y) \leq T_{g_{/]x, d]}(y) + \|g(x^+) - g(x)\|,$$

para o que podemos já supor que o segundo membro é finito. Seja $(]a_i, b_i])_{i \in I}$ uma família finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois com $a_i < b_i$ em $[x, y]$. Se nenhum dos a_i é igual a x , tem-se

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq T_{g_{/]x, d]}(y) \leq T_{g_{/]x, d]}(y) + \|g(x^+) - g(x)\|.$$

Se $x = a_{i_0}$, escolhamos uma sucessão de elementos $x_n \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$ com $x_n \rightarrow x$. Reparando que, para cada n os intervalos $]a_i, b_i[$, com $i \neq i_0$, e $]x_n, b_{i_0}[$ são disjuntos dois a dois e têm as extremidades em $]x, y]$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| &= \sum_{i \neq i_0} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|g(b_{i_0}) - g(x)\| \leq \\ &\leq \sum_{i \neq i_0} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|g(b_{i_0}) - g(x_n)\| + \\ &\quad + \|g(x_n) - g(x)\| \leq T_{g|_{]x, d[}}(y) + \|g(x_n) - g(x)\| \end{aligned}$$

e portanto, por ser $\|g(x_n) - g(x)\| \rightarrow \|g(x^+) - g(x)\|$, mais uma vez,

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq T_{g|_{]x, d[}}(y) + \|g(x^+) - g(x)\|.$$

Tendo em conta a arbitrariedade da família dos $]a_i, b_i[$, podemos assim concluir a desigualdade (1).

Vamos agora provar a desigualdade oposta, para o que podemos já supor que $T_g(x, y) < +\infty$. Seja $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ uma família finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois com $a_i < b_i$ em $]x, y[$. Consideremos uma sucessão $x_n \rightarrow x$, com cada x_n maior que x e menor que o mínimo dos a_i . Uma vez que, para cada n , a família constituída pelos $]a_i, b_i[$ e por $]x, x_n[$ é formada por intervalos abertos disjuntos dois a dois e com extremidades em $]x, y[$, podemos escrever

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|g(x_n) - g(x)\| \leq T_g(x, y),$$

donde, uma vez que $\|g(x_n) - g(x)\| \rightarrow \|g(x^+) - g(x)\|$,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| + \|g(x^+) - g(x)\| &\leq T_g(x, y), \\ \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| &\leq T_g(x, y) - \|g(x^+) - g(x)\|, \end{aligned}$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade da família dos $]a_i, b_i[$, implica que

$$T_{g|_{]x, d[}}(y) \leq T_g(x, y) - \|g(x^+) - g(x)\|,$$

e portanto, como queríamos,

$$T_g(x, y) \geq T_{g|_{]x, d[}}(y) + \|g(x^+) - g(x)\|.$$

A segunda igualdade no enunciado resulta da primeira, por III.9.8. \square

III.9.10 (O caso da aplicação de variação limitada) Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada. Tem-se então:

a) A função crescente, no sentido lato, $T_{g^+}:]c, d[\rightarrow [0, V(g)] \subset \mathbb{R}_+$, que já sabemos verificar $\lim_{x \rightarrow d} T_g(x) = V(g)$, verifica também $\lim_{x \rightarrow c} T_g(x) = 0$.

b) Para cada $a \in [c, d[$, a aplicação g admite limite lateral à direita em a , que notaremos $g(a^+)$ e, para cada $a \in]c, d]$, g admite limite lateral à esquerda em

a , que notaremos $g(a^-)$.

c) Para cada $a \in]c, d[$, tem-se

$$T_g(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} T_g(x) = T_g(a) - \|g(a) - g(a^-)\|,$$

em particular, T_g é contínua à esquerda no ponto a se, e só se, g é contínua à esquerda no ponto a .

d) Para cada $a \in]c, d[$, tem-se

$$T_g(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} T_g(x) = T_g(a) + \|g(a^+) - g(a)\|,$$

em particular, T_g é contínua à direita no ponto a se, e só se, g é contínua à direita no ponto a .

e) O conjunto dos pontos de $]c, d[$ onde g não é contínua é contável.

Dem: a) Seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos uma família finita $(]a_i, b_i])_{i \in I}$ de intervalos abertos disjuntos dois a dois e com $a_i < b_i$ em $]c, d[$, tal que

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| > V(g) - \delta.$$

Sendo $a \in]c, d[$ o menor dos a_i e $b \in]c, d[$ o maior dos b_i , podemos escrever

$$V(g) - \delta < \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq T_g(a, b) = T_g(b) - T_g(a)$$

e portanto, para cada $x < a$,

$$T_g(x) \leq T_g(a) < T_g(b) - V(g) + \delta \leq \delta.$$

b) Tendo em conta a caracterização da existência de limites pela condição de Cauchy¹⁸⁹, para provar a existência de limite lateral à direita num ponto $a \in]c, d[$, basta mostrarmos que, para cada $\delta > 0$, existe $0 < \varepsilon < d - a$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in]a, a + \varepsilon[$, $\|g(y) - g(x)\| < \delta$. Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia, por outras palavras, que se podia fixar $\delta > 0$ tal que, para cada $0 < \varepsilon < d - a$, existiam $x < y$ em $]a, a + \varepsilon[$ com $\|g(y) - g(x)\| \geq \delta$. Podíamos então definir recursivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n < y_n$ em $]a, d[$ com $\|g(y_n) - g(x_n)\| \geq \delta$ e $y_{n+1} < x_n$, tendo-se então que os $]x_n, y_n[$ constituíam uma família infinita de intervalos abertos disjuntos dois a dois e com $\|g(y_n) - g(x_n)\| \geq \delta$ e isso contrariava o facto de g ser de variação limitada, uma vez que as somas finitas

$$\sum_{n=1}^p \|g(y_n) - g(x_n)\| \geq p\delta,$$

todas menores ou iguais a $V(g)$, podiam tomar valores arbitrariamente

¹⁸⁹Reparar que, para a validade dessa caracterização, utilizamos a hipótese de o espaço vetorial normado E ser completo.

grandes. A prova da existência de limite à esquerda num ponto $a \in]c, d]$ é análoga, mostrando-se, por absurdo, que se este não existisse, podia-se construir recursivamente, para um certo $\delta > 0$ e cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n < y_n$ em $]c, a[$ com $y_n < x_{n+1}$ e $\|g(y_n) - g(x_n)\| \geq \delta$.

c) Tem-se, por III.9.8 e III.9.7,

$$T_g(a) = V(g|_{]c, a[}) + \|g(a) - g(a^-)\| = \lim_{x \rightarrow a^-} T_g(x) + \|g(a) - g(a^-)\|.$$

d) Tem-se, para cada $x > a$, por III.9.7 e III.9.9,

$$T_g(x) = T_g(a) + T_g(a, x) = T_g(a) + T_{g|_{]a, d[}}(x) + \|g(a^+) - g(a)\|,$$

bastando agora reparar que, uma vez que $g|_{]a, d[}$ também é de variação limitada, o que vimos em a) garante que $\lim_{x \rightarrow a^+} T_{g|_{]a, d[}}(x) = 0$.

e) Temos uma consequência de I.3.9 uma vez que, tendo em conta as conclusões de c) e d), o conjunto dos pontos onde g não é contínua coincide com o conjunto dos pontos onde a função crescente $T_g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ não é contínua. \square

III.9.11 (Aditividade da variação total) Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach, $a \in]c, d[$ e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação. Tem-se então que g é de variação limitada se, e só se, admitir limites laterais à esquerda e à direita no ponto a e as restrições de g a $]c, a[$ e a $]a, d[$ forem de variação limitada. Quando isso acontecer,

$$V(g) = V(g|_{]c, a[}) + V(g|_{]a, d[}) + \|g(a) - g(a^-)\| + \|g(a^+) - g(a)\|,$$

em particular, no caso em que g é contínua no ponto a ,

$$V(g) = V(g|_{]c, a[}) + V(g|_{]a, d[}).$$

Dem: Se g é de variação limitada, resulta da alínea a) de III.9.3 que as duas restrições são de variação limitada e da alínea b) de III.9.10 que existem os dois limites laterais. Suponhamos, reciprocamente, que as duas restrições são de variação limitada e que existem os dois limites laterais. Tendo em conta III.9.7, III.9.8 e III.9.9, vemos que, para cada $a < x < d$,

$$\begin{aligned} T_g(x) &= T_g(a) + T_g(a, x) = \\ &= V(g|_{]c, a[}) + \|g(a) - g(a^-)\| + T_{g|_{]a, d[}}(x) + \|g(a^+) - g(a)\|, \end{aligned}$$

o que implica, por passagem ao limite quando $x \rightarrow d$, por ser, pelo que vimos em III.9.7,

$$V(g) = \lim_{x \rightarrow d} T_g(x), \quad V(g|_{]a, d[}) = \lim_{x \rightarrow d} T_{g|_{]a, d[}}(x),$$

a igualdade

$$V(g) = V(g|_{]c,a[}) + V(g|_{]a,d[}) + \|g(a) - g(a^-)\| + \|g(a^+) - g(a)\|,$$

em particular $V(g) < +\infty$. □

Estamos agora em condições de definir as medidas de Lebesgue-Stieltjes vectoriais associadas a aplicações g de variação limitada. Começamos por estabelecer dois resultados de natureza puramente algébrica.

III.9.12 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita, E um espaço de Banach e $g: J \rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada. Pode então definir-se, para cada intervalo semiaberto $]a, b]$, com $a \leq b$ em J , um vetor

$$\omega_g(]a, b]) = g(b^+) - g(a^+) \in E \quad 190$$

e tem-se $\omega_g(\emptyset) = 0$ e, sempre que $(B_i)_{i \in I}$ é uma família finita de intervalos daquele tipo disjuntos dois a dois e cuja união B ainda seja um intervalo do mesmo tipo,

$$\omega_g(B) = \sum_{i \in I} \omega_g(B_i).$$

Dem: O facto $\omega_g(]a, b])$ estar bem definido e de se ter $\omega_g(\emptyset) = 0$ resulta de qualquer intervalo semiaberto não vazio ter uma única representação na forma $]a, b]$ e de o conjunto vazio \emptyset admitir várias representações desse tipo, mas todas da forma $]a, b]$ com $a = b$, e portanto $g(b^+) - g(a^+) = 0$. Para provarmos a aditividade, podemos começar por retirar de I os índices i para os quais $B_i = \emptyset$. Fazemos então a prova por indução no número de elementos de I . O resultado é trivial se I tem 0 ou 1 elemento. Suponhamos que o resultado é válido quando I tem p elementos e provemo-lo no caso em que I tem $p + 1$ elementos. Sendo $B_i =]x_i, y_i]$ e $B =]x, y]$, consideremos o índice i_0 tal que $y \in B_{i_0}$. Tem-se então $y = y_{i_0}$ e concluímos que o intervalo $]x, x_{i_0}]$ é a união disjunta dos p intervalos B_i , com $i \neq i_0$. Aplicando a hipótese de indução, vemos agora que

$$\begin{aligned} \omega_g(B) &= g(y^+) - g(x^+) = g(y_{i_0}^+) - g(x_{i_0}^+) + g(x_{i_0}^+) - g(x^+) = \\ &= \omega_g(B_{i_0}) + \omega_g\left(\bigcup_{i \neq i_0} B_i\right) = \omega_g(B_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} \omega_g(B_i) = \\ &= \sum_{i \in I} \omega_g(B_i). \end{aligned} \quad \square$$

¹⁹⁰É claro que, no caso em que g é contínua à direita, podemos escrever simplesmente $\omega_g(]x, y]) = g(y) - g(x)$.

III.9.13 (**Lema algébrico**) Sejam $J =]c, d[$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g: J \rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada. Seja \mathcal{S} o semianel dos intervalos semiabertos $]x, y]$, com $x \leq y$ em J e notemos $\mathcal{S}_S(J, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das aplicações \mathcal{S} -simples $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ (cf. III.2.28)¹⁹¹. Fica então bem definida uma aplicação linear

$$\Psi_g: \mathcal{S}_S(J, \mathbb{R}) \rightarrow E, \quad \Psi_g(\varphi) = \sum_{i \in I} w_i \omega_g(B_i),$$

onde $(B_i)_{i \in I}$ é uma família finita de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois tais que $\varphi(x)$ tenha o valor constante w_i para $x \in B_i$ e que $\varphi(x) = 0$ para cada x não pertencente à união dos B_i .

Dem: Vamos dividir a demonstração em duas partes:

1) Vamos verificar que Ψ_g está bem definida, isto é, que, se $(B_i)_{i \in I}$ e $(C_k)_{k \in K}$ são duas famílias de conjuntos de \mathcal{S} , em cada uma delas disjuntos dois a dois, tais que $\varphi(x) = w_i$, para cada $x \in B_i$, $\varphi(x) = 0$, para cada x não pertencente à união dos B_i , $\varphi(x) = z_k$, para cada $x \in C_k$, e $\varphi(x) = 0$, para cada x não pertencente à união dos C_k , então

$$\sum_{i \in I} w_i \omega_g(B_i) = \sum_{k \in K} z_k \omega_g(C_k).$$

Subdem: Vamos começar por mostrar que, para cada $i \in I$,

$$(1) \quad w_i \omega_g(B_i) = w_i \sum_{k \in K} \omega_g(B_i \cap C_k).$$

Para isso reparamos que, se $w_i = 0$, a igualdade (1) é verdadeira, com ambos os membros iguais a 0, e que, se $w_i \neq 0$, B_i é a união disjunta da família finita dos $B_i \cap C_k$ (se existisse $x \in B_i$ não pertencente a nenhum dos C_k , vinha $w_i = \varphi(x) = 0$), e portanto

$$w_i \omega_g(B_i) = w_i \sum_{k \in K} \omega_g(B_i \cap C_k),$$

o que, mais uma vez, implica a igualdade (1). Por simetria dos papéis das duas famílias, tem-se também, para cada $k \in K$,

$$(2) \quad z_k \omega_g(C_k) = z_k \sum_{i \in I} \omega_g(B_i \cap C_k).$$

Reparemos também que, para cada $i \in I$ e $k \in K$, tem-se

$$(3) \quad w_i \omega_g(B_i \cap C_k) = z_k \omega_g(B_i \cap C_k),$$

já que ambos os membros são 0, no caso em que $B_i \cap C_k = \emptyset$ e, quando isso

¹⁹¹Reparar que as duas ocorrências do caráter \mathcal{S} na notação $\mathcal{S}_S(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ têm explicações diferentes: A primeira refere-se à inicial manuscrita da palavra “simples” e a segunda refere-se à designação que estamos a dar ao semianel dos intervalos semiabertos.

não acontecer, existe $x \in B_i \cap C_k$ e então $w_i = \varphi(x) = z_k$. Tendo em conta (1), (2) e (3), obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} w_i \omega_g(B_i) &= \sum_{i \in I} \left(\sum_{k \in K} w_i \omega_g(B_i \cap C_k) \right) = \\ &= \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I} z_k \omega_g(B_i \cap C_k) \right) = \sum_{k \in K} z_k \omega_g(C_k). \end{aligned}$$

2) Vamos mostrar que a aplicação $\Psi_g: \mathcal{S}_S(J, \mathbb{R}) \rightarrow E$ é linear.

Subdem: Sejam $\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções \mathcal{S} -simples e $a \in \mathbb{R}$. Tendo em conta III.2.28, podemos considerar uma família finita $(B_i)_{i \in I}$ de conjuntos de \mathcal{S} disjuntos dois a dois tal que, para cada $x \in B_i$, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tenham valores constantes w_i e z_i e que $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, para cada x não pertencente à união dos B_i . Tem-se então que, para cada $x \in B_i$, $\varphi(x) + \psi(x)$ e $a\varphi(x)$ têm valores constantes $w_i + z_i$ e aw_i e $\varphi(x) + \psi(x) = a\varphi(x) = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \Psi_g(\varphi + \psi) &= \sum_{i \in I} (w_i + z_i) \omega_g(B_i) = \\ &= \sum_{i \in I} w_i \omega_g(B_i) + \sum_{i \in I} z_i \omega_g(B_i) = \Psi_g(\varphi) + \Psi_g(\psi) \end{aligned}$$

e

$$\Psi_g(a\varphi) = \sum_{i \in I} aw_i \omega_g(B_i) = a \sum_{i \in I} w_i \omega_g(B_i) = a \Psi_g(\varphi),$$

pelo que temos efetivamente uma aplicação linear. \square

III.9.14 (**Medidas vetoriais de Lebesgue-Stieltjes**) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com extremidades finitas ou infinitas, E um espaço de Banach e $g: J \rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada. Sendo \mathcal{B} a σ -álgebra dos borelianos de J existe então uma, e uma só, medida vetorial $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$ tal que, para cada $a \leq b$ em J ,

$$\omega_g(]a, b]) = g(b^+) - g(a^+),$$

medida, a que damos o nome de *medida de Lebesgue-Stieltjes* associada a g . Além disso, sendo $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ a medida positiva de Lebesgue-Stieltjes associada à função crescente $T_g: J \rightarrow \mathbb{R}_+$, esta medida é finita e a medida de variação total $|\omega_g|: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ verifica $|\omega_g|(A) \leq \mu(A)$, para cada $A \in \mathcal{B}$ em particular, $|\omega_g|(J) \leq V(g)$.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes.

1) A unicidade de uma medida ω_g nos borelianos de J nas condições do enunciado é uma consequência de III.7.11, uma vez que a classe \mathcal{S} dos intervalos $]a, b]$, com $a \leq b$ em J , é um semianel σ -total cuja σ -álgebra gerada é \mathcal{B} (cf. I.4.10).

2) Seja μ a medida positiva de Lebesgue-Stieltjes associada à função cres-

cente e contínua à direita $T_g: J \rightarrow \mathbb{R}_+$ e notemos que, tendo em conta a alínea d) de I.4.14 e o que vimos na alínea a) de III.9.10, tem-se $\mu(J) = V(g)$, em particular $\mu(J) < +\infty$. A relação de equivalência de igualdade quase sempre que vamos considerar será a relativa à medida μ , e o mesmo acontece à norma $\|\cdot\|_1$ no espaço $L^1(J, \mathbb{R})$.

3) Para cada aplicação \mathcal{S} -simples $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se $[\varphi] \in L^1(J, \mathbb{R})$ e, nas notações de III.9.13,

$$\|\Psi_g(\varphi)\| \leq \|[\varphi]\|_1,$$

e portanto, se $\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações \mathcal{S} -simples tais que $\varphi(x) = \psi(x)$ quase sempre, então $\Psi_g(\varphi) = \Psi_g(\psi)$.

Subdem: O facto de se ter $[\varphi] \in L^1(J, \mathbb{R})$ já foi referido em III.2.30, resultado que teremos ocasião de voltar a aplicar adiante. Consideremos uma família finita de conjuntos $B_i =]a_i, b_i]$ de \mathcal{S} , disjuntos dois a dois e tais que $\varphi(x) = w_i$, para cada $x \in B_i$, e $\varphi(x) = 0$, para cada x não pertencente à união dos B_i . Podemos então escrever, lembrando III.9.3 e III.9.7, e reparando que a desigualdade, para $x < y$ em J ,

$$\|g(y) - g(x)\| \leq T_g(x, y) = T_g(y) - T_g(x)$$

implica, por passagem ao limite à direita,

$$\|g(b_i^+) - g(a_i^+)\| \leq T_g(b_i^+) - T_g(a_i^+),$$

$$\begin{aligned} \|\Psi_g(\varphi)\| &= \left\| \sum_{i \in I} w_i \omega_g(B_i) \right\| \leq \sum_{i \in I} |w_i| \|g(b_i^+) - g(a_i^+)\| \leq \\ &\leq \sum_{i \in I} |w_i| (T_g(b_i^+) - T_g(a_i^+)) = \sum_{i \in I} |w_i| \mu(B_i) = \\ &= \int_J |\varphi(x)| d\mu(x) = \|[\varphi]\|_1. \end{aligned}$$

Quando $\varphi(x) = \psi(x)$ quase sempre, tem-se $[\psi - \varphi] = 0$, donde

$$\|\Psi_g(\psi) - \Psi_g(\varphi)\| = \|\Psi_g(\psi - \varphi)\| \leq \|[\psi - \varphi]\|_1 = 0,$$

o que mostra que $\Psi_g(\varphi) = \Psi_g(\psi)$.

4) Consideremos o espaço vetorial $S_S(J, \mathbb{R})$ das classes de equivalência de funções \mathcal{S} -simples $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ que, como se viu em III.2.30, é um subespaço vetorial denso de $L^1(J, \mathbb{R})$. Podemos definir uma aplicação linear

$$\widehat{\Psi}_g: S_S(J, \mathbb{R}) \rightarrow E, \quad \widehat{\Psi}_g([\varphi]) = \Psi_g(\varphi),$$

que é contínua, por verificar a desigualdade

$$\|\widehat{\Psi}_g([\varphi])\| \leq \|[\varphi]\|_1,$$

para cada $[\varphi] \in S_S(J, \mathbb{R})$.

5) Aplicando o teorema de Topologia, sobre a extensão de aplicações lineares contínuas definidas em subespaços vetoriais densos e com valores num espaço de Banach, podemos garantir a existência de uma única aplicação linear contínua $\overline{\Psi}_g: L^1(J, \mathbb{R}) \rightarrow E$ que prolonga $\widehat{\Psi}_g$, a qual verifica ainda, para cada $[\varphi] \in L^1(J, \mathbb{R})$,

$$\|\overline{\Psi}_g([\varphi])\| \leq \|[\varphi]\|_1.$$

6) Reparemos que, para cada boreliano $A \subset J$, a função indicatriz $\mathbb{I}_A: J \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação em escada, em particular $[\mathbb{I}_A] \in L^1(J, \mathbb{R})$ e que, no caso em que $A =]a, b[\in \mathcal{S}$, tem-se

$$\overline{\Psi}_g([\mathbb{I}_A]) = \Psi_g(\mathbb{I}_A) = \omega_g(A).$$

Podemos assim definir uma aplicação $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$, que nos conjuntos de \mathcal{S} toma o valor referido em III.9.12, pondo

$$\omega_g(A) = \overline{\Psi}_g([\mathbb{I}_A]).$$

7) Vamos mostrar que a aplicação $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$ definida em 6) que, como já referimos, verifica a igualdade $\omega_g(]a, b]) = g(b^+) - g(a^+)$, para $a \leq b$ em J , é uma medida vetorial para a qual $|\omega_g|(A) \leq \mu(A)$, para cada $A \in \mathcal{B}$.

Subdem: Para mostrar que $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$ é uma medida vetorial, o que nos falta verificar é que, se $(A_j)_{j \in \bar{I}}$ é uma família contável de conjuntos de \mathcal{B} disjuntos dois a dois e se $A = \bigcup A_j$, então $\omega_g(A) = \sum \omega_g(A_j)$, com a família no segundo membro absolutamente somável. Começemos, para isso, por mostrar um resultado auxiliar, nomeadamente que no espaço de Banach $L^1(J, \mathbb{R})$, tem-se $[\mathbb{I}_A] = \sum [\mathbb{I}_{A_j}]$, com a família no segundo membro absolutamente somável. Ora, tem-se, por um lado,

$$\sum_{j \in \bar{I}} \|[\mathbb{I}_{A_j}]\|_1 = \sum_{j \in \bar{I}} \mu(A_j) = \mu(A) \leq \mu(J) < +\infty,$$

e, por outro lado, dado $\delta > 0$, o facto de se ter $\sum \mu(A_j) = \mu(A) < +\infty$ permite considerar uma parte finita $I \subset \bar{I}$ tal que, para cada parte finita $I' \subset \bar{I}$ com $I' \supset I$, se tenha

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{j \in I'} A_j\right) = \mu(A) - \sum_{j \in I'} \mu(A_j) < \delta,$$

tendo-se então, para cada I' nessas condições

$$\left\| [\mathbb{I}_A] - \sum_{j \in I'} [\mathbb{I}_{A_j}] \right\|_1 = \|[\mathbb{I}_{A \setminus \bigcup_{j \in I'} A_j}]\|_1 = \mu\left(A \setminus \bigcup_{j \in I'} A_j\right) < \delta,$$

o que mostra que $[\mathbb{I}_A]$ é efetivamente a soma da família dos $[\mathbb{I}_{A_j}]$ no espaço de Banach $L^1(J, \mathbb{R})$. Estabelecido este resultado auxiliar, basta-nos recordar a caracterização das somas de famílias contáveis absolutamente somáveis

como integrais (para a medida de contagem, cf. II.2.48) para deduzir de II.2.35 que $\omega_g(A) = \overline{\Psi}_g([\mathbb{I}_A])$ é efetivamente a soma da família absolutamente somável dos $\overline{\Psi}_g([\mathbb{I}_{A_j}]) = \omega_g(A_j)$. Reparamos, por fim que, tendo em conta o que foi visto em 5), para cada $A \in \mathcal{B}$ tem-se

$$\|\omega_g(A)\| = \|\overline{\Psi}_g([\mathbb{I}_A])\| \leq \|[\mathbb{I}_A]\|_1 = \mu(A)$$

e portanto, para cada família finita de conjuntos B_i de \mathcal{B} , onde $i \in I$, disjuntos dois a dois e contidos em A ,

$$\sum_{i \in I} \|\omega_g(B_i)\| \leq \sum_{i \in I} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \leq \mu(A),$$

o que implica que $|\omega_g|(A) \leq \mu(A)$. □

III.9.15 (A medida de Lebesgue-Stieltjes de outros intervalos) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g: J \rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada e consideremos a correspondente medida de Lebesgue-Stieltjes vetorial $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$. Tem-se então:

a) Para cada $a \in]c, d[$,

$$\omega_g(\{a\}) = g(a^+) - g(a^-),$$

e portanto

$$|\omega_g|(\{a\}) = \|g(a^+) - g(a^-)\|.$$

b) Para cada $a \in]c, d[$,

$$\omega_g(]c, a]) = g(a^+) - g(c^+),$$

onde $g(c^+)$ é o limite à direita de g no ponto c (cf. a alínea b) de III.9.10).

c) Sendo $g(c^+)$ e $g(d^-)$ os limites laterais de g nas extremidades c e d de J ,

$$\omega_g(J) = g(d^-) - g(c^+).^{192}$$

Dem: **a)** O facto de o conjunto dos pontos de continuidade de g ser contável (cf. a alínea e) de III.9.10), permite-nos considerar uma sucessão crescente $x_n \rightarrow a$, com $c < x_n < a$ e com g contínua em cada x_n . Reparando que $\{a\}$ é a intersecção da sucessão decrescente de conjuntos $]x_n, a]$ deduzimos de III.7.3 que

$$\omega_g(\{a\}) = \lim \omega_g(]x_n, a]) = \lim (g(a^+) - g(x_n)) = g(a^+) - g(a^-).$$

A segunda igualdade resulta da primeira tendo em conta a alínea c) de III.7.4.

b) Considerando uma sucessão decrescente $x_n \rightarrow c$, com $c < x_n < a$ e g

¹⁹²Apesar de a lista dos intervalos cuja medida explicitámos não esgotar todos os intervalos que se podem considerar, é fácil determinar as medidas dos restantes, utilizando as propriedades de aditividade da medida e a medida dos conjuntos singulares.

contínua em cada x_n e reparando que $]c, a]$ é a união da sucessão crescente de conjuntos $]x_n, a]$, deduzimos de III.7.3 que

$$\omega_g(]c, a]) = \lim \omega_g(]x_n, a]) = \lim (g(a^+) - g(x_n)) = g(a^+) - g(c^+).$$

c) Considerando uma sucessão crescente $x_n \rightarrow d$, com $c < x_n < d$ e g contínua em cada x_n e, reparando que $J =]c, d[$ é a união da sucessão crescente de conjuntos $]c, x_n]$ deduzimos de III.7.3 que

$$\omega_g(J) = \lim \omega_g(]c, x_n]) = \lim (g(x_n) - g(c^+)) = g(d^-) - g(c^+). \quad \square$$

Referimos em III.9.14 que, quando $g:]c, d[\rightarrow E$ é uma aplicação de variação limitada, a respetiva medida vetorial de Lebesgue-Stieltjes $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$ e a medida positiva de Lebesgue-Stieltjes $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ associada à função crescente $T_g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}_+$ verificam a desigualdade $|\omega_g|(A) \leq \mu(A)$, para cada boreliano A de $]c, d[$. A situação seria mais interessante se pudéssemos garantir mesmo a igualdade $|\omega_g|(A) = \mu(A)$, mas constatamos que, sem alguma hipótese suplementar, isso não acontece necessariamente, uma vez que, para cada $a \in J$, decorre da alínea a) de III.9.15 e das alíneas c) e d) de III.9.10 que

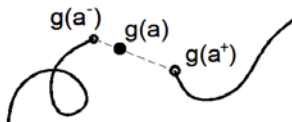
$$\begin{aligned} |\omega_g|(\{a\}) &= \|g(a^+) - g(a^-)\|, \\ \mu(\{a\}) &= T_g(a^+) - T_g(a^-) = \|g(a^+) - g(a)\| + \|g(a) - g(a^-)\|. \end{aligned}$$

O resultado que estabelecemos a seguir, mostra que quando a igualdade $|\omega_g|(A) = \mu(A)$ é verificada sempre que A é um conjunto unitário, ela é também verificada para um boreliano arbitrário A .

III.9.16 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com extremidades finitas ou infinitas, E um espaço de Banach e $g: J \rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada. Vamos dizer que g tem *descontinuidades bem comportadas* se, para cada $a \in]c, d[$,

$$\|g(a^+) - g(a^-)\| = \|g(a^+) - g(a)\| + \|g(a) - g(a^-)\|.$$

Observe-se que esta igualdade é automaticamente verificada nos pontos a em que g é contínua ou, mais geralmente, naqueles em que g é contínua à direita ou contínua à esquerda. Mais geralmente ainda, ela é também verificada nos pontos a tais que $g(a)$ pertence ao segmento afim de extremidades $g(a^-)$ e $g(a^+)$ (cf. III.1.1).



III.9.17 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com extremidades finitas ou infinitas, E um espaço de Banach e $g: J \rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada com descontinuidades bem comportadas. Sendo ω_g a medida vetorial de Lebesgue-Stieltjes nos borelianos de J associada a g e μ a medida positiva de Lebesgue-Stieltjes associada à função crescente $T_g: J \rightarrow \mathbb{R}_+$, tem-se então, para cada boreliano A de J ,

$$|\omega_g|(A) = \mu(A),$$

em particular, $|\omega_g|(J) = V(g)$ e, para cada $a \in]c, d[$,

$$|\omega_g|(]c, a]) = T_g(a^+) = T_g(a) + \|g(a^+) - g(a)\|.$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Vamos mostrar que, sempre que $a \leq b$ em $]c, d[$,

$$\|g(b) - g(a)\| \leq |\omega_g|(]a, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a^+) - g(a)\|.$$

Subdem: Vem

$$\begin{aligned} \|g(b) - g(a)\| &\leq \|g(b) - g(b^-)\| + \|g(b^-) - g(a^+)\| + \|g(a^+) - g(a)\| = \\ &= \|g(b^+) - g(b^-)\| - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(b^-) - g(a^+)\| + \|g(a^+) - g(a)\| = \\ &= \|\omega_g(\{b\})\| - \|g(b^+) - g(b)\| + \|\omega_g(]a, b])\| + \|g(a^+) - g(a)\| \leq \\ &\leq |\omega_g|(]a, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a^+) - g(a)\|. \end{aligned}$$

2) Vamos mostrar, mais geralmente, que, sempre que $a \leq a' \leq b' \leq b$ em $]c, d[$,

$$\|g(b') - g(a')\| \leq |\omega_g|(]a, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a^+) - g(a)\|.$$

Subdem: Tendo em conta o que vimos em 1), vem

$$\begin{aligned} \|g(b') - g(a')\| &\leq \|g(b) - g(b')\| + \|g(b') - g(a')\| + \|g(a') - g(a)\| \leq \\ &\leq |\omega_g|(]b', b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(b'^+) - g(b')\| + \\ &\quad + |\omega_g|(]a', b']) - \|g(b'^+) - g(b')\| + \|g(a'^+) - g(a')\| + \\ &\quad + |\omega_g|(]a, a']) - \|g(a'^+) - g(a')\| + \|g(a^+) - g(a)\| = \\ &= |\omega_g|(]a, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a^+) - g(a)\|. \end{aligned}$$

3) Vamos agora mostrar que, se $a < b$ em $]c, d[$ e se $(]a_i, b_i])_{i \in I}$ é uma família finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]a, b]$, então

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq |\omega_g|(]a, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a^+) - g(a)\|.$$

Subdem: Vamos demonstrar o resultado por indução no número de elementos de I , reparando desde já que a desigualdade é trivial quando I tem 0 elementos e que ela resulta do que vimos em 2) quando I tem 1 elemento. Suponhamos a desigualdade verdadeira quando I tem n elementos e prove-

mo-la quando I tem $n + 1$ elementos. Lembrando que, como referido em III.9.2, os intervalos $]a_i, b_i]$ também são disjuntos dois a dois, podemos considerar $i_0 \in I$ para o qual b_{i_0} seja máximo e, reparando que $b_i \leq a_{i_0}$, para cada $i \neq i_0$, obtemos, aplicando 2) e a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| &= \|g(b_{i_0}) - g(a_{i_0})\| + \sum_{i \neq i_0} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq \\ &\leq |\omega_g|([a_{i_0}, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a_{i_0}^+) - g(a_{i_0})\| + \\ &\quad + |\omega_g|([a, a_{i_0}]) - \|g(a_{i_0}^+) - g(a_{i_0})\| + \|g(a^+) - g(a)\| = \\ &= |\omega_g|([a, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a^+) - g(a)\|. \end{aligned}$$

4) Se $a < b$ em $]c, d[$, a definição de $T_g(a, b)$, como um supremo, em III.9.1 implica agora que se tem

$$T_g(a, b) \leq |\omega_g|([a, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a^+) - g(a)\|,$$

ou seja, tendo em conta III.9.7,

$$T_g(b) - T_g(a) \leq |\omega_g|([a, b]) - \|g(b^+) - g(b)\| + \|g(a^+) - g(a)\|,$$

desigualdade que é trivialmente também verdadeira no caso em que $a = b$.

5) Lembrando a caracterização dos limites laterais de $T_g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}_+$ na alínea d) de III.9.10, concluímos agora que, para cada $a \leq b$ em $]c, d[$,

$$\begin{aligned} \mu([a, b]) &= T_g(b^+) - T_g(a^+) = \\ &= T_g(b) + \|g(b^+) - g(b)\| - T_g(a) - \|g(a^+) - g(a)\| \leq \\ &\leq |\omega_g|([a, b]). \end{aligned}$$

Uma vez que a classe dos intervalos $]a, b]$ nas condições anteriores constitui um semianel σ -total de partes de J , onde as medidas μ e $|\omega_g|$ são finitas (cf. I.4.3) e que a σ -álgebra gerada por este semianel é a dos borelianos, podemos aplicar I.4.17 para concluir que se tem, mais geralmente, para cada boreliano A de J , $\mu(A) \leq |\omega_g|(A)$, e portanto também $\mu(A) \leq |\omega_g|(A)$, uma vez que a desigualdade oposta é uma das conclusões de III.9.14.

6) As igualdades $|\omega_g|(J) = V(g)$ e, para cada $a \in]c, d[$,

$$|\omega_g|[c, a] = T_g(a^+) = T_g(a) + \|g(a^+) - g(a)\|,$$

resultam das alíneas c) e d) de I.4.14 e do que vimos nas alíneas a) e d) de III.9.10. \square

Vamos agora mostrar que, quando o espaço de chegada é um espaço de Hilbert, as aplicações de variação limitada são deriváveis em quase todos os pontos, resultado que vai ser consequência dos dois últimos que examinamos na secção precedente e de um lema que estabelecemos a seguir.

III.9.18 (**Lema**)¹⁹³ Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $h: J \rightarrow E$ uma aplicação. Suponhamos que existe uma parte contável $I \subset J$ tal que $h(x) = 0$, para cada $x \in J \setminus I$, e que

$$\sum_{x \in I} \|h(x)\| < +\infty.$$

Tem-se então que, para quase todo o $x \in J$ (relativamente à medida de Lebesgue λ), h é derivável em x e com $h'(x) = 0$.

Dem: Vamos dividir a prova em duas partes:

1) Para cada natural k , notemos A_k o conjunto dos $x \in J \setminus I$ tais que existe um número infinito de elementos $y \in I$ com

$$\left\| \frac{h(y)}{y-x} \right\| > \frac{1}{k}.$$

Vamos verificar que se tem $\lambda(A_k) = 0$.

Subdem: Se $x \in J \setminus I$, tem-se $x \in A_k$ se, e só se, existe uma infinidade de elementos $y \in I$ tais que $|y-x| < k\|h(y)\|$ isto é, se, e só se, x pertence a uma infinidade de intervalos

$$J_{k,y} =]y - k\|h(y)\|, y + k\|h(y)\|[,$$

ou ainda se, e só se, $\varphi_k(x) = +\infty$, onde $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é a função mensurável definida por

$$\varphi_k(x) = \sum_{y \in I} \mathbb{I}_{J_{k,y}}(x).$$

Ora, tendo em conta II.1.21, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x) dx = \sum_{y \in I} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{J_{k,y}}(x) dx = \sum_{y \in I} \lambda(J_{k,y}) = 2k \sum_{y \in I} \|h(y)\| < +\infty,$$

pelo que, tendo em conta II.1.29, $\varphi_k(x) < +\infty$ quase sempre, isto é, existe um boreliano B_k com $\lambda(B_k) = 0$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus B_k$, $\varphi_k(x) < +\infty$. O facto de se ter $A_k \subset B_k$ implica que se tem efetivamente $\lambda(A_k) = 0$.

2) Seja $Y \subset J$,

$$Y = I \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k,$$

que verifica $\lambda(Y) = 0$, por ser união contável de conjuntos de medida 0 (os conjuntos A_k e os conjuntos $\{y\}$, com $y \in I$). Vamos verificar que, se $x_0 \in J \setminus Y$, tem-se $h'(x_0) = 0$, o que terminará a demonstração.

Subdem: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \delta$. Uma vez que

¹⁹³cf. Rudin [10].

$x_0 \notin I$, tem-se $h(x_0) = 0$ e, uma vez que $x_0 \notin A_k$, só existe um número finito de elementos $y \in I$ tais que $\left\| \frac{h(y)}{y-x_0} \right\| > \frac{1}{k}$, o que nos permite considerar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $y \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap J$,

$$\left\| \frac{h(y) - h(x_0)}{y - x_0} \right\| = \left\| \frac{h(y)}{y - x_0} \right\| \leq \frac{1}{k} < \delta$$

(reparar que o primeiro membro é 0 se $y \notin I$). Ficou assim provado que $h'(x_0) = 0$. \square

III.9.19 (Derivabilidade das aplicações de variação limitada) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Hilbert e $g: J \rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada. Tem-se então:

a) Existe uma aplicação topologicamente mensurável $f: J \rightarrow E$ tal que se tenha $g'(t) = f(t)$ quase sempre (relativamente à medida de Lebesgue λ), em particular g é derivável em quase todos os pontos de J .

b) Qualquer aplicação topologicamente mensurável $f: J \rightarrow E$ nas condições de a) é uma aplicação integrável (relativamente à medida de Lebesgue λ).¹⁹⁴

Dem: Consideremos a medida de Lebesgue-Stieltjes vetorial $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$ nos borelianos de J (cf. III.9.14). Tendo em conta III.7.18, consideremos uma decomposição de Lebesgue de ω_g , relativa à medida de Lebesgue λ , constituída por uma medida λ -absolutamente contínua $\omega: \mathcal{B} \rightarrow E$ e uma medida λ -singular $\omega': \mathcal{B} \rightarrow E$ tais que $\omega_g = \omega + \omega'$. Tendo em conta o teorema de Radon-Nikodym para medidas vetoriais (cf. III.7.21), consideremos uma aplicação integrável $f: J \rightarrow E$ tal que $\omega = \lambda_{(f)}$, isto é, que

$$\omega(A) = \int_A f(x) dx,$$

para cada boreliano A de J .¹⁹⁵ Tendo em conta III.9.15, para cada $t \in J$, tem-se

$$g(t^+) - g(c^+) = \omega_g(]c, t]) = \lambda_{(f)}(]c, t]) + \omega'(]c, t]),$$

portanto

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad g(t) &= g(c^+) + (g(t) - g(t^+)) + \lambda_{(f)}(]c, t]) + \omega'(]c, t]) = \\ &= g(c^+) + h_1(t) + h_2(t) + h_3(t), \end{aligned}$$

onde

¹⁹⁴Quem resolver o exercício III.9.10 adiante, constatará que há uma escolha natural para f , nomeadamente a aplicação que toma o valor $g'(t)$ nos pontos em que g é derivável e, por exemplo, o valor 0 nos restantes pontos.

¹⁹⁵É para podermos aplicar esse resultado que exigimos que E seja um espaço de Hilbert, e não meramente um espaço de Banach.

$$h_1(t) = g(t) - g(t^+), \quad h_2(t) = \lambda_{(f)}(]c, t]), \quad h_3(t) = \omega' (]c, t]).$$

Tendo em conta III.9.10, o conjunto I dos pontos $t \in J$ onde g não é contínua é contável, tendo-se $h_1(t) = 0$ para cada $t \in J \setminus I$. Além disso, notando μ a medida positiva finita de Lebesgue-Stieltjes associada à função variação total, crescente e contínua à direita, $T_g: J \rightarrow [0, V(g)] \subset \mathbb{R}_+$, deduzimos de I.4.14 e III.9.10 que

$$\begin{aligned} \sum_{t \in I} \|h_1(t)\| &\leq \sum_{t \in I} \|g(t^+) - g(t)\| + \|g(t) - g(t^-)\| = \\ &= \sum_{t \in I} V_g(t^+) - V_g(t^-) = \sum_{t \in I} \mu(\{t\}) = \mu(I) < +\infty. \end{aligned}$$

Podemos assim aplicar o lema III.9.18 para concluir que se tem $h'_1(t) = 0$ quase sempre. Por outro lado, resulta de III.8.7 e III.8.8 que $h'_2(t) = f(t)$ quase sempre e que $h'_3(t) = 0$ quase sempre. Deduzimos assim de (1) que, para quase todo o $t \in]c, d[$, g é derivável em t , e com $g'(t) = f(t)$. Ficou assim provada a afirmação em a) e a de b) resulta de que, se $\hat{f}: J \rightarrow E$ é outra aplicação topologicamente mensurável com $g'(t) = \hat{f}(t)$ quase sempre, então $f(t) = \hat{f}(t)$ quase sempre e portanto, por f ser integrável, \hat{f} é também integrável. \square

III.9.20 (Corolário — Teorema de Lebesgue sobre a derivabilidade das funções crescentes) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com extremidades finitas ou infinitas, e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente (no sentido lato). Tem-se então que g é derivável em quase todos os pontos de J (relativamente à medida de Lebesgue λ).

Dem: Se a função crescente g fosse limitada, ela seria uma aplicação de variação limitada (cf. a alínea b) de III.9.4) pelo que a conclusão era uma aplicação directa do resultado precedente. No caso geral, podemos considerar duas sucessões de elementos $c_n < d_n$ em $]c, d[$, com $c_n \rightarrow c$ e $d_n \rightarrow d$. Uma vez que a restrição de g a cada $]c_n, d_n[$ já é limitada, por admitir $g(c_n)$ e $g(d_n)$ como minorante e majorante respectivamente, podemos concluir a existência, para cada n de um boreliano $Y_n \subset]c_n, d_n[$ com $\lambda(Y_n) = 0$ tal que g seja derivável em cada ponto de $]c_n, d_n[\setminus Y_n$ e, sendo Y a união dos Y_n , que verifica ainda $\lambda(Y) = 0$, o facto de $]c, d[$ ser a união dos $]c_n, d_n[$ implica que g é derivável em cada ponto de $]c, d[\setminus Y$. \square

Vamos agora examinar em que condições é que a medida de Lebesgue-Stieltjes $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$, associada a uma aplicação de variação limitada $g:]c, d[\rightarrow E$, é uma medida λ -absolutamente contínua, onde λ é a medida de Lebesgue na σ -álgebra \mathcal{B} dos borelianos de $]c, d[$. Começamos com um lema que é já conhecido por quem tenha resolvido o exercício I.2.6 e é porventura facilmente antecipado por quem tenha feito o exercício II.1.19, de certo modo mais elementar que aquele, e cuja resolução retomamos na parte essencial da demonstração do lema.

III.9.21 (**Lema**) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, com extremidades finitas ou infinitas, λ a medida de Lebesgue na σ -álgebra \mathcal{B} dos borelianos de J e $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma medida positiva finita. Tem-se então que μ é λ -absolutamente contínua (cf. III.3.1) se, e só se, qualquer que seja $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada boreliano A de J que verifique $\lambda(A) < \varepsilon$, tem-se $\mu(A) < \delta$.

Dem: 1) Suponhamos que, para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(A) < \delta$, sempre que $\lambda(A) < \varepsilon$. Se A é um boreliano com $\lambda(A) = 0$, podemos então concluir que $\mu(A) < \delta$, para todo o $\delta > 0$, portanto $\mu(A) = 0$. Concluimos assim que a medida μ é λ -absolutamente contínua.

2) Suponhamos, reciprocamente, que μ é λ -absolutamente contínua. Tendo em conta o teorema de Radon-Nikodym (cf. III.3.9), podemos considerar uma aplicação mensurável $\varphi:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\mu = \lambda_{(\varphi)}$, isto é, tal que, para cada boreliano A de $]c, d[$,

$$\mu(A) = \int_A \varphi(x) dx = \int_{]c, d[} \varphi(x) \mathbb{I}_A(x) dx.$$

Seja $\delta > 0$ arbitrário. Consideremos a sucessão crescente de borelianos

$$A_n = \{x \in J \mid \varphi(x) \leq n\},$$

cujas uniões é o intervalo $J =]c, d[$. Tem-se assim $\mu(A_n) \rightarrow \mu(J) < +\infty$ pelo que podemos fixar n tal que $\mu(A_n) > \mu(J) - \frac{\delta}{2}$, isto é, $\mu(J \setminus A_n) < \frac{\delta}{2}$. Seja $\varepsilon = \frac{\delta}{2n}$ e consideremos um boreliano arbitrário A com $\lambda(A) < \varepsilon$. Tem-se então que A é a união disjunta dos borelianos $A \cap A_n$ e $A \setminus A_n$ e, por ser $A \setminus A_n \subset J \setminus A_n$ e $\varphi(x) \leq n$, para cada $x \in A \cap A_n$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \cap A_n) + \mu(A \setminus A_n) \leq \int_{A \cap A_n} n dx + \mu(J \setminus A_n) < \\ &< n\lambda(A \cap A_n) + \frac{\delta}{2} \leq n\varepsilon + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned} \quad \square$$

III.9.22 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação. Diz-se que g é *absolutamente contínua* se, para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, qualquer que seja a família finita de intervalos abertos $(]a_i, b_i[)_{i \in I}$ disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$ e $\sum (b_i - a_i) < \varepsilon$, vem

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| < \delta.$$

Repare-se que uma aplicação absolutamente contínua é, em particular, contínua, e mesmo uniformemente contínua, como se constata considerando famílias constituídas por um único intervalo.

III.9.23 (Comparação das duas noções de continuidade absoluta) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita e $\lambda: \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ a medida de Lebesgue nos borelianos de J . Sejam E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada com descontinuidades bem comportadas (cf. III.9.16) e consideremos a correspondente medida de Lebesgue-Stieltjes vetorial $\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$. Tem-se então que g é uma aplicação absolutamente contínua se, e só se, ω_g é uma medida vetorial λ -absolutamente contínua.

Dem: 1) Suponhamos que a medida vetorial ω_g é λ -absolutamente contínua. Em particular, para cada $a \in]c, d[$ o facto de ser $\lambda(\{a\}) = 0$ implica que

$$g(a^+) - g(a^-) = \omega_g(\{a\}) = 0,$$

e portanto, por as descontinuidades de g serem bem comportadas, g é contínua em a . Seja $\delta > 0$ arbitrário. Tendo em conta III.7.16, a medida positiva $|\omega_g|$ é também λ -absolutamente contínua e portanto, pelo lema III.9.21, podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que, para cada boreliano A de J com $\lambda(A) < \varepsilon$, tem-se $|\omega_g|(A) < \delta$. Dada uma família finita de intervalos abertos $(]a_i, b_i])_{i \in I}$ disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$ e $\sum(b_i - a_i) < \varepsilon$, tem-se então que o boreliano $A = \bigcup]a_i, b_i[$ verifica

$$\lambda(A) = \sum_{i \in I} (b_i - a_i) < \varepsilon,$$

o que implica que

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| = \sum_{i \in I} \|\omega_g(]a_i, b_i])\| \leq |\omega_g|(A) < \delta.$$

Provámos assim que a aplicação g é absolutamente contínua.

2) Suponhamos agora que a aplicação g é absolutamente contínua, em particular contínua.

Seja $A \subset J$ um boreliano tal que $\lambda(A) = 0$ e seja $\delta > 0$ arbitrário.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que, para cada família finita de intervalos abertos $(]a_i, b_i])_{i \in K}$ disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$ e $\sum(b_i - a_i) < \varepsilon$, venha

$$(1) \quad \sum_{i \in K} \|g(b_i) - g(a_i)\| < \frac{\delta}{2}.$$

Reparemos que, para cada família contável de intervalos abertos $(]a_i, b_i])_{i \in I}$ disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$ e $\sum(b_i - a_i) < \varepsilon$, tem-se

$$\sum_{i \in I} \|g(b_i) - g(a_i)\| \leq \frac{\delta}{2},$$

uma vez que, para cada parte finita $K \subset I$, a correspondente soma com $i \in K$ é menor que $\frac{\delta}{2}$.

Tendo em conta I.4.8, o facto de ser $\lambda(A) = 0$ permite-nos considerar uma

família contável de intervalos semiabertos $(]a_i, b_i])_{i \in I}$ disjuntos dois a dois, com $a_i < b_i$ em $]c, d[$, $A \subset \bigcup]a_i, b_i]$ e $\sum (b_i - a_i) < \varepsilon$. Lembrando o lema I.3.10, consideremos uma família $(\delta_i)_{i \in I}$ de números $\delta_i > 0$ tal que $\sum \delta_i < \frac{\varepsilon}{2}$ e escolhamos, para cada $i \in I$, uma família finita de intervalos abertos disjuntos dois a dois $]a_{i,k}, b_{i,k}[$, onde $k \in K_i$, com $a_{i,k} < b_{i,k}$ em $]a_i, b_i]$ tal que

$$\sum_{k \in K_i} \|g(b_{i,k}) - g(a_{i,k})\| \geq T_g(a_i, b_i) - \delta_i = T_g(b_i) - T_g(a_i) - \delta_i,$$

ou seja, tendo em conta III.9.17 e as alíneas c) e d) de III.9.10,

$$\sum_{k \in K_i} \|g(b_{i,k}) - g(a_{i,k})\| \geq |\omega_g|(|a_i, b_i]) - \delta_i$$

Consideremos a família contável dos intervalos abertos $]a_{i,k}, b_{i,k}[$, com $i \in I$ e $k \in K_i$, que são também disjuntos dois a dois e que verificam

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} (b_{i,k} - a_{i,k}) &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \lambda(]a_{i,k}, b_{i,k}[) = \sum_{i \in I} \lambda\left(\bigcup_{k \in K_i}]a_{i,k}, b_{i,k}[\right) \leq \\ &\leq \sum_{i \in I} \lambda(]a_i, b_i]) = \sum_{i \in I} (b_i - a_i) < \varepsilon \end{aligned}$$

e portanto, lembrando a desigualdade (1),

$$\begin{aligned} |\omega_g|(A) &\leq \sum_{i \in I} |\omega_g|(|a_i, b_i]) \leq \sum_{i \in I} \left(\delta_i + \sum_{k \in K_i} \|g(b_{i,k}) - g(a_{i,k})\| \right) < \\ &< \frac{\delta}{2} + \sum_{i,k} \|g(b_{i,k}) - g(a_{i,k})\| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de $\delta > 0$, implica que $|\omega_g|(A) = 0$. Ficou assim provado que a medida positiva $|\omega_g|$ é λ -absolutamente contínua, e portanto, por III.7.16, que a medida vetorial ω_g é também λ -absolutamente contínua. \square

III.9.24 (Derivabilidade das aplicações absolutamente contínuas) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita, E um espaço de Hilbert e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação de variação limitada¹⁹⁶ e absolutamente contínua. Tem-se então:

¹⁹⁶A hipótese de g ser de variação limitada pode ser dispensada desde que se enfraqueça algumas das conclusões, nomeadamente: a aplicação f poderá ser só localmente integrável, em vez de integrável, o valor $g(c^+)$ deverá ser substituído por $g(t_0)$, para um t_0 escolhido em $]c, d[$, e o integral em $]c, x]$ deverá ser substituído pelo integral de t_0 a x (no sentido referido em II.3.5). O passo essencial para obter esta conclusão mais geral consiste em aplicar o presente resultado às restrições de g a intervalos $]a, b[$ com $a < b$ em $]c, d[$, reparando que, como se verá no exercício III.9.9 adiante, essas restrições são necessariamente de variação limitada. Aliás, e pela mesma razão, a hipótese de g ser absoluta-

a) Existe uma aplicação topologicamente mensurável $f:]c, d[\rightarrow E$ tal que $g'(t) = f(t)$ quase sempre (relativamente à medida de Lebesgue λ).

b) Qualquer que seja a aplicação topologicamente mensurável $f:]c, d[\rightarrow E$ nas condições de a),¹⁹⁷ tem-se que f é integrável e, para cada $x \in]c, d[$,

$$g(x) = g(c^+) + \int_{]c, x]} f(t) dt.$$

Dem: Começemos por notar que a conclusão de a) foi já demonstrada em III.9.19. Vamos, no entanto, reobtê-la, em conjunto com a parte essencial da conclusão de b). Seja ω_g a medida vetorial de Lebesgue-Stieltjes, nos borelianos de J , associada a g , medida que, tendo em conta III.9.23, é λ -absolutamente contínua. Tendo em conta o teorema de Radon-Nikodym para medidas vetoriais (cf. III.7.21), consideremos uma aplicação integrável $\hat{f}: J \rightarrow E$ tal que $\omega = \lambda_{(\hat{f})}$, isto é, que

$$\omega(A) = \int_A \hat{f}(x) dx,$$

para cada boreliano A de J . Tendo em conta III.9.15, para cada $x \in J$, tem-se

$$g(x) - g(c^+) = g(x^+) - g(c^+) = \omega_g(]c, x]) = \lambda_{(\hat{f})}(]c, x]),$$

e portanto

$$g(x) = g(c^+) + \lambda_{(\hat{f})}(]c, x]) = g(c^+) + \int_{]c, x]} \hat{f}(t) dt.$$

Quanto a b), basta repararmos que, se $\hat{f}:]c, d[\rightarrow E$ é outra aplicação topologicamente mensurável tal que $g'(t) = \hat{f}(t)$ quase sempre, então tem-se $\hat{f}(t) = f(t)$, e portanto \hat{f} também é integrável e, para cada $x \in J$

$$g(x) = g(c^+) + \int_{]c, x]} f(t) dt = g(c^+) + \int_{]c, x]} \hat{f}(t) dt. \quad \square$$

mente contínua pode ser enfraquecida, bastando pedir que g tenha restrição absolutamente contínua a cada um dos intervalos $]a, b[$ referidos (costuma-se então dizer-se que g é *localmente absolutamente contínua*).

¹⁹⁷Quem resolver o exercício III.9.10 adiante, constatará que há uma escolha natural para f , nomeadamente a aplicação que toma o valor $g'(t)$ nos pontos em que g é derivável e, por exemplo, o valor 0 nos restantes pontos.

EXERCÍCIOS

Ex III.9.1 Mostrar que, se $g:]c, d[\rightarrow E$ é uma aplicação de variação limitada, então g é uma aplicação limitada.

Ex III.9.2 Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação.

a) Verificar que, se g é de variação limitada, então a aplicação $h:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = T_g(x) - g(x)$, é uma aplicação crescente.

Sugestão: Para $x < y$ deduzir de III.9.3 e III.9.7 a desigualdade

$$g(y) - g(x) \leq T_g(y) - T_g(x).$$

b) (Teorema de Jordan) Deduzir de a) que a aplicação $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada se, e só se, g é diferença de duas funções crescentes e limitadas $]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$.

Ex III.9.3 **a)** Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E e F espaços de Banach e $\xi: E \rightarrow F$ uma aplicação linear contínua, com norma $\|\xi\|$.¹⁹⁸ Mostrar que, se $g:]c, d[\rightarrow E$ é uma aplicação de variação limitada, então $\xi \circ g:]c, d[\rightarrow F$ é também de variação limitada e com $V(\xi \circ g) \leq \|\xi\|V(g)$.

b) Deduzir de a) que, considerando em \mathbb{R}^n uma qualquer das suas normas equivalentes, se $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação, com

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x)),$$

então g é de variação limitada se, e só se, cada componente $g_j:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada. Concluir, em particular, que uma aplicação $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{C}$ é de variação limitada se, e só se, as suas partes real e imaginária são ambas aplicações de variação limitada $]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$.

Ex III.9.4 Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação. Mostrar que, se existir uma medida vetorial ω_g nos borelianos de $]c, d[$ tal que, para cada $x \leq y$ em $]c, d[$,

$$\omega_g(]x, y]) = g(y) - g(x),$$

então a aplicação g é de variação limitada e contínua à direita.

Sugestão: Para verificar que g é de variação limitada lembrar a nota III.9.2 e o facto de a medida de variação total duma medida vetorial ser finita. Para mostrar que g é contínua à direita em y , escolher $x < y$ e uma sucessão

¹⁹⁸Recordar que a norma de ξ é a menor das constantes $M \geq 0$ tais que $\|\xi(u)\| \leq M\|u\|$, para todo o $u \in E$.

decrecente de elementos $y_n > y$ com $y_n \rightarrow y$ e relacionar $]x, y]$ com os intervalos $]x, y_n]$.

Ex III.9.5 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e $g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação crescente e limitada. Mostrar que, para cada $a \in]c, d[$, tem-se $T_g(a) = g(a) - g(c^+)$ e deduzir que as medidas de Lebesgue Stieltjes nos borelianos de J associadas a g e a T_g coincidem. **Sugestão:** Lembrar o exemplo na alínea b) de III.9.4 e ter em conta III.9.8.

Ex III.9.6 (**Comparar com a alínea c) de III.9.4**) Sejam $]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação derivável em cada $t \in]c, d[$ e com $g':]c, d[\rightarrow E$ contínua.

a) Mostrar que se $g':]c, d[\rightarrow E$, além de contínua, é integrável, então g , que já sabemos ser de variação limitada, verifica mesmo

$$V(g) = \int_{]c, d[} \|g'(x)\| dx.$$

Sugestão: Começar por reparar que, para cada $a < b$ em $]c, d[$, a medida de Lebesgue-Stieltjes vetorial ω_g verifica

$$\omega_g([a, b]) = \int_{]a, b]} g'(x) dx$$

e coincide portanto com a medida $\lambda_{(g')}$, definida a partir da medida de Lebesgue pela função integrável g' (cf. III.7.12). Utilizar esse resultado para concluir que a medida de variação total $|\omega_g|$ coincide com a medida positiva definida a partir da medida de Lebesgue pela função $\varphi(x) = \|g'(x)\|$ e lembrar que, por III.9.17, $V(g) = |\omega_g|([c, d])$.

b) Deduzir de a) que, se $g':]c, d[\rightarrow E$ é contínua, mas não integrável, então a aplicação g não é de variação limitada. **Sugestão:** Reparar que, para cada $a < b$ em $]c, d[$, a restrição de g' a $]a, b[$ já é integrável.

Ex III.9.7 Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação contínua. Suponhamos que existe $M \geq 0$ e uma parte contável $X \subset J$ tal que, para cada $x \in J \setminus X$, g seja derivável em x e com $\|g'(x)\| \leq M$.

a) Tendo presente a conclusão do exercício II.3.2, mostrar que a aplicação g é absolutamente contínua.

b) Tendo presente a mesma conclusão, mostrar que, se o intervalo J é limitado, então g é de variação limitada e com $V(g) \leq M(d - c)$.

c) Verificar que as conclusões de a) e b) não seriam válidas se, em vez de exigirmos que o conjunto excecional X seja contável, exigíssemos apenas que ele verificasse $\lambda(X) = 0$. **Sugestão:** Pensar na restrição ao intervalo $]0, 1[$ da função singular de Cantor-Lebesgue $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, estudada no exercício I.4.11 e ter em conta III.9.24.

Ex III.9.8 Como referimos em III.9.16, se uma aplicação de variação limitada $g:]c, d[\rightarrow E$ é tal que, para cada $a \in]c, d[$, $g(a)$ pertence ao segmento afim de extremidades $g(a^+)$ e $g(a^-)$, então g tem singularidades bem comportadas. Mostrar que, no caso em que o espaço de Banach E é um espaço de Hilbert, a recíproca é também verdadeira: Se uma aplicação de variação limitada $g:]c, d[\rightarrow E$ tem singularidades bem comportadas, então, para cada $a \in]c, d[$, $g(a)$ pertence ao segmento afim de extremidades $g(a^+)$ e $g(a^-)$.

Ex III.9.9 **a)** Mostrar que, se $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto limitado e não vazio, E é um espaço de Banach e $g: J \rightarrow E$ é absolutamente contínua, então g é de variação limitada. **Sugestão:** Considerar $\varepsilon > 0$ tal que qualquer que seja a família finita de intervalos abertos $(]a_i, b_i])_{i \in I}$ disjuntos dois a dois com $a_i < b_i$ em $]c, d[$ e $\sum (b_i - a_i) < \varepsilon$ vem $\sum \|g(b_i) - g(a_i)\| < 1$ e verificar que quaisquer que sejam $a < b$ em $]c, d[$ com $b - a < \varepsilon$ a restrição de g a $]a, b[$ é de variação limitada e com $V(g)_{a,b} \leq 1$. Aplicar então III.9.11 para mostrar que, sendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{d-c}{n} < \varepsilon$, g é de variação limitada e com $V(g) \leq n$.

b) Sendo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por $g(x) = x$, verificar que g é absolutamente contínua, mas não é de variação limitada.

c) Sendo $g:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação definida por $g(x) = x \sin(\frac{1}{x})$, verificar que g não é de variação limitada, e portanto também não é absolutamente contínua, mas que g é uniformemente contínua (reparar que g é a restrição de uma aplicação contínua definida em $[0, 1]$).

Ex III.9.10 (**Mensurabilidade da aplicação derivada**) Sejam $J =]c, d[\subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio, com cada extremidade finita ou infinita, E um espaço de Banach e $g:]c, d[\rightarrow E$ uma aplicação que seja contínua ou, mais geralmente, que seja contínua em todos os pontos de J não pertencentes a uma certa parte contável Y (é o que acontece, por exemplo, se g for de variação limitada, como referido na alínea e) de III.9.10).

a) Verificar que g é uma aplicação topologicamente mensurável.

Sugestão: Lembrar II.2.11 e considerar as restrições de g a $J \setminus Y$ e a cada conjunto unitário $\{a\}$ com $a \in Y$.

b) Sendo $X \subset J$ o conjunto dos pontos x tais que g seja derivável em x , mostrar que X é um boreliano e que é mensurável a aplicação $X \rightarrow E$, $x \mapsto g'(x)$.

Sugestão: Começar por reparar que basta considerar o caso em que $J = \mathbb{R}$, se necessário substituindo g pelo seu prolongamento que toma o valor 0 em cada ponto de $\mathbb{R} \setminus J$. Lembrando a condição de Cauchy para a existência de limite de uma aplicação num ponto, reparar que $x \in X$ se, e só se, para cada racional $\delta > 0$, existe um racional $\varepsilon > 0$ tal que, sempre que y e y' pertencem a $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\setminus \{x\}$,

$$\left\| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} - \frac{g(y') - g(x)}{y' - x} \right\| \leq \delta$$

e que esta última condição é equivalente à de se ter, sempre que y e y' pertencem a $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$,

$$\|(y' - x)(g(y) - g(x)) - (y - x)(g(y') - g(x))\| \leq \delta|y - x||y' - x|$$

e utilizar um argumento de passagem ao limite para mostrar que ela também é equivalente à de esta última desigualdade ser verificada para y, y' na intersecção de $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ com o conjunto contável $\mathbb{Q} \cup Y$, mostrando, para isso, que todo o elemento y em $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ é limite de uma sucessão de elementos y_n do conjunto $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ que pertencem a $\mathbb{Q} \cup Y$, podendo escolher-se a sucessão constante no caso em que $y \in \mathbb{Q} \cup Y$. Para cada par de racionais $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, e cada par de elementos y, y' em $\mathbb{Q} \cup Y$, mostrar que é boreliano o conjunto $X_{\delta, \varepsilon, y, y'}$ dos pontos $x \in \mathbb{R}$, tais que $|y' - x| \geq \varepsilon$, ou $|y' - x| \geq \varepsilon$, ou

$$\|(y' - x)(g(y) - g(x)) - (y - x)(g(y') - g(x))\| \leq \delta|y - x||y' - x|,$$

e relacionar X com este conjunto. Reparar, enfim, que, para cada $x \in X$, tem-se

$$g'(x) = \lim_n \left(g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x) \right).$$

Apêndice 1

Uma versão do teorema de Sard

Na secção II.5 estudámos o modo como se pode calcular a medida de Lebesgue da imagem de um subconjunto de um aberto U de \mathbb{R}^n por meio de um difeomorfismo de classe C^1 , f de U sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$. Neste apêndice vamos examinar o que se pode dizer sob hipóteses mais fracas, nomeadamente quando temos simplesmente uma aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , que pode não ser injetiva e que, mesmo que o seja, pode não ser um difeomorfismo. Uma vez que, para cada $x \in U$, a aplicação linear derivada $Df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ já não é necessariamente um isomorfismo, uma primeira coisa de que necessitaremos é generalizar a noção de coeficiente de dilatação de modo a incluir o caso das aplicações lineares que não são isomorfismos.

Ap1.1 (Extensão trivial dos coeficientes de dilatação) Podemos estender trivialmente a definição dos coeficientes de dilatação em II.5.10 definindo, para cada aplicação linear $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que não seja isomorfismo, $c_\xi = 0$. A propriedade definidora dos coeficientes de dilatação continua a valer, mas com um cuidado suplementar: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um boreliano e **se $\xi(A)$ também é boreliano**,¹⁹⁹ então

$$\lambda_n(\xi(A)) = 0 = c_\xi \lambda_n(A).$$

uma vez que $\xi(A) \subset \xi(\mathbb{R}^n)$ e, tendo em conta II.5.11 e o facto de $\xi(\mathbb{R}^n)$ ser um subespaço vetorial de dimensão menor que n , tem-se $\lambda_n(\xi(\mathbb{R}^n)) = 0$. Repare-se que a propriedade na alínea b) de II.5.13, continua a ser verificada neste quadro estendido, nomeadamente se $\xi, \eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são aplicações lineares, então a aplicação linear $\eta \circ \xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem coeficiente de dilatação $c_{\eta \circ \xi} = c_\eta \times c_\xi$ ($\eta \circ \xi$ é isomorfismo se, e só se, ξ e η são ambos isomorfismos). Do mesmo modo, continua a ser válida para qualquer aplicação linear a caracterização

$$c_\xi = |\det(\xi)|.$$

Uma dificuldade que decorre de não estarmos a exigir que $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um difeomorfismo de classe C^1 está em que nada nos garante que, se $A \subset U$ é um boreliano, $f(A)$ tenha que ser um boreliano, pelo que não fará sentido falar da medida de $f(A)$. Começamos assim por examinar

¹⁹⁹Infelizmente, nada nos garante que a imagem direta de um boreliano por uma aplicação contínua, mesmo quando esta é uma aplicação linear, tenha que ser um boreliano.

uma situação muito simples em que é possível garantir que uma tal imagem é um boreliano e mostramos em seguida que um número significativo de borelianos de \mathbb{R}^n está nessa situação.

Ap1.2 Vamos dizer que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é σ -compacto²⁰⁰ se for união de uma família contável $(K_j)_{j \in J}$ de subconjuntos compactos K_j de \mathbb{R}^n .

Ap1.3 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto σ -compacto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação contínua. Tem-se então que o conjunto $f(A) \subset \mathbb{R}^p$ é também σ -compacto, em particular é boreliano.

Dem: Sendo $(K_j)_{j \in J}$ uma família contável de compactos de união A , o conjunto $f(A)$ é a união da família contável dos compactos $f(K_j)$, que são, em particular, fechados em \mathbb{R}^p , e portanto borelianos, pelo que $f(A)$ é σ -compacto e boreliano. \square

Ap1.4 (Exemplos de conjuntos σ -compactos)

a) Qualquer aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é σ -compacto.

b) Qualquer fechado $A \subset \mathbb{R}^n$ é σ -compacto.

c) Se A e B são subconjuntos σ -compactos de \mathbb{R}^n , então $A \cap B$ é também σ -compacto. Em consequência, uma intersecção finita de subconjuntos σ -compactos de \mathbb{R}^n é um subconjunto σ -compacto.

d) Se $(A_j)_{j \in J}$ é uma família contável de subconjuntos σ -compactos de \mathbb{R}^n , então a união $\bigcup_{j \in J} A_j$ é também um conjunto σ -compacto.

Dem: a) O próprio \mathbb{R}^n é σ -compacto, por ser a união, por exemplo, das bolas fechadas de centro 0 e raio n ($n \in \mathbb{N}$), que são conjuntos fechados e limitados, e portanto compactos. Se U é um aberto de \mathbb{R}^n diferente de \mathbb{R}^n , podemos considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq n \wedge d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{1}{n}\}$$

que é fechado e limitado (lembrar que a norma e a função distância ao subconjunto fechado não vazio $\mathbb{R}^n \setminus U$ são funções contínuas) e portanto compacto. Reparando que $x \in U$ se, e só se, $d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$, vemos que os conjuntos K_n estão contidos em U e têm união U , já que, para cada $x \in U$, tem-se, para n suficientemente grande, $\|x\| \leq n$ e $d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{1}{n}$.

b) Seja $(K_j)_{j \in J}$ uma família contável de compactos de união \mathbb{R}^n . Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, então A é a união, dos conjuntos $K_j \cap A$, que são fechados nos compactos K_j , e portanto compactos.

c) Sejam $(K_j)_{j \in J}$ e $(K'_i)_{i \in I}$ duas famílias contáveis de compactos com uniões iguais a A e B , respetivamente. Tem-se então que $A \cap B$ é a união da família contável de conjuntos $K_j \cap K'_i$, com $(j, i) \in J \times I$, onde cada

²⁰⁰Esta definição pode ser dada, mais geralmente, no caso em que substituimos \mathbb{R}^n por um espaço topológico X .

$K_j \cap K'_i$ é compacto, por ser fechado em K_j .

d) Para cada j , podemos considerar uma família contável de compactos $K_{j,i}$, com $i \in I_j$, com união A_j . Tem-se então que $\bigcup_{j \in J} A_j$ é a união da família

contável de conjuntos $K_{j,i}$, onde o conjunto de índices considerado é o dos pares (j, i) com $j \in J$ e $i \in I_j$ (união contável de conjuntos contáveis). \square

No sentido de aligeirmos a demonstração do resultado que temos em vista, começamos por estabelecer um lema, que inclui a parte essencial da respetiva demonstração.

Ap1.5 Repare-se que, se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 , então, para cada $x \in U$, a matriz da aplicação linear $Df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a *matriz jacobiana*, cujo elemento da linha i e coluna j é a derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ da coordenada i , $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, relativamente à variável j . Uma vez que, por definição, as funções $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, podemos assim concluir que tem lugar uma aplicação contínua

$$U \rightarrow [0, +\infty[, \quad x \mapsto c_{Df_x},$$

já que o coeficiente de dilatação c_{Df_x} é o valor absoluto do determinante da matriz jacobiana e este último é uma soma de produtos de entradas dessa matriz, cada um multiplicado por ± 1 .

Ap1.6 (Lema) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e $V \subset U$ um aberto, cuja aderência \bar{V} seja compacta e contida em U . Tem-se então

$$\lambda_n(f(V)) \leq \int_V c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Dem: Para uma melhor sistematização, vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

1) Podemos já afastar o caso trivial em que $V = \emptyset$. No caso em que $U \neq \mathbb{R}^n$, escolhamos $\varepsilon_0 > 0$ menor que a distância estritamente positiva do compacto \bar{V} ao fechado $\mathbb{R}^n \setminus U$ (mínimo sobre \bar{V} da função contínua estritamente positiva, que a x associa $d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$). No caso em que $U = \mathbb{R}^n$, seja $\varepsilon_0 > 0$ arbitrário.

2) Notemos $M \geq 0$ o máximo de $\|Df_x\|$ para x no subconjunto compacto $\bar{V} + \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ de U . Em particular para cada $x \in \bar{V}$ a bola fechada $\bar{B}_{\varepsilon_0}(x) = x + \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ está contida em $\bar{V} + \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ e portanto, pelo teorema da média, tem-se, para cada $x' \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(x)$, $\|f(x') - f(x)\| \leq M\|x' - x\|$.

3) Para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ notemos V_ε o subconjunto aberto de V

$$V_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \mathbb{R}^n \setminus V) > \varepsilon\}$$

e $A_\varepsilon \subset V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ o conjunto

$$A_\varepsilon = \{(x, y) \in V \times \mathbb{R}^n \mid y \in f(\overline{B_\varepsilon}(x))\}.$$

Tem-se então que os conjuntos A_ε são fechados em $V \times \mathbb{R}^n$, em particular borelianos, e

$$\lambda_{2n}(A_\varepsilon) \geq \beta_n \varepsilon^n \lambda_n(f(V_\varepsilon)).$$

Subdem: Seja $(x, y) \in V \times \mathbb{R}^n$ aderente a A_ε . Podemos considerar uma sucessão de elementos $(x_j, y_j) \in A_\varepsilon$, com $x_j \rightarrow x$ e $y_j \rightarrow y$. Para cada j , tem-se $y_j = f(x'_j)$, para um certo $x'_j \in \overline{B_\varepsilon}(x_j)$ e, considerando a sucessão de elementos $x'_j - x_j$ do compacto $\overline{B_\varepsilon}(0)$, concluímos que, substituindo se necessário todas as sucessões por subsucessões convenientes, podemos já supor que se tem $x'_j - x_j \rightarrow x'$, para um certo $x' \in \overline{B_\varepsilon}(0)$. Deduzimos então que $x'_j = (x'_j - x_j) + x_j \rightarrow x' + x \in \overline{B_\varepsilon}(x)$ e vemos que

$$y = \lim y_j = \lim f(x'_j) = f(x' + x),$$

onde $y \in f(\overline{B_\varepsilon}(x))$, ou seja, $(x, y) \in A_\varepsilon$. Provámos assim que A_ε é fechado em $V \times \mathbb{R}^n$, em particular boreliano.

Reparemos agora que para cada $y \in f(V_\varepsilon)$ existe $x' \in V_\varepsilon$ tal que $y = f(x')$, tendo-se então $\overline{B_\varepsilon}(x') \subset V$ e para cada $x \in \overline{B_\varepsilon}(x')$ tem-se $x' \in \overline{B_\varepsilon}(x)$, donde $(x, y) \in A_\varepsilon$, portanto $\overline{B_\varepsilon}(x') \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in A_\varepsilon\}$, o que implica que

$$\beta_n \varepsilon^n = \lambda_n(\overline{B_\varepsilon}(x')) \leq \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in A_\varepsilon\}).$$

Podemos agora aplicar o teorema de Fubini, tendo em conta o homeomorfismo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ na alínea b) de II.5.5, para concluir que

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(A_\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in A_\varepsilon\}) d\lambda_n(y) \geq \\ &\geq \int_{f(V_\varepsilon)} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in A_\varepsilon\}) d\lambda_n(y) \geq \\ &\geq \int_{f(V_\varepsilon)} \beta_n \varepsilon^n d\lambda_n(y) = \beta_n \varepsilon^n \lambda_n(f(V_\varepsilon)), \end{aligned}$$

o que prova a desigualdade que queríamos estabelecer nesta alínea.

4) Para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, notemos $C_\varepsilon \subset V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ o conjunto

$$C_\varepsilon = \{(x, y) \in V \times \mathbb{R}^n \mid y \in \frac{1}{\varepsilon}(f(\overline{B_\varepsilon}(x)) - f(x))\}.$$

Tem-se então que C_ε é fechado em $V \times \mathbb{R}^n$, em particular boreliano, $C_\varepsilon \subset V \times \overline{B_M}(0)$ e

$$\lambda_{2n}(C_\varepsilon) \geq \beta_n \lambda_n(f(V_\varepsilon)).$$

Subdem: O facto de se ter

$$C_\varepsilon = \{(x, y) \in V \times \mathbb{R}^n \mid (x, f(x) + \varepsilon y) \in A_\varepsilon\},$$

e de termos uma aplicação contínua de $V \times \mathbb{R}^n$ para $V \times \mathbb{R}^n$ que a (x, y) associa $(x, f(x) + \varepsilon y)$ implica que C_ε é fechado em $V \times \mathbb{R}^n$. O que vimos em 2) implica que para cada $(x, y) \in C_\varepsilon$ tem-se $y = \frac{1}{\varepsilon}(f(x') - f(x))$ para um certo $x' \in \overline{B_\varepsilon}(x)$ donde

$$\|y\| = \frac{1}{\varepsilon} \|f(x') - f(x)\| \leq \frac{M}{\varepsilon} \|x' - x\| \leq M.$$

Quanto à medida, podemos utilizar o teorema de Fubini para mostrar que

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(C_\varepsilon) &= \int_V \lambda_n(\{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in C_\varepsilon\}) d\lambda_n(x) = \\ &= \int_V \lambda_n\left(\frac{1}{\varepsilon}(f(\overline{B_\varepsilon}(x)) - f(x))\right) d\lambda_n(x) = \\ &= \int_V \frac{1}{\varepsilon^n} \lambda_n(f(\overline{B_\varepsilon}(x))) d\lambda_n(x) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \lambda_n(\{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in A_\varepsilon\}) d\lambda_n(x) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \lambda_{2n}(A_\varepsilon) \geq \beta_n \lambda_n(f(V_\varepsilon)). \end{aligned}$$

5) Para cada inteiro $k \geq 1$, seja $D_k \subset V \times \mathbb{R}^n$ o conjunto

$$D_k = \bigcup_{j \geq k} C_{\varepsilon_0/j}.$$

Tem-se então que os conjuntos D_k são borelianos de \mathbb{R}^{2n} , para os quais

$$\beta_n \lambda_n(f(V)) \leq \lambda_{2n}(D_k) < +\infty.$$

Subdem: Comecemos por reparar que da definição em 3) decorre que

$$V_{\varepsilon_0/j} \subset V_{\varepsilon_0/(j+1)}$$

e que os abertos $V_{\varepsilon_0/j}$ têm união igual a V (qualquer ponto de V tem distância estritamente positiva ao fechado $\mathbb{R}^n \setminus V$ e portanto essa distância é maior que ε_0/j , para todo o j suficientemente grande). Decorre daqui que os borelianos $f(V_{\varepsilon_0/j})$ constituem uma sucessão crescente de conjuntos de união $f(V)$, e portanto $\lambda_n(f(V)) = \lim \lambda_n(f(V_{\varepsilon_0/j}))$. Para cada $k \geq 1$, tem-se $D_k \supset C_{\varepsilon_0/j}$ para todo o $j \geq k$ donde, pelo que se viu em 4),

$$\lambda_{2n}(D_k) \geq \lambda_{2n}(C_{\varepsilon_0/j}) \geq \beta_n \lambda_n(f(V_{\varepsilon_0/j}))$$

de donde se deduz, tomando o limite em j , que $\lambda_{2n}(D_k) \geq \beta_n \lambda_n(f(V))$. Pelo que vimos em 4), tem-se $D_k \subset V \times \overline{B_M}(0)$ portanto, uma vez que os

conjuntos limitados têm medida de Lebesgue finita,

$$\lambda_{2n}(D_k) \leq \lambda_n(\bar{V}) \times \lambda_n(\bar{B}_M(0)) < +\infty.$$

6) Os borelianos D_k de \mathbb{R}^{2n} verificam $D_k \supset D_{k+1}$ e, sendo $D \subset V \times \mathbb{R}^n$ a intersecção dos conjuntos D_k , tem-se para cada $(x, y) \in D$

$$y \in Df_x(\bar{B}_1(0)).$$

Subdem: O facto de termos uma sucessão decrescente de conjuntos resulta imediatamente da definição dos conjuntos D_k . Suponhamos que $(x, y) \in D$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Por definição da diferenciabilidade, existe $r > 0$ tal que, sempre que $\|x' - x\| < r$, se tenha $x' \in U$ e

$$\|f(x') - f(x) - Df_x(x' - x)\| \leq \delta \|x' - x\|.$$

Escolhendo k tal que $\varepsilon_0/k < r$, o facto de se ter $(x, y) \in D_k$ implica que existe $j \geq k$ tal que $(x, y) \in C_{\varepsilon_0/j}$, isto é, existe $x' \in \bar{B}_{\varepsilon_0/j}(x)$ tal que

$$y = \frac{j}{\varepsilon_0} (f(x') - f(x)).$$

Resulta daqui que $\frac{j}{\varepsilon_0} (x' - x) \in \bar{B}_1(0)$ e

$$\begin{aligned} \|y - Df_x\left(\frac{j}{\varepsilon_0} (x' - x)\right)\| &= \frac{j}{\varepsilon_0} \|f(x') - f(x) - Df_x(x' - x)\| \leq \\ &\leq \delta \frac{j}{\varepsilon_0} \|x' - x\| \leq \delta, \end{aligned}$$

pelo que a distância de y ao compacto $Df_x(\bar{B}_1(0))$ é menor ou igual a δ . Tendo em conta a arbitrariedade de δ , segue-se que a distância referida é igual a 0, e portanto $y \in Df_x(\bar{B}_1(0))$, como queríamos.

7) Tem-se

$$\beta_n \lambda_n(f(V)) \leq \lambda_{2n}(D) \leq \beta_n \int_V c_{Df_x} d\lambda_n(x)$$

e portanto, como queríamos, $\lambda_n(f(V)) \leq \int_V c_{Df(x)} d\lambda_n(x)$.

Subdem: Lembrando 5), os D_k constituem uma sucessão decrescente de borelianos de \mathbb{R}^{2n} de medida finita e maior ou igual a $\beta_n \lambda_n(f(V))$, pelo que, para a respectiva intersecção D , tem-se

$$\lambda_{2n}(D) = \lim \lambda_{2n}(D_k) \geq \beta_n \lambda_n(f(V)).$$

Tendo em conta a conclusão de 6) e o teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_{2n}(D) &= \int_V \lambda_n(\{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in D\}) d\lambda_n(x) \leq \\ &\leq \int_V \lambda_n(Df_x(\overline{B}_1(0))) d\lambda_n(x) = \\ &= \int_V c_{Df_x} \beta_n d\lambda_n(x) = \beta_n \int_V c_{Df_x} d\lambda_n(x). \quad \square \end{aligned}$$

Ap1.7 (J. T. Schwartz) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Para cada boreliano $A \subset U$, existe um boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$, com $f(A) \subset B$, tal que

$$\lambda_n(B) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x),$$

em particular, no caso em que $f(A)$ é um boreliano de \mathbb{R}^n ,

$$\lambda_n(f(A)) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Podemos afastar já o caso particular trivial em que $A = \emptyset$, caso em que podemos tomar $B = \emptyset$.

2) Vamos começar por demonstrar o resultado no caso particular em que se tem $A \subset V$, para um certo aberto V de \mathbb{R}^n com \overline{V} compacto contido em U , em particular $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(\overline{V}) < +\infty$.

Subdem: Seja M o máximo no compacto \overline{V} da função contínua que a x associa c_{Df_x} (cf. Ap1.5). Uma vez que \mathbb{R}^n é um espaço topológico localmente compacto, separado e de base contável e que a medida de Lebesgue λ_n é uma medida de Radon, podemos aplicar a propriedade de regularidade na alínea b) de III.4.6, para considerar, para $p \in \mathbb{N}$, um aberto W_p de \mathbb{R}^n com $A \subset W_p$ e $\lambda_n(W_p) \leq \lambda_n(A) + \frac{1}{p}$, podendo já supor-se que $W_p \subset V$, se necessário substituindo W_p pela sua intersecção com V . Uma vez que $\overline{W_p}$ é fechado e contido em \overline{V} , segue-se que $\overline{W_p}$ é um subconjunto compacto de U pelo que podemos utilizar o lema Ap1.6 para deduzir que, para o boreliano $f(W_p)$, que contém $f(A)$, tem-se, por ser

$$\lambda_n(W_p \setminus A) = \lambda_n(W_p) - \lambda_n(A) \leq \frac{1}{p},$$

$$\begin{aligned}\lambda_n(f(W_p)) &\leq \int_{W_p} c_{Df_x} d\lambda_n(x) = \\ &= \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) + \int_{W_p \setminus A} c_{Df_x} d\lambda_n(x) \leq \\ &\leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) + \frac{M}{p}.\end{aligned}$$

Sendo $B \subset \mathbb{R}^n$ o boreliano intersecção dos $f(W_p)$, $p \in \mathbb{N}$, tem-se $f(A) \subset B$ e, para cada p , $B \subset f(W_p)$, portanto

$$\lambda_n(B) \leq \lambda_n(f(W_p)) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) + \frac{M}{p},$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de p , implica que se tem efetivamente $\lambda_n(B) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x)$.

3) Passemos enfim à demonstração do resultado no caso em que $A \neq \emptyset$ é um subconjunto boreliano arbitrário de U .

Subdem: Consideremos os borelianos $A_{p,q} \subset A$, onde $p, q \in \mathbb{N}$, definidos por

$$A_{p,q} = \left\{ x \in A \mid p-1 \leq \|x\| < p \wedge \frac{1}{q-1} \geq d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > \frac{1}{q} \right\},$$

onde, para evitar termos que tratar separadamente casos particulares, estamos a fazer as convenções $\frac{1}{0} = +\infty = d(x, \emptyset)$ (casos $q = 1$ e $U = \mathbb{R}^n$)²⁰¹. Como se constata imediatamente, os conjuntos $A_{p,q}$ são disjuntos dois a dois e de união A . Uma vez que $A_{p,q}$ está contido no aberto

$$V_{p,q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < p \wedge d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > \frac{1}{q} \right\},$$

cujas aderência é compacta e contida em U , por $V_{p,q}$ estar contido no subconjunto compacto de U ,

$$K_{p,q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq p \wedge d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{1}{q} \right\},$$

podemos aplicar o caso particular estudado em 2) para garantir a existência de borelianos $B_{p,q} \subset \mathbb{R}^n$ com $f(A_{p,q}) \subset B_{p,q}$ e

$$\lambda_n(B_{p,q}) \leq \int_{A_{p,q}} c_{Df_x} d\lambda_n(x).$$

²⁰¹Repare-se que, no caso em que $U = \mathbb{R}^n$, tem-se $A_{p,q} = \emptyset$ para $p \geq 2$ e $A_{p,1}$ é o conjunto dos x tais que $p-1 \leq x < p$.

Tem-se então que $B = \bigcup_{p,q} B_{p,q}$ é um boreliano de \mathbb{R}^n contendo $\bigcup_{p,q} f(A_{p,q}) = f(A)$ e

$$\lambda_n(B) \leq \sum_{p,q} \lambda_n(B_{p,q}) \leq \sum_{p,q} \int_{A_{p,q}} c_{Df_x} d\lambda_n(x) = \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x),$$

que é a desigualdade procurada. □

O resultado precedente permite deduzir como corolários alguns resultados importantes.

Ap1.8 (Versão do teorema de Sard) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Sendo

$$A = \{x \in U \mid Df_x \text{ não é isomorfismo}\},$$

tem-se que $f(A)$ é um boreliano com $\lambda_n(f(A)) = 0$.²⁰²

Dem: Uma vez que A é o conjunto dos $x \in U$ onde a função contínua c_{Df_x} toma o valor 0, concluímos que A é fechado em U , portanto a intersecção do aberto U com um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n , de onde deduzimos que A é σ -compacto (cf. Ap1.4). Segue-se que o conjunto $f(A)$ é também σ -compacto, em particular boreliano (cf. Ap1.3) e daqui deduzimos, tendo em conta Ap1.7, que

$$\lambda_n(f(A)) \leq \int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) = \int_A 0 d\lambda_n(x) = 0. \quad \square$$

Ap1.9 (Imagem de conjuntos de medida nula) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Se $A \subset U$ verifica $\lambda_n(A) = 0$, então existe um boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$ com $f(A) \subset B$ e $\lambda_n(B) = 0$ em particular, no caso em que $f(A)$ é boreliano, $\lambda_n(f(A)) = 0$.

Dem: Temos uma consequência direta de Ap1.7, uma vez que o facto de se ter $\lambda_n(A) = 0$ implica que

$$\int_A c_{Df_x} d\lambda_n(x) = 0. \quad \square$$

Ap1.10 (Corolário) Sejam $m < n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Tem-se então que $f(U)$ é um boreliano com

²⁰²Aos elementos de A dá-se o nome de *pontos críticos* de f e aos de $f(A)$ o de *valores críticos* de f .

$$\lambda_n(f(U)) = 0.^{203}$$

Dem: Uma vez que U é σ -compacto, concluímos que $f(U)$ é σ -compacto, em particular boreliano. Considerando então o aberto $U \times \mathbb{R}^{n-m}$ de \mathbb{R}^n e a aplicação $\widehat{f}: U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definida por $\widehat{f}(x, y) = f(x)$, basta agora reparar que $f(U) = \widehat{f}(U \times \{0\})$, onde

$$\lambda_n(U \times \{0\}) = \lambda_m(U) \times \lambda_{n-m}(\{0\}) = \lambda_m(U) \times 0 = 0. \quad \square$$

²⁰³Esta conclusão não seria possível se tivéssemos exigido apenas que f fosse contínua, como se constata se considerarmos a curva de Peano $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, referida na alínea e) do exercício I.4.12.

Índice de Símbolos

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$	1
$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$	1
$\sum_{i \in I} x_i$	3, 5
$\mathcal{P}(X)$	13
\mathcal{M}_Y	13
\mathcal{B}_X	14
$\mu_Y: \mathcal{M}_Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	17
$\mu + \mu': \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	18
$a\mu: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	18
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	20
$g(a^-), g(a^+)$	25, 433
$\lambda_g: \mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	25, 41
$\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	31
$\lambda_g^*: \mathcal{P}(J) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\lambda^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	33
$\lambda: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	43
$\Psi_N: \{0, 1, \dots, N\}^N \rightarrow [0, 1]$	47
$C = \Psi_2(\{0, 2\}^N) \subset [0, 1]$	48
$f_*\mu$	53
$\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	53
$\tau_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	53
$f_*\mathcal{C}, f_*\mathcal{M}$	54
$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$	56
$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$	57
$\pi_1: X \times Y \rightarrow X$, $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$	57
$\Delta_{\overline{\mathbb{R}}_+} = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \mid x = y\}$	64
$\int f d\mu = \int f(x) d\mu(x)$	72, 74, 110, 116
$\mathbb{I}_A: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}_+$	73
$\int_X f(x) d\mu(x)$, $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$	74, 116
$\mu_{(h)}: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	76, 82
$\int_A f(x) d\mu(x)$, $\int_A f(x) dx$	83, 123
$\mathcal{P}_f(J)$	100
$\mu_{(f)}: \mathcal{M} \rightarrow E$	121
$\sum_{j \in J} w_j$	127
$\ (w_1, w_2, \dots, w_N)\ = \max\{\ w_1\ , \ w_2\ , \dots, \ w_N\ \}$	133
$\pi_j: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N \rightarrow E_j$	133
$\nu_j: E_j \rightarrow E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N$	133

$[[x, y]]$	142
$G_\lambda \subset E \times F$	147
$\int_a^b f(x) dx$	149
$\widehat{f}(t) = \int_{t_0}^t f(x) dx$	150
$f'(t_0)$	151
$\Gamma(x) = \int_{]0, +\infty[} t^{x-1} e^{-t} dt$	164
$\mu \otimes \mu': \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	167
$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu(x) d\mu'(y) = \int f(x, y) d\mu \otimes \mu'(x, y)$	180
\mathcal{S}_n	187
$\lambda_n: \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	188
$c_\xi \in]0, +\infty[$	193
$\det(\xi)$	195
$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x - x_0\ \leq r\}$	196
$\beta_n = \lambda_n(\overline{B}_1(0))$	196
$S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$	197
$\mu_{S_n}: \mathcal{B}_{S_n} \rightarrow \mathbb{R}_+$	197
$\Phi:]0, +\infty[\times S_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \Phi(t, x) = tx$	198
$Df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	201
$\widehat{S}_n \subset C_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$	210
$\mu_{\widehat{S}_n}: \mathcal{B}_{\widehat{S}_n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	210
$T_{w,z} \subset \mathbb{R}^2, \theta_{w,z} \in \mathbb{R}_+$	213
$\exp(z)$	223
$\widehat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$	225
$Epi_f = \{(w, a) \in C \times \mathbb{R} \mid a \geq f(w)\}$	231
$\ \varphi\ _r = \left(\int_X \varphi(x)^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} \in \overline{\mathbb{R}}_+$	236
$\mathbf{Mens}(X, E), \mathbf{Mens}_0(X, E), Mens(X, E)$	240
$Mens(X, E) \rightarrow Mens(Y, E), [f] \mapsto [f]_{/Y}$	241
$[f](x)$	241, 307
$\ [f]\ _p = \left(\int_X \ f(x)\ ^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}, L^p(X, E)$	242
$\text{supess}(\varphi), \text{supess}_{x \in X} \varphi(x), \ \varphi\ _\infty \in \overline{\mathbb{R}}_+$	250
$\ell^p(J, E) \subset \mathbf{Mens}(J, E), \ell^p(E) = \ell^p(\mathbb{N}, E)$	249
$\ [f]\ _\infty = \text{supess}_{x \in X} \ f(x)\ , L^\infty(X, E)$	252
$\ell^\infty(J, E) \subset \mathbf{Mens}(J, E)$	255
$St(X, E) \subset Mens(X, E)$	256
$S_S(X, E) \subset St(X, E)$	259
$\langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x)$	260, 382
$[f] \times [g] = [f \times g] \in Mens(X, H)$	263
$\widehat{\mu} = \widehat{\mu}_a + \widehat{\mu}_s$	270
$\mathcal{C}_c(X, E)$	285, 398
$f \prec U$	286

$C_c(X, E) \subset Mens(X, E)$	291
$L_{loc}^1(X, E) \subset Mens(X, E)$	292
$[f_n] \rightarrow [f]$ em $L_{loc}^1(X, E)$	293
$\langle f, [g] \rangle = \int_X f(x) \times g(x) d\mu(x)$	294
$\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}_+)$	297
$\Phi: \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$	297
$\Phi_\mu(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\mu(x)$	298
$\tau_x(f)(y) = f(y - x)$	310
$\varphi * \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	313
$\mathcal{D}_{f,g} \subset \mathbb{R}^n$	319
$f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow H$	319
$\mathcal{D}_{[f],[g]} \subset \mathbb{R}^n$	322
$[f] * [g]: \mathbb{R}^n \rightarrow H$	322
$\Phi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$, $\Phi_k(x) = k^n \Phi(kx)$	336
$\mathcal{C}_c^\infty(U, E) \subset \mathcal{C}_c(U, E) \subset Mens((U, E))$	340
$\mathcal{C}_c^\infty(U, E) \subset \mathcal{C}_c(U, E) \subset Mens(U, E)$	340
$D_i[f], D[f] \in L_{loc}^1(U, E)$	342
$H^1(U, E), W^{1,2}(U, E)$	361
$L_{loc}^1(U, E) \rightarrow L_{loc}^1(V, E)$, $[g] \mapsto [g] \circ f = [g \circ f]$	362
$ \mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$	364
$\xi_* \mu: \mathcal{M} \rightarrow F$, $\mu: \mathcal{M} \rightarrow E$	370
$\bar{\omega}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$	371
$\mu_{(f)}: \mathcal{M} \rightarrow E$, $\mu_{(f)}(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$	372
$\omega(A) = \omega_a(A) + \omega_s(A)$	374
\overline{E}	382
$\langle [f], [g] \rangle = \int_X \langle f(x), g(x) \rangle d\mu(x)$	382
$\langle [f], [g] \rangle' = \int_X f(x) \times g(x) d\mu(x) = \langle [f], [\bar{g}] \rangle$	393
$\int f \times d\omega = \int f(x) \times d\omega(x)$	393, 410
$\int f(x) d\omega(x)$	394
$\ f\ _\infty = \sup_{x \in X} \ f(x)\ = \max_{x \in X} \ f(x)\ $	398
$\Phi_\omega: \mathcal{C}_c(X, E) \rightarrow \mathbb{K}$, $\Phi_\omega(f) = \int f(x) \times d\omega(x)$	399
$Med(X, E)$	408
$\omega_+, \omega_-: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$	409
L_f	422
$\omega_g([x, y]) = g(y) - g(x) \in E$	436
$\mathcal{S}_S(J, \mathbb{R})$	437
$V(g), T_g(x), T_g(x, y)$	425
$\omega_g: \mathcal{B} \rightarrow E$	438

Índice Remissivo

absolutamente contínua (aplicação)	448	conjunto de Lebesgue	422
μ -absolutamente contínua (medida)	268, 374	conjunto contável	12
σ -álgebra	12	conjunto convexo	142, 229
σ -álgebra gerada	13	conjunto dirigido	100
σ -álgebra produto	57	conjunto dirigido de tipo numerável	101
σ -álgebra restrição	13	conjunto magro	46
anel associado a semianel	22	conjunto mensurável	240
ângulo de vetores de \mathbb{R}^2	213	contável	12
aplicação absolutamente contínua	448	coordenadas polares generalizadas	198
aplicação bimensurável	52	coordenadas simpliciais generalizadas	210
aplicação de classe C^p	329	curva de Peano	50
aplicação compatível com as medidas	52	decomposição de Lebesgue	270, 374
aplicação convexa	231	densidade nula	414
aplicação derivável	151, 219	derivada fraca	342
aplicação em escada	108	derivada num ponto	151, 219
aplicação estritamente convexa	238	descontinuidades bem comportadas	442
aplicação integrável	108, 393	desigualdade de Hölder	236
aplicação linear fechada	147	desigualdade de Jensen	233, 234
aplicação localmente integrável	148, 292	desigualdade de Minkowsky	237
aplicação mensurável	50	determinante de aplicação linear	195
aplicação simples	108	difeomorfismo de classe C^1	201
aplicação \mathcal{S} -simples	257	domínio de convolução	319, 322
aplicação simples de intervalo	267	epigráfico	231
aplicação de suporte compacto	285	esfera unitária	197
aplicação topologicamente mensurável	103	espaço de Banach	102
aplicação de variação limitada	425	espaço de Hilbert	260, 361
base de abertos	60	espaço de medida	71
base contável (espaço topológico)	60	espaço mensurável	50
boreliano	14	espaço mensurável produto	57
Cantor (conjunto de)	48	espaço de Sobolev	361
Cantor-Lebesgue (função singular)	49	espaço vetorial complexo conjugado	382
centro de gravidade	145	expoente conjugado	235
classe C^p (aplicação)	329	exponencial	223
classe constante	356	família absolutamente somável	130, 183
classe contínua	241	família contável	12
classe localmente constante	356	família finita	12
classe localmente constante num ponto	356	família não vazia	12
classe restrição	241	família somável de vetores	127
\mathcal{S} -cobertura contável	32	fortemente convolucionáveis	319, 322
coeficiente de dilatação	193	fracamente convolucionáveis	319, 322
σ -compacto (conjunto)	458	função característica	73
componentes de aplicação	57	função gama	164
concentrar-se substancialmente	422	função indicatriz	73
cone	144	função simples	71
conjunto de Cantor	48	função singular de Cantor-Lebesgue	49
conjunto σ -compacto	458	função sino	335
		função variação total	425

funcional linear associado		medida invariante por translação	190
a medida vetorial	399	medida de Lebesgue	25, 43, 188, 197
funcional linear positivo	297	medida de Lebesgue-Stieltjes	25, 41, 438
funções suavizadoras	340	medida localmente finita	277
função de suporte compacto	285	medida positiva	363
gráfico de aplicação linear	147	medida positiva associada	364
Hölder (desigualdade)	236	medida produto	167
imagem direta de σ -álgebra	54	medida de Radon	277
imagem direta de medida	53	medida real	363
injeção canónica	133	medida restrição	17
integral de aplicação em escada	110	medida num semianel	23
integral de aplicação integrável	116	medida simplicial	210
integral de Dirichlet	185	medida μ -singular	270, 374
integral de função mensurável	74	medida de variação total	364
integral de função simples	72	medida vetorial	363
integral indefinido	150	μ^* -mensurável	34
integral com medida vetorial	393	Minkowsky (desigualdade)	237
integral paramétrico	216	mollifiers	340
intervalo semiaberto	20, 187	mutuamente singulares	270
J -intervalo semiaberto	20	norma do máximo	133
Jensen (desigualdade de)	233, 234	ordem lexicográfica	47
Jordan (decomposição de)	409	paralelogramo	182, 208
Lebesgue (teorema de derivação)	447	partição	45
lema de Fatou	89	partição adaptada a aplicação	
lema de Riemann-Lebesgue	267	em escada	108
lema de Urysohn	286, 337	partição adaptada a função simples	71
lexicográfica (ordem)	47	partição da unidade	289, 338
limite de sucessão dupla	99	Peano (curva)	50
localmente finita (medida)	277	ponto de densidade de um boreliano	423
majorante essencial	250	probabilidade	15
matriz hessiana	239	produto de convolução	313, 319, 322
matriz jacobiana	201	projeção canónica	57, 133
média aritmética	235	prolongamento de Hahn	38
média geométrica	235	quase sempre	85
medida	15	restrição de classe	241
E -medida	363	reta acabada	1
medida μ -absolutamente contínua	268, 374	Riemann-Lebesgue (Lema)	267
medida associada a família de		secção mensurável	63
elementos de \mathbb{R}_+	17	setor angular	213
medida associada a função mensurável	82	segmento afim	142
medida complexa	363	semianel	21
medida conjugada	371	semianel associado a partição	45
medida de contagem	18	semianel σ -total	33
medida de Dirac	18	separável (espaço topológico)	102
medida esférica	197	simetria	53
medida estritamente positiva	306	n -simplex padrão	210
medida exterior	31	μ -singular (medida)	270, 374
medida exterior associada a medida	32	soma de família de vetores	127
medida exterior de Lebesgue	33	subespaço mensurável	50
medida exterior de Lebesgue-Stieltjes	33	sucessão convergente em L^1_{loc}	293
medida finita	15	sucessão crescente de funções	77
medida σ -finita	39	sucessão dominada	113
medida imagem direta	53	sucessão dupla	99
medida f -invariante	52	sucessão generalizada	100

suporte de função	307	teorema da média	153
suporte de medida de Radon	306	teorema da partição da unidade	289, 338
supremo essencial	250	teorema de Radon-Nikodym	271, 275, 381
teorema de Baire	46	Teorema de Riesz	298, 403
teorema da convergência		tipo numerável (conjunto dirigido)	101
dominada	90, 100, 120, 101, 146	topologia usual de $\overline{\mathbb{R}}$	1
teorema da convergência monótona	77	transformada de Fourier	225
teorema de derivação de Lebesgue	447	translação	53
teorema de Egoroff	140	Urysohn (lema)	286, 337
teorema de Fubini	170, 174, 176	valor de classe num ponto	241, 307
teorema de integração por mudança		variação limitada (aplicação de)	425
de variáveis	157, 208	variação total	425
teorema de Lusin	308		

Bibliografia

- [1] ADAMS, Robert, A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, London, 1975.
- [2] COSTA PEREIRA, Nuno, *Teoremas Clássicos de Integração — Um Curso Avançado*, Textos de Matemática 21, Departamento de Matemática da FCUL, 2011.
- [3] DIEUDONNÉ, Jean, *Éléments d'Analyse, Vol I*, Gauthiers Villars, Paris, 1968.
- [4] DUNFORD, N. e SCHWARTZ, J., *Linear Operators, Vol I*, Interscience, New York, 1958.
- [5] GELBAUM, B. R. e OLMSTED, J. M. H., *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1964.
- [6] HALMOS, Paul R., *Measure Theory*, Van Nostrand, USA, 1950.
- [7] LANG, Serge, *Analysis II (Real Analysis numa edição posterior)*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [8] LOEB, Peter A. e TALVILA, Erik, *Lusin's theorem and Bochner integration*, *Scientiæ Mathematicæ Japonicæ Online*, Vol 10, 2004, 55–62.
- [9] MACHADO, Armando, *Introdução à Análise Funcional*, Escolar Editora, Lisboa, 1991.
- [10] RUDIN, Walter, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, USA, 1974.
- [11] SCHWARTZ, J. T., *Nonlinear Functional Analysis*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1965.
- [12] STROMBERG, Karl R., *Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, Inc. USA, 1981.
- [13] YEH, J., *Real Analysis, Theory of Measure and Integration*, World Scientific, Singapore, 2008.