

# TÓPICOS DE TOPOLOGIA GERAL E ANÁLISE FUNCIONAL

*Armando Machado*

Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências  
Universidade de Lisboa



# ÍNDICE

INTRODUÇÃO	v
CAPÍTULO 1 Topologia Geral	
§1. Generalidades sobre espaços métricos	1
§2. Espaços topológicos; aderência e limites	22
§3. Outros conceitos topológicos	78
§4. Funções contínuas e homeomorfismos	97
§5. Produto cartesiano de espaços topológicos	123
§6. Sublimites e espaços topológicos compactos	145
§7. Compacidade e completude em espaços métricos	183
§8. Espaços topológicos conexos	220
§9. Teoremas de Urysohn e Tietze. Partições da unidade	235
§10. Espaços de Baire	248
§11. Topologias quociente	253
CAPÍTULO 2 Espaços de Banach e espaços de Hilbert	
§1. Espaços vetoriais normados	261
§2. Espaços de Banach	320
§3. Famílias somáveis num espaço de Banach e aplicações	354
§4. Teorema de Stone-Weierstrass	402
§5. Espaços pre-hilbertianos e espaços de Hilbert	411
§6. Outras topologias vetoriais. Topologias fracas	442
CAPÍTULO 3 Cálculo diferencial em espaços normados	
§1. O diferencial numa aplicação	467
§2. Diferenciais de ordem superior	489
§3. As fórmulas da média e aplicações. Domínios localmente convexos	510
§4. Os teoremas da função implícita e da função inversa	539
§5. O integral das aplicações vetoriais contínuas de variável real	547
§6. Equações diferenciais lineares	586
§7. Propriedades elementares das aplicações holomorfas	627
BIBLIOGRAFIA	691
ÍNDICE DE NOTAÇÕES	693
ÍNDICE REMISSIVO	699

# INTRODUÇÃO

Este livro teve origem em cursos de Topologia Geral e de Introdução à Análise Funcional que o autor teve ocasião de lecionar durante vários anos mas, como é habitual nestas situações, acabou por abordar bastante mais assuntos do que aqueles que é possível examinar nesses cursos. O livro está dividido em três capítulos: O primeiro envolve a Topologia Geral; no segundo examinamos os espaços de Banach e os espaços de Hilbert, incluindo a definição e as propriedades básicas das respetivas topologias fracas; no terceiro estudamos o Cálculo Diferencial, no sentido de Fréchet, no contexto dos espaços de Banach, seguido do estudo, no mesmo contexto, do integral das aplicações contínuas de variável real, de uma aplicação às propriedades básicas das equações diferenciais ordinárias lineares e do exame das propriedades elementares das aplicações holomorfas. Mais do que apontar o conteúdo detalhado de cada um dos capítulos, conteúdo que facilmente se pode reconhecer pelo exame do índice, vamos em seguida descrever as opções básicas que tomámos no desenvolvimento de cada um deles.

No primeiro capítulo, após examinarmos a definição e propriedades básicas dos espaços métricos, escolhemos introduzir os espaços topológicos como espaços para os quais são fixadas convenientemente quais as vizinhanças de cada ponto. Apesar de os axiomas que as vizinhanças devem satisfazer não serem tão simples como os que aparecem quando se toma por exemplo a noção de conjunto aberto como primitiva, esta via parece-nos ter o mérito de permitir uma introdução das diferentes noções topológicas de uma forma mais próxima da que se segue no caso dos espaços métricos. As primeiras noções topológicas que abordamos são a de ponto aderente a um subconjunto e a de limite de uma aplicação num ponto aderente ao seu domínio, as restantes noções de limite mais comuns, os limites de sucessões indexadas em  $\mathbb{N}$  ou, mais geralmente, de sucessões generalizadas aparecendo como o caso particular do limite em  $+\infty$  para uma topologia conveniente na união do conjunto dos índices com  $+\infty$ , topologia que no caso dos índices em  $\mathbb{N}$  é a induzida pela topologia usual da reta estendida  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . As restantes noções topológicas básicas, que incluem as de conjunto fechado e de conjunto aberto, são estudadas em seguida, não deixando naturalmente de se provar, por exemplo no caso dos abertos, que a fixação a priori de uma classe de subconjuntos como candidatos a conjuntos abertos determina univocamente uma topologia desde que se suponham verificadas as propriedades habituais, ficando assim construída a ponte com a definição de espaço topológico que é mais frequentemente utilizada. A continuidade de uma aplicação num ponto é definida a partir da noção de limite, não

deixando naturalmente de examinar as caracterizações habituais da continuidade global em termos de conjuntos abertos e de conjuntos fechados. Os espaços topológicos compactos são definidos como aqueles onde existe sublimite para qualquer aplicação num ponto aderente ao seu domínio, onde os sublimites são definidos como os limites de uma aplicação composta, condição que se prova ser equivalente à noção habitual de valor de aderência (“cluster point”). Como caso particular da noção de sublimite de uma aplicação num ponto aderente ao domínio, damos o nome de sublimites estritos àqueles em que podemos tomar como aplicação composta a restrição da aplicação a um subconjunto do domínio e mostramos que as noções de sublimite e sublimite estrito são equivalentes no caso em que os espaços de partida e de chegada são ambos metrizáveis, em particular no caso das sucessões indexadas em  $\mathbb{N}$  e com valores num espaço metrizável. Provamos a equivalência da compacidade, definida pela existência de sublimites, com a caracterização habitual pela propriedade das coberturas abertas mas é a caracterização pelos sublimites que é utilizada para estabelecer a maioria das propriedades dos espaços compactos, incluindo o teorema de Tichonoff sobre a compacidade de um produto, finito ou infinito, de espaços compactos. De volta aos espaços métricos, definimos a completude pelo condição de existir limite para qualquer aplicação num ponto aderente ao domínio desde que esta verifique a condição de Cauchy e provamos que uma condição suficiente para a completude é a existência de limite para qualquer sucessão de Cauchy indexada em  $\mathbb{N}$ . No contexto dos espaços completos provamos o teorema do ponto fixo para aplicações contratantes, que é aplicado mais tarde no estudo das funções implícitas e no das equações diferenciais lineares, e incluímos uma versão paramétrica deste que garante a continuidade do ponto fixo relativamente a um parâmetro, versão essa que é aplicada adiante na prova da continuidade da função implícita. Ainda no contexto dos espaços métricos referimos outras caracterizações de compacidade, nomeadamente a compacidade sequencial e a conjunção da precompacidade com a completude e estudamos as propriedades de continuidade uniforme na presença da compacidade, incluindo a noção de “continuidade uniforme nos pontos de um subconjunto” que é estritamente mais forte que a continuidade uniforme da restrição.

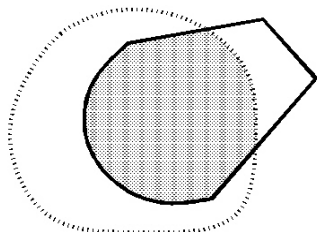
No segundo capítulo estudamos os espaços normados e os espaços pre-hilbertianos, simultaneamente os que têm  $\mathbb{R}$  e os que têm  $\mathbb{C}$  como corpo dos escalares, e as respetivas versões que são completas, os espaços de Banach e os espaços de Hilbert, nestes últimos sem fazer qualquer hipótese de base contável. Partindo da observação trivial de que qualquer espaço vetorial normado complexo pode ser considerado trivialmente também como um espaço vetorial normado real, tomámos o cuidado de apontar as relações das diferentes noções que são estudadas quando consideradas nos contextos complexo e real, especialmente nos casos em que essa relação não seja trivial. A fim de podermos falar de somas infinitas, no contexto dos espaços de Banach, sem ficar necessariamente limitados às séries, utilizámos a noção de família somável, com um conjunto arbitrário de índices, e estudámos as suas propriedades básicas. As famílias somáveis são aplicadas, em particular, à construção dos espaços de Banach  $\ell^p(I)$

com  $I$  conjunto arbitrário e à definição de aplicação bilinear de dualidade envolvendo os espaços  $\ell^p(I)$  e  $\ell^q(I)$ , com  $p$  e  $q$  expoentes conjugados. Estes espaços, juntamente com o espaço  $\ell^\infty(I)$  e com subespaços importantes deste, por exemplo quando  $I$  é um espaço topológico compacto, são os exemplos mais básicos que teremos ocasião de examinar, juntamente com os espaços de aplicações lineares e multilineares contínuas e com os espaços normados quociente. Uma omissão notável, ao nível dos exemplos, é o estudo dos espaços análogos ao espaços  $\ell^p(I)$  com  $I$  substituído por um espaço de medida, estudo que pressupõe conhecimentos de Teoria da Medida que não quisémos admitir como conhecidos. No contexto dos espaços vetoriais normados, examinamos a versão analítica do teorema de Hahn-Banach que é aplicada, em particular, à construção do mergulho isométrico usual no bidual topológico, o qual é utilizado para construir um completado para os espaços vetoriais normados e para definir os espaços de Banach reflexivos. Por razões de comodidade, o estudo das propriedades dos espaços de Banach reflexivos, que inclui a prova da reflexividade dos subespaços vetoriais fechados e dos espaços quociente de espaços reflexivos, a da equivalência entre a reflexividade dum espaço de Banach e a do seu dual topológico e a prova da reflexividade dos espaços  $\ell^p(I)$  com  $1 < p < +\infty$ , é feito com recurso à noção de forma bilinear dualizante na primeira ou na segunda variável. No contexto dos espaços de Banach são ainda examinados o teorema de Banach da aplicação aberta, o teorema do gráfico fechado, a prova da completude dos espaços quociente e o teorema da limitação uniforme. As famílias somáveis de vetores dum espaço de Banach referidas atrás são ainda utilizadas para estabelecer as propriedades básicas dos elementos invertíveis de uma álgebra de Banach, que incluem o facto de o conjunto destes ser aberto e a continuidade da aplicação inversão. Ainda neste capítulo abordamos a definição da topologia fraca de um espaço vetorial normado e da topologia fraca-estrela do seu dual e as propriedades de compacidade no respetivo contexto, que incluem as ligadas à caracterização da reflexividade, aproveitando para examinar outro exemplo importante de topologia vetorial não normada, nomeadamente a da convergência uniforme nos compactos, no contexto das aplicações contínuas definidas em espaços localmente compactos.

O último capítulo debruça-se sobre o Cálculo Diferencial, no sentido de Fréchet, no contexto dos espaços vetoriais normados assim como de assuntos relacionados que incluem o integral das aplicações contínuas definidas num intervalo compacto de  $\mathbb{R}$  e com valores num espaço de Banach, de um ponto de vista alternativo a existência de primitivas para as aplicações contínuas nesse contexto, e a generalização mais próxima das primitivas, nomeadamente a existência de solução, com uma condição inicial dada, para as equações diferenciais ordinárias lineares. As propriedades das soluções das equações diferenciais ordinárias lineares são utilizadas, em particular, para definir a aplicação exponencial de uma álgebra de Banach, e em particular de  $\mathbb{C}$ , e estabelecer as suas propriedades básicas; no contexto destas equações diferenciais examinamos também o teorema de Frobenius sobre a existência de soluções para equações diferenciais totais que verificam uma certa “condição de integrabilidade”. Tal

como no segundo capítulo, os espaços vetoriais com que se trabalha poderão normalmente ser reais ou complexos, o que nos leva por vezes a falar de diferenciabilidade no sentido real e de diferenciabilidade no sentido complexo, embora nas secções em que se estuda simultaneamente a diferenciabilidade nos dois sentidos fique de fora o estudo das propriedades especiais da diferenciabilidade no sentido complexo. Abordamos na última secção o estudo elementar das aplicações diferenciáveis no sentido complexo definidas em domínios abertos de  $\mathbb{C}$  ou, mais geralmente de um espaço vetorial normado complexo (aplicações holomorfas), que inclui o facto de essas aplicações serem necessariamente de classe  $C^\infty$  e a sua representabilidade como soma da série de Taylor. No tratamento da versão mais geral da fórmula integral de Cauchy, para domínios abertos em  $\mathbb{C}$ , privilegiámos a utilização de combinações lineares formais de caminhos de classe  $C^1$ , com coeficientes inteiros, relativamente à consideração mais habitual de caminhos seccionalmente de classe  $C^1$ .

Quando se estuda o Cálculo Diferencial no contexto das funções de variável real é habitual considerar dois tipos de domínios: Para a definição das derivadas, incluindo as de ordem superior e para o estudo das propriedades elementares desta noção, que incluem o teorema de derivação da função composta, é suficiente exigir que os domínios envolvidos tenham a propriedade de todos os seus elementos serem pontos de acumulação; Para as propriedades mais profundas, que exigem a utilização do “teorema da média” torna-se necessário supor que os domínios são intervalos não triviais (de qualquer tipo) ou, eventualmente, uniões de tais intervalos. Já quando se passa ao contexto das aplicações de várias variáveis ou, mais geralmente de variável vetorial, é comum exigir-se que os domínios sejam conjuntos abertos. Essa opção usual tem algo de constrangedor, seja por não fazer aparecer o estudo das aplicações de uma variável como caso particular do das de várias variáveis, seja por implicar soluções *ad hoc* quando se é levado a considerar, por exemplo, aplicações do tipo  $\varphi(t)f(x)$ , com  $t$  variável real com um intervalo fechado  $[a, b]$  como domínio e  $x$  variável vetorial com domínio aberto. Para ultrapassar o constrangimento referido, fomos levados a desenvolver o estudo da diferenciabilidade no contexto dos domínios localmente convexos e totais, contexto que inclui tanto os conjuntos abertos quanto os intervalos não triviais de  $\mathbb{R}$  de qualquer tipo e que é fechado para a formação de produtos cartesianos.



O estudo da diferenciabilidade neste contexto não implica dificuldades suplementares essenciais relativamente ao estudo que se faz habitualmente no

contexto dos domínios abertos. Como exemplo típico de um domínio do tipo que consideramos, temos, no caso de  $\mathbb{R}^2$ , o sugerido graficamente na figura atrás. Há naturalmente situações em que o facto de certos domínios serem abertos é essencial, situações que incluem o teorema das funções implícitas (do lado do espaço de chegada destas, mas não do seu domínio) e o estudo das propriedades especiais das aplicações holomorfas.

A Bibliografia que apresentamos no fim tem como único objetivo apontar as obras que influenciaram mais diretamente o modo como abordámos os diferentes assuntos, não tendo assim nenhuma pretensão de identificar os autores originais nem de sugerir aproximações alternativas.



# CAPÍTULO 1

## Topologia Geral

### §1. Generalidades sobre espaços métricos.

A noção de espaço métrico unifica várias situações que o estudante já encontrou, em que está definida uma noção de distância entre elementos de um dado conjunto a partir da qual outros conceitos, entre como o de limite, podem ser estudados. Estas situações incluem pelo menos o estudo dos números reais, onde se define a distância por  $d(x, y) = |y - x|$  e o estudo dos espaços cartesianos  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  (e, mais geralmente  $\mathbb{R}^n$ ) onde uma das noções de distância que se utiliza é a que corresponde a considerar a distância geométrica entre os pontos do plano ou do espaço que correspondem a dois elementos daqueles espaços quando se consideram referenciais ortonormados fixados. Definimos em seguida a noção geral de espaço métrico e estudaremos então de forma geral muitas das noções que foram estudadas nos casos particulares referidos.

**1.1.1** Um *espaço métrico* é um conjunto  $X$ , no qual se definiu uma *métrica*, isto é uma aplicação  $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$  verificando as propriedades seguintes:

- a)  $d(x, x) = 0$ ;
- b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;
- d) Se  $d(x, y) = 0$ , então  $x = y$ .

À propriedade c), que é a única que, na maioria dos casos, necessita de uma atenção mais cuidada, é costume dar-se o nome de *desigualdade triangular*. Quando se considera uma métrica  $d$  num conjunto  $X$  é costuma referir o valor  $d(x, y)$  como sendo a *distância* dos elementos  $x$  e  $y$ .

Com frequência, e para simplificar os enunciados, referimo-nos simplesmente a um espaço métrico  $X$ , omitindo a referência à métrica  $d$  que se considera implícita.

**1.1.2 (Generalização da desigualdade triangular)** No contexto dum espaço métrico, dados elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (onde  $n \geq 2$ ), tem-se

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

**Dem:** Pode justificar-se esta propriedade por indução em  $n$ , começando por reparar que o caso  $n = 2$  se reduz à igualdade  $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$ .

Admitindo que o resultado vale para um certo  $n$ , podemos escrever, quando temos pontos  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} d(x_1, x_{n+1}) &\leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leq \\ &\leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}). \quad \square \end{aligned}$$

**1.1.3 (Uma desigualdade útil)** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $x, y, z \in X$ . Tem-se então

$$|d(z, x) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

**Dem:** Pela desigualdade triangular, podemos escrever

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leq d(z, y) + d(y, x) = d(z, y) + d(x, y), \\ d(z, y) &\leq d(z, x) + d(x, y), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d(z, x) - d(z, y) &\leq d(x, y) \\ d(z, y) - d(z, x) &\leq d(x, y). \end{aligned}$$

Uma vez que  $|d(z, x) - d(z, y)|$  é um dos dois primeiros membros das desigualdades precedentes, podemos concluir a desigualdade enunciada.  $\square$

**1.1.4 (A métrica usual de  $\mathbb{R}$ )** No conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais fica definida uma métrica pela igualdade

$$d(x, y) = |y - x|.$$

É esta a métrica que se considera implicitamente quando se encara  $\mathbb{R}$  como um espaço métrico. Podemos referir-nos a ela como sendo a *métrica usual* de  $\mathbb{R}$ .

**Dem:** As propriedades a) e d) da definição em 1.1.1 resultam de 0 ser o único número real cujo módulo é 0 e a propriedade b) resulta do facto de um número real e o seu simétrico terem o mesmo módulo. Quanto a c), dados números reais  $x, y, z$ , vem

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |z - x| = |(y - x) + (z - y)| \leq |(y - x)| + |(z - y)| = \\ &= d(x, y) + d(y, z). \quad \square \end{aligned}$$

O modo como se definiu a métrica precedente em  $\mathbb{R}$ , a partir do valor absoluto, pode ser generalizado a situações em que em vez de  $\mathbb{R}$  temos um espaço vetorial e em vez do valor absoluto temos aquilo a que se costuma chamar uma norma.

**1.1.5 (Norma num espaço vetorial real)** Seja  $E$  um espaço vetorial (real). Chama-se *norma* em  $E$  a uma aplicação  $E \rightarrow [0, +\infty[$ , notada frequentemente  $x \mapsto \|x\|$ , que verifique as seguintes propriedades:

- a)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , quaisquer que sejam  $x, y \in E$  (subaditividade);  
 b)  $\|ax\| = |a|\|x\|$ , quaisquer que sejam  $x \in E$  e  $a \in \mathbb{R}$ ;  
 c)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Repare-se que a aplicação  $x \mapsto |x|$ , definida em  $\mathbb{R}$ , é uma norma em  $\mathbb{R}$ , considerado como espaço vetorial de dimensão 1 (a que se pode chamar também o nome de *norma usual* de  $\mathbb{R}$ ).

Chama-se *espaço vetorial normado* a um espaço vetorial no qual considera uma norma.

**1.1.6 (A métrica associada a uma norma)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado então pode definir-se uma métrica  $d$  em  $E$ , dita *métrica associada à norma*, por

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

Repare-se que, quando  $E = \mathbb{R}$ , com o módulo como norma considerada, a métrica associada é a métrica usual referida em 1.1.4.

Repare-se também que a norma pode ser “recuperada” a partir da métrica associada, uma vez que se tem  $\|x\| = d(0, x)$ .

**Dem:** As propriedades a) e d) da definição em 1.1.1 resultam da propriedade c) da definição de norma e a propriedade b) resulta de podermos escrever

$$d(x, y) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = d(y, x).$$

Quanto à propriedade c) vem, como no caso particular examinado em 1.1.4,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|z - x\| = \|(y - x) + (z - y)\| \leq \|(y - x)\| + \|(z - y)\| = \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned} \quad \square$$

Vários exemplos importantes de espaço métrico são definidos a partir de normas pelo processo atrás descrito. Vamos referir dois, notando que o primeiro que examinamos é aquele que terá possivelmente um significado geométrico mais rico, apesar de ser aquele em que é um pouco mais artificioso verificar as propriedades das normas.

**1.1.7 (A norma euclidiana)** Se  $I$  é um conjunto não vazio de índices, notamos  $Ap(I, \mathbb{R})$  o conjunto de todas as aplicações de  $I$  em  $\mathbb{R}$ , que será cómodo serem encaradas como famílias  $(x_i)_{i \in I}$  indexadas em  $I$ , e recordemos que  $Ap(I, \mathbb{R})$  tem uma estrutura natural de espaço vetorial, em que a soma e a multiplicação pelos reais são definidas “coordenada a coordenada”. No caso em que  $I$  é finito, com  $n \geq 1$  elementos,  $Ap(I, \mathbb{R})$  tem dimensão finita  $n$  e pode definir-se uma norma  $\|\cdot\|_2$  neste espaço, dita *norma euclidiana*, por

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} x_i^2},$$

à métrica associada a esta norma, que se pode notar  $d_2$ , dando-se o nome de

*métrica euclidiana*. Repare-se no caso particular em que  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , caso em que  $Ap(I, \mathbb{R})$  é o mesmo que  $\mathbb{R}^n$  e a definição da norma pode ser reescrita na forma

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

**Dem:** Vamos provar que, no caso em que  $I$  tem um número finito  $n \geq 1$  de elementos, fica efetivamente definida uma norma pela fórmula no enunciado. Nessa prova vamos subentender que todos os somatórios se referem ao índice  $i$  a variar em  $I$ . A propriedade c) em 1.1.5 resulta do facto de uma soma de números maiores ou iguais a 0 ser igual a 0 se, e só se, aqueles forem todos iguais a 0. A propriedade b) resulta de que se  $a \in \mathbb{R}$  e  $x = (x_i)_{i \in I}$  tem-se

$$\begin{aligned} \|ax\|_2 &= \sqrt{\sum (ax_i)^2} = \sqrt{a^2 \sum x_i^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{\sum x_i^2} = \\ &= |a| \sqrt{\sum x_i^2} = |a| \|x\|_2. \end{aligned}$$

Antes de provar a propriedade c) começamos por estabelecer uma desigualdade auxiliar (conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwartz*), nomeadamente que se tem, quaisquer que sejam  $x = (x_i)_{i \in I}$  e  $y = (y_i)_{i \in I}$ ,

$$(1) \quad \left| \sum x_i y_i \right| \leq \|x\|_2 \times \|y\|_2.$$

Uma vez que a desigualdade (1) é trivialmente verificada se  $y = 0$  (ambos os membros são 0) vamos verificar apenas o que sucede quando  $y \neq 0$ , portanto também  $\|y\|_2 \neq 0$ . Reparamos então que, para cada número real  $t$ , tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum (x_i + t y_i)^2 = \sum (x_i^2 + t^2 y_i^2 + 2t x_i y_i) = \\ &= \|x\|_2^2 + t^2 \|y\|_2^2 + 2t \sum x_i y_i \end{aligned}$$

e, tomando, em particular,  $t = -\frac{1}{\|y\|_2^2} \sum x_i y_i$ , a desigualdade precedente toma a forma

$$0 \leq \|x\|_2^2 + \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\|y\|_2^2} - 2 \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\|y\|_2^2} = \|x\|_2^2 - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\|y\|_2^2},$$

da qual deduzimos sucessivamente

$$\begin{aligned} \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\|y\|_2^2} &\leq \|x\|_2^2, \\ (\sum x_i y_i)^2 &\leq \|x\|_2^2 \|y\|_2^2, \end{aligned}$$

esta última desigualdade implicando trivialmente a desigualdade (1) pretendida. Podemos agora utilizar (1) para provar a propriedade c): Dados  $x = (x_i)_{i \in I}$  e  $y = (y_i)_{i \in I}$ , vem

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \sum (x_i + y_i)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 + 2 \sum x_i y_i \leq \\ &\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \left| \sum x_i y_i \right| \leq \\ &\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \|x\|_2 \times \|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2, \end{aligned}$$

donde  $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ . □

A riqueza do significado geométrico que referimos reside nos casos em que  $n = 2$  e  $n = 3$ , casos em que, identificando elementos de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  com ponto dum plano ou do espaço onde se fixaram referenciais ortonormados, a distância  $\|x - y\|_2$  fica a corresponder à distância geométrica no sentido usual. Observe-se também que, no caso  $n = 1$ ,  $\mathbb{R}^1$  identifica-se naturalmente com  $\mathbb{R}$  e a norma euclidiana fica a corresponder ao valor absoluto de  $\mathbb{R}$  (já que  $\sqrt{x^2} = |x|$ ).

O exemplo a seguir apresenta outra norma, no mesmo espaço que considerámos anteriormente, com um significado geométrico menos rico mas, em compensação, muito mais fácil de manejar.

**1.1.8 (A norma do máximo)** No espaço  $Ap(I, \mathbb{R})$ , considerado em 1.1.7, é possível definir uma norma  $\|\cdot\|_\infty$ , dita *norma do máximo*, por

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty = \max_{i \in I} |x_i|$$

e à métrica associada a esta norma, que se pode notar  $d_\infty$ , dá-se o nome de *métrica do máximo*. Repare-se no caso particular em que  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , caso em que  $Ap(I, \mathbb{R})$  é o mesmo que  $\mathbb{R}^n$  e a definição da norma pode ser reescrita na forma

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|).$$

**Dem:** A propriedade c) em 1.1.5 resulta do facto de o máximo de uma família de números maiores ou iguais a 0 ser igual a 0 se, e só se, aqueles forem todos iguais a 0. A propriedade b) é trivial no caso em que  $a = 0$  (ambos os membros da igualdade são 0); provemo-la no caso em que  $a \neq 0$ : Sendo  $x = (x_i)_{i \in I}$ , o facto de se ter, para cada  $i \in I$ ,  $|x_i| \leq \|x\|_\infty$  implica que se tem, para cada  $i \in I$ ,

$$|ax_i| = |a| |x_i| \leq |a| \|x\|_\infty$$

e portanto  $\|ax\|_\infty$ , que é um dos números  $|ax_i|$ , verifica  $\|ax\|_\infty \leq |a| \|x\|_\infty$ . Quanto à desigualdade oposta, aplicando o que acabamos de ver, com  $ax$  no lugar de  $x$  e  $\frac{1}{a}$  no lugar de  $a$ , obtemos

$$|a| \|x\|_\infty = |a| \left| \frac{1}{a} \times ax \right|_\infty \leq |a| \left| \frac{1}{a} \right| \|ax\|_\infty = \|ax\|_\infty.$$

Quanto à propriedade a), agora com justificação muito mais elementar do que

no caso da norma euclidiana, notamos que, dados  $x = (x_i)_{i \in I}$  e  $y = (y_i)_{i \in I}$ , do facto de se ter, para cada  $i \in I$ ,  $|x_i| \leq \|x\|_\infty$  e  $|y_i| \leq \|y\|_\infty$ , deduzimos que, para cada  $i \in I$ ,

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

e portanto, por  $\|x + y\|_\infty$  ser um dos números  $|x_i + y_i|$ ,

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \quad \square$$

Como no caso da norma euclidiana, no caso em que  $n = 1$ ,  $\mathbb{R}^1$  identifica-se naturalmente com  $\mathbb{R}$  e a norma do máximo fica a corresponder ao valor absoluto de  $\mathbb{R}$ , em particular coincide com a norma euclidiana.

As métricas associadas a normas estão sempre definidas em espaços vectoriais. É possível, no entanto, obter indiretamente, a partir destas, métricas sobre conjuntos sem estrutura vectorial (embora contidos em espaços vectoriais) com o auxílio da observação trivial que referimos em seguida.

**1.1.9 (Subespaços métricos)** Consideremos um espaço métrico  $X$  definido por uma métrica  $d$  e seja  $X' \subset X$  um conjunto arbitrário. Obtém-se então uma métrica sobre  $X'$  considerando a restrição a  $X' \times X'$  da métrica  $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ , por outras palavras, definindo a distância de dois elementos de  $X'$  como sendo o mesmo que a sua distância enquanto elementos de  $X$ . Dizemos que esta métrica é a *induzida* em  $X'$  pela métrica de partida e que  $X'$ , com a métrica induzida, é um *subespaço métrico* do considerado inicialmente. Quando outra métrica não é explicitada é a métrica induzida a que se considera implicitamente sobre um subconjunto de um espaço métrico.

Por exemplo, qualquer subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  pode ser considerado como espaço métrico quer com a métrica induzida pela métrica euclidiana quer com a induzida pela métrica do máximo (cf. 1.1.7 e 1.1.8).

**1.1.10 (A métrica discreta)** Se  $X$  é um conjunto arbitrário pode-se definir uma métrica  $d$  em  $X$ , a que se dá o nome de *métrica discreta*, por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

**Dem:** As propriedades a), b) e d) da definição em 1.1.1 decorrem imediatamente da caracterização de  $d$ . Quanto a c), dados  $x, y, z \in X$ , examinamos separadamente dois casos: Se  $x = y$  e  $y = z$ , tem-se também  $x = z$  e portanto

$$d(x, z) = 0 = 0 + 0 = d(x, y) + d(y, z).$$

Se  $x \neq y$  ou  $y \neq z$ , então na soma  $d(x, y) + d(y, z)$  uma das parcelas é 1 e a outra é 0 ou 1 pelo que a soma toma um dos valores 1 ou 2 e daqui concluímos que

$$d(x, z) \leq 1 \leq d(x, y) + d(y, z). \quad \square$$

Vamos agora examinar algumas noções que se podem definir sempre que estamos no contexto de um espaço métrico.

**1.1.11 (Distância de um ponto a um conjunto)** Seja  $X$  um espaço métrico. Dados  $a \in X$  e um conjunto não vazio  $B \subset X$ , define-se a *distância* de  $a$  a  $B$ , notada  $d(a, B)$ , por

$$d(a, B) = \inf_{x \in B} d(a, x).$$

É claro que se tem sempre  $d(a, B) \geq 0$  e que, se  $a \in B$ , tem-se  $d(a, B) = 0$  (o ínfimo é, neste caso, um mínimo atingido para  $x = a$ ).

Repare-se que, no caso em que  $B = \{b\}$  é um conjunto unitário, tem-se  $d(a, \{b\}) = d(a, b)$  (mais uma vez, o ínfimo é um mínimo).

Pelo contrário, pode acontecer que a distância de um ponto a um conjunto seja 0 sem que o ponto pertença ao conjunto. Por exemplo, no espaço métrico  $\mathbb{R}$ , a distância de 0 ao conjunto  $]0, +\infty[$  é 0 apesar de se ter  $0 \notin ]0, +\infty[$ .

**1.1.12 (Variante da desigualdade triangular)** Seja  $X$  um espaço métrico. Dados  $x, y \in X$  e um conjunto não vazio  $C \subset X$ , tem-se então

$$d(x, C) \leq d(x, y) + d(y, C).^1$$

**Dem:** Seja  $z \in C$  arbitrário. Podemos então escrever

$$d(x, C) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

e portanto

$$d(x, C) - d(x, y) \leq d(y, z).$$

Tendo em conta o facto de  $d(y, C)$  ser o ínfimo dos  $d(y, z)$  com  $z \in C$ , podemos agora concluir que

$$d(x, C) - d(x, y) \leq d(y, C),$$

desigualdade que é equivalente à do enunciado. □

<sup>1</sup>Ver o exercício 1.1.2, no final da secção, para moderar o entusiasmo quanto à eventual validade de outras versões da desigualdade triangular.

**1.1.13 (Generalização de 1.1.3)** Nas hipóteses anteriores, tem-se

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq d(x, y).^2$$

**Dem:** Aplicando duas vezes 1.1.12, obtemos

$$\begin{aligned} d(x, C) &\leq d(x, y) + d(y, C), \\ d(y, C) &\leq d(y, x) + d(x, C) = d(x, y) + d(x, C), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d(x, C) - d(y, C) &\leq d(x, y) \\ d(y, C) - d(x, C) &\leq d(x, y). \end{aligned}$$

Uma vez que  $|d(x, C) - d(y, C)|$  é um dos dois primeiros membros das desigualdades anteriores, concluímos a desigualdade do enunciado.  $\square$

**1.1.14 (Distância entre conjuntos)** Seja  $X$  um espaço métrico. Dados conjuntos não vazios  $A \subset X$  e  $B \subset X$ , define-se a *distância* de  $A$  a  $B$ , notada  $d(A, B)$ , por

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

É claro que se tem sempre  $d(A, B) \geq 0$  e que, no caso em que  $A \cap B \neq \emptyset$ , tem-se  $d(A, B) = 0$  (o ínfimo é neste caso um mínimo atingido em qualquer  $(x, x)$  com  $x \in A \cap B$ ). A propriedade de simetria da métrica  $d$  arrasta trivialmente a propriedade de simetria  $d(A, B) = d(B, A)$  para a distância entre conjuntos.

Repare-se que, no caso em que  $A = \{a\}$  é um conjunto unitário, tem-se  $d(a, B) = d(\{a\}, B)$  (os dois membros são ínfimos do mesmo conjunto de números reais).

**1.1.15 (Caracterização alternativa da distância entre conjuntos)** Nas condições anteriores tem-se também

$$d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B).^3$$

**Dem:** Dado  $x \in A$  arbitrário, tem-se  $d(A, B) \leq d(x, B)$  para todo o  $y \in B$  pelo que, lembrando que o ínfimo é o maior dos minorantes, concluímos que  $d(A, B) \leq d(x, B)$ ; tendo em conta a arbitrariedade de  $x \in A$ , concluímos do mesmo modo que

<sup>2</sup>Repare-se que a desigualdade em 1.1.3 resulta de aplicar esta desigualdade com  $C = \{z\}$ .

<sup>3</sup>Repare-se que esta caracterização sugere uma assimetria aparente entre os papéis de  $A$  e  $B$ . É claro que, conhecida esta simetria ficamos a saber que também vale a caracterização alternativa  $d(A, B) = \inf_{y \in B} d(y, A)$ .



$$d(A, B) \leq \inf_{x \in A} d(x, B).$$

A desigualdade oposta tem uma justificação análoga: Dados  $x \in A$  e  $y \in B$  arbitrários, tem-se  $d(x, B) \leq d(x, y)$  e portanto

$$\inf_{x \in A} d(x, B) \leq d(x, B) \leq d(x, y)$$

donde, pela arbitrariedade de  $x$  e  $y$ ,  $\inf_{x \in A} d(x, B) \leq d(A, B)$ . □

Recordemos que no contexto do estudo dos números reais se chamavam limitados os conjuntos  $A \subset \mathbb{R}$  que são simultaneamente majorados e minorados e que se mostrava que os conjuntos limitados  $A$  podem ser caracterizados de forma equivalente pela existência de uma constante  $R$  maior ou igual aos módulos de todos os elementos de  $A$ .<sup>4</sup> Nenhuma destas caracterizações pode servir para definir a noção de conjunto limitado no contexto de um espaço métrico, uma vez que não fará em geral sentido falar de majorantes ou minorantes assim como poderá não haver nada que substitua o papel do módulo. Vamos ver que, no entanto, é possível definir os subconjuntos limitados de um espaço métrico por uma outra caracterização que se vai revelar equivalente quando o espaço métrico for  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.16 (Conjuntos limitados e o seu diâmetro)

Seja  $X$  um espaço métrico. Diz-se que um conjunto  $A \subset X$  é limitado se existir  $M \geq 0$  em  $\mathbb{R}$  tal que  $d(x, y) \leq M$  para quaisquer  $x, y \in A$ , por outras palavras, se for majorado o conjunto dos números reais da forma  $d(x, y)$  com  $x, y \in A$ . Quando  $A$  é limitado e não vazio define-se o seu diâmetro  $\text{diam}(A)$  como sendo o supremo das distâncias  $d(x, y)$  com  $x, y \in A$ . No caso em que  $X$  é limitado, enquanto subconjunto de  $X$ , dizemos simplesmente que  $X$  é um *espaço métrico limitado*.

Repare-se que, apesar de não definirmos o diâmetro do conjunto vazio  $\emptyset$ , este é evidentemente limitado. Analogamente, um conjunto unitário  $\{a\} \subset X$  é evidentemente limitado e com  $\text{diam}(\{a\}) = 0$ .

### 1.1.17 (Caracterização alternativa dos conjuntos limitados)

Sejam  $X$  um espaço métrico e  $b \in X$  um elemento fixado. Um conjunto  $A \subset X$  é limitado se, e só se, existir  $r \geq 0$  tal que se tenha  $d(b, x) \leq r$  para todo o  $x \in A$ .<sup>5</sup>

**Dem:** Se  $A = \emptyset$  então  $A$  é um conjunto limitado e a condição do enunciado é verificada para um  $r \geq 0$  arbitrário. Examinemos então o que se passa quando  $A \neq \emptyset$ , começando por escolher um elemento  $a \in A$ . Se  $A$  é um conjunto limitado podemos considerar  $M \geq 0$  tal que  $d(x, y) \leq M$

<sup>4</sup>Se  $|x| \leq R$  para cada  $x \in A$  então  $R$  é um majorante e  $-R$  é um minorante de  $A$ . Se  $A$  admite um majorante  $b$  e um minorante  $a$  então o maior dos dois números  $|a|$  e  $|b|$  majora o módulo de qualquer elemento de  $A$ .

<sup>5</sup>Uma das características importantes deste resultado é a possibilidade de utilizar o elemento  $b \in X$  que nos for mais conveniente para testar a condição do enunciado.

quaisquer que sejam  $x, y \in A$ , em particular, qualquer que seja  $x \in A$ ,  $d(a, x) \leq M$ , donde

$$d(b, x) \leq d(b, a) + d(a, x) \leq d(b, a) + M,$$

o que mostra que a condição do enunciado se verifica com  $r = d(b, a) + M$ . Suponhamos, reciprocamente, que existe  $r \geq 0$  tal que  $d(b, x) \leq r$  para cada  $x \in A$ . Quaisquer que sejam  $x, y \in A$ , tem-se então

$$d(x, y) \leq d(x, b) + d(b, y) \leq r + r = 2r,$$

o que mostra que  $A$  é limitado (tomar  $M = 2r$ ).  $\square$

**1.1.18 (Corolário)** Seja  $E$  um espaço vetorial munido de uma norma  $\| \cdot \|$  e consideremos a métrica  $d$  associada a esta. Um conjunto  $A \subset E$  é limitado se, e só se, existe  $r \geq 0$  tal que  $\|x\| \leq r$  para todo o  $x \in A$ .

Em particular, considerando em  $\mathbb{R}$  a métrica usual, um conjunto é limitado, no sentido que estamos a utilizar, se e só se, for limitado no sentido *ad hoc* utilizado nesse contexto.

**Dem:** Temos um caso particular da condição em 1.1.17 desde que consideremos como elemento  $b$  escolhido em  $E$  o elemento  $b = 0$ , uma vez que se tem  $d(0, x) = \|x - 0\| = \|x\|$ .  $\square$

**1.1.19 (Propriedades dos conjuntos limitados)** Seja  $X$  um espaço métrico. Tem-se então:

a) Se  $A \subset X$  é um conjunto limitado e  $B \subset A$ , então  $B$  é também limitado e, no caso em que  $B \neq \emptyset$ ,  $\text{diam}(B) \leq \text{diam}(A)$ .

b) Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos limitados de  $X$ , então  $A \cup B$  é também limitado. Em consequência, a união de uma família finita de conjuntos limitados é ainda um conjunto limitado.

c) Todo o subconjunto finito de  $X$  é limitado.

**Dem:** A propriedade a) é de justificação trivial. Quanto a b), e afastando já o caso trivial em que  $X = \emptyset$ , será cómodo utilizar a caracterização em 1.1.17, depois de fixar um ponto  $b \in X$ : Ora, considerando  $r_1 \geq 0$  e  $r_2 \geq 0$  tais que  $d(b, x) \leq r_1$  para cada  $x \in A$  e  $d(b, x) \leq r_2$  para cada  $x \in B$ , podemos chamar  $r$  ao maior dos dois números  $r_1$  e  $r_2$  e então tem-se  $d(b, x) \leq r$  para todo o  $x \in A \cup B$ . A conclusão de c) resulta, por exemplo, de que um conjunto finito é a união de uma família finita de conjuntos unitários, conjuntos esses que sabemos serem limitados.  $\square$

A noção de conjunto limitado intervém na definição de um “espaço funcional” importante, onde está definida uma métrica que generaliza a métrica do máximo de  $\mathbb{R}^n$  (cf. 1.1.8).

**1.1.20 (O espaço das aplicações limitadas)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $X$  um espaço métrico. Diz-se que uma aplicação  $I \rightarrow X$ , que, por comodidade, encararemos como uma família  $(x_i)_{i \in I}$ , é *limitada* se o seu contradomínio

$\{x_i\}_{i \in I}$  é um subconjunto limitado de  $X$ . No conjunto  $\mathbb{B}(I, X)$  de todas as aplicações limitadas  $I \rightarrow X$  pode então definir-se uma métrica  $d_\infty$  por

$$(1) \quad d_\infty((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sup_{i \in I} d(x_i, y_i).$$

Por um razão que será clara mais adiante, diz-se que esta é a *métrica da convergência uniforme* em  $\mathbb{B}(I, X)$ .

Repare-se que, tanto no caso em que  $X$  é um espaço métrico limitado como naquele em que  $X$  é arbitrário mas  $I$  é finito,  $\mathbb{B}(I, X)$  coincide com o conjunto  $Ap(I, X)$  de todas as aplicações  $A \rightarrow X$ .

No caso em que  $I$  é finito o supremo em (1) é mesmo um máximo e, se for  $X = \mathbb{R}$ , constata-se que a métrica  $d_\infty$  é a métrica do máximo encontrada no exemplo 1.1.8.

**Dem:** Comecemos por notar que, dadas aplicações limitadas  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_i)_{i \in I}$ , deduzimos de 1.1.19 que a união dos respectivos contradomínios é um subconjunto limitado de  $X$ , o que implica que o conjunto não vazio das distâncias  $d(x_i, y_i) \geq 0$ , que está contido no conjunto das distâncias entre pares de elementos da união referida, é um conjunto majorado, tendo por esse motivo um supremo finito e maior ou igual a 0. A igualdade em (1) define assim uma aplicação  $d_\infty: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$  e resta-nos mostrar que se verificam as propriedades das métricas referidas nas alíneas a) a d) de 1.1.1. As propriedades em a) e b) são triviais a a afirmação em d) resulta de que se o supremo dos  $d(x_i, y_i)$  for 0 então tem que ser, para cada  $i \in I$ ,  $d(x_i, y_i) = 0$  ou seja  $x_i = y_i$ . Quanto a c), dadas três famílias  $x = (x_i)_{i \in I}$ ,  $y = (y_i)_{i \in I}$  e  $z = (z_i)_{i \in I}$ , tem-se, para cada  $i \in I$ ,

$$d(x_i, z_i) \leq d(x_i, y_i) + d(y_i, z_i) \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)$$

donde, pela caracterização dum supremo como o menor dos majorantes,

$$d_\infty(x, z) \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z). \quad \square$$

**1.1.21 (Versão vetorial do anterior)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço vetorial normado. Tem-se então que o conjunto  $\mathbb{B}(I, E)$  de todas as aplicações limitadas  $I \rightarrow E$  é um subespaço vetorial do espaço  $Ap(I, E)$  de todas as aplicações  $I \rightarrow E$  e fica definida uma norma  $\|\cdot\|_\infty$  naquele espaço vetorial por

$$(1) \quad \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty = \sup_{i \in I} \|x_i\|,$$

norma essa cuja métrica associada é a métrica  $d_\infty$  definida em 1.1.20 a partir da métrica de  $E$  associada à norma considerada.

Repare-se que, no caso em que  $I$  é finito e  $E = \mathbb{R}$ , tem-se  $\mathbb{B}(I, \mathbb{R}) = Ap(I, \mathbb{R})$  e a norma aqui referida coincide com a norma do máximo referida em 1.1.8.

**Dem:** Comecemos por reparar que o facto de o segundo membro de (1) ser

finito e maior ou igual a 0 resulta do que foi visto em 1.1.20, uma vez que se tem  $\|x_i\| = d(x_i, 0)$ , onde a família identicamente nula é limitada. Esta observação também implica trivialmente que se tem  $\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty = 0$  se, e só se,  $x_i = 0$  para cada  $i$ . Sejam agora  $a \in \mathbb{R}$  e  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_i)_{i \in I}$  em  $\mathbb{B}(I, E)$ . Tem-se, para cada  $i$ ,

$$\|x_i + y_i\| \leq \|x_i\| + \|y_i\| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty + \|(y_i)_{i \in I}\|_\infty$$

o que, lembrando a caracterização dos conjuntos limitados em 1.1.18, implica que  $(x_i + y_i)_{i \in I}$  também pertence a  $\mathbb{B}(I, E)$  e que

$$\|(x_i + y_i)_{i \in I}\|_\infty \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty + \|(y_i)_{i \in I}\|_\infty.$$

Analogamente, tem-se, para cada  $i \in I$ ,

$$\|ax_i\| = |a| \|x_i\| \leq |a| \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty$$

o que implica que  $(ax_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}(I, E)$  e que

$$\|(ax_i)_{i \in I}\| \leq |a| \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty.$$

Os membros da desigualdade anterior são ambos 0 no caso em que  $a = 0$  e, quando  $a \neq 0$ , podemos provar que a desigualdade anterior também é uma igualdade visto que a desigualdade oposta resulta de se poder escrever

$$\begin{aligned} |a| \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty &= |a| \left\| \left( \frac{1}{a} ax_i \right)_{i \in I} \right\|_\infty \leq \\ &\leq |a| \left| \frac{1}{a} \right| \|(ax_i)_{i \in I}\|_\infty = \|(ax_i)_{i \in I}\|_\infty. \end{aligned}$$

O facto de a métrica em  $\mathbb{B}(I, E)$  associada à norma  $\|\cdot\|_\infty$  ser a métrica  $d_\infty$  resulta de se ter

$$\|(y_i - x_i)_{i \in I}\|_\infty = \sup_{i \in I} \|y_i - x_i\| = \sup_{i \in I} d(x_i, y_i). \quad \square$$

**1.1.22 (Bolas abertas e bolas fechadas)** Seja  $X$  um espaço métrico. Dados  $a \in X$  e  $r > 0$ , definem-se as *bolas aberta* e *fechada* de centro  $a$  e raio  $r$ ,  $B_r(a)$  e  $\overline{B}_r(a)$ , por

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}, \quad \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}.$$

Repare-se que, para cada  $r > 0$ , as bolas  $B_r(a)$  e  $\overline{B}_r(a)$  não são vazias, por incluírem, pelo menos, o ponto  $a$  e tem-se  $B_r(a) \subset \overline{B}_r(a)$ . Repare-se também que para  $x, y \in \overline{B}_r(a)$  tem-se

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq r + r = 2r,$$

pelo que as bolas abertas e as bolas fechadas de raio  $r$  são conjuntos limitados com diâmetro menor ou igual a  $2r$ .

Repare-se ainda que, no caso do espaço métrico  $\mathbb{R}$  com a métrica usual,

tem-se

$$B_r(a) = ]a - r, a + r[, \quad \overline{B}_r(a) = [a - r, a + r],$$

em particular a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r > 0$  não é mais do que o que é frequente ser notado  $V_r(a)$  e ser chamado *vizinhança- $r$*  do número real  $a$ .

**1.1.23 (Propriedade de Hausdorff)** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $a \neq b$  dois elementos de  $X$ . Existe então  $r > 0$  tal que  $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$ .<sup>6</sup>

**Dem:** Consideremos  $r = \frac{1}{2}d(a, b) > 0$ . Se, por absurdo, existisse  $x$  em  $B_r(a) \cap B_r(b)$ , podíamos escrever

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + r = d(a, b),$$

o que é impossível. □

No contexto geral dos espaços métricos, e tendo em vista a noção mais geral de espaço topológico que será estudada a partir da próxima secção, é conveniente dar à palavra “vizinhança” um significado mais geral, que se aplica às bolas abertas mas também a outros conjuntos.

**1.1.24 (Vizinhanças num espaço métrico)** Se  $X$  é um espaço métrico e  $a \in X$ , diz-se que um conjunto  $V \subset X$  é uma vizinhança de  $a$  se existir  $r > 0$  tal que  $B_r(a) \subset V$ .

Note-se que, para cada  $r > 0$  tanto a bola aberta  $B_r(a)$  como a bola fechada  $\overline{B}_r(a)$  são vizinhanças de  $a$ , já que ambos estes conjuntos contêm  $B_r(a)$ .

Repare-se que a noção anterior de vizinhança, quando é encontrada pela primeira vez, choca um pouco com a ideia que estamos habituados a associar a essa palavra: Uma vizinhança de  $a$  não é um conjunto “cujos elementos estão todos próximos de  $a$ ”, mas sim um conjunto que “contém todos os elementos que estão suficientemente próximos de  $a$ ”, podendo conter também elementos “que estão muito longe”. Vamos agora verificar algumas das propriedades das vizinhanças num espaço métrico, que estarão na base da definição de espaço topológico que apresentaremos mais tarde.

**1.1.25 (Propriedades das vizinhanças)** Seja  $X$  um espaço métrico. Tem-se então:

- a)  $X$  é vizinhança de todos os seus elementos;
- b) Se  $V$  é uma vizinhança de  $a$  e se  $V'$  é uma parte de  $X$ , contendo  $V$ , então  $V'$  é também uma vizinhança de  $a$ ;
- c) Se  $V$  é uma vizinhança de  $a$ , então  $a \in V$ ;

<sup>6</sup>Repare-se que, no caso do espaço métrico  $\mathbb{R}$  com a métrica usual, é possível, e habitual, afirmar mais: Se  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ , então existe  $r > 0$  tal que  $x < y$  para cada  $x \in B_r(a) = ]a - r, a + r[$  e  $y \in B_r(b) = ]b - r, b + r[$ .

- d)** Se  $V$  e  $V'$  são vizinhanças de  $a$ , então  $V \cap V'$  é também vizinhança de  $a$ ;  
**e)** Se  $V$  é uma vizinhança de  $a$ , então existe uma vizinhança  $W$  de  $a$  tal que, para cada  $x \in W$ ,  $V$  também é vizinhança de  $x$ .

**Dem:** As propriedades a), b) e c) são consequências imediatas da definição. Para verificarmos d), basta repararmos que, se  $V$  contém uma bola aberta  $B_r(a)$  e se  $V'$  contém uma bola aberta  $B_{r'}(a)$ , então  $V \cap V'$  contém uma das duas bolas,  $B_r(a)$  ou  $B_{r'}(a)$ , a saber, aquela que tiver o menor dos dois raios. Resta-nos verificar a condição e) que é, porventura, a que pode parecer mais confusa. Suponhamos então que  $V$  é uma vizinhança de  $a$ , e portanto que  $V$  contém uma certa bola aberta  $B_r(a)$ . Tomemos como  $W$  a bola aberta  $B_{r/2}(a)$ , que é, em particular, uma vizinhança de  $a$ . Vamos ver que, para cada  $x \in W$ ,  $V$  contém  $B_{r/2}(x)$ , o que provará que  $V$  é uma vizinhança de  $x$ . Ora, para cada  $y \in B_{r/2}(x)$ , tem-se  $d(x, y) < r/2$  pelo que, uma vez que  $d(a, x) < r/2$ , vem

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < r/2 + r/2 = r,$$

isto é,  $y \in B_r(a) \subset V$ . □

O leitor já encontrou decerto anteriormente o facto de, para muitos efeitos, a utilização da métrica euclidiana ou da métrica do máximo em  $\mathbb{R}^n$  ser indiferente. Nalgumas dessas situações a explicação dessa indiferença reside no facto de os conceitos envolvidos poderem ser caracterizados por condições em que apenas se faz apelo às vizinhanças dos pontos, sem precisar assim de referir explicitamente as métricas que as determinaram (por uma razão que será clara na próxima secção costuma-se dizer que esses *conceitos* são *topológicos*). Verificamos em seguida que, de facto, as vizinhanças de um ponto de  $\mathbb{R}^n$  (ou, mais geralmente, de  $Ap(I, \mathbb{R})$ , onde  $I$  é um conjunto finito não vazio) são as mesmas quer se considere a métrica euclidiana ou a métrica do máximo, apesar de as bolas para essas duas métricas não serem as mesmas (por esse facto, pode-se dizer que estas duas métricas são *topologicamente equivalentes*). Começamos por reparar que, de facto, as duas métricas referidas verificam uma condição mais forte que a equivalência topológica.

### 1.1.26 Sejam $d$ e $d'$ duas métricas sobre um mesmo conjunto $X$ .

Diz-se que as métricas são *topologicamente equivalentes* se para cada  $a \in X$  as vizinhanças de  $a$  relativamente à métrica  $d$  são as mesmas que as vizinhanças de  $a$  relativamente à métrica  $d'$ .

Diz-se que as métricas são *Lipschitz-equivalentes* se existirem constantes  $M > 0$  e  $M' > 0$  tais que, quaisquer que sejam  $x, y \in X$ ,

$$d'(x, y) \leq M d(x, y), \quad d(x, y) \leq M' d'(x, y).$$

Dois métricas  $d$  e  $d'$  sobre  $X$  que sejam Lipschitz-equivalentes são também topologicamente equivalentes.

**Dem:** Sejam  $M > 0$  e  $M' > 0$  duas constantes nas condições da definição e notemos  $B_r(a)$  e  $B'_r(a)$  as bolas abertas para as métricas  $d$  e  $d'$  respectivamente. Se  $V$  for uma vizinhança de  $a$  para a métrica  $d$  então existe  $r > 0$  tal que  $B_r(a) \subset V$  e então  $V$  também é uma vizinhança de  $a$  para a métrica  $d'$  por ser  $B'_{r/M'}(a) \subset V$ , uma vez que se  $x \in B'_{r/M'}(a)$  vem

$$d(a, x) \leq M' d'(a, x) < M' \frac{r}{M'} = r,$$

donde  $x \in B_r(a)$  e portanto  $x \in V$ . Reciprocamente, se  $V$  for uma vizinhança de  $a$  para a métrica  $d'$  então existe  $r > 0$  tal que  $B'_r(a) \subset V$  e então  $V$  também é uma vizinhança de  $a$  para a métrica  $d$  por ser  $B_{r/M}(a) \subset V$ , uma vez que se  $x \in B_{r/M}(a)$  vem

$$d'(a, x) \leq M d(a, x) < M \frac{r}{M} = r,$$

donde  $x \in B'_r(a)$  e portanto  $x \in V$ . □

### 1.1.27 (Equivalência topológica das métricas euclidianas e do máximo)

Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio e consideremos no conjunto  $Ap(I, \mathbb{R})$  das aplicações  $I \rightarrow \mathbb{R}$  as métricas euclidianas  $d_2$  e do máximo  $d_\infty$ . Estas métricas são Lipschitz-equivalentes, em particular, são topologicamente equivalentes.

**Dem:** Começamos por examinar as normas que dão origem a estas métricas. Ora, sendo  $n$  o número de elementos de  $I$  e  $x = (x_i)_{i \in I}$  arbitrário em  $Ap(I, \mathbb{R})$ , tem-se, por um lado, para cada  $i$ ,

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i \in I} x_i^2} = \|x\|_2,$$

o que implica que

$$(1) \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in I} |x_i| \leq \|x\|_2$$

e, por outro lado, para cada  $i \in I$ ,  $|x_i| \leq \|x\|_\infty$ , o que implica que

$$(2) \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} x_i^2} \leq \sqrt{n \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Resulta daqui, para as métricas,

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) &= \|y - x\|_\infty \leq \|y - x\|_2 = d_2(x, y), \\ d_2(x, y) &= \|y - x\|_2 \leq \sqrt{n} \|y - x\|_\infty = \sqrt{n} d_\infty(x, y), \end{aligned}$$

o que mostra que elas são efetivamente Lipschitz-equivalentes (as constantes na definição podem ser 1 e  $\sqrt{n}$ ). □

Vamos agora examinar o modo como algumas noções que já conhecemos no contexto dos números reais podem ser generalizadas naturalmente ao contexto dos espaços métricos, verificando também que estamos na presença de noções topológicas.

**1.1.28** Sejam  $X$  um espaço métrico,  $a \in X$  e  $A \subset X$ . Diz-se que  $a$  é aderente ao conjunto  $A$  se, qualquer que seja  $r > 0$ , existe  $x \in A$  tal que  $d(a, x) < r$ , dito de outro modo,  $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$  (todas as bolas abertas de centro  $a$  contêm algum elemento de  $A$ ).

Como propriedades triviais da noção de ponto aderente, podemos referir desde já que:

- a) O conjunto vazio  $\emptyset$  não tem pontos aderentes ( $B_r(a) \cap \emptyset = \emptyset$ );
- b) Se  $a$  é aderente a  $A$  e  $A \subset B \subset X$ , então  $a$  é também aderente a  $B$  (se  $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$  então também  $B_r(a) \cap B \neq \emptyset$ ).
- c) Se  $a \in A$ , então  $a$  é aderente a  $A$  ( $a \in B_r(a) \cap A$ );

Não aprofundamos de momento muitas propriedades da noção de ponto aderente uma vez que as vamos reencontrar num contexto mais geral quando estudarmos os espaços topológicos. Apresentamos no entanto desde já duas caracterizações alternativas desta noção, a primeira com um carácter essencialmente métrico e a segunda implicando que estamos na presença de uma noção topológica.

**1.1.29** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $A \subset X$ . Se  $A \neq \emptyset$ , então um ponto  $a \in X$  é aderente a  $A$  se, e só se,  $d(a, A) = 0$ .

**Dem:** Se  $d(a, A) > 0$ , então pondo  $r = d(a, A)$ , tem-se  $d(a, x) \geq r$  para cada  $x \in A$ , por outras palavras,  $A$  não tem nenhum elemento na bola  $B_r(a)$ , o que implica que  $a$  não é aderente a  $A$ . Reciprocamente, se  $a$  não é aderente a  $A$ , existe  $r > 0$  tal que  $B_r(a)$  não tem nenhum elemento de  $A$ , por outras palavras  $d(a, x) \geq r$  para cada  $x \in A$ , condição que implica que  $d(a, A) \geq r$ , em particular  $d(a, A) > 0$ .  $\square$

**1.1.30 (A aderência é uma noção topológica)** Sejam  $X$  um espaço métrico,  $a \in X$  e  $A \subset X$ . Tem-se então que  $a$  é aderente a  $A$  se, e só se, qualquer que seja a vizinhança  $V$  de  $a$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$  (dito de outro modo, todas as vizinhanças de  $a$  contêm algum elemento de  $A$ ).

**Dem:** Se qualquer vizinhança de  $a$  tiver algum elemento de  $A$ , em particular qualquer bola aberta  $B_r(a)$  tem algum elemento de  $A$  pelo que  $a$  é aderente a  $A$ . Reciprocamente, se  $a$  é aderente a  $A$ , dada uma vizinhança arbitrária  $V$  de  $a$ , podemos considerar  $r > 0$  tal que  $B_r(a) \subset V$  e então o facto de  $B_r(a)$  ter algum elemento  $x \in A$  implica que  $V$  também tem o elemento  $x \in A$ .  $\square$

A noção de limite numa aplicação num ponto pode ser também apresentada no contexto dos espaços métricos de uma forma que generaliza trivialmente a que é utilizada no contexto dos números reais. Como no



caso da noção de ponto aderente, examinamos apenas a definição e algumas propriedades básicas, uma vez que um estudo mais aprofundado dos limites vai ser encontrado no contexto mais geral dos espaços topológicos.

**1.1.31 (A noção de limite no contexto dos espaços métricos)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Diz-se que um elemento  $b \in Y$  é um *limite* de  $f$  quando  $x \rightarrow x_0$ , ou que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ , escrevendo-se também  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  se, qualquer que seja  $\delta > 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(f(x), b) < \delta$  para cada  $x \in A$  com  $d(x, x_0) < \varepsilon$ , dito de outro modo, tal que

$$f(B_\varepsilon(x_0) \cap A) \subset B_\delta(b).^7$$

**1.1.32 (Unicidade do limite)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . A função  $f$  não pode então ter mais que um limite quando  $x \rightarrow x_0$  (embora nada garanta que tenha limite), por outras palavras, se  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$  e  $f(x) \rightarrow b'$  quando  $x \rightarrow x_0$  então  $b = b'$ . Por esse motivo, quando existe limite, podemos usar uma notação para designar esse limite: A notação habitual é

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

**Dem:** Suponhamos, por absurdo, que  $f$  admitia limites distintos  $b \neq b'$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tendo em conta a propriedade de Hausdorff referida em 1.1.23, podíamos considerar  $\delta > 0$  tal que as bolas abertas  $B_\delta(b)$  e  $B_\delta(b')$  não tivessem nenhum elemento comum. Tendo em conta a definição de limite podíamos então considerar  $\varepsilon > 0$  e  $\varepsilon' > 0$  tais que  $f(x) \in B_\delta(b)$  sempre que  $x \in A$  verifica  $d(x_0, x) < \varepsilon$  e  $f(x) \in B_\delta(b')$  sempre que  $x \in A$  verifica  $d(x_0, x) < \varepsilon'$ . Notando  $\varepsilon'' > 0$  o menor dos dois números  $\varepsilon$  e  $\varepsilon'$ , podíamos então escolher  $x \in A$  tal que  $d(x_0, x) < \varepsilon''$  (aqui é que intervém a hipótese de  $x_0$  ser aderente a  $A$ ) e então, por ser simultaneamente  $d(x_0, x) < \varepsilon$  e  $d(x_0, x) < \varepsilon'$ , tinha-se simultaneamente  $f(x) \in B_\delta(b)$  e  $f(x) \in B_\delta(b')$ , contrariando o facto de estas duas bolas abertas não terem nenhum elemento comum.  $\square$

**1.1.33 (O limite num ponto do domínio)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $x_0 \in A$  (em particular  $x_0$  é aderente a  $A$ ). Se  $f$  tiver limite quando  $x \rightarrow x_0$ , então esse limite é necessariamente  $f(x_0)$ .

**Dem:** Suponhamos que  $b \neq f(x_0)$ . Tendo em conta, mais uma vez, a

<sup>7</sup>A importância de pedir que  $x_0$  seja aderente a  $A$  está na possibilidade de garantir que, para cada  $\varepsilon > 0$  existe algum  $x \in A$  com  $d(x, x_0) < \varepsilon$ . Se isso não acontecesse, a escolha de  $\varepsilon$  para o qual um tal  $x$  não existisse permitia deduzir que qualquer elemento de  $Y$  era limite, o que seria certamente uma situação indesejável.

propriedade de Hausdorff referida em 1.1.23, podemos considerar  $\delta > 0$  tal que as bolas abertas  $B_\delta(b)$  e  $B_\delta(f(x_0))$  não tenham nenhum elemento comum, em particular tal que  $f(x_0) \notin B_\delta(b)$ . Uma vez que  $x_0$  pertence a  $A$  e a qualquer bola  $B_\varepsilon(x_0)$  com  $\varepsilon > 0$ , não pode assim existir  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(B_\varepsilon(x_0) \cap A) \subset B_\delta(b)$ , o que mostra que  $b$  não é limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.1.34 (A noção de limite é topológica)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Tem-se então que um elemento  $b \in Y$  é limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, qualquer que seja a vizinhança  $V'$  de  $b$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in V \cap A$ .

**Dem:** Começemos por supor que se tem  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Dada a vizinhança  $V'$  de  $b$ , podemos considerar  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(b) \subset V'$  e então escolher  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \in B_\delta(b)$  para cada  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$ . Tomando então  $V = B_\varepsilon(x_0)$ , vemos que  $V$  é uma vizinhança de  $x_0$  tal que, para cada  $x \in V \cap A$ ,  $f(x) \in B_\delta(b) \subset V'$ .

Suponhamos, reciprocamente, que a condição no enunciado é verificada. Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar a vizinhança  $V' = B_\delta(b)$  de  $b$  e escolher então uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in V \cap A$ . Sendo  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_0) \subset V$  tem-se, em particular  $f(x) \in V' = B_\delta(b)$  para cada

$$x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A \subset V \cap A,$$

o que mostra que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

Note-se que a noção de conjunto limitado não é uma noção topológica, isto é, não pode ser definida exclusivamente em termos de vizinhanças. Com efeito, como veremos no exercício 1.1.10 adiante, pode acontecer que para duas métricas topologicamente equivalentes os conjuntos limitados não sejam os mesmos. O resultado a seguir mostrar que, se duas métricas forem Lipschitz-equivalentes, então já podemos garantir que os conjuntos limitados para cada uma delas são os mesmos.

**1.1.35 (Métricas Lipschitz-equivalentes e conjuntos limitados)** Se  $d$  e  $d'$  são duas métricas Lipschitz-equivalentes sobre um conjunto  $X$ , então um subconjunto  $A \subset X$  é limitado relativamente à métrica  $d$  se, e só se, for limitado relativamente à métrica  $d'$ .

**Dem:** Sejam  $M > 0$  e  $M' > 0$  duas constantes tais que, quaisquer que sejam  $x, y \in X$ ,

$$d'(x, y) \leq M d(x, y), \quad d(x, y) \leq M' d'(x, y).$$

Se  $A \subset X$  é limitado para a métrica  $d$  então existe  $R \geq 0$  tal que quaisquer que sejam  $x, y \in A$ ,  $d(x, y) \leq R$  e então, quaisquer que sejam  $x, y \in A$ ,

$$d'(x, y) \leq M d(x, y) \leq M R,$$

o que mostra que  $A$  é também limitado para a métrica  $d'$ . Reciprocamente, se  $A \subset X$  é limitado para a métrica  $d'$  então existe  $R \geq 0$  tal que quaisquer que sejam  $x, y \in A$ ,  $d'(x, y) \leq R$  e então, quaisquer que sejam  $x, y \in A$ ,

$$d(x, y) \leq M' d'(x, y) \leq M' R,$$

o que mostra que  $A$  é também limitado para a métrica  $d$ .  $\square$

Terminamos esta secção com algumas observações triviais sobre o modo como se comportam algumas das noções que estudámos quando consideramos um subespaço métrico daquele com que estamos a trabalhar.

**1.1.36 (O contexto dos subespaços métricos)** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $X' \subset X$  um subconjunto sobre o qual se considera naturalmente a métrica induzida (cf. 1.1.9). Do facto de a distância de dois pontos de  $X'$  para a métrica induzida ser a mesma que a sua distância enquanto pontos de  $X$  decorrem trivialmente relações entre as noções que temos vindo a estudar quando consideradas no contexto do espaço métrico  $X$  e no contexto do subespaço métrico  $X'$ . Por exemplo:

**a)** Se  $a \in X'$  e  $B \subset X'$  é não vazio, a distância  $d(a, B)$  é a mesma quer se considere o contexto do espaço métrico  $X$  ou o do subespaço métrico  $X'$ . O mesmo acontece, dados conjuntos não vazios  $A \subset X'$  e  $B \subset X'$ , à distância  $d(A, B)$ .

**b)** Um conjunto  $A \subset X'$  é limitado no contexto de  $X$  se, e só se, for limitado no contexto de  $X'$  e, quando o conjunto for limitado e não vazio, o diâmetro  $\text{diam}(A)$  é o mesmo nos dois contextos.

**c)** Se  $A \subset X'$  e  $x_0 \in X'$ , o ponto  $x_0$  é aderente a  $A$  no contexto de  $X$  se, e só se, o for no contexto de  $X'$ .<sup>8</sup>

**d)** Sejam também  $Y$  um espaço métrico e  $Y'$  um subconjunto sobre o qual se considera a métrica induzida. Sejam  $A \subset X'$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação tal que  $f(A) \subset Y'$ . Dados  $x_0 \in X'$  e  $b \in Y'$ , tem-se que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  no contexto dos espaços métricos  $X$  e  $Y$  se, e só se, isso acontecer no contexto dos espaços métricos  $X'$  e  $Y'$ .<sup>9</sup>

**e)** Pelo contrário, se  $x_0 \in X'$  e  $r > 0$ , as bolas aberta e fechada de centro  $x_0$  e raio  $r$  no contexto de  $X$ , notemo-las  $B_r(x_0)$  e  $\overline{B}_r(x_0)$ , não coincidem necessariamente com as correspondentes bolas no contexto de  $X'$ , que

<sup>8</sup>Observe-se, no entanto, que não afastamos a possibilidade de existirem pontos de  $X$  aderentes a  $A$  que não pertençam a  $X'$  (para os quais não se põe portanto a questão de serem ou não aderentes a  $A$  no contexto de  $X'$ ).

<sup>9</sup>Analogamente ao referido a propósito de c), não afastamos a possibilidade de existirem pontos  $b \in Y$  que não pertençam a  $Y'$  para os quais  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  no contexto de  $X$  e  $Y$  (não fazendo sentido considerar um contexto que inclua  $Y'$ ).

podemos notar  $B'_r(x_0)$  e  $\overline{B}'_r(x_0)$ , uma vez que as primeiras, ao contrário das últimas, podem conter elementos que não pertencem a  $X'$ . O que podemos trivialmente afirmar é que

$$B'_r(x_0) = B_r(x_0) \cap X', \quad \overline{B}'_r(x_0) = \overline{B}_r(x_0) \cap X'.$$

## Exercícios

**Ex 1.1.1** No mesmo espírito que em 1.1.7 e 1.1.8 verificar que se pode definir uma norma  $\| \cdot \|_1$  em  $Ap(I, \mathbb{R})$  (a *norma da soma*) pondo

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_1 = \sum_{i \in I} |x_i|.$$

Reparar que, quando  $I$  tem um único elemento, esta norma coincide tanto com a norma euclidiana como com a do máximo.

**Ex 1.1.2** Consideremos um espaço métrico  $X$ . Encontrar um exemplo que mostre que, dados  $a \in X$  e  $B, C \subset X$  não vazios, não se tem necessariamente

$$d(a, C) \leq d(a, B) + d(B, C).$$

**Ex 1.1.3** Consideremos um espaço métrico  $X$ . Mostrar que, se  $A, B \subset X$  são conjuntos limitados e não vazios, então

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + d(A, B).$$

**Ex 1.1.4** Verificar que num espaço métrico  $X$  as bolas abertas e fechadas verificam a condição

$$\text{diam}(B_r(a)) \leq \text{diam}(\overline{B}_r(a)) \leq 2r$$

e encontrar um exemplo de espaço métrico onde, para um certo  $a \in X$  e  $r > 0$  se tenha  $\text{diam}(\overline{B}_r(a)) = 0$ , em particular  $\text{diam}(\overline{B}_r(a)) < 2r$ .

**Ex 1.1.5** Seja  $E$  um espaço vetorial normado, sobre o qual consideramos a métrica associada. Mostrar que, se  $F \subset E$  é um subespaço vetorial de dimensão  $n \geq 1$  então  $F$  não é um subconjunto limitado de  $E$ .

**Ex 1.1.6** Sejam  $E$  um espaço vetorial onde se consideram duas normas, que notamos  $\| \cdot \|$  e  $\| \cdot \|'$  e sejam  $d$  e  $d'$  as métricas associadas.

**a)** Adaptando a demonstração de 1.1.26, mostrar que, se existir uma constante  $M > 0$  tal que, para cada  $x \in E$ ,  $\|x\|' \leq M\|x\|$ , então toda a vizinhança de um ponto  $a \in E$  para a métrica  $d'$  também é vizinhança de  $a$  para a métrica  $d$  (Mnemónica: À norma menor correspondem mais vizinhanças).

**b)** Mostrar que, reciprocamente, se qualquer vizinhança de 0 para a métrica  $d'$  for também vizinhança de 0 para a métrica  $d$ , então existe uma constante  $M > 0$  tal que, para cada  $x \in E$ ,  $\|x\|' \leq M\|x\|$ . **Sugestão:** Começar por mostrar que existe  $r > 0$  tal que a bola fechada  $\overline{B}_r(0)$  esteja contida na bola aberta  $B'_1(0)$  e verificar em seguida

que se pode tomar  $M = \frac{1}{r}$ , reparando que cada  $x \neq 0$  se pode escrever como uma constante vezes um vetor de norma  $r$ .

c) Deduzir, em particular, que, se  $d$  e  $d'$  forem topologicamente equivalentes então são também Lipschitz-equivalentes (portanto, para métricas associadas a normas serem topologicamente equivalentes é o mesmo que serem Lipschitz-equivalentes<sup>10</sup>).

**Ex 1.1.7** Seja  $X$  um conjunto. Verificar que a noção de métricas Lipschitz-equivalentes sobre  $X$  corresponde a uma relação de equivalência no conjunto das métricas sobre  $X$ .

**Ex 1.1.8** Verificar que, se  $I$  é um conjunto finito não vazio, a métrica de  $A_p(I, \mathbb{R})$  associada à norma da soma (cf. o exercício 1.1.1) é Lipschitz-equivalente, em particular topologicamente equivalente, às métricas associadas às normas euclidiana e do máximo (cf. 1.1.7 e 1.1.8).

**Ex 1.1.9** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos a métrica discreta  $d$  (cf. 1.1.10).

a) Verificar que as vizinhanças de um ponto  $x_0 \in X$  para esta métrica são exactamente os conjuntos  $A \subset X$  com  $x_0 \in A$ .

b) Mostrar que um ponto  $x_0 \in X$  é aderente a um conjunto  $A \subset X$  se, e só se,  $x_0 \in A$ .

c) Sendo agora  $Y$  outro espaço métrico e  $x_0 \in A \subset X$ , mostrar que  $f(x_0)$  é limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Ex 1.1.10** Seja  $X$  um espaço métrico, com a métrica  $d$ , e considere-se uma nova aplicação  $d': X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ , definida por  $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ .

a) Mostrar que a aplicação  $d'$  é também uma métrica sobre  $X$  e que as métricas  $d$  e  $d'$  são topologicamente equivalentes, no sentido que as vizinhanças de cada  $a \in X$  para as duas métricas são as mesmas.

b) Supondo que o espaço  $X$  com a métrica  $d$  não é limitado (por exemplo,  $X = \mathbb{R}$  com a métrica usual), verificar que o espaço  $X$  com a métrica  $d'$  é limitado e concluir que as métricas  $d$  e  $d'$  não são Lipschitz-equivalentes e que a noção de conjunto limitado num espaço métrico não é uma noção topológica.

c) Supondo agora que o espaço  $X$ , com a métrica  $d$  é limitado, mostrar que as métricas  $d$  e  $d'$  são Lipschitz-equivalentes.

**Ex 1.1.11** Sejam  $X$  um espaço métrico,  $A \subset X$  e  $a \in X$ . Verificar que  $a$  é aderente a  $A$  se, e só se, o complementar  $X \setminus A$  não é vizinhança de  $a$ . Utilizar esta equivalência para verificar que as seguintes propriedades da noção de ponto aderente são consequências de propriedades das vizinhanças referidas em 1.1.25:

a) Não existem pontos aderentes ao conjunto vazio (facto já referido na alínea a) de 1.1.28);

b) Se  $a$  é aderente a  $A$  e  $A \subset B \subset X$ , então  $a$  é aderente a  $B$  (facto já referido na alínea b) de 1.1.28);

c) Se  $a \in A$ , então  $a$  é aderente a  $A$  (facto já referido na alínea c) de 1.1.28).

d) Se  $a$  é aderente a  $A \cup B$ , então  $a$  é aderente a  $A$  ou a  $B$ ;

<sup>10</sup>Como veremos no exercício 1.1.10 adiante, isto já não é verdade para métricas não necessariamente associadas a normas.

## §2. Espaços topológicos; aderência e limites.

No estudo de várias noções topológicas no contexto dos números reais constatou-se a comodidade de em várias situações alargar o contexto incluindo de forma unificada os números reais e mais dois objetos matemáticos designados por  $+\infty$  e  $-\infty$ . Ao fazer esse alargamento constatou-se que quando os elementos envolvidos eram os dois novos objetos deixava de ser a noção de distância que intervinha nas definições. A possibilidade de eliminar este tipo de assimetrias é uma das razões que conduzem ao interesse em introduzir um contexto mais geral, o dos espaços topológicos que estudaremos a seguir, em que as noções em causa podem ser estudadas.

**1.2.1** Se  $X$  é um conjunto, chama-se *topologia* sobre  $X$  a uma aplicação que associa, a cada  $a \in X$ , um conjunto  $\mathcal{V}_a$  de partes de  $X$ , chamadas *vizinhanças* de  $a$ , de modo que se verifiquem as propriedades:

- a)  $X \in \mathcal{V}_a$ ;
- b) Se  $V \in \mathcal{V}_a$  e  $V \subset V' \subset X$ , então  $V' \in \mathcal{V}_a$ ;
- c) Se  $V \in \mathcal{V}_a$ , então  $a \in V$ ;
- d) Se  $V \in \mathcal{V}_a$  e  $V' \in \mathcal{V}_a$ , então  $V \cap V' \in \mathcal{V}_a$ ;
- e) Para cada  $V \in \mathcal{V}_a$ , existe  $W \in \mathcal{V}_a$  tal que  $V \in \mathcal{V}_x$ , para cada  $x \in W$ .

Chama-se *espaço topológico* a um conjunto  $X$  no qual se fixou uma topologia.

Repare-se que de d) decorre facilmente por indução em  $n$  que se  $V_1, V_2, \dots, V_n$  são vizinhanças de  $a$  então  $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$  é também vizinhança de  $a$ .

É claro que, dado um espaço métrico  $X$ , podemos olhá-lo como espaço topológico, utilizando a definição das vizinhanças dada em 1.1.24, sendo essa a topologia que consideraremos sobre  $X$  sempre que não explicitarmos outra (cf. 1.1.25). Dizemos que um espaço topológico  $X$  é *metrizável* se a sua topologia for a associada a alguma métrica sobre  $X$ .

Por outras palavras, dar uma topologia sobre  $X$  corresponde a dizer, para cada  $a \in X$ , quais são as partes de  $X$  que nós queremos que sejam vizinhanças de  $a$ , de modo a que se verifiquem para estas vizinhanças as mesmas propriedades que verificámos serem válidas no caso dos espaços métricos. Como primeiro exemplo de espaço topológico, cuja topologia não é definida à partida através de alguma métrica, temos a recta estendida:

**1.2.2 (Topologia da reta estendida)** Vamos notar  $\overline{\mathbb{R}}$  o conjunto cujos elementos são os números reais e mais dois, notados respectivamente  $-\infty$  e  $+\infty$ , conjunto a que damos o nome de *reta estendida* ou *reta acabada*. Estendemos naturalmente a  $\overline{\mathbb{R}}$  a relação de ordem usual sobre  $\mathbb{R}$ , o que nos permite considerar também intervalos com extremidades infinitas, que sejam fechados nessas extremidades. Pode então definir-se em  $\overline{\mathbb{R}}$  uma topologia<sup>11</sup> que é a que se considera salvo aviso em contrário, através da seguinte definição das vizinhanças:

**a)** Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , as vizinhanças de  $a$  são os subconjuntos  $V \subset \overline{\mathbb{R}}$  que, para algum  $r > 0$ , contêm o conjunto

$$V_r(a) = ]a - r, a + r[,$$

conjunto este que sabemos coincidir com a bola aberta  $B_r(a)$  de centro  $a$  e raio  $r$  para a métrica usual de  $\mathbb{R}$ .<sup>12</sup>

**b)** As vizinhanças de  $-\infty$  são os subconjuntos  $V \subset \overline{\mathbb{R}}$  que, para algum  $r > 0$ , contêm o conjunto

$$V_r(-\infty) = [-\infty, -\frac{1}{r}].$$

**c)** As vizinhanças de  $+\infty$  são os subconjuntos  $V \subset \overline{\mathbb{R}}$  que, para algum  $r > 0$ , contêm o conjunto

$$V_r(+\infty) = ]\frac{1}{r}, +\infty].$$

**Dem:** Começemos por observar que as definições aparentemente artificiais de  $V_r(-\infty)$  e  $V_r(+\infty)$  se destinam a garantir que, analogamente ao que acontece trivialmente com os  $V_r(a)$  para  $a \in \mathbb{R}$ , continua a ter-se, para  $a = \pm\infty$ ,  $V_r(a) \subset V_{r'}(a)$  sempre que  $0 < r \leq r'$ . A propriedade d) da definição de topologia em 1.2.1 decorre desta observação uma vez que, quando  $a$  é de qualquer dos tipos e  $V$  e  $V'$  são vizinhanças de  $a$ , podemos então considerar  $r > 0$  e  $r' > 0$  tais que  $V_r(a) \subset V$  e  $V_{r'}(a) \subset V'$  e então  $V_{r''}(a) \subset V \cap V'$ , para  $r'' = \min(r, r')$ . A propriedade c) resulta de se ter, para todos os tipos de ponto  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a \in V_r(a)$  para cada  $r > 0$ . As propriedades a) e b) resultam trivialmente da definição das vizinhanças. Resta-nos mostrar a validade da propriedade e), para o que será útil distinguir as três hipóteses sobre o ponto  $a$  envolvido.

**1)** No caso em que  $a \in \mathbb{R}$  temos uma consequência de já sabermos que essa propriedade é válida nos espaços métricos, em particular em  $\mathbb{R}$ : Com efeito,

<sup>11</sup>Embora a topologia que vamos definir sobre  $\overline{\mathbb{R}}$  não resulte naturalmente de nenhuma métrica, veremos adiante em 1.4.44 que é possível definir uma métrica neste espaço que defina esta topologia, por outras palavras, esta topologia é metrizável. Trata-se, no entanto, de uma métrica pouco natural e que não prolonga a métrica usual de  $\mathbb{R}$ .

<sup>12</sup>Em particular, se  $V \subset \mathbb{R}$ ,  $V$  é vizinhança de  $a$  na topologia de  $\overline{\mathbb{R}}$  se, e só se, o for na topologia de espaço métrico de  $\mathbb{R}$  (cf. a definição em 1.1.24).

se  $V$  é vizinhança de  $a$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ , podemos considerar  $r > 0$  tal que  $V_r(a) \subset V$  e então, como  $V_r(a) = B_r(a)$  é uma vizinhança de  $a$  no espaço métrico  $\mathbb{R}$ , podemos considerar uma vizinhança  $W$  de  $a$  em  $\mathbb{R}$ , e portanto também em  $\overline{\mathbb{R}}$ , tal que  $V_r(a)$  seja vizinhança de todos os pontos de  $W$  no espaço métrico  $\mathbb{R}$ , e portanto também em  $\overline{\mathbb{R}}$ , o que implica que  $V$ , que contém  $V_r(a)$ , também é vizinhança em  $\overline{\mathbb{R}}$  de todos os pontos de  $W$ .

2) Suponhamos agora que  $V$  é vizinhança de  $-\infty$ . Seja  $r > 0$  tal que

$$[-\infty, -\frac{1}{r}[ = V_r(-\infty) \subset V.$$

Consideremos a vizinhança

$$W = V_{\frac{r}{2}}(-\infty) = [-\infty, -\frac{2}{r}[$$

de  $-\infty$ . Por hipótese,  $V$  é vizinhança de  $-\infty$  e vemos que, para cada  $x \in W$  distinto de  $-\infty$ ,

$$x + \frac{1}{r} < -\frac{2}{r} + \frac{1}{r} = -\frac{1}{r}$$

e portanto

$$V_{\frac{1}{r}}(x) = ]x - \frac{1}{r}, x + \frac{1}{r}[ \subset [-\infty, -\frac{1}{r}[ \subset V.$$

Verificámos assim que  $V$  é efetivamente vizinhança de todos os pontos de  $W$ .

3) Suponhamos por fim que  $V$  é vizinhança de  $+\infty$ . Seja  $r > 0$  tal que

$$]\frac{1}{r}, +\infty] = V_r(+\infty) \subset V.$$

Consideremos a vizinhança

$$W = V_{\frac{r}{2}}(+\infty) = ]\frac{2}{r}, +\infty]$$

de  $+\infty$ . Por hipótese,  $V$  é vizinhança de  $+\infty$  e vemos que, para cada  $x \in W$  distinto de  $+\infty$ ,

$$x - \frac{1}{r} > \frac{2}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

e portanto

$$V_{\frac{1}{r}}(x) = ]x - \frac{1}{r}, x + \frac{1}{r}[ \subset ]\frac{1}{r}, +\infty] \subset V.$$

Verificámos assim que  $V$  é efetivamente vizinhança de todos os pontos de  $W$ .  $\square$



**1.2.3 (A topologia canônica de  $\mathbb{R}^n$ )** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio e consideremos o conjunto  $Ap(I, \mathbb{R})$  das aplicações  $I \rightarrow \mathbb{R}$ . Considerando as métricas euclidianas  $d_2$  e do máximo  $d_\infty$  neste conjunto, o que examinamos em 1.1.27 diz-nos que, apesar de, em geral, definirem espaços métricos distintos, estas métricas definem a mesma topologia (a que se costuma dar o nome de *topologia canônica* ou *topologia usual*). Em particular, no caso em que  $I = \{1, \dots, n\}$ ,  $Ap(I, \mathbb{R})$  é o mesmo que  $\mathbb{R}^n$  e falamos da *topologia canônica* de  $\mathbb{R}^n$ .<sup>13</sup>

**1.2.4 (Exemplos extremais de topologia)** Repare-se que nada nos impede de considerarmos mais que uma topologia sobre um mesmo conjunto  $X$ . Dadas duas topologias sobre  $X$  cujas classes de vizinhanças notaremos  $\mathcal{V}_a$  e  $\mathcal{V}'_a$ , dizemos que a primeira é *mais fina* que a segunda (ou que a segunda é *menos fina* que a primeira) se se tem  $\mathcal{V}'_a \subset \mathcal{V}_a$  para cada  $a \in X$ .<sup>14</sup> É claro que duas topologias sobre  $X$  coincidem se, e só se, cada uma delas for mais fina que a outra. Os exemplos extremais de topologia que referimos a seguir vão ser respetivamente a mais fina e a menos fina de todas as topologias que se podem considerar em  $X$ .

**a) (A topologia discreta)** Dado um conjunto  $X$ , pode-se considerar em  $X$  uma topologia (dita *topologia discreta*) definida pela condição de as vizinhanças de um ponto  $a$  serem todas os conjuntos que contêm  $a$  (a verificação das propriedades a) a e) em 1.2.1 é muito simples; repare-se que, para a propriedade e), dada a vizinhança  $V$  de  $a$ , pode tomar-se como vizinhança  $W$  seja o próprio  $V$  seja o conjunto unitário  $\{a\}$ ).

Tendo em conta a propriedade c) na definição de topologia, vemos que a topologia discreta é mais fina que qualquer topologia que se considere em  $X$ . Repare-se também que, se considerarmos no conjunto  $X$  a métrica discreta, referida em 1.1.10, a topologia associada é a topologia discreta. Com efeito, da definição da métrica discreta decorre imediatamente que  $B_1(a) = \{a\}$  e portanto todo o conjunto que contém  $a$  contém  $B_1(a)$  e é assim uma vizinhança de  $a$ .

**b) (A topologia caótica)** Dado um conjunto  $X$ , pode-se considerar em  $X$  uma topologia (dita *topologia caótica* ou *topologia grosseira*) definida pela condição de a única vizinhança de um ponto  $a$  ser o conjunto total  $X$  (mais uma vez, a verificação das propriedades a) a e) da definição é muito simples). Tendo em conta a propriedade a) na definição de topologia, vemos que a topologia caótica é menos fina que qualquer topologia que se considere em  $X$ .

<sup>13</sup>Para além de a noção geral de topologia nos permitir estudar situações em que se pode falar de vizinhanças de um ponto sem estarmos no contexto de um espaço métrico (cf. o exemplo em 1.2.2), encontramos agora outra utilidade desta noção, a possibilidade de considerarmos como um mesmo objeto matemático dois objetos que no contexto métrico eram distintos.

<sup>14</sup>Em linguagem mais sugestiva, a topologia mais fina é a que tem mais vizinhanças.

A forma como as vizinhanças têm sido caracterizadas nos diferentes exemplos de espaços topológico encontrados até agora conduz-nos naturalmente a apresentar a seguinte definição.

**1.2.5 (Sistemas fundamentais de vizinhanças num espaço topológico)** Dados um espaço topológico  $X$  e  $a \in X$ , diz-se que uma classe  $\mathcal{B}_a$  de subconjuntos de  $X$  é um *sistema fundamental de vizinhanças* de  $a$  se as vizinhanças de  $a$  são exatamente os subconjuntos de  $X$  que contêm algum conjunto pertencente à classe  $\mathcal{B}_a$ . É claro que os conjuntos na classe  $\mathcal{B}_a$  são então, em particular, vizinhanças de  $a$ , uma vez que, se  $W \in \mathcal{B}_a$ , tem-se  $W \supset W$ .

Repare-se que, tendo em conta a propriedade das vizinhanças na alínea b) de 1.2.1, para verificar que uma certa classe  $\mathcal{B}_a$  de partes de  $X$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  basta verificar que os conjuntos de  $\mathcal{B}_a$  são vizinhanças de  $a$  e que qualquer vizinhança de  $a$  contém algum conjunto em  $\mathcal{B}_a$ .

**1.2.6 (Exemplos naturais de sistemas fundamentais de vizinhança)** Um exemplo trivial de sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  num espaço topológico é a classe  $\mathcal{V}_a$  de todas as vizinhanças de  $a$ . Como exemplos menos triviais (que mostram, em particular, que para uma dada topologia pode haver vários sistemas fundamentais de vizinhanças de um dado ponto) temos aqueles que nos aparecem naturalmente associados às caracterizações das diferentes topologias encontradas até agora:

**a)** Se  $X$  é um espaço métrico, então a classe  $\mathcal{B}_a$  de todas as bolas abertas  $B_r(a)$ , com  $r > 0$ , é um sistema fundamental de vizinhanças da topologia associada à métrica, tal como o é, dado  $r_0 > 0$ , o conjunto das bolas abertas  $B_r(a)$  com  $0 < r < r_0$ .

**b)** Relativamente à reta acabada  $\overline{\mathbb{R}}$ , para cada  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , a classe  $\mathcal{B}_a$  dos conjuntos  $V_r(a)$ , com  $r > 0$ , referidos nas alíneas a) a c) de 1.2.2, é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ . Lembrar que  $V_r(-\infty) = [-\infty, -\frac{1}{r}[$ ,  $V_r(+\infty) = ]\frac{1}{r}, +\infty]$  e, se  $a \in \mathbb{R}$ ,  $V_r(a) = ]a - r, a + r[$ .

**c)** Relativamente à topologia discreta de um conjunto  $X$ , dado  $a \in X$ , a classe constituída pelo único conjunto  $\{a\}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ .

**d)** Relativamente à topologia caótica de um conjunto  $X$ , a classe constituída pelo único conjunto  $X$  é um sistema fundamental de vizinhanças simultaneamente de todos os pontos  $a \in X$ .

**1.2.7 (Outros exemplos de sistemas fundamentais de vizinhanças)** **a)** Se  $X$  é um espaço métrico e  $a \in X$ , a classe das bolas abertas  $B_{\frac{1}{n}}(a)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ . Com efeito, cada um destes conjuntos, como qualquer bola aberta de centro  $a$ , é uma vizinhança de  $a$  e, dada uma vizinhança arbitrária  $V$  de  $a$ , existe  $r > 0$  tal que  $V \supset B_r(a)$ , tendo-se então também  $V \supset B_{\frac{1}{n}}(a)$  para qualquer natural  $n$  tal que  $\frac{1}{n} < r$  (a existência de tais naturais  $n$  decorre do facto de se ter  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  em  $\mathbb{R}$ ).

**b)** Se  $X$  é um espaço métrico e  $a \in X$ , a classe das bolas fechadas  $\overline{B}_r(a)$ , com  $r > 0$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ . Com efeito, cada um destes conjuntos é vizinhança de  $a$  por conter a correspondente bola aberta  $B_r(a)$  e, dada uma vizinhança arbitrária  $V$  de  $a$ , existe  $r > 0$  tal que  $B_r(a) \subset V$  e então, embora a correspondente bola fechada  $\overline{B}_r(a)$  não tenha que estar contida em  $V$ , isso já acontece com as bolas fechadas  $\overline{B}_{r'}(a)$  com  $0 < r' < r$ , por exemplo com  $r' = \frac{r}{2}$ .

**c)** Com justificação análoga à dada para o exemplo referido na alínea b), se  $a \in \mathbb{R}$ , a classe dos intervalos fechados  $\overline{V}_r(a) = [a - r, a + r]$ , com  $r > 0$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  para a topologia que consideramos na reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$ . Do mesmo modo, a classe dos intervalos fechados  $\overline{V}_r(-\infty) = [-\infty, -\frac{1}{r}]$  (respetivamente  $\overline{V}_r(+\infty) = [\frac{1}{r}, +\infty]$ ) constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $-\infty$  (respetivamente de  $+\infty$ ) na reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**d)** Começamos por reparar que se tivermos um sistema fundamental de vizinhanças  $\mathcal{B}_a$  de um ponto  $a$  num espaço topológico  $X$  e se considerarmos uma classe  $\mathcal{B}'_a$  contendo  $\mathcal{B}_a$  e constituída por vizinhanças de  $a$  então a classe  $\mathcal{B}'_a$  é também um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ .

Como aplicação desta observação trivial, constatamos que a classe  $\mathcal{B}'_{-\infty}$  de partes da reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  constituída pelos intervalos  $[-\infty, m[$ , com  $m \in \mathbb{R}$ , é um sistema fundamental de vizinhanças de  $-\infty$ , uma vez que contém a classe  $\mathcal{B}_{-\infty}$  das vizinhanças  $V_r(-\infty) = [-\infty, -\frac{1}{r}[$  e que cada  $[-\infty, m[$  é uma vizinhança de  $-\infty$ , no caso em que  $m < 0$  por coincidir com a vizinhança  $V_{-\frac{1}{m}}(-\infty)$  e no caso em que  $m \geq 0$  por conter, por exemplo, a vizinhança  $V_1(-\infty) = [-\infty, -1[$ .

Analogamente, a classe  $\mathcal{B}'_{+\infty}$  de partes da reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  constituída pelos intervalos  $]m, +\infty]$ , com  $m \in \mathbb{R}$ , é um sistema fundamental de vizinhanças de  $+\infty$ , uma vez que contém a classe  $\mathcal{B}_{+\infty}$  das vizinhanças  $V_r(+\infty) = ]\frac{1}{r}, +\infty]$  e que cada  $]m, +\infty]$  é uma vizinhança de  $+\infty$ , no caso em que  $m > 0$  por coincidir com a vizinhança  $V_{\frac{1}{m}}(+\infty)$  e no caso em que  $m \leq 0$  por conter, por exemplo, a vizinhança  $V_1(+\infty) = ]1, +\infty]$ .

Um dos interesses dos sistemas fundamentais de vizinhanças resulta de que, como veremos a seguir, muitos dos conceitos topológicos que estudaremos, definidos naturalmente a partir das vizinhanças, admitem uma caracterização alternativa, com frequência mais fácil utilizar, em que, em vez de considerar todas as vizinhanças, se encaram apenas aquelas que pertencem a um sistema fundamental de vizinhanças à nossa escolha. A primeira noção topológica que examinaremos é a de ponto aderente a um conjunto.

**1.2.8 (Pontos aderentes)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Diz-se que um ponto  $a \in X$  é *aderente* a  $A$  se qualquer que seja a vizinhança  $V$  de  $a$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$  (dito de outro modo, todas as vizinhanças de  $a$  contêm algum

elemento de  $A$ ).

Se  $X$  é um espaço topológico e  $A \subset X$  chamamos *aderência* de  $A$  ao conjunto, que notamos  $\text{ad}(A)$  ou  $\overline{A}$ , dos pontos de  $X$  aderentes a  $A$ .<sup>15</sup>

Repare-se que, tendo em conta 1.1.30, no caso em que  $X$  é um espaço métrico a noção de ponto aderente é equivalente à referida em 1.1.28.

Em geral, o que nos dá também uma justificação alternativa da afirmação precedente, se  $\mathcal{B}_a$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  no espaço topológico  $X$ ,  $a$  é aderente a  $A$  se, e só se, qualquer que seja  $W \in \mathcal{B}_a$ ,  $W \cap A \neq \emptyset$ .

**Dem:** Se  $a$  é aderente a  $A$ , então, para cada  $W \in \mathcal{B}_a$ ,  $W$  é vizinhança de  $a$  e portanto  $W \cap A \neq \emptyset$ . Suponhamos, reciprocamente, que  $W \cap A \neq \emptyset$  para cada  $W \in \mathcal{B}_a$ . Para cada vizinhança  $V$  de  $a$ , podemos considerar  $W \in \mathcal{B}_a$  tal que  $W \subset V$  e então um elemento  $x \in W \cap A$  também pertence a  $V \cap A$ , o que mostra que  $V \cap A \neq \emptyset$ . Provámos assim que  $a$  é aderente a  $A$ .  $\square$

**1.2.9 (Caracterização alternativa dos pontos aderentes)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$  e  $a \in X$ . Tem-se então que  $a$  é aderente a  $A$  se, e só se,  $X \setminus A$  não é vizinhança de  $a$ .

**Dem:** Suponhamos que  $X \setminus A$  não é vizinhança de  $a$ . Então, para cada  $V$  vizinhança de  $a$ ,  $V$  não está contido em  $X \setminus A$ , por outras palavras, existe  $x \in V$  que não pertence a  $X \setminus A$ , ou seja, que pertence a  $A$ . Concluimos assim que  $a$  é aderente a  $A$ . Reciprocamente, se  $a$  é aderente a  $A$ , então, uma vez que o conjunto  $X \setminus A$  não tem nenhum elemento de  $A$ ,  $X \setminus A$  não pode ser vizinhança de  $a$ .  $\square$

**1.2.10 (Propriedades dos pontos aderentes)** Seja  $X$  um espaço topológico. Tem-se então:

**a)** Se  $a \in X$  então  $a$  não é aderente ao conjunto vazio  $\emptyset$ . Por outras palavras,  $\text{ad}(\emptyset) = \emptyset$ .

**b)** Se  $A \subset C \subset X$ , então cada  $a$  aderente a  $A$  também é aderente a  $C$ , por outras palavras,  $\text{ad}(A) \subset \text{ad}(C)$ .

**c)** Se  $A \subset X$ , então cada  $a \in A$  é aderente a  $A$ , por outras palavras,  $A \subset \text{ad}(A)$ .

**d)** Se  $A \subset X$  e  $B \subset X$  então um ponto  $a \in X$  é aderente a  $A \cup B$  se, e só se, é aderente a  $A$  ou é aderente a  $B$ , por outras palavras

$$\text{ad}(A \cup B) = \text{ad}(A) \cup \text{ad}(B).$$

**Dem:** Tendo em conta a caracterização dos pontos aderentes em 1.2.9, as propriedades resultam das propriedades homónimas das vizinhanças em 1.2.1: A alínea a) resulta de que  $X \setminus \emptyset = X$  é vizinhança de  $a$ ; A alínea b) resulta de que, se  $a$  não é aderente a  $C$ , então  $X \setminus C$  é vizinhança de  $a$  e então, por ser  $X \setminus C \subset X \setminus A$ , concluimos que  $X \setminus A$  é vizinhança de  $a$ , portanto  $a$

<sup>15</sup>A notação  $\overline{\mathbb{R}}$  para designar a reta estendida não entra em contradição com a notação  $\overline{A}$  para designar a aderência de  $A$  uma vez que, relativamente à topologia que consideramos na reta estendida, a aderência de  $\mathbb{R}$  é  $\mathbb{R}$ , como será referido adiante em 1.2.13.

não é aderente a  $A$ ; A alínea c) resulta de que, se  $a$  não é aderente a  $A$ , então  $X \setminus A$  é vizinhança de  $a$ , portanto  $a \in X \setminus A$ , isto é,  $a \notin A$ ; Quanto a d), uma das implicações resulta de b) e, quanto à outra, se  $a$  não é aderente a nenhum dos conjuntos  $A$  e  $B$ , então  $X \setminus A$  e  $X \setminus B$  são vizinhanças de  $a$ , o que implica que

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

é vizinhança de  $a$  ou seja  $a$  não é aderente a  $A \cup B$ .  $\square$

**1.2.11 (Generalização às uniões finitas)** Mais geralmente, sejam  $X$  um espaço topológico,  $I$  um conjunto finito de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $A_i \subset X$ . Um ponto  $a \in X$  é aderente à união  $\bigcup_{i \in I} A_i$ , se, e só se, existe  $i \in I$  tal que  $a$  seja aderente a  $A_i$ . Por outras palavras,

$$\text{ad}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \text{ad}(A_i).$$

**Dem:** Trata-se de uma consequência da conclusão da alínea d) de 1.2.10 através de uma indução no número de elementos do conjunto de índices  $I$ . Note-se que no caso trivial em que  $I = \emptyset$ , e portanto a união é igual a  $\emptyset$ , a conclusão também vale pela alínea a) do mesmo resultado.  $\square$

**1.2.12 (Os pontos aderentes determinam a topologia)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos duas topologias.

**a)** A primeira topologia é mais fina que a segunda se, e só se, para cada conjunto  $A \subset X$ , todo o ponto aderente a  $A$  para a primeira topologia é também aderente a  $A$  para a segunda topologia.<sup>16</sup>

**b)** Em particular, as duas topologias coincidem se, e só se, para cada conjunto  $A \subset X$ , os pontos aderentes a  $A$  para a primeira topologia coincidem com os pontos aderentes a  $A$  para a segunda topologia.

**Dem:** Temos uma consequência simples de 1.2.9: Dizer que a primeira topologia é mais fina que a segunda é o mesmo que dizer que, para cada  $a \in X$  toda a vizinhança de  $a$  para a segunda topologia é também vizinhança de  $a$  para a primeira, o que pode ser caracterizado de forma equivalente dizendo que todo o conjunto que não é vizinhança de  $a$  para a primeira topologia também não é vizinhança de  $a$  para a segunda. Uma vez que cada subconjunto de  $X$  é da forma  $X \setminus A$  para um certo  $A \subset X$  (nomeadamente o seu complementar), vemos assim que a primeira topologia é mais fina que a segunda se, e só se, para cada  $a \in X$ , se  $X \setminus A$  não é vizinhança de  $a$  para a primeira topologia também não o é para a segunda, por outras palavras, se  $a$  é aderente a  $A$  para a primeira topologia também o é para a segunda.  $\square$

**1.2.13 (Pontos aderentes na reta estendida)** Consideremos a reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  com a sua topologia usual (cf. 1.2.2). Tem-se então:

<sup>16</sup>Em linguagem mais sugestiva, a topologia mais fina é a que tem menos pontos aderentes.

**a)** Se  $a \in \mathbb{R}$  e  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ , então  $a$  é aderente a  $A$  para a topologia de  $\overline{\mathbb{R}}$  se, e só se,  $a$  é aderente a

$$A \cap \mathbb{R} = A \setminus \{-\infty, +\infty\}$$

para a topologia usual de espaço métrico de  $\mathbb{R}$ . Em particular, no caso em que  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  é aderente a  $A$  em  $\overline{\mathbb{R}}$  se, e só se, for aderente a  $A$  em  $\mathbb{R}$ .

**b)** O ponto  $-\infty$  é aderente a um conjunto  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  se, e só se,  $A$  não admite minorante real. Em particular,  $-\infty$  é aderente a  $\mathbb{R}$ .

**c)** O ponto  $+\infty$  é aderente a um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  se, e só se,  $A$  não admite majorante real. Em particular,  $+\infty$  é aderente a  $\mathbb{R}$ .

**d)** Se  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  não é vazio, então o supremo  $\sup(A)$  é aderente a  $A$  e qualquer  $a$  aderente a  $A$  verifica  $a \leq \sup(A)$ .<sup>17</sup>

**e)** Se  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  não é vazio, então o ínfimo  $\inf(A)$  é aderente a  $A$  e qualquer  $a$  aderente a  $A$  verifica  $\inf(A) \leq a$ .<sup>18</sup>

**Dem:** **a)** Temos uma consequência da caracterização dos pontos aderentes a um conjunto a partir de sistemas fundamentais de vizinhanças arbitrários desses pontos (cf. 1.2.8) uma vez que, tanto para a topologia usual de  $\overline{\mathbb{R}}$  como para a de  $\mathbb{R}$ , a classe dos subconjuntos

$$B_r(a) = V_r(a) = ]a - r, a + r[$$

constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $a \in \mathbb{R}$  e que cada um destes conjuntos intersesta  $A$  se, e só se, intersestar  $A \cap \mathbb{R}$ .

**b)** Aplicamos a caracterização de  $-\infty$  ser ponto aderente a  $A$  que utiliza o sistema fundamental de vizinhanças referido na alínea d) de 1.2.7: O ponto  $-\infty$  será aderente a  $A$  se, e só se, para cada  $m \in \mathbb{R}$ ,  $[-\infty, m[ \cap A \neq \emptyset$ , condição que é equivalente a afirmar que, para cada  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m$  não é minorante de  $A$ .

**c)** Aplicamos a caracterização de  $+\infty$  ser ponto aderente a  $A$  que utiliza o sistema fundamental de vizinhanças referido na alínea d) de 1.2.7: O ponto  $+\infty$  será aderente a  $A$  se, e só se, para cada  $m \in \mathbb{R}$ ,  $]m, +\infty] \cap A \neq \emptyset$ , condição que é equivalente a afirmar que, para cada  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m$  não é majorante de  $A$ .

**d)** Se  $\sup(A) = -\infty$  então, uma vez que  $A$  não é vazio, tem que ser  $A = \{-\infty\}$  e portanto o supremo de  $A$  é  $-\infty$  que é aderente a  $A$  e é o único ponto aderente a  $A$  uma vez que tanto os números reais como  $+\infty$  possuem vizinhanças que não contêm  $-\infty$ . Se  $\sup(A) = +\infty$  então para cada  $\delta > 0$  existe  $x \in A$  com  $x > \frac{1}{\delta}$ , portanto  $x \in V_\delta(+\infty)$ , o que mostra que  $+\infty$  é aderente a  $A$ , sendo naturalmente maior ou igual a qualquer ponto aderente a  $A$ . Suponhamos enfim que  $\sup(A) \in \mathbb{R}$ . Para cada  $\delta > 0$  existe  $x \in A$  tal que  $\sup(A) - \delta < x$  e, como  $x \leq \sup(A) < \sup(A) + \delta$ , vemos que  $x \in V_\delta(\sup(A))$ , o que mostra  $\sup(A)$  é aderente a  $A$ . Além disso, qualquer  $b$  aderente a  $A$  verifica  $b \leq \sup(A)$  visto que se  $b > \sup(A)$  então, ou  $b = +\infty$

<sup>17</sup>O supremo é o maior ponto aderente.

<sup>18</sup>O ínfimo é o menor ponto aderente.

e  $] \sup(A), +\infty ]$  é uma vizinhança de  $b$  sem pontos de  $A$ , ou  $b \in \mathbb{R}$  e, sendo  $\varepsilon = b - \sup(A) > 0$ ,  $V_\varepsilon(b) = ] \sup(A), b + \varepsilon [$  é uma vizinhança de  $b$  sem pontos de  $A$ , em qualquer dos casos  $b$  não é aderente a  $A$ .

e) Se  $\inf(A) = +\infty$  então, uma vez que  $A$  não é vazio, tem que ser  $A = \{+\infty\}$  e portanto o ínfimo de  $A$  é  $+\infty$  que é aderente a  $A$  e é o único ponto aderente a  $A$  uma vez que tanto os números reais como  $-\infty$  possuem vizinhanças que não contêm  $+\infty$ . Se  $\inf(A) = -\infty$  então para cada  $\delta > 0$  existe  $x \in A$  com  $x < -\frac{1}{\delta}$ , portanto  $x \in V_\delta(-\infty)$ , o que mostra que  $-\infty$  é aderente a  $A$ , sendo naturalmente menor ou igual a qualquer ponto aderente a  $A$ . Suponhamos enfim que  $\inf(A) \in \mathbb{R}$ . Para cada  $\delta > 0$  existe  $x \in A$  tal que  $x < \inf(A) + \delta$  e, como  $\inf(A) - \delta < \inf(A) \leq x$ , vemos que  $x \in V_\delta(\inf(A))$ , o que mostra  $\inf(A)$  é aderente a  $A$ . Além disso, qualquer  $b$  aderente a  $A$  verifica  $\inf(A) \leq b$  visto que se  $b < \inf(A)$  então, ou  $b = -\infty$  e  $[-\infty, \inf(A)[$  é uma vizinhança de  $b$  sem pontos de  $A$ , ou  $b \in \mathbb{R}$  e, sendo  $\varepsilon = \inf(A) - b > 0$ ,  $V_\varepsilon(b) = ]b - \varepsilon, \inf(A)[$  é uma vizinhança de  $b$  sem pontos de  $A$ , em qualquer dos casos  $b$  não é aderente a  $A$ .  $\square$

**1.2.14 (Outros exemplos de pontos aderentes) a)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos a topologia discreta (cf. a alínea a) de 1.2.4). Para cada  $A \subset X$ , tem-se então que os pontos aderentes a  $A$  são apenas os elementos de  $A$ . Com efeito, como para qualquer topologia, os pontos de  $A$  são aderentes a  $A$  e, neste caso, se  $a \notin A$ , o conjunto  $\{a\}$  é uma vizinhança de  $a$  sem nenhum elemento em  $A$ , o que mostra que  $a$  não é aderente a  $A$ .

**b)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos a topologia caótica (cf. a alínea b) de 1.2.4). Para cada  $A \subset X$ , com  $A \neq \emptyset$ , tem-se então que os pontos aderentes a  $A$  são todos os elementos de  $X$ . Com efeito, a única vizinhança de um elemento arbitrário  $a \in X$  é o próprio  $X$ , conjunto esse que intersesta  $A$ . É claro que, se  $A = \emptyset$ ,  $A$  não tem pontos aderentes, tal como acontece relativamente a qualquer topologia.

**1.2.15 (Conjuntos fechados e conjuntos densos)** Diz-se que o conjunto  $A \subset X$  é *fechado* se se tem  $\text{ad}(A) = A$  ou seja, tendo em conta o facto de a inclusão  $A \subset \text{ad}(A)$  ser sempre verificada, se todo o ponto aderente a  $A$  pertence a  $A$ .

Diz-se que um conjunto  $A \subset X$  é *denso* se se tem  $\text{ad}(A) = X$ .

**1.2.16 (A aderência é fechada)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$  um subconjunto arbitrário. Tem-se então que  $\text{ad}(A)$  é um conjunto fechado, isto é,  $\text{ad}(\text{ad}(A)) = \text{ad}(A)$ .<sup>19</sup>

**Dem:** Temos que mostrar que todo o ponto  $a$  aderente a  $\text{ad}(A)$  pertence a  $\text{ad}(A)$ , isto é, é aderente a  $A$ . Passando ao contrarrecíproco, suponhamos então que  $a \in X$  não é aderente a  $A$ . Podemos considerar assim uma vizinhança  $V$  de  $a$  que não tenha nenhum elemento de  $A$  e, tendo em conta a propriedade e) em 1.2.1, uma vizinhança  $W$  de  $a$  tal que  $V$  também seja

<sup>19</sup>Repare-se que este é o primeiro resultado em cuja demonstração utilizaremos a propriedade e) das vizinhanças, na definição de topologia em 1.2.1.

vizinhança de todos os pontos  $x \in W$ . O facto de  $V$  ser uma vizinhança de todos os pontos  $x \in W$  que não tem nenhum elemento de  $A$  implica que os pontos  $x \in W$  não são aderentes a  $A$ , por outras palavras, a vizinhança  $W$  de  $a$  não tem nenhum elemento de  $\text{ad}(A)$ . Podemos assim concluir que  $a$  não é aderente a  $\text{ad}(A)$ .  $\square$

**1.2.17 (Outra caracterização da aderência)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$  um subconjunto. Tem-se então que, para cada conjunto fechado  $C \subset X$  tal que  $A \subset C$ , tem-se também  $\text{ad}(A) \subset C$ . De forma mais sugestiva, e lembrando 1.2.16 e a alínea c) de 1.2.10, podemos assim dizer que, de entre os conjuntos fechados que contêm  $A$ , há um que é mínimo (no sentido de estar contido em todos os outros), nomeadamente  $\text{ad}(A)$ .

**Dem:** Sendo  $A \subset C$  com  $C$  fechado, concluímos da alínea b) de 1.2.10 que

$$\text{ad}(A) \subset \text{ad}(C) = C. \quad \square$$

**1.2.18 (Os fechados determinam a topologia)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos duas topologias.

a) A primeira topologia é mais fina que a segunda se, e só se, todo o conjunto fechado para a segunda topologia é também fechado para a primeira.<sup>20</sup>

b) Em particular, as duas topologias coincidem se, e só se, têm os mesmos conjuntos fechados.

**Dem:** Notemos  $\text{ad}(A)$  e  $\text{ad}'(A)$  as aderências de um conjunto  $A$  para a primeira e a segunda topologias respetivamente. Começemos por supor que a primeira topologia é mais fina que a segunda. Se  $A \subset X$  for fechado para a segunda topologia deduzimos de 1.2.12 que  $\text{ad}(A) \subset \text{ad}'(A) = A$ , o que mostra que o conjunto  $A$  também é fechado para a primeira topologia. Suponhamos, reciprocamente, que todo o conjunto fechado para a segunda topologia também é fechado para a primeira. Para cada  $A \subset X$ , o conjunto  $\text{ad}'(A)$  é fechado para a segunda topologia, e portanto também para a primeira pelo que, por 1.2.17, tem-se  $\text{ad}(A) \subset \text{ad}'(A)$ . Aplicando de novo 1.2.12, concluímos que a primeira topologia é mais fina que a segunda.  $\square$

**1.2.19 (Propriedades dos fechados)** Seja  $X$  um espaço topológico. Então:

a) Os subconjuntos  $\emptyset$  e  $X$  são fechados;

b) Se  $A$  e  $B$  são conjuntos fechados então  $A \cup B$  é também fechado. Mais geralmente, se  $I$  é um conjunto finito<sup>21</sup> de índices a  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família de subconjuntos fechados, então  $\bigcup A_i$  é também um conjunto fechado.

<sup>20</sup>Em linguagem mais sugestiva, a topologia mais fina é aquela que tem mais conjuntos fechados.

<sup>21</sup>Repare-se que se o conjunto de índices  $I$  for infinito já não podemos tirar a mesma conclusão: por exemplo, como referimos adiante em 1.2.20, num espaço métrico  $X$  todo o conjunto unitário  $\{x\}$  é fechado e, no entanto, qualquer conjunto  $A \subset X$ , fechado ou não, pode ser escrito como união de uma família de conjuntos unitários, nomeadamente  $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ .



c) Se  $I$  é um conjunto não vazio<sup>22</sup>, finito ou infinito, de índices e se  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família de subconjuntos fechados, então  $\bigcap A_i$  é também um conjunto fechado. Em particular, se  $A$  e  $B$  são subconjuntos fechados, também  $A \cap B$  é fechado.

**Dem:** As afirmações de a) resultam respetivamente de o conjunto  $\emptyset$  não ter pontos aderentes e de todos os pontos de  $X$  pertencerem a  $X$ . A primeira afirmação em b) resulta de se ter  $\text{ad}(A \cup B) = \text{ad}(A) \cup \text{ad}(B)$  e a segunda decorre da primeira por indução no número de elementos do conjunto de índices  $I$  (repare-se que, mesmo quando  $I = \emptyset$  a conclusão é válida por a união ser o conjunto vazio  $\emptyset$ ). Quanto a c), se  $a$  é aderente a  $\bigcap A_i$ , então  $a$  é aderente a cada um dos  $A_i$  (por este conter a interseção), pelo que  $a \in A_i$  para cada  $i$ , ou seja  $a \in \bigcap A_i$ .  $\square$

### 1.2.20 (Exemplos de conjuntos fechados e de conjuntos densos)

a) Sejam  $X$  um espaço métrico,  $a \in X$  e  $r > 0$ . São então fechados o conjunto unitário  $\{a\}$  e a bola fechada  $\overline{B}_r(a)$ .

Com efeito, se  $b \notin \{a\}$  podemos considerar  $\delta = d(a, b) > 0$ , tendo-se então que a bola  $B_\delta(b)$  não contém  $a$ , ou seja, não contém nenhum elemento de  $\{a\}$  e, para o segundo caso, se  $b \notin \overline{B}_r(a)$  podemos considerar

$$\delta = d(a, b) - r > 0,$$

tendo-se então que a bola  $B_\delta(b)$  não contém nenhum elemento de  $\overline{B}_r(a)$  já que, se contivesse um tal elemento  $x$ , obtínhamos o absurdo

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \delta + r = d(a, b).$$

b) Relativamente ao espaço métrico  $\mathbb{R}$ , para  $a, b \in \mathbb{R}$ , os conjuntos  $]-\infty, b]$  e  $[a, +\infty[$  são fechados, e portanto o mesmo acontece, no caso em que  $a \leq b$ , a

$$[a, b] = ]-\infty, b] \cap [a, +\infty[.$$

Com efeito, se  $x \notin ]-\infty, b]$ , tomando  $\delta = x - b > 0$ , a bola

$$B_\delta(x) = ]x - \delta, x + \delta[ = ]b, x + \delta[$$

não tem nenhum elemento de  $]-\infty, b]$  e, se  $x \notin [a, +\infty[$ , tomando  $\delta = a - x > 0$ , a bola

$$B_\delta(x) = ]x - \delta, x + \delta[ = ]x - \delta, a[$$

não tem nenhum elemento de  $[a, +\infty[$ .

Ainda relativamente ao espaço métrico  $\mathbb{R}$ , o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é denso, como decorre do facto de entre dois números reais existir

<sup>22</sup>A razão por que se exige  $I \neq \emptyset$  é simplesmente a dificuldade em definir a interseção de uma família vazia de conjuntos. Num contexto em que esteja claro que só se está a considerar subconjuntos de  $X$  essa interseção pode ser considerada como sendo igual a  $X$  (os elementos de  $X$  que pertencem a todos os  $A_i \dots$ ) e a conclusão vale ainda por  $X$  ser um conjunto fechado.

sempre um número racional.

c) Relativamente ao espaço topológico  $\overline{\mathbb{R}}$ , e com justificação totalmente análoga à dada em b), vemos que, para  $a, b \in \mathbb{R}$ , são fechados os conjuntos  $[-\infty, b]$  e  $[a, +\infty]$  e portanto também, no caso em que  $a \leq b$ , o conjunto

$$[a, b] = [-\infty, b] \cap [a, +\infty].$$

Também com a mesma justificação que em b), o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é denso em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

d) Considerando um conjunto  $X$  com a topologia discreta, já referimos em 1.2.14 que, para cada  $A \subset X$ , os únicos pontos aderentes a  $A$  são os elementos de  $A$  pelo que podemos dizer que todos os subconjuntos  $A$  são fechados e que o único subconjunto denso de  $X$  é o próprio  $X$ .

e) Considerando um conjunto  $X$  com a topologia caótica, já referimos em 1.2.14 que, para cada  $A \subset X$  com  $A \neq \emptyset$ , todos os pontos de  $X$  são aderentes a  $A$  pelo que podemos dizer que todos os conjuntos não vazios são densos e que os únicos conjuntos fechados são  $\emptyset$  e  $X$  (aqueles que tinham que ser...).

f) Mais uma vez relativamente ao espaço topológico  $\mathbb{R}$ , o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros é fechado. Com efeito, se  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \notin \mathbb{Z}$  então podemos considerar um inteiro  $p$  (a parte inteira de  $a$ ) tal que  $p < a < p + 1$  e então, sendo  $\delta > 0$  o menor dos dois números  $a - p$  e  $p + 1 - a$ , tem-se que

$$B_\delta(a) = ]a - \delta, a + \delta[ \subset ]p, p + 1[$$

não contém nenhum elemento de  $\mathbb{Z}$ .

Repare-se que, tendo em conta o referido nas alíneas a), b) e c) de 1.2.13, a aderência de  $\mathbb{Z}$  relativamente ao espaço  $\overline{\mathbb{R}}$  é  $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , em particular este último conjunto é fechado em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Como referimos em 1.1.9, quando temos um espaço métrico  $X$  e um subconjunto  $X' \subset X$ , podemos olhar de modo natural para  $X'$  como espaço métrico, referindo então este como um subespaço métrico do primeiro. Antes de estudarmos outras noções topológicas no contexto geral dos espaços topológicos será útil verificarmos que se pode proceder de maneira análoga quando temos um espaço topológico  $X$  e um subconjunto  $X' \subset X$ . Para justificar a solução encontrada recordamos a propriedade dos subespaços métricos referida na alínea c) de 1.1.36.

**1.2.21 (Subespaços topológicos)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $X' \subset X$  um subconjunto. Então:

a) Existe uma única topologia sobre  $X'$ , a que chamaremos *topologia induzida* pela de  $X$ , com a seguinte propriedade: Quaisquer que sejam  $A \subset X'$  e  $a \in X'$ ,  $a$  é aderente a  $A$  para a topologia de  $X'$  se, e só se, for aderente a  $A$  para a topologia de  $X$ . Esta topologia é a que se considera implicitamente em qualquer subconjunto de um espaço topológico e diz-se que um conjunto  $X' \subset X$ , com a topologia induzida, é um *subespaço*

*topológico* de  $X$ .

**b)** A topologia induzida pode ser explicitamente caracterizada pela condição de as vizinhanças de  $a \in X'$  serem exatamente os conjuntos que se podem escrever<sup>23</sup> na forma  $V \cap X'$  com  $V$  vizinhança de  $a$  na topologia de  $X$ .

**c)** Mais geralmente, se  $\mathcal{B}_a$  for um sistema fundamental de vizinhanças de  $a \in X'$  para a topologia de  $X$ , então a classe  $\mathcal{B}'_a$ , das intersecções  $W \cap X'$  com  $W \in \mathcal{B}_a$ , constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  para a topologia induzida.

**Dem:** O facto de não poder haver mais que uma topologia em  $X'$  com a propriedade referida em a) é uma consequência direta do que estabelecemos em 1.2.12. Consideremos agora, para cada  $a \in X'$ , a classe  $\mathcal{V}'_a$  dos subconjuntos de  $X'$  que se podem escrever na forma  $V \cap X'$  com  $V$  vizinhança de  $a$  em  $X$ . Verifiquemos que se obtém uma topologia em  $X'$  cujas vizinhanças de cada  $a \in X'$  são os conjuntos pertencentes a  $\mathcal{V}'_a$ , ou seja, testemos a validade das propriedades na alíneas a) a e) de 1.2.1.

A propriedade a) resulta de se ter  $X' = X \cap X'$ , com  $X$  vizinhança de  $a$  em  $X$ . Quanto a b), se  $V' \subset X'$  contém um conjunto da forma  $V \cap X'$  com  $V$  vizinhança de  $a$  em  $X$  então o conjunto  $V \cup V'$  é vizinhança de  $a$  em  $X$ , por conter  $V$ , e tem-se  $V' = (V \cup V') \cap X'$ , o que mostra que  $V' \in \mathcal{V}'_a$ . A propriedade c) resulta de que, para cada  $V$  vizinhança de  $a$  em  $X$ , tem-se  $a \in V$ , e portanto também  $a \in V \cap X'$ . A propriedade d) resulta de que, se  $V$  e  $W$  são vizinhanças de  $a$  em  $X$ , então o mesmo acontece a  $V \cap W$  e tem-se

$$(V \cap X') \cap (W \cap X') = (V \cap W) \cap X'.$$

Por fim, quanto a e), dada uma vizinhança  $V$  de  $a$  em  $X$ , podemos considerar uma vizinhança  $W$  de  $a$  em  $X$  tal que, para cada  $x \in W$ ,  $V$  seja vizinhança de  $x$  em  $X$  e então, em particular, para cada  $x$  no conjunto  $W \cap X'$  em  $\mathcal{V}'_x$ ,  $V \cap X' \in \mathcal{V}'_x$ .

Reparemos agora que, dados  $A \subset X'$  e  $a \in X'$ , o facto de se ter, para cada vizinhança  $V$  de  $a$  em  $X$ ,

$$V \cap A = (V \cap X') \cap A$$

mostra-nos que  $a$  é aderente a  $A$  para a topologia de  $X'$  se, e só se, for aderente a  $A$  para a topologia de  $X$ , por outras palavras a topologia definida em  $X'$  verifica a propriedade apontada em a).

Quanto à afirmação de c), começamos por reparar que, uma vez que os conjuntos  $W \in \mathcal{B}_a$  são vizinhanças de  $a$  em  $X$ , os conjuntos de  $\mathcal{B}'_a$ , que são da forma  $W \cap X'$  são vizinhanças de  $a$  em  $X'$ . Reparamos enfim que, para cada vizinhança de  $a$  em  $X'$ , portanto da forma  $V \cap X'$  com  $V$  vizinhança de  $a$  em  $X$ , podemos considerar  $W \in \mathcal{B}_a$  com  $W \subset V$  e então tem-se  $W \cap X' \subset V \cap X'$ , com  $W \cap X' \in \mathcal{B}'_a$ .  $\square$

<sup>23</sup>Em geral de mais que uma maneira.

**1.2.22 (O caso especial em que o subespaço é vizinhança de um ponto)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$  sobre o qual se considera a topologia induzida e  $a \in X'$  tal que  $X'$  seja vizinhança de  $a$ . Tem-se então:

**a)** Um conjunto  $V \subset X'$  é vizinhança de  $a$  para a topologia induzida de  $X'$  se, e só se, for vizinhança de  $a$  para a topologia de  $X$ .

**b)** Se  $\mathcal{B}_a$  for um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  para a topologia de  $X$  então a classe  $\mathcal{B}_a''$  dos conjuntos pertencente a  $\mathcal{B}_a$  que estão contidos em  $X'$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  para a topologia induzida de  $X'$ .

**Dem: a)** Se  $V$  for vizinhança de  $a$  na topologia de  $X$  então o facto de se ter  $V = V \cap X'$  mostra que  $V$  também é vizinhança de  $a$  na topologia induzida (isto mesmo sem a hipótese de  $X'$  ser vizinhança de  $a$ ). Reciprocamente, se  $V$  for vizinhança de  $a$  na topologia induzida então podemos escrever  $V = \widehat{V} \cap X'$  com  $\widehat{V}$  vizinhança de  $a$  na topologia de  $X$  e portanto  $V$  sendo a interseção de duas vizinhanças de  $a$  na topologia de  $X$  é também uma vizinhança de  $a$  na topologia de  $X$ .

**b)** O que vimos em a) mostra que os conjuntos de  $\mathcal{B}_a''$  são vizinhanças de  $a$  para a topologia induzida e que se  $W \subset X'$  for uma vizinhança de  $a$  para a topologia induzida  $W$  também é vizinhança de  $a$  para a topologia de  $X$  pelo que existe  $V \in \mathcal{B}_a$  tal que  $V \subset W$ , tendo-se necessariamente  $W \in \mathcal{B}_a''$ .  $\square$

O facto de a topologia induzida ser univocamente determinada pela propriedade apontada na alínea a) de 1.2.21 permite-nos justificar com frequência propriedades das topologias induzidas sem ter que recorrer à definição explícitas das vizinhanças relativas a esta. Encontramos a seguir alguns exemplos desta situação.

**1.2.23 (Aplicação aos subespaços métricos)** Sejam  $X$  um espaço métrico, sobre o qual se considera naturalmente a topologia associada, e  $X' \subset X$ . Coincidem então em  $X'$  a topologia induzida pela de  $X$  e a associada à métrica induzida em  $X'$  pela de  $X$ .<sup>24</sup>

**Dem:** Basta atender a que, tendo em conta a alínea c) de 1.1.36, para as duas topologias os pontos de  $X'$  aderentes a um dado conjunto  $A \subset X'$  são os mesmos.  $\square$

**1.2.24 (Transitividade das topologias induzidas)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $X'' \subset X' \subset X$ . Coincidem então em  $X''$  a topologia induzida pela de  $X$  e a induzida pela topologia de  $X'$  induzida pela de  $X$ .

**Dem:** Basta reparar que, para ambas as topologias, os pontos de  $X''$  aderentes a um subconjunto  $A \subset X''$  são aqueles que são aderentes a  $A$  para a topologia de  $X$ .  $\square$

<sup>24</sup>Felizmente...Senão teríamos problemas de compatibilidade com as nossas convenções sobre as topologias a considerar implicitamente num espaço métrico e as métricas ou topologias a considerar implicitamente numa parte dum espaço métrico ou topológico.

**1.2.25 (Outros exemplos de subespaços topológicos) a)** A topologia induzida em  $\mathbb{R}$  pela topologia da reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  definida em 1.2.2 é a sua topologia de espaço métrico. Com efeito, como referimos na alínea a) de 1.2.13, os pontos de  $\mathbb{R}$  aderentes a um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  para a topologia de espaço métrico são os que são aderentes a  $A$  para a topologia de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**b)** Se  $X$  é um conjunto sobre o qual consideramos a topologia discreta, então a topologia induzida por esta num subconjunto  $X' \subset X$  é a topologia discreta de  $X'$ . Com efeito, tendo em conta o que examinámos na alínea a) de 1.2.14, para ambas as topologias os pontos de  $X'$  aderentes a um conjunto  $A \subset X'$  são exatamente os elementos de  $A$ .

**c)** Se  $X$  é um conjunto sobre o qual consideramos a topologia caótica, então a topologia induzida por esta num subconjunto  $X' \subset X$  é a topologia caótica de  $X'$ . Com efeito, tendo em conta o que examinámos na alínea b) de 1.2.14, para ambas as topologias os pontos de  $X'$  aderentes a um conjunto  $A \subset X'$  são todos os elementos de  $X'$  se  $A \neq \emptyset$ , não existindo nenhum se  $A = \emptyset$ .

**1.2.26 (Aderência e conjuntos fechados num subespaço topológico)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$  um subespaço topológico e  $A \subset X'$  um subconjunto. Apesar do que referimos na alínea a) de 1.2.21, a aderência de  $A$  pode depender de nos colocarmos no contexto do espaço topológico  $X$  ou no do subespaço  $X'$  (uma vez que podem existir pontos aderentes no primeiro contexto que não pertençam a  $X'$ ), o que conduz a que tenhamos de completar a notação, escrevendo  $\text{ad}_X(A)$  ou  $\text{ad}_{X'}(A)$  para tornar claro qual o contexto a que nos referimos. Analogamente, dizer que  $A$  é fechado só fará sentido se for claro qual o espaço topológico que consideramos. O que podemos dizer é:

**a)** Tem-se

$$\text{ad}_{X'}(A) = \text{ad}_X(A) \cap X',$$

em particular, no caso em que  $X'$  é um subconjunto fechado de  $X$ , vem mesmo  $\text{ad}_{X'}(A) = \text{ad}_X(A)$ .

**b)** O conjunto  $A$  é fechado em  $X'$  se, e só se, existe um conjunto  $B$  fechado em  $X$  tal que  $A = B \cap X'$ . Em particular, se  $A$  é fechado em  $X$  então  $A$  é também fechado em  $X'$ .

**c)** No caso em que  $X'$  é fechado em  $X$ , podemos dizer que  $A$  é fechado em  $X'$  se, e só se,  $A$  é fechado em  $X$ .

**Dem:** A primeira afirmação em a) resulta diretamente do que foi referido na alínea a) de 1.2.21 e a segunda afirmação em a) resulta de que, quando  $X'$  é fechado em  $X$ , tem-se  $\text{ad}_X(A) \subset \text{ad}_X(X') = X'$ , donde

$$\text{ad}_{X'}(A) = \text{ad}_X(A) \cap X' = \text{ad}_X(A).$$

Provemos b): Se existir  $B$  fechado em  $X$  tal que  $A = B \cap X'$ , o facto de se ter  $A \subset B$  implica que  $\text{ad}_X(A) \subset \text{ad}_X(B) = B$  donde

$$\text{ad}_{X'}(A) = \text{ad}_X(A) \cap X' \subset B \cap X' = A$$

e  $A$  é fechado em  $X'$ . Reciprocamente, se  $A$  é fechado em  $X'$ , tem-se

$$A = \text{ad}_{X'}(A) = \text{ad}_X(A) \cap X',$$

onde o conjunto  $\text{ad}_X(A)$ , sendo uma aderência relativa a  $X$ , é um conjunto fechado em  $X$ .

Suponhamos enfim que  $X'$  é fechado em  $X$  e que  $A$  é fechado em  $X'$ . Pelo que vimos em b), existe  $B$  fechado em  $X$  tal que  $A = B \cap X'$  e podemos concluir que  $A$  é fechado em  $X$  por ser a intersecção dos conjuntos  $B$  e  $X'$ , ambos fechados em  $X$ .  $\square$

**1.2.27 (Limites de aplicações) a)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Dados  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ , diz-se que  $b$  é um *limite* de  $f$  quando  $x \rightarrow x_0$  ou que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ , escrevendo-se também  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} b$  se, qualquer que seja a vizinhança  $V'$  de  $b$  em  $Y$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in A$  com  $x \in V$ , por outras palavras, tal que

$$f(V \cap A) \subset V'.$$

**b)** Supondo fixados sistemas fundamentais de vizinhanças  $\mathcal{B}_{x_0}$  de  $x_0$  e  $\mathcal{B}'_b$  de  $b$ , tem-se  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} b$  se, e só se, qualquer que seja  $W' \in \mathcal{B}'_b$ , existe  $W \in \mathcal{B}_{x_0}$  tal que  $f(x) \in W'$  para cada  $x \in A$  com  $x \in W$ , por outras palavras, tal que

$$f(W \cap A) \subset W'.$$

**Dem:** Começemos por supor que se verifica a condição em b). Dada a vizinhança  $V'$  de  $b$ , podemos considerar  $W' \in \mathcal{B}'_b$  tal que  $W' \subset V'$  e então escolher  $W \in \mathcal{B}_{x_0}$  tal que  $f(x) \in W'$  para cada  $x \in W \cap A$ . Tem-se então que  $W$  é uma vizinhança de  $x_0$  tal que, para cada  $x \in W \cap A$ ,  $f(x) \in W' \subset V'$ , o que mostra que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

Suponhamos, reciprocamente, que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Dado  $W' \in \mathcal{B}'_b$  arbitrário,  $W'$  é uma vizinhança de  $b$  pelo que podemos escolher uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que  $f(x) \in W'$  para cada  $x \in V \cap A$ . Sendo  $W \in \mathcal{B}_{x_0}$  tal que  $W \subset V$  tem-se, em particular  $f(x) \in W'$  para cada  $x \in W \cap A$ , o que mostra que se verifica a condição em b).  $\square$

**1.2.28 (Comparação com o caso dos espaços métricos)** No caso em que  $X$  e  $Y$  são espaços métricos, a definição anterior é equivalente à apresentada em 1.1.31, como decorre da caracterização dos limites em 1.1.34 ou, alternativamente, de aplicar o que dissemos em 1.2.27 considerando as bolas abertas de centro em  $x_0$  e de centro em  $b$  como sistemas fundamentais de vizinhanças utilizados.

**1.2.29 (Limite num espaço métrico e limite em  $\mathbb{R}$ )** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço métrico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $b \in Y$ . Tem-se então  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} b$  se, e só se,

$$d(f(x), b) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

no espaço métrico  $\mathbb{R}$ .

**Dem:** Consideremos nos espaços de chegada os sistemas fundamentais de vizinhanças constituídos pelas bolas abertas. A conclusão resulta então da caracterização dos limites pelos sistemas fundamentais de vizinhanças na alínea b) de 1.2.27 uma vez que se tem  $f(x) \in B_\delta(b)$  se, e só se,  $d(f(x), b)$  pertence a  $B_\delta(0)$  em  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**1.2.30 (Exemplos triviais de limite) a)** Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  é aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  é uma aplicação de valor constante  $b \in Y$ , então tem-se  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ . Com efeito, se  $V'$  é uma vizinhança de  $b$ , podemos considerar a vizinhança  $X$  de  $x_0$ , tendo-se então  $f(x) = b \in V'$  para cada  $x \in X \cap A$ .

**b)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $\iota: A \rightarrow X$  a aplicação identidade (ou inclusão), definida por  $\iota(x) = x$ . Tem-se então que  $x_0$  é limite de  $\iota$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Basta, com efeito, reparar que, para cada vizinhança  $V'$  de  $x_0$ , tem-se  $\iota(x) = x \in V'$  para cada  $x \in V' \cap A$ .

**c)** Sejam  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos a topologia discreta,  $A \subset X$  e  $x_0$  aderente a  $A$  (ou seja,  $x_0 \in A$ ). Se  $Y$  é um espaço topológico arbitrário e  $f: A \rightarrow Y$  é uma aplicação arbitrária, então  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ .

Com efeito, se  $V'$  é uma vizinhança de  $f(x_0)$ , podemos considerar a vizinhança  $V = \{f(x_0)\}$  de  $x_0$ , para a qual se tem  $f(x) = f(x_0) \in V'$  para cada  $x \in V \cap A = \{x_0\}$ .

**d)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$  e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Se  $Y$  é um conjunto sobre o qual consideramos a topologia caótica, então, para qualquer  $b \in Y$ , tem-se  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ . Com efeito, a única vizinhança de  $b$  em

$Y$  é o próprio  $Y$  e, considerando a vizinhança  $X$  de  $x_0$ , tem-se certamente  $f(x) \in Y$  para cada  $x \in X \cap A$ . Repare-se que este exemplo mostra que, na ausência de alguma hipótese suplementar, e ao contrário do que acontecia no contexto dos espaços métricos (cf. 1.1.32), não é possível garantir a unicidade do limite quando estamos no contexto dos espaços topológicos.

**1.2.31 (Limites e topologias mais finas)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos duas topologias. Considerando a aplicação identidade  $Id: X \rightarrow X$ , definida por  $Id(x) = x$ , tem-se então que a primeira topologia é mais fina que a segunda se, e só se, para cada  $x_0 \in X$ , tem-se

$$Id(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0,$$

quando no domínio se considera a primeira topologia e no espaço de chegada a segunda (comparar com a alínea b) de 1.2.30, onde as topologias nos dois espaços coincidiam).

**Dem:** Começemos por supor que é válido o limite enunciado. Se  $V'$  é uma

vizinhança de  $x_0$  para a segunda topologia existe assim uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  para a primeira topologia tal que  $V = Id(V) \subset V'$ , condição que implica que  $V'$  também é vizinhança de  $x_0$  para a primeira topologia. Provamos assim que a primeira topologia é mais fina que a segunda. Suponhamos, reciprocamente, que a primeira topologia é mais fina que a segunda. Para cada vizinhança  $V'$  de  $x_0$  para a segunda topologia,  $V'$  também é uma vizinhança de  $x_0$  para a primeira topologia, para a qual se tem  $Id(V') = V' \subset V'$ , o que mostra que é válido o limite referido.  $\square$

### 1.2.32 (Comportamento dos limites quando se consideram subespaços topológicos)

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Sejam  $X' \subset X$  e  $Y' \subset Y$  subespaços topológicos tais que  $A \subset X'$ ,  $f(A) \subset Y'$ ,  $x_0 \in X'$  e  $b \in Y'$ . Tem-se então que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  no contexto dos espaços topológicos  $X$  e  $Y$  se,

e só se, isso acontece no contexto dos subespaços topológicos  $X'$  e  $Y'$ .<sup>25</sup>

**Dem:** Pela propriedade na alínea a) de 1.2.21,  $x_0$  também é aderente a  $A$  no contexto do subespaço topológico  $X'$ . Para concluir a equivalência dos dois contextos, basta agora ter em conta a caracterização das vizinhanças de um ponto relativas a um subespaço topológico na alínea b) de 1.2.21 e a definição de limite na alínea a) de 1.2.27 visto que, se  $V'$  é vizinhança de  $b$  em  $Y$  e  $V$  é vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , dado  $x \in A$ , tem-se

$$f(x) \in V' \Leftrightarrow f(x) \in V' \cap Y', \quad x \in V \Leftrightarrow x \in V \cap X'. \quad \square$$

### 1.2.33 (Os limites no contexto da reta estendida)

O leitor já terá encontrado decerto em estudos anteriores o significado do limite no contexto das funções reais de variável real. Mais precisamente, dados  $A \subset \mathbb{R}$  e uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , o leitor conhece o significado de se ter  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  nos casos em

que  $x_0$  pode ser um número real,  $-\infty$  ou  $+\infty$  e, do mesmo modo,  $b$  pode ser um número real,  $-\infty$  ou  $+\infty$ . Se recordar a definição então utilizada, reconhecerá decerto que ela se reduz à caracterização do limite na alínea b) de 1.2.27 no contexto de  $\overline{\mathbb{R}}$  como espaço topológico ambiente do domínio e como espaço de chegada quando se considera como sistema fundamental de vizinhanças de cada  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  a classe dos conjuntos  $V_r(c)$  explicitados nas alíneas a) a c) de 1.2.2 ou, alternativamente, no caso em que  $c = -\infty$  ou  $c = +\infty$ , o correspondente sistema fundamental de vizinhanças descrito na alínea d) de 1.2.7.

Podemos assim concluir que a definição de limite então utilizada é equivalente à definição geral estudada nesta secção, devendo, no entanto, notar-se que a definição com que estamos a trabalhar permite situações mais gerais, nomeadamente aquela em que  $-\infty$  ou  $+\infty$  pode pertencer ao

<sup>25</sup>No entanto, e analogamente ao que já encontramos em situações semelhantes, a função  $f$  pode ter limite quando  $x \rightarrow x_0$  quando o espaço de chegada é  $Y$  e não o ter quando consideramos  $Y'$  como espaço de chegada, já que o limite em questão pode ser um elemento de  $Y$  não pertencente a  $Y'$ .



domínio  $A$  da função e aquela em que os valores da função podem incluir também  $-\infty$  e  $+\infty$ .

Para funções com domínios contidos num espaço topológico e com valores na reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  valem também os resultados, bem conhecidos no contexto das aplicações reais de variável real, que se costumam associar à designação “limites por enquadramento”.

**1.2.34 (Limites por enquadramento)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma aplicação. Tem-se então:

**a)** Dados  $b \in \mathbb{R}$  e duas aplicações  $g, h: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tais que

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b, \quad h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$$

e que para cada  $x \in A$  se tenha  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  então tem-se também

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b.$$

**b)** Sendo  $g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma aplicação tal que  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  e que para cada  $x \in A$  se tenha  $g(x) \leq f(x)$  então tem-se também  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ .

**c)** Sendo  $h: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma aplicação tal que  $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$  e que para cada  $x \in A$  se tenha  $f(x) \leq h(x)$  então tem-se também  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$ .

**Dem:** **a)** Sendo  $W$  uma vizinhança arbitrária de  $b$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ , podemos considerar  $r > 0$  tal que  $]b - r, b + r[ \subset W$  e, considerando a vizinhança  $]b - r, b + r[$  de  $b$ , garantimos a existência de vizinhanças  $U_1$  e  $U_2$  de  $a$  em  $X$  tais que  $g(x) \in ]b - r, b + r[$  para cada  $x \in A \cap U_1$  e  $h(x) \in ]b - r, b + r[$  para cada  $x \in A \cap U_2$  e então, considerando a vizinhança  $U = U_1 \cap U_2$  de  $a$ , vemos que para cada  $x \in A \cap U$ ,

$$b - r < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < b + r,$$

e portanto  $f(x) \in W$ .

**b)** Sendo  $W$  uma vizinhança arbitrária de  $+\infty$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ , podemos considerar  $r > 0$  tal que  $] \frac{1}{r}, +\infty[ \subset W$  e, considerando a vizinhança  $] \frac{1}{r}, +\infty[$  de  $+\infty$ , garantimos a existência de uma vizinhança  $U$  de  $a$  em  $X$  tal que  $g(x) \in ] \frac{1}{r}, +\infty[$  para cada  $x \in A \cap U$  e então para cada  $x \in A \cap U$ ,

$$\frac{1}{r} < g(x) \leq f(x),$$

e portanto  $f(x) \in W$ .

**c)** Sendo  $W$  uma vizinhança arbitrária de  $-\infty$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ , podemos considerar  $r > 0$  tal que  $[-\infty, -\frac{1}{r}[ \subset W$  e, considerando a vizinhança  $[-\infty, -\frac{1}{r}[$  de  $-\infty$ , garantimos a existência de uma vizinhança  $U$  de  $a$  em  $X$  tal que

$h(x) \in [-\infty, -\frac{1}{r}[$  para cada  $x \in A \cap U$  e então para cada  $x \in A \cap U$ ,

$$f(x) \leq h(x) < -\frac{1}{r},$$

e portanto  $f(x) \in W$ . □

**1.2.35 (Limites restritos)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $A' \subset A$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A'$  e  $b \in Y$ . Dizemos que a função  $f$  tem limite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$  por valores de  $A'$ , e escreveremos

$$f(x) \xrightarrow[x \in A']{x \rightarrow x_0} b$$

com esse significado, quando a restrição  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  tiver limite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ , por outras palavras, se se tiver  $f|_{A'}(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} b$ .

Com frequência utilizamos para alguns limites restritos notações alternativas cujo significado é evidente. Por exemplo, no caso em que  $x_0$  é aderente a  $A \setminus \{x_0\}$ , escrevemos

$$f(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \rightarrow x_0} b$$

como alternativa a

$$f(x) \xrightarrow[x \in A \setminus \{x_0\}]{x \rightarrow x_0} b$$

e, se  $A \subset \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  é aderente ao conjunto  $A_{>x_0} = \{x \in A \mid x > x_0\}$ , escrevemos

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0^+]{x \rightarrow x_0} b$$

(*limite à direita*) como alternativa a

$$f(x) \xrightarrow[x \in A_{>x_0}]{x \rightarrow x_0} b$$

(notação análoga para os *limites à esquerda*).

**1.2.36 (Dos limites para os limites restritos)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$  tal que  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} b$ . Se  $A' \subset A$  é tal que  $x_0$  ainda seja aderente a  $A'$ , então tem-se também

$$f(x) \xrightarrow[x \in A']{x \rightarrow x_0} b.$$

**Dem:** Trata-se de uma consequência muito simples da definição de limite de

uma aplicação: Dada uma vizinhança  $V'$  de  $b$  em  $Y$ , podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in A \cap V$ , tendo-se então, em particular,  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in A' \cap V$ .  $\square$

**1.2.37 (Dos limites restritos para os limites)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Sejam  $A'$  e  $A''$  subconjuntos de  $A$  tais que  $A = A' \cup A''$ . Lembrando que, por 1.2.10,  $x_0$  é aderente a pelo menos um dos conjuntos  $A'$  e  $A''$ , tem-se então:

**a)** Se  $x_0$  é aderente a  $A'$  e a  $A''$  e se se tiver  $f(x) \xrightarrow[x \in A']{x \rightarrow x_0} b$  e  $f(x) \xrightarrow[x \in A'']{x \rightarrow x_0} b$ , então

tem-se também  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} b$ .

**b)** Se  $x_0$  é aderente a  $A'$  e não é aderente a  $A''$  e se se tiver  $f(x) \xrightarrow[x \in A']{x \rightarrow x_0} b$ , então

tem-se também  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} b$ .<sup>26</sup>

**Dem:** **a)** Seja  $V'$  uma vizinhança arbitrária de  $b$  em  $Y$ . Podemos então considerar vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $x_0$  em  $X$  tais que se tenha  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in A' \cap V_1$  e para cada  $x \in A'' \cap V_2$ . Considerando então a vizinhança  $V = V_1 \cap V_2$  de  $x_0$  em  $X$ , vemos que  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in A \cap V$ , visto que, para um tal  $x$ , ou  $x \in A'$  e então  $x \in A' \cap V_1$ , ou  $x \in A''$  e então  $x \in A'' \cap V_2$ .

**b)** Seja  $V'$  uma vizinhança arbitrária de  $b$  em  $Y$ . Podemos então considerar uma vizinhança  $V_1$  de  $x_0$  em  $X$  tal que se tenha  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in A' \cap V_1$ . Uma vez que  $x_0$  não é aderente a  $A''$ , podemos considerar uma vizinhança  $V_2$  de  $x_0$  em  $X$  que não contenha nenhum elemento de  $A$ . Consideremos então a vizinhança  $V = V_1 \cap V_2$  de  $x_0$  em  $X$ . Para cada  $x \in V$  que pertença a  $A$ , uma vez que  $x \notin A''$ , por ser  $x \in V_2$ , tem que ser  $x \in A'$  e portanto, por ser  $x \in V_1$ ,  $f(x) \in V'$ .  $\square$

Repare-se que o resultado precedente generaliza as relações bem conhecidas envolvendo limites num ponto e limites laterais nesse ponto, no contexto em que o domínio é uma parte de  $\mathbb{R}$ .

**1.2.38 (Corolário)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Seja  $(A_i)_{i \in I}$  uma família finita de subconjuntos de  $A$  tal que  $A = \bigcup A_i$  e que, para cada índice  $i$  com  $x_0$  aderente a  $A_i$ , se tenha

$$f(x) \xrightarrow[x \in A_i]{x \rightarrow x_0} b$$

(repare-se que não fazemos nenhuma hipótese relativa aos índices  $i$  tais que  $a$

<sup>26</sup>Repare-se que, nas hipóteses desta alínea, não é necessário supor nada sobre o limite de  $f$  por elementos de  $A''$ , limite esse de que aliás não faz sentido falar.

não é aderente a  $A_i$ ). Tem-se então  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ . Repare-se que, como referido em 1.2.11, existe pelo menos um índice  $i$  com  $x_0$  aderente a  $A_i$ .

**Dem:** Fazemos a demonstração por indução no número de elementos (necessariamente maior ou igual a 1) do conjunto de índices  $I$ . Se  $I$  tem um único elemento a afirmação é trivial. Supondo o resultado verdadeiro quando  $I$  tem  $n$  elementos, provemo-lo quando  $I$  tem  $n + 1$  elementos. Para isso, consideramos  $i_0 \in I$  tal que  $x_0$  seja aderente a  $A_{i_0}$  e reparamos que  $A$  é a união de  $A' = A_{i_0}$  com a união  $A''$  dos restantes  $A_i$ . Se  $x_0$  não for aderente a  $A''$  resulta da alínea b) de 1.2.37 que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ . Se  $x_0$  for aderente a  $A''$  aplicamos a hipótese de indução para garantir que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$  por valores de  $A''$  e aplicamos então a alínea a) de 1.2.37 para garantir mais uma vez que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ .  $\square$

**1.2.39 (Corolário — carácter local dos limites)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Se  $V$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , então  $x_0$  também é aderente a  $A \cap V$  e tem-se  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  se, e só se,  $f(x) \xrightarrow[x \in A \cap V]{x \rightarrow x_0} b$ .

**Dem:** O facto de  $x_0$  ser aderente a  $A \cap V$  é consequência de ser aderente a  $A$  e de se ter

$$(1) \quad A = (A \cap V) \cup (A \setminus V),$$

onde  $x_0$  não é aderente a  $A \setminus V$  (a vizinhança  $V$  de  $x_0$  não intersecta este conjunto). A equivalência enunciada no enunciado resulta, para uma das implicações, de 1.2.36 e, para a outra, da alínea b) de 1.2.37, neste último caso tendo em conta mais uma vez o facto de ter lugar a igualdade em (1) com  $x_0$  não aderente a  $A \setminus V$ .  $\square$

**1.2.40 (O limite é aderente aos codomínios)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$  tais que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ . Se  $B \subset Y$  é tal que  $f(A) \subset B$  então  $b$  é aderente a  $B$ .

**Dem:** Seja  $V'$  uma vizinhança arbitrária de  $b$  em  $Y$ . Podemos então escolher uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in A \cap V'$ . O facto de  $x_0$  ser aderente a  $A$  garante a existência de  $x$  em  $A \cap V'$  e então o correspondente  $f(x)$  pertence a  $V'$  e a  $B$  o que nos permite concluir que se tem efetivamente  $b$  aderente a  $B$ .  $\square$

**1.2.41 (Limite da aplicação composta)** Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$  e  $f: A \rightarrow Y$  e  $g: B \rightarrow Z$  duas aplicações com  $f(A) \subset B$ . Sejam  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ ,  $y_0 \in Y$  e  $c \in Z$  tais que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0$  (em particular,  $y_0$  é aderente a  $B$ ) e  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} c$ . Tem-se então  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c$ .

**Dem:** Seja  $V'' \subset Z$  uma vizinhança arbitrária de  $c$ . Tendo em conta o segundo limite nas hipóteses, podemos considerar uma vizinhança  $V'$  de  $y_0$

em  $Y$  tal que  $g(y) \in V''$  para cada  $y \in V' \cap B$ . Tendo em conta o primeiro limite nas hipóteses, podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que  $f(x) \in V'$  para cada  $x \in V \cap A$ . Para cada  $x \in V \cap A$  tem-se então  $f(x) \in V' \cap B$  e portanto  $g(f(x)) \in V''$ .  $\square$

**1.2.42 (Mudança de topologia)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ ,  $b \in Y$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação tal que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ .

Tem-se então:

**a)** Se se substituir a topologia de  $Y$  por uma topologia menos fina continua a ter-se  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ .

**b)** Se se substituir a topologia de  $X$  por uma topologia mais fina, para a qual  $x_0$  continue a ser aderente a  $A$ , continua a ter-se  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ .

**Dem:** Apesar de se poder apresentar uma justificação direta a partir da definição, é interessante reparar que as conclusões resultam de 1.2.31 e do resultado 1.2.41 sobre o limite da função composta, compondo a função  $f: A \rightarrow Y$ , no caso de a), com a identidade de  $Y$  (com a topologia original de  $Y$  no domínio e a menos fina no espaço de chegada) e, no caso de b), com a restrição a  $A$  da identidade de  $X$  (com a topologia mais fina no domínio e a original no espaço de chegada).  $\square$

Vamos agora estudar um tipo de espaço topológico em que se pode assegurar, a unicidade de limite para funções que aí tomam valores.

**1.2.43 (Espaços de Hausdorff)** Dizemos que um espaço topológico  $Y$  é *separado* ou que é um *espaço de Hausdorff* se, quaisquer que sejam  $b_1 \neq b_2$  em  $Y$ , existem vizinhanças  $V_1$  de  $b_1$  e  $V_2$  de  $b_2$  com  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

No caso em que  $Y$  é um espaço de Hausdorff,  $b_1 \neq b_2$  e  $\mathcal{B}_{b_1}$  e  $\mathcal{B}_{b_2}$  são sistemas fundamentais de vizinhanças destes pontos, pode-se mesmo garantir a existência de  $W_1 \in \mathcal{B}_{b_1}$  e de  $W_2 \in \mathcal{B}_{b_2}$  tais que  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ .

**Dem:** Sendo  $V_1$  vizinhança de  $b_1$  e  $V_2$  vizinhança de  $b_2$  com  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , podemos considerar  $W_1 \in \mathcal{B}_{b_1}$  e  $W_2 \in \mathcal{B}_{b_2}$  tais que  $W_1 \subset V_1$  e  $W_2 \subset V_2$ , tendo-se então também  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ .  $\square$

**1.2.44 (Unicidade do limite)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, o segundo dos quais de Hausdorff. Sejam  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Tem-se então que  $f$  não pode admitir mais que um limite quando  $x \rightarrow x_0$ , isto é, se se tem simultaneamente  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b_1$  e  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b_2$ , então  $b_1 = b_2$ .

Por este motivo é legítimo usar, no caso em que o espaço de chegada é um espaço de Hausdorff, uma notação para designar o limite, quando ele existe. Tal como referimos a propósito dos espaços métricos, a notação habitual é

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

**Dem:** Suponhamos, por absurdo, que se tinha  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b_1$  e  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b_2$  com  $b_1 \neq b_2$ . Podíamos então considerar vizinhanças  $V'_1$  de  $b_1$  e  $V'_2$  de  $b_2$  tais que  $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$  e, a partir destas, vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $x_0$  tais que  $f(x) \in V'_1$  para cada  $x \in A \cap V_1$  e que  $f(x) \in V'_2$  para cada  $x \in A \cap V_2$ . Uma vez que  $V_1 \cap V_2$  também é uma vizinhança de  $x_0$ , o facto de  $x_0$  ser aderente a  $A$  permite-nos considerar um elemento  $x \in A \cap (V_1 \cap V_2)$ , tendo-se então simultaneamente  $f(x) \in V'_1$  e  $f(x) \in V'_2$ , contradizendo a hipótese de se ter  $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$ .  $\square$

**1.2.45 (O limite num ponto do domínio)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, o segundo dos quais de Hausdorff. Sejam  $x_0 \in A \subset X$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma função admitindo limite quando  $x \rightarrow x_0$ . Tem-se então necessariamente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Dem:** Suponhamos que se tinha  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ . Podíamos então concluir que a restrição de  $f$  ao conjunto  $\{x_0\}$  também tinha o limite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Mas esta restrição é constante, de valor  $f(x_0)$  pelo que tem o limite  $f(x_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Pela unicidade do limite tinha-se então  $b = f(x_0)$ .  $\square$

**1.2.46 (Exemplos de espaços de Hausdorff) a)** Se  $Y$  é um espaço métrico então, com a topologia associada,  $Y$  é um espaço de Hausdorff. Com efeito, como referido em 1.1.23, sendo  $b_1 \neq b_2$  em  $Y$ , podemos considerar  $r > 0$  tal que as vizinhanças  $B_r(b_1)$  e  $B_r(b_2)$ , de  $b_1$  e  $b_2$  respetivamente, não tenham nenhum elemento comum.

**b)** A reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$ , com a sua topologia usual, é um espaço de Hausdorff. Com efeito: No caso em que  $b_1 \neq b_2$  são ambos reais deduzimos mais uma vez de 1.1.23 a existência de  $r > 0$  tal que as vizinhanças  $V_r(b_1) = B_r(b_1)$  e  $V_r(b_2) = B_r(b_2)$ , de  $b_1$  e  $b_2$  respetivamente, não tenham nenhum elemento comum; No caso em que  $b \in \mathbb{R}$  a vizinhança  $V_1(b) = ]b - 1, b + 1[$  de  $b$  não tem nenhum elemento comum com a vizinhança  $[-\infty, b - 1[$  de  $-\infty$  nem com a vizinhança  $]b + 1, +\infty]$  de  $+\infty$  (cf. a alínea d) de 1.2.7); As vizinhanças  $[-\infty, 0[$  de  $-\infty$  e  $]0, +\infty]$  de  $+\infty$  não têm nenhum elemento comum.

**c)** Se  $Y$  é um conjunto sobre o qual se considera a topologia discreta então  $Y$  é um espaço de Hausdorff. Com efeito, dados  $b_1 \neq b_2$  em  $Y$ , as vizinhanças  $\{b_1\}$  de  $b_1$  e  $\{b_2\}$  de  $b_2$  não têm nenhum elemento comum.<sup>27</sup>

**1.2.47 (Condição de separação mais forte no caso de  $\overline{\mathbb{R}}$ )** Sejam  $b_1 < b_2$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Existe então uma vizinhança  $V_1$  de  $b_1$  e uma vizinhança  $V_2$  de  $b_2$  tais que para

<sup>27</sup>Pelo contrário, se  $Y$  tiver pelo menos dois elementos e considerarmos em  $Y$  a topologia caótica já não obtemos um espaço de Hausdorff visto que a única vizinhança de cada um de dois pontos distintos é o espaço todo, não havendo portanto vizinhanças disjuntas. Este facto já era aliás de esperar tendo em conta a falta de unicidade do limite referida na alínea d) de 1.2.30.

cada  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$  se tenha  $x < y$ .

**Dem:** No caso em que  $b_1$  e  $b_2$  são números reais, consideramos  $\delta > 0$ ,  $\delta = \frac{1}{2}(b_2 - b_1)$  e tomamos  $V_1 = B_\delta(b_1)$  e  $V_2 = B_\delta(b_2)$ , reparando que, para cada  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$ , tem-se

$$x < b_1 + \delta = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = b_2 - \delta < y.$$

Nos restantes casos só temos que reparar que o que foi feito na alínea b) de 1.2.46 permite-nos obter a conclusão mais forte: Se  $b_1 = -\infty$  e  $b_2 \in \mathbb{R}$ , tomamos  $V_1 = [-\infty, b_2 - 1[$  e  $V_2 = B_1(b_2) = ]b_2 - 1, b_2 + 1[$ ; se  $b_1 \in \mathbb{R}$  e  $b_2 = +\infty$ , tomamos  $V_1 = B_1(b_1) = ]b_1 - 1, b_1 + 1[$  e  $V_2 = ]b_1 + 1, +\infty[$ ; se  $b_1 = -\infty$  e  $b_2 = +\infty$ , tomamos  $V_1 = [-\infty, 0[$  e  $V_2 = ]0, +\infty[$ .  $\square$

**1.2.48 (Subespaços dum espaço de Hausdorff)** Sejam  $Y$  um espaço topológico de Hausdorff e  $Y' \subset Y$  um subconjunto sobre o qual consideramos a topologia induzida. Tem-se então que  $Y'$  também é um espaço de Hausdorff.

**Dem:** Dados  $b_1 \neq b_2$  em  $Y'$ , podemos considerar vizinhanças  $V_1$  de  $b_1$  e  $V_2$  de  $b_2$  (em  $Y$ ) sem nenhum elemento comum e então  $V_1 \cap Y'$  e  $V_2 \cap Y'$  são vizinhanças dos mesmos pontos em  $Y'$  que também não têm nenhum elemento comum.  $\square$

**1.2.49 (Os pontos são fechados)** Se  $Y$  é um espaço topológico de Hausdorff então, para cada  $b \in Y$ , o conjunto unitário  $\{b\}$  é fechado e, em consequência, qualquer subconjunto finito é também fechado.<sup>28</sup>

**Dem:** Se  $y \in Y$  e  $y \notin \{b\}$ , isto é,  $y \neq b$ , podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $y$  e uma vizinhança  $V'$  de  $b$  que não tenham nenhum elemento comum e então, em particular,  $V \cap \{b\} = \emptyset$ , o que mostra que  $y$  não é aderente a  $\{b\}$ . O facto de todo o subconjunto finito ser fechado resulta agora da alínea b) de 1.2.19, uma vez que um tal conjunto ou é vazio ou é uma união finita de conjuntos unitários.  $\square$

Voltando à propriedades gerais dos limites examinamos em seguida alguns resultados úteis envolvendo limites de funções com valores em  $\mathbb{R}$  ou em  $\overline{\mathbb{R}}$ , resultados que o estudante decerto já encontrou no caso em que o domínio é uma parte de  $\mathbb{R}$  e que, como veremos, admitem justificações análogas quando o domínio é uma parte de um espaço topológico arbitrário.

**1.2.50 (Limites de somas e produtos de funções com valores reais)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $a$  aderente a  $A$  e  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  duas aplicações tais que

<sup>28</sup>Pelo contrário, para um espaço topológico que não seja de Hausdorff não podemos em geral garantir o mesmo como o mostra o exemplo de um conjunto com pelo menos dois elementos e com a topologia caótica, em que os conjuntos unitários não são fechados uma vez que, como já vimos, os únicos conjuntos fechados são o vazio e o espaço todo.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c,$$

com  $b, c \in \mathbb{R}$ . Tem-se então

$$\mathbf{a)} \quad f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b + c, \quad \mathbf{b)} \quad |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} |b|, \quad \mathbf{c)} \quad f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b \times c.$$

Como caso particular de c), podemos também garantir que, para cada  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{c')} \quad a \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a \times c.$$

**Dem:** Vamos utilizar a caracterização dos limites na alínea b) de 1.2.27, com a classe das bolas abertas como sistema fundamental de vizinhanças no espaço de chegada e a classe de todas as vizinhanças como sistema fundamental de vizinhanças no domínio.

**a)** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Considerando as vizinhanças  $B_{\delta/2}(b)$  e  $B_{\delta/2}(c)$ , podemos considerar vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $x_0$  em  $X$  tais que  $f(x) \in B_{\delta/2}(b)$  para cada  $x \in V_1 \cap A$  e  $g(x) \in B_{\delta/2}(c)$  para cada  $x \in V_2 \cap A$ . Considerando a vizinhança  $V = V_1 \cap V_2$  de  $x_0$ , vemos agora que, para cada  $x \in V \cap A$ ,  $|f(x) - b| < \frac{\delta}{2}$  e  $|g(x) - c| < \frac{\delta}{2}$ , pelo que

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (b + c)| &= |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \leq \\ &\leq |(f(x) - b)| + |(g(x) - c)| < \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

ou seja  $f(x) + g(x) \in B_\delta(b + c)$ . Ficou assim provado que  $b + c$  é efetivamente limite de  $f(x) + g(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**b)** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Considerando a vizinhança  $B_\delta(b)$ , podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que  $f(x) \in B_\delta(b)$  para cada  $x \in V \cap A$  e, lembrando 1.1.3 e o facto de se ter  $|f(x)| = d(0, f(x))$  e  $|b| = d(0, b)$ , concluímos que, para cada  $x \in V \cap A$ ,

$$||f(x)| - |b|| \leq d(f(x), b) < \delta,$$

ou seja  $|f(x)| \in B_\delta(|b|)$ . Ficou assim provado que  $|b|$  é efetivamente limite de  $|f(x)|$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**c)** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Uma vez que  $|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} |b|$ , podemos considerar uma vizinhança  $V_1$  de  $x_0$  tal que, para cada  $x \in V_1 \cap A$ ,  $|f(x)| \in B_1(|b|)$ , em particular

$$|f(x)| < |b| + 1.$$

Considerando a bola de centro  $b$  e raio  $\frac{\delta}{2(|c|+1)} > 0$  na caracterização do limite de  $f(x)$  e a bola de centro  $c$  e raio  $\frac{\delta}{2(|b|+1)} > 0$  na do limite de  $g(x)$ , podemos considerar vizinhanças  $V_2$  e  $V_3$  de  $x_0$  tais que, para cada  $x \in V_2 \cap A$ ,



$$|f(x) - b| < \frac{\delta}{2(|c| + 1)}$$

e, para cada  $x \in V_3 \cap A$ ,

$$|g(x) - c| < \frac{\delta}{2(|b| + 1)}.$$

Considerando a vizinhança  $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$  de  $x_0$ , vemos que para cada  $x \in V \cap A$  tem-se então

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - bc| &= |f(x)(g(x) - c) + (f(x) - b)c| \leq \\ &\leq |f(x)| |g(x) - c| + |(f(x) - b)| |c| < \\ &< (|b| + 1) \frac{\delta}{2(|b| + 1)} + \frac{\delta}{2(|c| + 1)} (|c| + 1) = \delta, \end{aligned}$$

isto é,  $f(x)g(x) \in B_\delta(bc)$ . Ficou assim provado que  $f(x) \times g(x) \rightarrow b \times c$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.2.51 (Corolário — Limites de diferenças e quocientes)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $a$  aderente a  $A$  e  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c,$$

com  $b, c \in \mathbb{R}$ . Então:

**a)** Tem-se  $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b - c$ ;

**b)** No caso em que  $g(A) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $c \neq 0$ , tem-se  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{b}{c}$ .

**Dem:** Temos consequências das duas alíneas de 1.2.50 se repararmos, no caso de a), que

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \times g(x)$$

e, no caso de b), que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)},$$

onde a função  $X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$  é a composta de  $g: A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  com a função  $h: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(y) = \frac{1}{y}$ , esta última tendo limite  $\frac{1}{c}$  quando  $y \rightarrow c$  (resultado já estudado em Análise Real elementar, por envolver apenas funções reais de variável real).  $\square$

**1.2.52 (Consequência de uma desigualdade estrita entre limites)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0$  aderente a  $A$  e  $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b \in \overline{\mathbb{R}}, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c \in \overline{\mathbb{R}},$$

com  $b < c$  e  $\overline{\mathbb{R}}$ . Existe então uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que, para cada  $x \in V \cap A$ ,  $f(x) < g(x)$ .

**Dem:** Tendo em conta 1.2.47, podemos considerar vizinhanças  $V'_1$  de  $b$  e  $V'_2$  de  $c$  em  $\overline{\mathbb{R}}$  tais que se tenha  $y < z$  para cada  $y \in V'_1$  e  $z \in V'_2$ . Consideremos agora vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $x_0$  tais que se tenha  $f(x) \in V'_1$  para cada  $x \in V_1 \cap A$  e  $g(x) \in V'_2$  para cada  $x \in V_2 \cap A$ . Considerando a vizinhança  $V = V_1 \cap V_2$  de  $x_0$ , vemos que, para cada  $x \in V \cap A$ , tem-se  $f(x) \in V'_1$  e  $g(x) \in V'_2$ , portanto  $f(x) < g(x)$ .  $\square$

**1.2.53 (Corolário — Passagem ao limite das desigualdades latas)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0$  aderente a  $A$  e  $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b \in \overline{\mathbb{R}}, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c \in \overline{\mathbb{R}}$$

e  $f(x) \leq g(x)$  para cada  $x \in A$ . Tem-se então  $b \leq c$ .

**Dem:** Supondo, por absurdo, que não era  $b \leq c$ , portanto que  $b > c$ , podíamos concluir de 1.2.52 a existência de uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que, para cada  $x \in V \cap A$  (pontos cuja existência resulta de  $x_0$  ser aderente a  $A$ ) vinha  $f(x) > g(x)$ , o que contradizia a hipótese.  $\square$

Um dos contextos em que os limites são estudados desde muito cedo é o das sucessões  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de um conjunto  $X$ , que não são mais do que funções com valores em  $X$  cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais, para além da diferença frequente de notação que consiste em colocar a variável natural  $n$  em índice, referindo-se então  $x_n$  como termo de índice  $n$  (ou ordem  $n$ ) da sucessão. É claro que, se isso for considerado conveniente, podemos usar a notação funcional habitual para uma sucessão, referindo-a como uma sucessão  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$  e referindo  $f(n)$  como o seu termo de ordem  $n$ . O limite duma sucessão vai ser um caso particular da noção geral de limite duma função, limite considerado para  $n \rightarrow +\infty$ , onde  $+\infty$  é aderente a  $\mathbb{N}$  no espaço topológico  $\overline{\mathbb{R}}$ . Tendo em conta a propriedade de invariância da noção de limite quando se substitui o espaço topológico ambiente por um subespaço que ainda contenha o domínio da função e o ponto em que se considera o limite (cf. 1.2.32), é útil examinar o subespaço topológico  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  de  $\overline{\mathbb{R}}$ , o mais pequeno que contém  $\mathbb{N}$  e  $+\infty$ .

**1.2.54** Consideremos o conjunto  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  como subespaço topológico de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Notando, para cada  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq p\},$$

tem-se então que a classe dos conjuntos  $\overline{\mathbb{N}}_p = \mathbb{N}_p \cup \{+\infty\}$ , com  $p \in \mathbb{N}$ ,

constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $+\infty$  em  $\overline{\mathbb{N}}$ , em particular  $+\infty$  é aderente a  $\overline{\mathbb{N}}$ .

Além disso, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a classe constituída pelo único conjunto  $\{n\}$  constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $n$  em  $\overline{\mathbb{N}}$ .

**Dem:** O facto de cada conjunto  $\overline{\mathbb{N}}_p$  ser vizinhança de  $+\infty$  em  $\overline{\mathbb{N}}$  resulta de se ter  $\overline{\mathbb{N}}_p \supset ]p, +\infty[ \cap \overline{\mathbb{N}}$ , com  $]p, +\infty[$  vizinhança de  $+\infty$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ . Por outro lado, uma vizinhança arbitrária de  $+\infty$  em  $\overline{\mathbb{N}}$  será da forma  $V \cap \overline{\mathbb{N}}$  com  $V$  vizinhança de  $+\infty$  em  $\overline{\mathbb{R}}$  e podemos então escolher  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $V$  contenha  $]r, +\infty[$  e, seguidamente,  $p > r$  com  $p \in \mathbb{N}$ , tendo-se então que  $\overline{\mathbb{N}}_p$  está contido em  $]r, +\infty[ \cap \overline{\mathbb{N}}$  e portanto também em  $V \cap \overline{\mathbb{N}}$ , o que mostra que temos efetivamente um sistema fundamental de vizinhanças de  $+\infty$  em  $\overline{\mathbb{N}}$ . Quanto à segunda afirmação no enunciado, o facto de  $\{n\}$  ser uma vizinhança de  $n$  em  $\overline{\mathbb{N}}$  resulta de se ter

$$\{n\} = ]n - 1, n + 1[ \cap \overline{\mathbb{N}},$$

onde  $]n - 1, n + 1[ = B_1(n)$  é uma vizinhança de  $n$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ , e o facto de qualquer vizinhança de  $n$  em  $\overline{\mathbb{N}}$  conter o conjunto  $\{n\}$  resulta diretamente da propriedade geral das vizinhanças num espaço topológico referida na alínea c) de 1.2.1.  $\square$

**1.2.55 (Limite de uma sucessão num espaço topológico)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de elementos de  $X$ , que encaramos como uma aplicação de  $\mathbb{N}$  para  $X$ . Os únicos limites da sucessão que interessa considerar são os que correspondem a  $n \rightarrow +\infty$  (ver o exercício 1.2.3 no fim desta secção para uma explicação desta afirmação) e, por esse motivo, é comum omitir a referência a  $n \rightarrow +\infty$  nas notações, escrevendo  $x_n \rightarrow a$  em vez da notação mais completa  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  e, analogamente, no caso em que  $X$  é de Hausdorff,  $\lim x_n$  em vez de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ .

Lembrando a caracterização dos limites em termos de sistemas fundamentais de vizinhanças (cf. a alínea b) 1.2.27) e utilizando o sistema fundamental de vizinhanças de  $+\infty$  em  $\overline{\mathbb{N}}$  referido em 1.2.54, constatamos que se  $\mathcal{B}_a$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  no espaço topológico  $X$  (por exemplo a classe de todas as vizinhanças de  $a$ ...) tem-se  $x_n \rightarrow a$  se, e só se, para cada  $W \in \mathcal{B}_a$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in W$  para todo  $n \geq n_0$ .<sup>29</sup>

No contexto de  $\mathbb{R}$  é usual apresentar caracterizações das noções de ponto aderente e de limite fazendo intervir os limites de sucessões, caracterizações que é usual associar ao nome do matemático Heine. Vamos ver a seguir que essas caracterizações são válidas, mais geralmente, no contexto dos espaços métricos (Para um contexto ainda mais geral ver o exercício 1.2.4 no fim da secção).

<sup>29</sup>Na linguagem mais sugestiva habitual, existe uma ordem a partir da qual os termos da sucessão estão em  $W$ .

**1.2.56 (Caracterização de Heine dos pontos aderentes num espaço métrico)**

Sejam  $X$  um espaço métrico,  $A \subset X$  e  $x_0 \in X$ . Tem-se então que  $x_0$  é aderente a  $A$  se, e só se, existir uma sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $A$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ .

**Dem:** Lembrando que uma sucessão de elementos de  $A$  não é mais do que uma aplicação de domínio  $\mathbb{N}$  e com valores em  $A$ , o facto de a existência de uma sucessão de elementos de  $A$  com limite  $x_0$  implicar que  $x_0$  é aderente a  $A$  é uma consequência de 1.2.40. Suponhamos, reciprocamente, que  $x_0$  é aderente a  $A$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a bola  $B_{1/n}(x_0)$  é uma vizinhança de  $x_0$  pelo que podemos escolher um elemento  $x_n \in B_{1/n}(x_0) \cap A$ . Obtivemos assim uma sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $A$  e de se ter

$$0 \leq d(x_n, x_0) < \frac{1}{n},$$

onde  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  em  $\mathbb{R}$ , deduzimos por enquadramento que  $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$  e portanto que  $x_n \rightarrow x_0$  em  $X$  (cf. 1.2.29).  $\square$

**1.2.57 (Caracterização de Heine dos limites quando o domínio é métrico)**

Sejam  $X$  um espaço métrico,  $A \subset X$  e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Sejam  $Y$  um espaço topológico,  $b \in Y$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Então  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  se, e só se, qualquer que seja a sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $A$  com  $x_n \rightarrow x_0$  tem-se  $f(x_n) \rightarrow b$ .

**Dem:** Lembrando que uma sucessão de elementos de  $A$  não é mais do que uma aplicação de domínio  $\mathbb{N}$  e com valores em  $A$ , resulta de 1.2.41 que, se  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  então, para cada sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $A$  com  $x_n \rightarrow x_0$  tem-se  $f(x_n) \rightarrow b$ . Suponhamos agora que não se tem  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ .

Existe assim uma vizinhança  $V'$  de  $b$  tal que para nenhuma vizinhança  $V$  de  $x_0$  se tenha  $f(V \cap A) \subset V'$ . Em particular, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considerando a vizinhança  $B_{1/n}(x_0)$  de  $x_0$ , podemos considerar  $x_n \in B_{1/n}(x_0) \cap A$  tal que  $f(x_n) \notin V'$ . Obtivemos assim uma sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $A$  e de se ter

$$0 \leq d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n},$$

onde  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  em  $\mathbb{R}$ , deduzimos por enquadramento que  $d(x_n, x_0) \rightarrow 0$  e portanto que  $x_n \rightarrow x_0$  em  $X$ . No entanto o facto de nenhum dos  $f(x_n)$  pertencer à vizinhança  $V'$  de  $b$  implica que a sucessão  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  não tem  $b$  como limite.  $\square$

As sucessões admitem uma generalização importante em várias aplicações em que o conjunto de índices  $\mathbb{N}$  é substituído por um conjunto não vazio arbitrário  $J$  no qual se supõe definida uma relação  $\succeq$ , que joga o papel da relação  $\geq$  no caso de  $\mathbb{N}$ .

**1.2.58** Vamos chamar *conjunto dirigido* a um conjunto não vazio  $J$ , no qual se fixou uma relação, que notaremos usualmente  $\succeq$ , verificando as seguintes propriedades:

- a)  $j \succeq j$ ;
- b) Se  $j \succeq k$  e  $k \succeq \ell$ , então  $j \succeq \ell$ ;
- c) Quaisquer que sejam  $j, k$ , existe  $\ell$  tal que  $\ell \succeq j$  e  $\ell \succeq k$ .

Note-se que se verifica facilmente, por indução, que a seguinte generalização de c) é válida em qualquer conjunto dirigido  $J$ :

- c') Para cada parte finita  $K$  de  $J$ , existe  $j \in J$  tal que  $\forall_{k \in K} j \succeq k$ .

É claro que todo o conjunto não vazio, munido de uma ordem total, como  $\mathbb{N}$  ou uma parte não vazia arbitrária de  $\mathbb{N}$ , vai ser um conjunto dirigido (para a propriedade c), dados  $j$  e  $k$  pode-se tomar para  $\ell$  o maior daqueles dois elementos).

Vamos chamar *sucessão generalizada* de elementos de um conjunto  $X$  a toda a família de elementos de  $X$ ,  $(x_j)_{j \in J}$ , indexada num conjunto dirigido  $J$ ; dizemos então também que temos uma  $J$ -sucessão e que  $x_j$  é o termo de índice  $j$  desta. As sucessões usuais serão também chamadas  $\mathbb{N}$ -sucessões.

Tal como para as  $\mathbb{N}$ -sucessões, pode por vezes ser conveniente utilizar a notação funcional para referir uma  $J$ -sucessão, falando-se então de uma  $J$ -sucessão  $f: J \rightarrow X$  e referindo  $f(j)$  como sendo o termo de índice  $j$ .

**1.2.59** A título de comparação com as relações que definem conjuntos dirigidos, lembremos que uma relação de *ordem parcial* sobre um conjunto  $J$  é uma relação, que notaremos também  $\succeq$ , que verifique as propriedades:

- a)  $j \succeq j$ ;
- b) Se  $j \succeq k$  e  $k \succeq \ell$ , então  $j \succeq \ell$ ;
- d) Se  $j \succeq k$  e  $k \succeq j$  então  $j = k$

e que uma *ordem total* é uma ordem parcial que verifica, a propriedade suplementar de quaisquer que sejam  $j, k \in J$  ter que ser  $j \succeq k$  ou  $k \succeq j$ .

Repare-se que, se  $\succeq$  for uma ordem parcial no conjunto  $J$ , não temos necessariamente um conjunto dirigido, uma vez que, apesar de se verificarem as propriedades a) e b) em 1.2.58, a propriedade c) não é necessariamente verificada. Às ordens parciais que verificam também a propriedade c), e portanto definem conjuntos dirigidos, dá-se o nome de *ordens parciais filtrantes*.

Por outro lado, uma relação  $\succeq$  sobre o conjunto  $J$  que o defina como conjunto dirigido não tem que ser uma relação de ordem parcial, na medida em que se pode ter  $j \succeq k$  e  $k \succeq j$ , sem que se tenha  $j = k$  (isso acontece em alguns exemplos importantes).

**1.2.60 (Maximal e máximo)** Seja  $J$  é um conjunto dirigido ou um conjunto munido de uma ordem parcial, em ambos os casos com a relação notada  $\succeq$ .

Diz-se que um elemento  $j_0 \in J$  é *maximal* se sempre que  $j \in J$  verifica  $j \succeq j_0$  tem-se necessariamente  $j = j_0$ . Diz-se que um elemento  $j_0 \in J$  é *máximo* se se tem  $j_0 \succeq j$  para todo o  $j \in J$ . Estas duas noções, de maximal e de máximo, relacionam-se entre si de modo oposto consoante os dois contextos em que nos podemos colocar:

1) Se  $J$  é um conjunto dirigido não pode haver mais que um maximal e um elemento maximal  $j_0$  é também máximo.<sup>30</sup>

2) Se  $\succeq$  é uma ordem parcial em  $J$  não pode haver mais que um máximo e um máximo  $j_0$  é também maximal.<sup>31</sup>

Em particular, no caso em que  $J$  está munido de uma ordem parcial filtrante, as noções de máximo e de maximal são equivalentes e ambas gozam da propriedade de unicidade.

**Dem: 1)** Suponhamos que  $j_0$  é um maximal do conjunto dirigido  $J$  e que  $j_1$  é um elemento arbitrário de  $J$ . Consideremos  $k \in J$  tal que  $k \succeq j_0$  e  $k \succeq j_1$ . Uma vez que  $j_0$  é maximal, vem  $k = j_0$ , e portanto  $j_0 \succeq j_1$ , o que mostra que  $j_0$  é máximo. Além disso, no caso de  $j_1$  também ser maximal, vem  $k = j_1$ , e portanto  $j_0 = j_1$ , o que mostra que não pode haver mais que um maximal.

2) Suponhamos que  $j_0$  é um máximo de  $J$  relativamente à ordem parcial  $\succeq$ . Se  $j \in J$  verificar  $j \succeq j_0$  então tem-se também  $j_0 \succeq j$ , donde  $j = j_0$ , o que mostra que  $j_0$  também é maximal. Além disso, se  $j_1 \in J$  também for um máximo, tem-se  $j_1 \succeq j_0$  e portanto, como acabamos de ver,  $j_1 = j_0$ , o que mostra que não pode haver mais que um máximo.  $\square$

No caso das sucessões com  $\mathbb{N}$  como conjunto de índices o limite apareceu como o limite em  $+\infty$  da função correspondente, associado a uma topologia conveniente de  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , nomeadamente a induzida pela topologia usual de  $\overline{\mathbb{R}}$ . No caso geral das sucessões generalizadas indexadas num conjunto dirigido  $J$  vamos considerar analogamente uma união  $J \cup \{+\infty\}$  mas temos que definir explicitamente qual a topologia que consideramos nessa união já que não temos um espaço maior que permita considerar uma topologia induzida.

**1.2.61 (A topologia associada a um conjunto dirigido)** Seja  $J$  um conjunto dirigido, notemos  $+\infty$  um elemento não pertencente a  $J$  e consideremos o conjunto  $\overline{J} = J \cup \{+\infty\}$ . Pode então definir-se uma topologia em  $\overline{J}$ , que é a que se considera implicitamente, pela seguinte definição das vizinhanças:

- 1) Se  $j \in J$ , as vizinhanças de  $j$  são os subconjuntos de  $\overline{J}$  que contêm  $j$ ;
- 2) As vizinhanças de  $+\infty$  são os subconjunto de  $\overline{J}$  que contêm, para algum  $j \in J$ , o conjunto  $\overline{J}_j = J_j \cup \{+\infty\}$ , onde notamos (comparar com 1.2.54)

$$J_j = \{k \in J \mid k \succeq j\}.$$

Repare-se que, pela definição da topologia, cada  $j \in J$  admite um sistema

<sup>30</sup>Embora nada impeça a existência de mais que um máximo.

<sup>31</sup>Embora nada impeça a existência de mais que um maximal.

fundamental de vizinhanças constituído pelo único conjunto  $\{j\}$  e  $+\infty$  admite um sistema fundamental de vizinhanças constituído pelos conjuntos  $\bar{J}_j$ , em particular, comparando com o referido em 1.2.54, verificamos que, no caso em que  $J = \mathbb{N}$ , com a relação  $\succeq$  usual, a topologia que consideramos coincide com a induzida pela de  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Tal como já sucedia no caso particular  $J = \mathbb{N}$ ,  $+\infty$  é aderente a  $J$ .

**Dem:** Temos que verificar as propriedades das vizinhanças na definição de topologia em 1.2.1. As propriedades a), b) e c) são de verificação imediata, tal como o é a propriedade d) quando o ponto envolvido é um elemento  $j \in J$ . Verifiquemos a propriedade d), no caso em que o ponto envolvido é  $+\infty$ : Sejam então  $V$  e  $V'$  vizinhanças de  $+\infty$ . Consideremos  $j, j' \in J$  tais que  $\bar{J}_j \subset V$  e  $\bar{J}_{j'} \subset V'$ . Considerando  $j'' \in J$  tal que  $j'' \succeq j$  e  $j'' \succeq j'$ , vemos que, para cada  $k \in J$  com  $k \succeq j''$  tem-se simultaneamente  $k \succeq j$  e  $k \succeq j'$  e daqui decorre imediatamente que

$$\bar{J}_{j''} \subset \bar{J}_j \cap \bar{J}_{j'} \subset V \cap V'$$

e portanto  $V \cap V'$  é também vizinhança de  $+\infty$ .<sup>32</sup> Verifiquemos enfim a propriedade e): Se  $V$  é uma vizinhança de um ponto  $j \in J$ , então  $\{j\}$  é uma vizinhança de  $j$  e  $V$  é vizinhança de todos os pontos de  $\{j\}$ ; Se  $V$  é vizinhança de  $+\infty$ , então o próprio  $V$  é também vizinhança de todos os elementos de  $V$ . Quanto ao facto de  $+\infty$  ser aderente, isso resulta de que cada um dos conjuntos  $\bar{J}_j$  contém pelo menos o elemento  $j$  de  $J$ , e a classe destes constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $+\infty$ .  $\square$

**1.2.62 (Limites de sucessões generalizadas)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $(x_j)_{j \in J}$  uma sucessão generalizada de elementos de  $X$ . Generalizando a definição dadas no contexto das sucessões usuais, dizemos que um elemento  $a \in X$  é limite da sucessão generalizada, e escrevemos  $x_j \rightarrow a$  se se tiver  $x_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} a$ , onde encaramos a sucessão generalizada como uma função de

domínio  $J$  e  $J$  como parte do espaço topológico  $\bar{J}$ .

No caso em que  $X$  é um espaço de Hausdorff, e portanto sabemos existir unicidade do limite, também se usa a notação simplificada  $\lim x_j$ , no lugar de  $\lim_{j \rightarrow +\infty} x_j$ , para designar o limite, no caso em que este existe.

Repare-se que, utilizando a caracterização dos limites em termos de sistemas fundamentais de vizinhanças (cf. a alínea b) 1.2.27), constatamos, de modo análogo ao que foi referido para as sucessões usuais e utilizando o sistema fundamental de vizinhanças de  $+\infty$  em  $\bar{J}$  referido em 1.2.61, que se  $\mathcal{B}_a$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  no espaço topológico  $X$  (por exemplo a classe de todas as vizinhanças de  $a$ ...) tem-se  $x_j \rightarrow a$  se, e só se, para cada  $W \in \mathcal{B}_a$ , existe  $j_0 \in J$  tal que  $x_j \in W$  para todo  $j \succeq j_0$ .

<sup>32</sup>Repare-se que para a validade da propriedade que acabámos de estabelecer foi essencial a propriedade da relação  $\succeq$  referida na alínea c) da definição de conjunto dirigido em 1.2.58.

**1.2.63 (O caso em que existe um índice maximal)** Suponhamos que o conjunto dirigido  $J$ , com a relação  $\succeq$ , admite maximal  $j_0$ . Se  $X$  é um espaço topológico qualquer sucessão generalizada  $(x_j)_{j \in J}$  admite  $x_{j_0}$  como limite.

Por este motivo, não são, em geral, muito interessantes as sucessões generalizadas em que o conjunto dos índices tenha maximal.

**Dem:** Qualquer que seja a vizinhança  $W$  de  $x_{j_0}$ , vemos que, para cada  $j \succeq j_0$ , tem-se  $j = j_0$  e portanto  $x_j \in W$ .  $\square$

**1.2.64 (Conjuntos cofinais) a)** Seja  $J$  um conjunto dirigido, definido pela relação  $\succeq$  e consideremos a topologia associada em  $\bar{J} = J \cup \{+\infty\}$  (cf. 1.2.61). Lembrando que os limites de sucessões generalizadas com  $J$  como conjunto de índices são encarados como limites de funções definidas em  $J$  quando  $j \rightarrow +\infty$ , são especialmente importantes os subconjuntos  $J'$  de  $J$  tais que  $+\infty$  seja aderente a  $J'$ . Lembrando a caracterização dos pontos aderentes que utiliza um sistema fundamental de vizinhanças constatamos que estes conjuntos, aos quais daremos o nome de *conjuntos cofinais*, podem ser caracterizados pela propriedade de, para cada  $j \in J$ , existir  $j' \in J'$  tal que  $j' \succeq j$  (por outras palavras,  $j'$  pertença à vizinhança  $\bar{J}_j$  de  $+\infty$ ).

**b)** Uma das propriedades dos subconjuntos cofinais  $J'$  de  $J$  é a de que, quando munidos da relação  $\succeq$  induzida pela de  $J$  são ainda conjuntos dirigidos (em particular não são vazios). Para além disso, para um tal  $J'$ , a topologia induzida em  $\bar{J}' = J' \cup \{+\infty\}$  pela topologia que consideramos em  $\bar{J}$  coincide com a topologia de  $\bar{J}'$  que resulta de  $J'$  ser conjunto dirigido.

**Dem:** O facto de um conjunto cofinal não ser vazio resulta de que o conjunto vazio não tem pontos aderentes, em particular não pode ter  $+\infty$  como ponto aderente. Para vermos que  $J'$  é ainda um conjunto dirigido reparamos que a validade em  $J'$  das propriedades a) e b) de 1.2.58 resulta diretamente da sua validade em  $J$  e, quanto a c), dados  $j, k \in J'$ , começamos por considerar  $\ell \in J$  com  $\ell \succeq j$  e  $\ell \succeq k$  e, seguidamente, pela caracterização dos conjuntos cofinais, consideramos  $\ell' \in J'$  tal que  $\ell' \succeq \ell$ , reparando que se tem ainda  $\ell' \succeq j$  e  $\ell' \succeq k$ . Verifiquemos agora a coincidência da topologia induzida em  $\bar{J}'$  pela de  $\bar{J}$  com a que resulta de  $J'$  ser conjunto dirigido. Se  $j \in J'$  o facto de as vizinhanças de  $j$  em  $J'$  para as duas topologias serem as mesmas resulta de termos um sistema fundamental de vizinhanças comum, nomeadamente o constituído pelo único conjunto  $\{j\} = \{j\} \cap J'$ . Quanto às vizinhanças de  $+\infty$ , começamos por reparar que, se  $V \subset \bar{J}'$  é vizinhança de  $+\infty$  para a topologia que resulta de  $J'$  ser conjunto dirigido, vemos que existe  $j \in J'$  tal que

$$V \supset \bar{J}'_j = \bar{J}_j \cap \bar{J}',$$

e portanto  $V$  também é vizinhança de  $+\infty$  para a topologia induzida, e reparamos seguidamente que, reciprocamente, se  $V$  é vizinhança de  $+\infty$  para a topologia induzida existirá  $j \in J$  tal que  $V \supset \bar{J}_j \cap \bar{J}'$  e, escolhendo  $j' \in J'$  com  $j' \succeq j$ , o facto de cada  $k \succeq j'$  verificar também  $k \succeq j$  implica



que

$$\overline{J}' \subset \overline{J} \cap \overline{J}' \subset V,$$

pelo que  $V$  é também vizinhança de  $+\infty$  para a topologia que resulta de  $J'$  ser conjunto dirigido.  $\square$

**1.2.65 (Exemplo)** No caso em que o conjunto dirigido é  $\mathbb{N}$ , com a sua ordem usual, um subconjunto é cofinal se, e só se, não é majorado ou seja, se, e só se, é um subconjunto infinito. Este tipo de caracterização dos conjuntos cofinais não será em geral válido no caso de outros conjuntos dirigidos de partida.

**1.2.66 (Restrições de sucessões generalizadas)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $(x_j)_{j \in J}$  uma sucessão generalizada de elementos de  $X$  e  $a \in X$ . Tem-se então:

a) Se  $(x_j)_{j \in J}$  tem limite  $a$  e  $J' \subset J$  é um subconjunto cofinal, então a sucessão generalizada restrição  $(x_j)_{j \in J'}$  também tem limite  $a$ .

b) Se  $j_0 \in J$  então  $J_{j_0} = \{j \in J \mid j \succeq j_0\}$  é um subconjunto cofinal e  $(x_j)_{j \in J}$  tem limite  $a$  se, e só se, a sucessão generalizada restrição  $(x_j)_{j \in J_{j_0}}$  tiver limite  $a$ .

**Dem:** Tendo em conta as conclusões da alínea b) de 1.2.64, ficamos reduzidos a propriedades gerais dos limites das restrições de funções, nomeadamente 1.2.36 para a alínea a) e 1.2.39 para a alínea b) (lembrar que  $\overline{J}_{j_0}$  é vizinhança de  $+\infty$  em  $\overline{J}$ ).  $\square$

**1.2.67 (O exemplo das famílias somáveis de números reais)** Seja  $J$  um conjunto arbitrário, que irá ter o papel de conjunto de índices, e sobre o qual não consideramos agora nenhuma relação  $\succeq$ , e notemos  $\mathcal{F}(J)$  a classe de todas as partes finitas de  $J$ , que não é vazia por conter pelo menos a parte vazia  $\emptyset$ .

O conjunto  $\mathcal{F}(J)$  fica então um conjunto dirigido desde que se defina, para  $K, K' \in \mathcal{F}(J)$ ,  $K \succeq K' \Leftrightarrow K \supset K'$ ; Repare-se que, neste caso, temos mesmo uma ordem parcial e que a propriedade filtrante resulta de que, se  $K$  e  $K'$  são partes finitas de  $J$ , então  $K'' = K \cup K'$  é também uma parte finita de  $J$  e verifica  $K'' \succeq K$  e  $K'' \succeq K'$ .

Dada uma família  $(x_j)_{j \in J}$  de números reais, podemos associar-lhe uma sucessão generalizada de elementos de  $\mathbb{R}$ , com  $\mathcal{F}(J)$  como conjunto de índices, que associa a cada parte finita  $K$  de  $J$  a soma parcial

$$S_K = \sum_{j \in K} x_j$$

(uma soma finita de números reais; em particular, consideramos  $S_\emptyset = 0$ ). Dizemos que a família  $(x_j)_{j \in J}$  tem um elemento  $a \in \mathbb{R}$  como soma se a sucessão generalizada  $(S_K)_{K \in \mathcal{F}(J)}$  de elementos de  $\mathbb{R}$  tiver  $a$  como limite. Uma tal soma é então única, uma vez que  $\overline{\mathbb{R}}$  é um espaço topológico de

Hausdorff e costuma ser designada por

$$\sum_{j \in J} x_j,$$

notação que não corre risco de ambiguidade já que, quando o conjunto  $J$  é finito, a soma no sentido anterior existe e é igual à soma finita habitual (cf. o referido em 1.2.63, um vez que  $J$  é então elemento maximal de  $\mathcal{F}(J)$ ).

Dizemos que  $(x_j)_{j \in J}$  é uma *família somável* se tiver soma e esta for finita.

Examinando a caracterização do limite de uma sucessão generalizada referida em 1.2.62, constatamos que a família  $(x_j)_{j \in J}$  tem soma  $a$  se, e só se, para cada vizinhança  $V$  de  $a$  em  $\overline{\mathbb{R}}$  (ou, alternativamente, para cada  $V \in \mathcal{B}_a$ , onde  $\mathcal{B}_a$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ ) existe uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal que, para cada parte finita  $K$  de  $J$  com  $K \supset K_0$ , se tenha  $S_K \in V$ .

A noção de soma de uma família de números reais será estudada mais adiante, de modo mais aprofundado e num contexto mais geral, na secção 2.3 tendo sido referida neste momento apenas a título de exemplo. Mesmo assim, parece útil referir três resultados, um aplicando as propriedades gerais dos limites em 1.2.50 e 1.2.53, outro relacionando a noção de soma da uma família com a de soma dum série e o terceiro examinando um caso particular em que a soma existe sempre.

### 1.2.68 (Linearidade e monotonia das somas)

**a)** A família identicamente 0 de números reais é somável e com soma 0.

**b)** Dadas famílias somáveis de números reais  $(x_j)_{j \in J}$  e  $(y_j)_{j \in J}$  com somas  $b \in \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$  respetivamente, a família  $(x_j + y_j)_{j \in J}$  é somável e com soma  $b + c$  e, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , a família  $(a \times x_j)_{j \in J}$  é somável e com soma  $a \times b$ .

**c)** Dadas famílias de números reais  $(x_j)_{j \in J}$  e  $(y_j)_{j \in J}$  com somas  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  e  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  respetivamente e com  $x_j \leq y_j$  para cada  $j$ , tem-se  $b \leq c$ . Em particular, se  $0 \leq y_j$  para cada  $j$  então  $0 \leq c$ .

**Dem:** **a)** Temos uma consequência de todas as somas parciais finitas serem iguais a 0.

**b)** Temos uma consequência das propriedades algébricas dos limites examinadas em 1.2.50 uma vez que para cada parte finita  $K \subset J$  tem-se

$$\sum_{j \in K} (x_j + y_j) = \sum_{j \in K} x_j + \sum_{j \in K} y_j, \quad \sum_{j \in K} a \times x_j = a \times \sum_{j \in K} x_j.$$

**c)** Temos uma consequência de 1.2.53, uma vez que, para cada parte finita  $K \subset J$  tem-se

$$\sum_{j \in K} x_j \leq \sum_{j \in K} y_j. \quad \square$$

**1.2.69 (Séries e famílias somáveis)** Suponhamos que o conjunto dos índices  $J$  é numerável e seja  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow J$  uma aplicação bijetiva. Se uma família  $(x_j)_{j \in J}$  admite  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  como soma, no sentido referido em 1.2.67, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$$

tem também soma  $a$ , no sentido que, sendo  $S_n = \sum_{p=1}^n x_{\varphi(p)}$  as somas parciais, a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tem limite  $a$ . Podemos assim escrever

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)},$$

sempre que o primeiro membro faça sentido.

Em particular, se a família é somável, então a série é convergente.<sup>33</sup>

**Dem:** Reparemos que as somas parciais  $S_n$ , utilizadas para definir a soma da série, são um caso particular das somas parciais  $S_K$  referidas em 1.2.67, mais precisamente, tem-se

$$S_n = S_{\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}}.$$

Dito de outro modo, e encarando as famílias como funções, a função  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  que a  $n$  associa  $S_n$  é a composta da aplicação  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(J)$  que a  $n$  associa  $\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$  com a função  $\mathcal{F}(J) \rightarrow \mathbb{R}$  que a  $K$  associa  $S_K$ . Tendo em conta o resultado sobre o limite da função composta estabelecido em 1.2.41, podemos concluir a asserção do enunciado desde que mostremos que a função  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(J)$  que referimos tem limite  $+\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Ora, isso resulta de que, se  $K \subset J$  é finito, podemos considerar  $n_0 \in \mathbb{N}$  maior ou igual a todos os elementos de  $\varphi^{-1}(B)$  (por exemplo o máximo de  $\varphi^{-1}(B)$  quando  $B \neq \emptyset$ ) e então tem-se  $\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\} \supset K$ , para cada  $n \geq n_0$ .  $\square$

**1.2.70 (Somadas de reais positivos)** Sejam  $J$  um conjunto de índices e, para cada  $j \in J$ ,  $x_j \in \mathbb{R}$  com  $x_j \geq 0$ . Tem-se então:

a) A família  $(x_j)_{j \in J}$  admite uma soma  $a \in [0, +\infty]$ , igual ao supremo de todas as somas finitas  $S_K$  com  $K \in \mathcal{F}(J)$ .

b) Se  $J' \subset J$  for um subconjunto arbitrário, tem-se

$$\sum_{j \in J'} x_j \leq \sum_{j \in J} x_j.$$

**Dem:** Uma vez que se tem  $S_K \geq 0$  para cada  $K \in \mathcal{F}(J)$  o supremo  $a$  destas

<sup>33</sup>Pelo contrário, se a série for convergente não podemos garantir que a família seja somável. Essa questão será mais bem esclarecida quando fizermos na secção 2.3 um estudo mais profundo, e num contexto mais geral, das famílias somáveis (cf. o exercício 2.3.1).

somas é efetivamente um elemento de  $[0, +\infty]$ . Para verificar que  $a$  é limite da sucessão generalizada  $(S_K)_{K \in \mathcal{F}(J)}$  tratamos separadamente os casos em que  $a < +\infty$  e em que  $a = +\infty$ . No primeiro caso consideramos o sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  constituído pelos  $V_r(a) = ]a - r, a + r[$ ; Dado um tal  $r > 0$ , podemos considerar  $K_0 \in \mathcal{F}(J)$  tal que  $S_{K_0} > a - r$  e então, para cada  $K \in \mathcal{F}(J)$  com  $K \supset K_0$ , tem-se  $S_K \leq a < a + r$  e  $S_K \geq S_{K_0} > a - r$ <sup>34</sup> e portanto  $S_K \in V_r(a)$ . No segundo caso, ainda mais simples, consideramos o sistema fundamental de vizinhanças de  $+\infty$  constituído pelos  $]R, +\infty[$ ; Dado um tal  $R \in \mathbb{R}$ , podemos considerar  $K_0 \in \mathcal{F}(J)$  tal que  $S_{K_0} > R$  e então, para cada  $K \in \mathcal{F}(J)$  com  $K \supset K_0$ , tem-se  $S_K \geq S_{K_0} > R$ , isto é,  $S_K \in ]R, +\infty[$ . A conclusão de b) resulta de que se  $J' \subset J$  então qualquer parte finita de  $K'$  de  $J'$  é também uma parte finita de  $J$  e portanto o primeiro membro é o supremo dum subconjunto daquele cujo supremo é o segundo membro.  $\square$

Voltamos agora ao contexto das sucessões generalizadas.

### 1.2.71 (Produto cartesiano de conjuntos dirigidos — sucessões duplas)

Dados dois conjuntos dirigidos  $J_1$  e  $J_2$ , verifica-se muito facilmente que o produto cartesiano  $J_1 \times J_2$  fica também um conjunto dirigido quando se considera a relação  $\succeq$  definida por

$$(j_1, j_2) \succeq (k_1, k_2) \Leftrightarrow j_1 \succeq k_1 \wedge j_2 \succeq k_2$$

(é esta a que se considera sempre que outra não seja explicitada). Repare-se que se as relações em  $J_1$  e em  $J_2$  forem ambas ordens parciais, o mesmo acontece à relação associada em  $J_1 \times J_2$  mas que, mesmo que as relações em  $J_1$  e em  $J_2$  sejam ordens totais, não se pode garantir que a relação correspondente em  $J_2 \times J_2$  seja uma ordem total (pensar, por exemplo, em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  onde não se tem  $(2, 1) \succeq (1, 2)$  nem  $(1, 2) \succeq (2, 1)$ , embora exista um par, por exemplo  $(2, 2)$ , que verifica  $(2, 2) \succeq (1, 2)$  e  $(2, 2) \succeq (2, 1)$ ).

Às sucessões generalizadas  $(x_{(m,n)})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  de elementos de um conjunto  $X$  é costume dar-se o nome de *sucessões duplas*.

### 1.2.72 (O conjunto dirigido das vizinhanças de um ponto)

Sejam  $X$  um espaço topológico e  $a \in X$ . O conjunto  $\mathcal{V}_a$  das vizinhanças de  $a$  fica então um conjunto dirigido quando se considera a ordem parcial  $\succeq$  (que é a que fica implícita) definida por

$$V \succeq W \Leftrightarrow V \subset W.$$
<sup>35</sup>

Além disso, se, para cada  $V \in \mathcal{V}_a$  se escolher um elemento  $x_V \in V$ , a sucessão generalizada  $(x_V)_{V \in \mathcal{V}_a}$  de elementos de  $X$  tem limite  $a$ .

<sup>34</sup>Para a primeira desigualdade é que é importante o facto de se ter  $x_j \geq 0$ .

<sup>35</sup>Talvez parecesse mais natural pôr  $V \succeq W \Leftrightarrow V \supset W$  mas não é essa a relação que tem interesse considerar.

**Dem:** O facto de termos uma ordem parcial, em particular de se verificarem as propriedades nas alíneas a) e b) de 1.2.58, resulta trivialmente de a relação de inclusão entre conjuntos (a oposta desta) ser uma relação de ordem parcial. Quanto à propriedade c), basta repararmos que, se  $V, V' \in \mathcal{V}_a$ , também  $V \cap V' \in \mathcal{V}_a$  e tem-se  $V \cap V' \subset V$  e  $V \cap V' \subset V'$ , por outras palavras,  $V \cap V' \succeq V$  e  $V \cap V' \succeq V'$ . Suponhamos agora que temos uma sucessão generalizada  $(x_V)_{V \in \mathcal{V}_a}$  de elementos de  $X$  tal que  $x_V \in V$ . Dada uma vizinhança arbitrária  $V$  de  $a$ , podemos considerar essa vizinhança como índice da sucessão generalizada e constatamos que, para cada  $W \in \mathcal{V}_a$  com  $W \succeq V$ , isto é, com  $W \subset V$ , tem-se  $x_W \in W$ , e portanto também  $x_W \in V$ , o que prova que a sucessão generalizada admite  $a$  como limite.  $\square$

O exemplo precedente permite estender aos espaços topológicos as caracterizações de tipo Heine dos pontos aderentes e dos limites de funções, válidas no contexto dos espaços métricos (cf. 1.2.56 e 1.2.57) e, mais geralmente no dos espaços de tipo contável (cf. o exercício 1.2.4 no fim da secção). Para isso temos que substituir as referências a sucessões indexadas nos naturais por referências a sucessões generalizadas (que, evidentemente, incluem aquelas).

**1.2.73 (Caracterização tipo Heine dos pontos aderentes num espaço topológico)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$  e  $x_0 \in X$ . Tem-se então que  $x_0$  é aderente a  $A$  se, e só se, existir uma sucessão generalizada  $(x_j)_{j \in J}$  de elementos de  $A$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$ .

**Dem:** Lembrando que uma sucessão generalizada de elementos de  $A$  não é mais do que uma aplicação de domínio  $J$  e com valores em  $A$ , o facto de a existência de uma tal sucessão generalizada com limite  $x_0$  implicar que  $x_0$  é aderente a  $A$  é uma consequência de 1.2.40. Suponhamos, reciprocamente, que  $x_0$  é aderente a  $A$ . Vamos obter uma sucessão generalizada de elementos de  $A$  com limite  $x_0$  tomando como conjunto dirigido de índices o conjunto  $\mathcal{V}_{x_0}$  das vizinhanças de  $x_0$  em  $X$  (é por esse motivo que não podemos enunciar este resultado em termos de  $\mathbb{N}$ -sucessões). Para isso, para cada  $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ , tiramos partido do facto de se ter  $V \cap A \neq \emptyset$  (cf. 1.2.8) para escolher um elemento  $x_V \in V \cap A$ . Obtemos assim uma sucessão generalizada  $(x_V)_{V \in \mathcal{V}_a}$  de elementos de  $A$  que, como se viu em 1.2.72, tem limite  $x_0$ .  $\square$

**1.2.74 (Corolário — Os limites das sucessões generalizadas determinam a topologia)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos duas topologias. Tem-se então:

- a) A primeira topologia é mais fina que a segunda se, e só se, quaisquer que sejam  $x_0 \in X$  e a sucessão generalizada de elementos de  $X$  com limite  $x_0$ , para a primeira topologia, essa sucessão generalizada também tem limite  $x_0$  para a segunda.
- b) Em particular, as duas topologias coincidem se, e só se, para cada  $x_0 \in X$ ,

as sucessões generalizadas de elementos de  $X$  com limite  $x_0$  para a primeira topologia coincidem com as que têm limite  $x_0$  para a segunda.<sup>36</sup>

**Dem:** Começemos por supor que a primeira topologia é mais fina que a segunda. Lembrando que os limites de uma sucessão generalizada são casos particulares dos limites de aplicações, decorre da alínea a) de 1.2.42 que toda a sucessão generalizada com limite  $x_0$  para a primeira topologia tem também limite  $x_0$  para a segunda. Reciprocamente se sempre que  $x_j \rightarrow x_0$  para a primeira topologia também  $x_j \rightarrow x_0$  para a segunda, concluímos de 1.2.73, que para cada  $A \subset X$  os pontos aderentes a  $A$  para a primeira topologia também são aderentes a  $A$  para a segunda e portanto, por 1.2.12, a primeira topologia é mais fina que a segunda.  $\square$

### 1.2.75 (Caracterização tipo Heine dos limites envolvendo espaços topológicos)

Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$  e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Sejam  $Y$  um espaço topológico,  $b \in Y$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Então  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  se, e só se, qualquer que seja a sucessão generalizada  $(x_j)_{j \in J}$  de elementos de  $A$  com  $x_j \rightarrow x_0$  tem-se  $f(x_j) \rightarrow b$ .

**Dem:** Lembrando que uma sucessão generalizada de elementos de  $A$  não é mais do que uma aplicação com um conjunto dirigido  $J$  como domínio e com valores em  $A$ , resulta de 1.2.41 que, se  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$  então, para cada sucessão generalizada  $(x_j)_{j \in J}$  de elementos de  $A$  com  $x_j \rightarrow x_0$  tem-se  $f(x_j) \rightarrow b$ . Suponhamos agora que não se tem  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$ . Existe assim uma vizinhança  $V'$  de  $b$  tal que para nenhuma vizinhança  $V$  de  $x_0$  se tenha  $f(V \cap A) \subset V'$ . Podemos assim considerar como conjunto dirigido de índices o conjunto  $\mathcal{V}_{x_0}$  das vizinhanças de  $x_0$  em  $X$  e definir uma sucessão generalizada  $(x_V)_{V \in \mathcal{V}_{x_0}}$  de elementos de  $A$  escolhendo, para cada  $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ , um elemento  $x_V \in V \cap A$  tal que  $f(x_V) \notin V'$ . Tendo em conta 1.2.72 esta sucessão generalizada tem limite  $x_0$  e, no entanto, a sucessão generalizada  $(f(x_V))_{V \in \mathcal{V}_{x_0}}$  não tem  $b$  como limite, por nenhum dos seus termos pertencer à vizinhança  $V'$  de  $b$ .  $\square$

Vamos terminar esta secção examinando dois exemplos de topologia em espaços funcionais. Por uma questão de comodidade e de compatibilidade que o que fizemos na secção 1 no contexto dos espaços métricos, encaremos as funções de domínio  $I$  como famílias indexadas em  $I$ , com a mudança de notação habitual resultante deste ponto de vista. O leitor facilmente adaptará o que dissermos no caso em que for conveniente usar a notação habitual ligada às funções.

<sup>36</sup>Em linguagem mais sugestiva, a topologia mais fina é a que tem menos sucessões generalizadas convergentes e duas topologias coincidem se tiverem as mesmas sucessões generalizadas convergentes.

**1.2.76 (A topologia da convergência uniforme)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $X$  um espaço métrico e notemos  $Ap(I, X)$  o conjunto de todas as aplicações  $I \rightarrow X$ , aplicações essas que, por comodidade, serão encaradas como famílias  $(x_i)_{i \in I}$ . Para cada  $(a_i)_{i \in I} \in Ap(I, X)$  e cada  $r > 0$ , notemos

$$\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) = \{(x_i)_{i \in I} \in Ap(I, X) \mid \forall_{i \in I} d(x_i, a_i) < r\},^{37}$$

conjunto que contém, em particular, o elemento  $(a_i)_{i \in I}$ . Podemos então definir uma topologia em  $Ap(I, X)$ , dita *topologia da convergência uniforme*, pela condição de as vizinhanças de um elemento  $(a_i)_{i \in I}$  serem exatamente os subconjuntos de  $Ap(I, X)$  que contêm  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$  para algum  $r > 0$ . Com esta topologia,  $Ap(I, X)$  é um espaço de Hausdorff.

É claro que, pela própria definição da topologia, para cada  $(a_i)_{i \in I}$  a classe dos  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$  com  $r > 0$  constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$ .

**Dem:** Temos que verificar as propriedades das vizinhanças na definição de topologia em 1.2.1. As propriedades a), b) e c) são de verificação imediata. Quanto a d), se  $\Omega$  e  $\Omega'$  são vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$ , podemos considerar  $r > 0$  e  $r' > 0$  tais que  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \subset \Omega$  e  $\mathcal{B}'_{r'}((a_i)_{i \in I}) \subset \Omega'$  e, sendo então  $r'' > 0$  o menor dos dois números  $r$  e  $r'$ , tem-se  $\mathcal{B}'_{r''}((a_i)_{i \in I}) \subset \Omega \cap \Omega'$ , o que mostra que  $\Omega \cap \Omega'$  é também uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$ . Verifiquemos enfim a propriedade e), para o que, dada uma vizinhança  $\Omega$  de  $(a_i)_{i \in I}$ , consideremos  $r > 0$  tal que  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \subset \Omega$  e experimentamos tomar para  $\Omega'$  a vizinhança  $\mathcal{B}'_{r/2}((a_i)_{i \in I})$  de  $(a_i)_{i \in I}$ . Ora, para cada  $(x_i)_{i \in I}$  em  $\Omega'$  tem-se

$$\mathcal{B}'_{r/2}((x_i)_{i \in I}) \subset \mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \subset \Omega,$$

e portanto  $\Omega$  é vizinhança de  $(x_i)_{i \in I}$ , visto que, para cada  $(y_i)_{i \in I}$  em  $\mathcal{B}'_{r/2}((x_i)_{i \in I})$ , tem-se para todo o  $i \in I$

$$d(a_i, y_i) \leq d(a_i, x_i) + d(x_i, y_i) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Para verificar que  $Ap(I, X)$  é um espaço de Hausdorff, consideremos dois elementos distintos  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  de  $Ap(I, X)$ . Existe assim  $i_0 \in I$  tal que  $a_{i_0} \neq b_{i_0}$  e portanto, como referido em 1.1.23, podemos considerar  $r > 0$  tal que as bolas abertas  $B_r(a_{i_0})$  e  $B_r(b_{i_0})$  não tenham nenhum elemento comum. Daqui decorre que as vizinhanças  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$  e  $\mathcal{B}'_r((b_i)_{i \in I})$  dos elementos  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  respetivamente também não têm elementos comuns, já que

<sup>37</sup>Repare-se que, em geral, e apesar da notação, este conjunto não é uma bola, até porque não estamos a considerar uma métrica em  $Ap(I, X)$ ; Em 1.1.20 foi definida uma métrica mas apenas no subconjunto  $\mathbb{B}(I, X)$  de  $Ap(I, X)$  constituído pelas aplicações limitadas. Apesar do que referimos, podemos reparar que os conjuntos  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$  vão ter um papel na definição da topologia semelhante ao das bolas abertas na definição da topologia dum espaço métrico.

se  $(x_i)_{i \in I}$  estivesse em ambas as vizinhanças teria que ser, em particular  $x_{i_0} \in B_r(a_{i_0}) \cap B_r(b_{i_0})$ .  $\square$

**1.2.77 (Comparação com a métrica  $d_\infty$  em  $\mathbb{B}(I, X)$ )** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $X$  um espaço métrico e consideremos em  $Ap(I, X)$  a topologia da convergência uniforme. Lembremos que no subconjunto  $\mathbb{B}(I, X)$  de  $Ap(I, X)$ , constituído pelas aplicações limitadas, está definida uma métrica  $d_\infty$  por

$$d_\infty((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sup_{i \in I} d(x_i, y_i)$$

(cf. 1.1.20). Tem-se então:

**a)** A topologia de  $\mathbb{B}(I, X)$  associada à métrica  $d_\infty$  coincide com a topologia induzida pela topologia da convergência uniforme de  $Ap(I, X)$ .

**b)** No caso em que o próprio espaço métrico  $X$  é limitado e naquele em que o conjunto não vazio  $I$  é finito tem-se  $\mathbb{B}(I, X) = Ap(I, X)$ , em particular a métrica  $d_\infty$  está definida em  $Ap(I, X)$  e define aí a topologia da convergência uniforme.

**Dem:** Suponhamos que  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  em  $\mathbb{B}(I, X)$  para a topologia associada à métrica  $d_\infty$ . Existe assim  $r > 0$  tal que  $\Omega$  contenha a bola aberta de centro  $(a_i)_{i \in I}$  e raio  $r$  de  $\mathbb{B}(I, X)$  para a métrica  $d_\infty$ . Considerando então a vizinhança  $\mathcal{B}'_{r/2}((a_i)_{i \in I}) \cap \mathbb{B}(I, X)$  de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia induzida pela da convergência uniforme, vemos que

$$\mathcal{B}'_{r/2}((a_i)_{i \in I}) \cap \mathbb{B}(I, X) \subset \Omega,$$

e portanto  $\Omega$  é também vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia induzida pela da convergência uniforme, visto que, se  $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}'_{r/2}((a_i)_{i \in I}) \cap \mathbb{B}(I, X)$ , tem-se  $d(x_i, a_i) < \frac{r}{2}$  para todo o  $i$ , donde

$$d_\infty((a_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}) \leq \frac{r}{2} < r$$

e  $(x_i)_{i \in I} \in \Omega$ .

Suponhamos, reciprocamente, que  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  em  $\mathbb{B}(I, X)$  para a topologia induzida pela da convergência uniforme. Podemos então considerar  $r > 0$  tal que  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \cap \mathbb{B}(I, X) \subset \Omega$  (cf. a alínea c) de 1.2.21), em particular cada  $(x_i)_{i \in I}$  na bola aberta de  $\mathbb{B}(I, X)$  de centro  $(a_i)_{i \in I}$  e raio  $r$ , para o qual se tem necessariamente, para cada  $i$ ,

$$d(a_i, x_i) \leq d_\infty((a_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}) < r,$$

verifica

$$(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \cap \mathbb{B}(I, X) \subset \Omega,$$

o que mostra que  $\Omega$  é também vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  em  $\mathbb{B}(I, X)$  para a topologia associada à métrica  $d_\infty$ .



Ficou assim justificada a conclusão de a) e, quanto a b), tudo o que temos é que reparar que, quando  $X$  é limitado, qualquer subconjunto de  $X$  é limitado e portanto também qualquer aplicação com valores em  $X$  é limitada e que, quando  $I$  é finito, a imagem de qualquer aplicação de domínio  $I$  é também finita, e portanto limitada.  $\square$

A conclusão da alínea b) de 1.2.77 mostra em particular que quer no caso em que  $I$  é finito como naquele em que  $X$  é limitado a topologia da convergência uniforme de  $Ap(I, X)$  é metrizável. Vamos verificar de seguida que a mesma conclusão pode ser tirada sem fazer qualquer dessas hipóteses, à custa de utilizar convenientemente uma métrica modificada em  $X$ . Começamos por enunciar um lema onde a modificação referida é introduzida.

**1.2.78 (Lema da métrica cortada superiormente)** Seja  $X$  um espaço métrico, com a métrica  $d$ . Pode então definir-se em  $X$  uma nova métrica  $d'$  por

$$d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}.^{38}$$

A métrica  $d'$  define a mesma topologia que a métrica  $d$  e  $X$  com a métrica  $d'$  é um espaço métrico limitado (independentemente de  $X$  o ser ou não relativamente à métrica  $d$ ).<sup>39</sup> Como propriedade fundamental relacionando as duas métricas temos que, sempre que  $0 < \delta \leq 1$  tem-se

$$d'(x, y) < \delta \Leftrightarrow d(x, y) < \delta.$$

**Dem:** Começamos por reparar que  $d'(x, y) \geq 0$  e que tanto no caso em que  $d(x, y) < 1$  como naquele em que  $d'(x, y) < 1$  tem-se  $d'(x, y) = d(x, y)$ , propriedade que implica, em particular, a propriedade fundamental referida no enunciado assim como implica que  $d'(x, x) = 0$  e que  $x = y$  sempre  $d'(x, y) = 0$ , por as correspondentes propriedades serem válidas para a métrica  $d$ . É também imediato que  $d'(x, y) = d'(y, x)$ , por a correspondente propriedade ser válida para a métrica  $d$ . Reparemos agora que, dados pontos  $x, y, z \in X$ , vem, no caso em que  $d(x, y) < 1$  e  $d(y, z) < 1$ ,

$$d'(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d'(x, y) + d'(y, z)$$

e, no caso em que  $d(x, y) \geq 1$  ou  $d(y, z) \geq 1$ , também  $d'(x, y) \geq 1$  ou  $d'(y, z) \geq 1$  donde

$$d'(x, z) \leq 1 \leq d'(x, y) + d'(y, z),$$

em ambos os casos sendo assim válida a desigualdade triangular. Uma vez que se tem sempre  $d'(x, y) \leq 1$ , vemos que  $X$  é limitado relativamente à

<sup>38</sup>Esta métrica já foi encontrada por quem resolveu o exercício 1.1.10.

<sup>39</sup>Em particular resulta deste lema que a noção de conjunto limitado não é uma noção topológica.

métrica  $d'$ . Reparamos por fim que, dados  $a \in X$  e  $0 < r < 1$  a propriedade fundamental referida no enunciado implica que as bolas abertas  $B_r(a)$  para as duas métricas coincidem pelo que por estas constituírem sistemas fundamentais de vizinhanças para as topologias associadas às duas métricas (cf. o referido na alínea a) de 1.2.6) as duas topologias coincidem.  $\square$

**1.2.79 (Metrizabilidade da topologia da convergência uniforme)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio de índices e  $X$  um espaço métrico. Tem-se então que existe uma métrica em  $Ap(I, X)$  cuja topologia associada é a da convergência uniforme.

**Dem:** Consideremos em  $X$ , além da sua métrica original, também a métrica  $d'$  referida no lema 1.2.78 e notemos  $X'$  o espaço  $X$  quando consideramos a métrica  $d'$ . Reparemos que, pela propriedade fundamental referida nesse lema, para cada  $(a_i)_{i \in I}$  em  $Ap(I, X)$  e cada  $0 < r < 1$  os conjuntos  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$  (na notação em 1.2.76) associados às duas métricas  $d$  e  $d'$  coincidem, pelo que, uma vez que aqueles conjuntos constituem evidentemente também sistemas fundamentais de vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$  para as topologias da convergência uniforme associadas, podemos concluir que estas coincidem.<sup>40</sup> Basta agora repararmos que, uma vez que  $X'$  é um espaço métrico limitado, a topologia da convergência uniforme de  $Ap(I, X') = Ap(I, X)$  é metrizável, pelo referido na alínea b) de 1.2.77.  $\square$

Como referido na nota de pé de página 40, em geral duas métricas em  $X$  podem definir a mesma topologia sem que as topologias da convergência uniforme de  $Ap(I, X)$  coincidam. O resultado a seguir mostra que esse “fenómeno” deixa de ser possível se considerarmos métricas Lipschitz-equivalentes (note-se que não é isso que sucede com as métricas  $d$  e  $d'$  utilizadas na definição precedente).

**1.2.80 (Lipschitz-invariância da topologia da convergência uniforme)** Sejam  $d$  e  $\hat{d}$  duas métricas Lipschitz-equivalentes sobre um conjunto  $X$  e  $I$  um conjunto não vazio. Coincidem então em  $Ap(I, X)$  as topologias da convergência uniforme associadas às métricas  $d$  e  $\hat{d}$ .

**Dem:**  $M > 0$  e  $\hat{M} > 0$  tais que, quaisquer que sejam  $x, y \in X$ ,

$$\hat{d}(x, y) \leq M d(x, y), \quad d(x, y) \leq \hat{M} \hat{d}(x, y).$$

Seja  $(a_i)_{i \in I} \in Ap(I, X)$  e notemos, para cada  $r > 0$ ,

<sup>40</sup>Note-se que o simples facto de as métricas  $d$  e  $d'$  definirem a mesma topologia em  $X$  não implicaria, por si só, que as topologias da convergência uniforme associadas tivessem que coincidir: A definição da topologia da convergência uniforme em  $Ap(I, X)$  baseia-se de modo essencial na métrica de  $X$  e não apenas na sua topologia, como podemos concluir do exemplo no exercício 1.2.22 adiante.

$$\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) = \{(x_i)_{i \in I} \in Ap(I, X) \mid \forall_i d(a_i, x_i) < r\},$$

$$\widehat{\mathcal{B}}'_r((a_i)_{i \in I}) = \{(x_i)_{i \in I} \in Ap(I, X) \mid \forall_i \widehat{d}(a_i, x_i) < r\}.$$

Reparemos agora que se tem

$$\mathcal{B}'_{r/M}((a_i)_{i \in I}) \subset \widehat{\mathcal{B}}'_r((a_i)_{i \in I}), \quad \widehat{\mathcal{B}}'_{r/\widehat{M}}((a_i)_{i \in I}) \subset \mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}),$$

visto que se  $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}'_{r/M}((a_i)_{i \in I})$  vem para cada  $i$

$$\widehat{d}(a_i, x_i) \leq M d(a_i, x_i) < M \frac{r}{M} = r,$$

donde  $(x_i)_{i \in I} \in \widehat{\mathcal{B}}'_r((a_i)_{i \in I})$  e que se  $(x_i)_{i \in I} \in \widehat{\mathcal{B}}'_{r/\widehat{M}}((a_i)_{i \in I})$  vem para cada  $i$

$$d(a_i, x_i) \leq \widehat{M} \widehat{d}(a_i, x_i) < \widehat{M} \frac{r}{\widehat{M}} = r,$$

donde  $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$ . Constatamos agora que se  $\Omega \subset Ap(I, X)$  for vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência uniforme associada a  $d$  então existe  $r > 0$  tal que  $\Omega \supset \mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$  e então, por ser também  $\Omega \supset \widehat{\mathcal{B}}'_{r/\widehat{M}}((a_i)_{i \in I})$ ,  $\Omega$  é vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência uniforme associada a  $\widehat{d}$  e, analogamente, que se  $\Omega \subset Ap(I, X)$  for vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência uniforme associada a  $\widehat{d}$  então existe  $r > 0$  tal que  $\Omega \supset \widehat{\mathcal{B}}'_r((a_i)_{i \in I})$  e então, por ser também  $\Omega \supset \mathcal{B}'_{r/M}((a_i)_{i \in I})$ ,  $\Omega$  é vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência uniforme associada a  $d$ . Fica assim justificado que as vizinhanças de cada  $(a_i)_{i \in I}$  para as duas topologias da convergência uniforme são as mesmas e portanto que estas topologias coincidem.  $\square$

**1.2.81 (Limites na topologia da convergência uniforme)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $X$  um espaço métrico e consideremos em  $Ap(I, X)$  a topologia da convergência uniforme. Sejam  $Y$  um espaço topológico,  $B \subset Y$ ,  $y_0 \in Y$  aderente a  $B$  e  $f: B \rightarrow Ap(I, X)$  uma aplicação e consideremos as aplicações associadas  $f_i: B \rightarrow X$  (as coordenadas de  $f$ ) definidas pela condição de se ter, para cada  $y \in B$ ,

$$f(y) = (f_i(y))_{i \in I}.$$

Dado  $(a_i)_{i \in I}$  em  $Ap(I, X)$ , tem-se então que  $f(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} (a_i)_{i \in I}$  se, e só se, qualquer que seja  $\delta > 0$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $y_0$  em  $Y$  tal que, para cada  $y \in V \cap B$  e cada  $i \in I$ ,  $f_i(y) \in B_\delta(a_i)$ . Em particular, no caso em que  $f(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} (a_i)_{i \in I}$ , tem-se também  $f_i(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} a_i$  para cada  $i \in I$  e, quando queremos explicitar que temos um limite para a topologia da convergência

uniforme também dizemos que  $f_i(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} a_i$  *uniformemente*.

**Dem:** Temos uma consequência direta da caracterização dos limites em termos de sistemas fundamentais de vizinhanças (cf. a alínea b) de 1.2.27) se considerarmos o sistema fundamental de vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$  em  $Ap(I, X)$  constituído pelos  $\mathcal{B}'_\delta((a_i)_{i \in I})$  e se repararmos que  $f(y) \in \mathcal{B}'_\delta((a_i)_{i \in I})$  se, e só se,  $f_i(y) \in B_\delta(a_i)$  para todo o  $i \in I$ .  $\square$

Repare-se que, como referido no resultado precedente, quando uma aplicação  $f: B \rightarrow Ap(I, X)$  tem limite  $(a_i)_{i \in I}$  quando  $y \rightarrow y_0$  então também cada coordenada  $f_i: B \rightarrow X$  tem limite  $a_i$  quando  $y \rightarrow y_0$  mas podemos afirmar mais do que isso: Dado  $\delta > 0$ , conseguimos encontrar uma vizinhança  $V$  de  $y_0$  em  $Y$ , a mesma para todos os índices  $i$ , tal que sempre que  $y \in V \cap B$  se tenha  $f_i(y) \in B_\delta(a_i)$  para todo o  $i$ . É esta “uniformidade” que está na origem do nome da topologia da convergência uniforme. Somos assim levados a levantar a questão da existência de uma topologia em  $Ap(I, X)$  para a qual a existência de limite  $(a_i)_{i \in I}$  de uma função  $f: Y \rightarrow Ap(I, X)$  quando  $y \rightarrow y_0$  seja equivalente à existência de limite  $a_i$  para cada coordenada  $f_i: B \rightarrow X$  quando  $y \rightarrow y_0$ , sem nenhuma exigência de uniformidade. Vamos ver que é esse o caso, mesmo que suponhamos que  $X$  é simplesmente um espaço topológico, sem nenhuma métrica na sua definição. Repare-se que, lembrando que os limites das sucessões generalizadas são casos particulares dos limites de funções, decorre de 1.2.74 que não pode haver mais que uma topologia em  $Ap(I, X)$  com a propriedade requerida pelo que, por mais artificial que pareça a topologia que vamos definir, não existirá decerto outra mais simples...

**1.2.82 (A topologia da convergência simples)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $X$  um espaço topológico e consideremos o conjunto  $Ap(I, X)$  de todas as aplicações  $I \rightarrow X$ , aplicações essas que, por comodidade, serão encaradas como famílias  $(x_i)_{i \in I}$ . Pode então definir-se uma topologia em  $Ap(I, X)$  (a *topologia da convergência simples*) pela condição de um subconjunto de  $Ap(I, X)$  ser vizinhança de um elemento  $(a_i)_{i \in I}$  se, e só se, contiver algum conjunto do tipo

$$\mathcal{B}_U = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall_i x_i \in U_i\},$$

com  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  família de subconjuntos de  $X$  tal que cada  $U_i$  é vizinhança de  $a_i$  e que seja finito o conjunto dos índices  $i$  com  $U_i \neq X$ . No caso em que o espaço  $X$  é de Hausdorff, o mesmo acontece a  $Ap(I, X)$ , com a topologia da convergência simples.

É claro que, pela própria construção da topologia, para cada  $(a_i)_{i \in I}$  em  $Ap(I, X)$  a classe dos conjuntos  $\mathcal{B}_U$  com  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  nas condições atrás referidas constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$ .

Sejam  $Y$  um espaço topológico,  $B \subset Y$ ,  $y_0 \in Y$  aderente a  $B$  e  $f: B \rightarrow Ap(I, X)$  uma aplicação e consideremos as aplicações associadas

$f_i: B \rightarrow X$  (as coordenadas de  $f$ ) definidas pela condição de se ter, para cada  $y \in B$ ,

$$f(y) = (f_i(y))_{i \in I}.$$

Dado  $(a_i)_{i \in I} \in Ap(I, X)$ , tem-se então que  $f(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} (a_i)_{i \in I}$ , relativamente à topologia da convergência simples se, e só se,  $f_i(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} a_i$  para todo o  $i \in I$ .

**Dem:** Comecemos por reparar que para cada família  $\mathcal{U}$  nas condições atrás referidas, em relação ao ponto  $(a_i)_{i \in I}$ , o conjunto  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$  contém pelo menos o elemento  $(a_i)_{i \in I}$ . Para mostrarmos que ficou definida uma topologia em  $Ap(I, X)$  temos que verificar as propriedades das vizinhanças na definição de topologia em 1.2.1. As propriedades a), b) e c) são de verificação imediata. Quanto a d), se  $\Omega$  e  $\Omega'$  são vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$ , podemos considerar famílias  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  e  $\mathcal{U}' = (U'_i)_{i \in I}$  nas condições referidas tais que  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \subset \Omega$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}'} \subset \Omega'$ ; sendo  $K$  e  $K'$  as partes finitas de  $I$  constituídas respetivamente pelos índices  $i$  tais que  $U_i \neq X$  e tais que  $U'_i \neq X$ , então está contido em  $K \cup K'$ , e é portanto finito, o conjunto dos índices  $i$  tais que  $U_i \cap U'_i \neq X$  pelo que podemos considerar a família  $\mathcal{U}'' = (U_i \cap U'_i)_{i \in I}$  que ainda verifica as condições referidas e para a qual se tem  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}''} \subset \Omega \cap \Omega'$ , o que garante que  $\Omega \cap \Omega'$  é também uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$ . Verifiquemos enfim a propriedade e), para o que partimos de uma vizinhança  $\Omega$  de  $(a_i)_{i \in I}$  e consideramos uma família  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  com cada  $U_i$  vizinhança de  $a_i$  e que seja finito o conjunto  $K$  dos  $i \in I$  com  $U_i \neq X$ , família essa para a qual se tenha  $\mathcal{B}'_{\mathcal{U}} \subset \Omega$ . Para cada  $i \in K$  consideremos uma vizinhança  $U'_i$  de  $a_i$  tal que  $U_i$  seja também vizinhança de todos os pontos de  $U'_i$  e para cada  $i \in I \setminus K$  consideremos  $U'_i = X$ . Podemos então considerar a família  $\mathcal{U}' = (U'_i)_{i \in I}$  e a correspondente vizinhança  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}'}$  de  $(a_i)_{i \in I}$  é tal que  $\Omega$  é também vizinhança de  $(x_i)_{i \in I}$  para todos os elementos  $(x_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}'}$ , já que a família  $\mathcal{U}$  também verifica as condições do enunciado relativamente a todos os pontos  $(x_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ . Supondo que  $X$  é um espaço de Hausdorff, dados elementos distintos  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  de  $Ap(I, X)$ , podemos considerar  $i_0$  tal que  $a_{i_0} \neq b_{i_0}$  e então existem vizinhanças  $U_{i_0}$  de  $a_{i_0}$  e  $U'_{i_0}$  de  $b_{i_0}$  com  $U_{i_0} \cap U'_{i_0} = \emptyset$ ; pondo então para cada  $i \neq i_0$   $U_i = U'_i = X$ , as famílias  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  e  $\mathcal{U}' = (U'_i)_{i \in I}$  definem vizinhanças  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}'}$  de  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  respetivamente que não têm nenhum elemento comum, o que mostra que  $Ap(I, X)$  é um espaço de Hausdorff.

Verifiquemos agora a propriedade relativa aos limites de funções com valores em  $Ap(I, X)$ . Comecemos por supor que  $f(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} (a_i)_{i \in I}$  e seja

$i_0 \in I$  um índice arbitrário. Seja  $U_{i_0}$  é uma vizinhança arbitrária de  $a_{i_0}$  e ponhamos  $U_i = X$  para cada  $i \neq i_0$ . Consideremos a família  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  com a correspondente vizinhança  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$  de  $(a_i)_{i \in I}$ . Existe assim uma vizinhança  $V$  de  $y_0$  em  $Y$  tal que para cada  $y \in V \cap B$  se tenha  $f(y) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ , condição que implica, em particular, que  $f_{i_0}(y) \in U_{i_0}$ . Ficou assim provado que

$f_{i_0}(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} a_{i_0}$ . Suponhamos, reciprocamente, que se tem  $f_i(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} a_i$  para todo o  $i \in I$  e seja  $\Omega$  uma vizinhança arbitrária de  $(a_i)_{i \in I}$  em  $Ap(I, X)$ . Consideremos uma família  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  com cada  $U_i$  vizinhança de  $a_i$  tal que seja finito o conjunto  $K$  dos índices  $i$  tais que  $U_i \neq X$ . Para cada  $i \in K$ , o facto de se ter  $f_i(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} a_i$  permite-nos considerar uma vizinhança  $V_i$  de  $y_0$  em  $Y$  tal que para cada  $y \in V_i \cap B$  se tenha  $f_i(y) \in U_i$ . Considerando então a vizinhança  $V$  de  $y_0$  em  $Y$  intersecção dos  $V_i$  com  $i \in K$  (e  $V = Y$  no caso  $K = \emptyset$ ), vemos que se  $y \in V \cap B$ , tem-se  $f_i(y) \in U_i$  para todo o  $i \in K$  e, trivialmente, também para cada  $i \notin K$  (porque  $U_i = X$ ), portanto  $f(y) \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}} \subset \Omega$ . Provámos assim que  $f(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} (a_i)_{i \in I}$ .  $\square$

### 1.2.83 (Comparação das topologias das convergências simples e uniforme)

Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $X$  um espaço métrico e consideremos em  $Ap(I, X)$  as topologias da convergência uniforme e da convergência simples. Tem-se então:

a) A topologia da convergência uniforme é mais fina que a da convergência simples.

b) No caso em que o conjunto  $I$  é finito as duas topologias coincidem.

**Dem:** Suponhamos que  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência simples. Podemos então considerar considerar uma família  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  com  $U_i$  vizinhança de  $a_i$  em  $X$  e tal que seja finito o conjunto  $K$  dos  $i$  tais que  $U_i \neq X$ , tal que

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall_i x_i \in U_i\} \subset \Omega.$$

Para cada  $i \in K$  seja  $r_i > 0$  tal que  $B_{r_i}(a_i) \subset U_i$  e seja  $r > 0$  o menor dos números  $r_i$  com  $i \in K$  ( $r > 0$  arbitrário no caso  $K = \emptyset$ ). Nas notações de 1.2.76 tem-se então  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \subset \mathcal{B}_{\mathcal{U}} \subset \Omega$ , o que mostra que  $\Omega$  é também uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência uniforme. Provámos assim que a topologia da convergência uniforme é efetivamente mais fina que a da convergência simples. Suponhamos agora que o conjunto  $I$  é finito e seja  $\Omega$  uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência uniforme. Sendo  $r > 0$  tal que  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \subset \Omega$ , podemos considerar para cada  $i \in I$  a vizinhança  $U_i = B_r(a_i)$  e tomar  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  e tem-se então  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \subset \Omega$ , o que mostra que  $\Omega$  é também vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência simples. Podemos assim concluir que, no caso em que  $I$  é finito, as vizinhanças para as topologias da convergência uniforme e da convergência simples são as mesmas, por outras palavras, as duas topologias coincidem.  $\square$

No caso em que  $X$  é um espaço métrico e o conjunto não vazio de índices  $I$  é finito o facto de a topologia da convergência simples coincidir com a da convergência uniforme, que, como vimos em 1.2.79, é metrizável implica que a topologia da convergência simples é metrizável. A alínea c) do exercício 1.2.25 adiante mostra para conjuntos infinitos arbitrários de

índices  $I$  já não se pode garantir a metrizabilidade da topologia da convergência simples. Veremos adiante, em 1.5.19, um resultado que mostra que essa metrizabilidade já pode ser garantida quando o conjunto de índices  $I$  é contável.

## Exercícios

**Ex 1.2.1** Sejam  $X$  um conjunto e, para cada  $a \in X$ ,  $\mathcal{B}_a$  uma classe formada por algumas partes de  $X$ . Verificar que uma condição necessária e suficiente para que exista uma topologia em  $X$  para a qual cada  $\mathcal{B}_a$  seja um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  (topologia que é então evidentemente única) é que se verifiquem as seguintes condições:<sup>41</sup>

a) Para cada  $a$ , existe pelo menos um conjunto na classe  $\mathcal{B}_a$  (isto é,  $\mathcal{B}_a \neq \emptyset$ ).

c) Se  $W \in \mathcal{B}_a$  então  $a \in W$ .

d) Se  $W \in \mathcal{B}_a$  e  $W' \in \mathcal{B}_a$ , então existe  $W'' \in \mathcal{B}_a$  tal que  $W'' \subset W \cap W'$ .

e) Se  $W \in \mathcal{B}_a$ , então existe  $W' \in \mathcal{B}_a$  e, para cada  $x \in W'$ ,  $W_x \in \mathcal{B}_x$  com  $W_x \subset W$ .

Reparar ainda que, mesmo sem conhecer explicitamente este resultado, foi ele que foi utilizado, por exemplo, na construção da topologia de um espaço métrico em 1.1.24 e 1.1.25 e na construção da topologia da reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  em 1.2.2.

**Ex 1.2.2** Sejam  $X$  um espaço métrico,  $a \in X$  e  $r > 0$ . Mostrar que a aderência da bola aberta  $B_r(a)$  está sempre contida na bola fechada  $\overline{B}_r(a)$  e dar um exemplo em que se tem  $\text{ad}(B_r(a)) \neq \overline{B}_r(a)$ . **Sugestão:** Considerando o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais como subespaço métrico de  $\mathbb{R}$ , verificar o que são as bolas  $B_1(n)$  e  $\overline{B}_1(n)$ .

**Ex 1.2.3** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de elementos de  $X$ , que encaramos como uma aplicação de  $\mathbb{N}$  para  $X$ . Verificar que, considerando  $\mathbb{N}$  como subespaço topológico de  $\overline{\mathbb{R}}$ , tem-se, para cada  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow n_0} x_{n_0}$$

por outras palavras, no caso em que  $X$  é um espaço de Hausdorff,

$$\lim_{n \rightarrow n_0} x_n = x_{n_0}$$

(a conclusão deste exercício justifica, de certo modo, a nossa afirmação que os únicos limites interessantes para uma sucessão são os correspondentes a  $n \rightarrow +\infty$ )

**Ex 1.2.4 (Espaços de tipo contável)** Diz-se que um espaço topológico  $X$  é de tipo contável no ponto  $a \in X$  (em inglês, *first countable*) se existir uma sucessão de conjuntos  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que seja decrescente (isto é, com  $V_n \supset V_{n+1}$  para cada  $n$ ) e que constitua um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ . Dizemos simplesmente que  $X$  é de tipo contável se for de tipo contável em todos os seus pontos.

a) Verificar que todo o espaço métrico  $X$  é um espaço topológico de tipo contável.

**Sugestão:** Para cada  $a \in X$ , considerar  $V_n = B_{1/n}(a)$ .

<sup>41</sup>Saltamos na enumeração das alíneas para ajudar a relacionar cada condição com uma condição correspondente na definição de topologia em 1.2.1.

**b)** Mostrar que o espaço topológico  $\overline{\mathbb{R}}$ , apesar de não ter sido definido a partir de nenhuma métrica, é de tipo contável. **Sugestão:** Para o ponto  $a = -\infty$ , considerar  $V_n = [-\infty, -n[$  e proceder de modo análogo para  $a = +\infty$ .

**c)** Verificar que um espaço topológico  $X$  é de tipo contável num ponto  $a \in X$  se, e só se, existir um sistema fundamental de vizinhanças  $\mathcal{B}_a$  de  $a$  que constitua uma classe contável (isto é, finita ou numerável). **Sugestão:** Uma das implicações é trivial. Para a outra começar por considerar uma sucessão de conjuntos  $V'_n \subset X$  (não necessariamente decrescente) cuja classe dos termos seja  $\mathcal{B}_a$  e definir então

$$V_n = V'_1 \cap V'_2 \cap \cdots \cap V'_n.$$

**d)** Generalizar o resultado em 1.2.56, substituindo a hipótese de  $X$  ser um espaço métrico pela de ser um espaço topológico de tipo contável.

**e)** Generalizar o resultado em 1.2.57, substituindo a hipótese de  $X$  ser um espaço métrico pela de ser um espaço topológico de tipo contável.

**Ex 1.2.5** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre o qual consideramos a métrica e a topologia associadas (cf. 1.1.6). Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$  e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Adaptar a demonstração de 1.2.50 para mostrar que, mais geralmente,

**a)** Se  $f, g: A \rightarrow E$  são duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} w, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} z,$$

com  $w, z \in E$ , então

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} w + z.$$

**b)** Se  $f: A \rightarrow E$  e  $\lambda: A \rightarrow \mathbb{R}$  são duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} w, \quad \lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c,$$

com  $w \in E$  e  $c \in \mathbb{R}$ , então

$$\lambda(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} cw.$$

**Ex 1.2.6 (As topologias inferior e superior)** **a)** Mostrar que existe sobre o conjunto  $\mathbb{R}$  uma topologia (a que daremos o nome de *topologia inferior*) definida pela condição de, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , as vizinhanças de  $a$  serem os conjuntos  $V$  tais que exista  $b < a$  com  $V \supset ]b, +\infty[$ .

**b)** Verificar que, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , são sistema fundamentais de vizinhanças de  $a$ , além do que ressalta imediatamente da definição da topologia, o conjunto dos intervalos do tipo  $]b, +\infty[$ , com  $b < a$ , e o conjunto dos intervalos do tipo  $]a - 1/n, +\infty[$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

**c)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função admitindo um limite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$  (considerando em  $\mathbb{R}$  a topologia inferior). Verificar que  $f$  admite uma infinidade de limites quando  $x \rightarrow x_0$ .

**d)** Verificar diretamente que  $\mathbb{R}$ , com a topologia inferior, não é um espaço de Hausdorff.

**e)** Relativamente à topologia inferior determinar a aderência do conjunto  $]2, 5[$ .

**f)** Verificar que, relativamente à topologia inferior, os conjuntos fechados, diferentes de  $\emptyset$  e de  $\mathbb{R}$ , são precisamente os intervalos do tipo  $] -\infty, a[$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

**g)** Verificar que a topologia usual de  $\mathbb{R}$  é mais fina que a topologia inferior.



**h)** Definir por analogia uma nova topologia sobre  $\mathbb{R}$ , a que se dará o nome de *topologia superior*, e adaptar a esta topologia as conclusões obtidas para a topologia inferior nas alíneas precedentes.

**Ex 1.2.7 a)** Verificar que se pode definir uma topologia na recta estendida

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

a que se dá também o nome de *topologia inferior*, pela seguinte caracterização das vizinhanças:

- 1)  $V$  é vizinhança de  $a \in \mathbb{R}$  se, e só se,  $V \supset ]b, +\infty]$ , para algum  $b < a$ ;
- 2)  $V$  é vizinhança de  $+\infty$  se, e só se  $V \supset ]b, +\infty]$ , para algum  $b \in \mathbb{R}$ ;
- 3)  $V$  é vizinhança de  $-\infty$  se, e só se  $V = \mathbb{R}$ .

**b)** Verificar que a topologia induzida em  $\mathbb{R}$  pela topologia inferior de  $\overline{\mathbb{R}}$  é a topologia inferior de  $\mathbb{R}$  (cf. o exercício 1.2.6).

**Ex 1.2.8 (As topologias direita e esquerda)** **a)** Mostrar que existe sobre  $\mathbb{R}$  uma topologia (a que daremos o nome de *topologia direita*) definida pela condição de, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , as vizinhanças de  $a$  serem os conjuntos  $V$  tais que exista  $\varepsilon > 0$  com  $V \supset ]a, a + \varepsilon[$ .

**b)** Verificar que  $\mathbb{R}$  com a topologia direita é um espaço de Hausdorff.

**c)** Verificar que a topologia direita é mais fina que a topologia usual de  $\mathbb{R}$ .

**d)** Determinar os pontos aderentes ao intervalo  $]2, 5[$  relativamente à topologia direita.

**e)** Encontrar um conjunto que seja fechado para a topologia direita mas não seja fechado para a topologia usual.

**f)** Encontrar uma sucessão de números reais que tenha limite para a topologia usual mas não tenha limite para a topologia direita.

**g)** Definir por analogia uma nova topologia sobre  $\mathbb{R}$ , a que se dará o nome de *topologia esquerda*, e adaptar a esta topologia as conclusões obtidas para a topologia direita nas alíneas precedentes.

**Ex 1.2.9 (A topologia refinada por um subconjunto)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$  um subconjunto e notemos  $\mathcal{V}_a$  a classe das vizinhanças de um ponto  $a \in X$  para a topologia dada.

**a)** Mostrar que se pode considerar uma nova topologia sobre  $X$ , a que daremos o nome de *topologia refinada* da topologia dada pelo conjunto  $A$ , pela condição de para cada  $x \in X$  a classe  $\widehat{\mathcal{V}}_a$  das vizinhanças de  $a$  para a topologia refinada estar definida por

$$\widehat{V} \in \widehat{\mathcal{V}}_a \Leftrightarrow \exists_{V \in \mathcal{V}_a} V \cap (\{a\} \cup A) \subset \widehat{V}.$$

**Sugestão:** Das propriedades das vizinhanças referidas nas alíneas a) a e) de 1.2.1 apenas a última, apesar de simples, exigirá uma atenção mais cuidada.

**b)** Verificar que a topologia refinada é mais fina que a topologia original. Deduzir, em particular, que se a topologia original for de Hausdorff o mesmo acontece com a topologia refinada.

**c)** Verificar que se  $a \in A$  então  $A$  é vizinhança de  $a$  para a topologia refinada.

**d)** Verificar que se  $A$  é vizinhança de  $a$  para a topologia original, isto é,  $A \in \mathcal{V}_a$ , então  $\widehat{\mathcal{V}}_a = \mathcal{V}_a$ , isto é, as vizinhanças de  $a$  para a topologia refinada são as mesmas que as vizinhanças de  $a$  para a topologia original.

**e)** Verificar que se  $a \in X$  não for aderente a  $A$  para a topologia original então  $\{a\}$  é

vizinhança de  $a$  para a topologia refinada, e portanto as vizinhanças de  $a$  para a topologia refinada são exatamente os subconjuntos de  $X$  que contêm  $a$ .

**Ex 1.2.10** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff. Mostrar que:

**a)** Se  $a, b, c$  são três pontos distintos de  $X$ , então existem vizinhanças  $U, V$  e  $W$ , de  $a, b$  e  $c$ , respectivamente, tais que  $U \cap V = U \cap W = V \cap W = \emptyset$ .

**b)** Mais geralmente, por indução em  $n$ , se  $a_1, \dots, a_n$  são  $n$  pontos distintos de  $X$ , então é possível escolher, para cada  $1 \leq j \leq n$ , uma vizinhança  $V_j$  de  $a_j$  de modo que, sempre que  $j \neq k$ , se tenha  $V_j \cap V_k = \emptyset$ .

**Ex 1.2.11** Seja  $X$  um espaço topológico finito de Hausdorff. Mostrar que a topologia de  $X$  é necessariamente a topologia discreta. **Sugestão:** Tendo em conta 1.2.49, para cada  $a \in X$  o conjunto  $X \setminus \{a\}$  é fechado.

**Ex 1.2.12** Notemos  $\mathbb{R}'$  um conjunto cujos elementos são os números reais e mais um, notado  $0'$ , e que jogará o papel de “gêmeo” do elemento  $0 \in \mathbb{R}$ . Mostrar que se pode definir uma topologia sobre  $\mathbb{R}'$  pela condição de, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , as vizinhanças de  $a$  serem os conjuntos que contêm algum intervalo do tipo  $]a - r, a + r[$ , com  $r > 0$ , e de as vizinhanças de  $0'$  serem os conjuntos que contêm algum dos conjuntos do tipo

$$]-r, 0[ \cup \{0'\} \cup ]0, r[$$

com  $r > 0$  (por outras palavras, pegamos nos conjuntos que constituem o sistema fundamental de vizinhanças de  $0$  e substituímos neles  $0$  por  $0'$ ). Mostrar que se obtém assim um espaço topológico que não é de Hausdorff mas no qual cada conjunto com um único elemento é fechado.

**Ex 1.2.13** Seja  $J$  um conjunto dirigido e consideremos em  $\bar{J} = J \cup \{+\infty\}$  a topologia associada, referida em 1.2.61. Mostrar que a topologia induzida em  $J$  pela topologia de  $\bar{J}$  é a topologia discreta e que  $\bar{J}$  é um espaço de Hausdorff se, e só se,  $J$  não tem elemento máximo (cf. 1.2.60).

**Ex 1.2.14** Conferir quais os resultados sobre limites de funções e de sucessões generalizadas (incluindo, em particular, as indexadas em  $\mathbb{N}$ ) que são utilizados para mostrar que tem limite 1 a  $\mathbb{N}$ -sucessão de números reais  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$x_n = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 10, \\ \frac{n+1}{n}, & \text{se } n \text{ par e } n \geq 10, \\ \frac{n}{n+1}, & \text{se } n \text{ ímpar e } n \geq 10. \end{cases}$$

**Ex 1.2.15** A noção de sucessão de Cauchy já foi decerto encontrada pelo estudante, pelo menos no contexto dos números reais.

**a)** Fixando-nos, para simplificar, nesse contexto, verificar que uma sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais é uma sucessão de Cauchy se, e só se, a sucessão dupla de números reais que a  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  associa  $|x_m - x_n|$  tiver limite 0.

**b)** Colocando-nos agora, mais geralmente, no contexto de um espaço métrico  $X$  generalizar a definição conhecida no caso dos números reais para definir quando é que uma sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $X$  é uma sucessão de Cauchy e caracterizar de modo alternativo essa noção em termos de uma sucessão dupla conveniente.

**Ex 1.2.16 (Sucessões generalizadas monótonas em  $\bar{\mathbb{R}}$ )** Seja  $J \neq \emptyset$  um conjunto dirigido, com a correspondente relação  $\succeq$ . Diz-se que uma sucessão generalizada  $(x_j)_{j \in J}$  de elementos da reta estendida  $\bar{\mathbb{R}}$  é *crescente* (respetivamente, *decrecente*) se, sempre que  $j \succeq j'$  em  $J$ , tem-se  $x_j \geq x_{j'}$  (respetivamente  $x_j \leq x_{j'}$ ) em  $\bar{\mathbb{R}}$ .

- a) Verificar que se a sucessão generalizada é crescente então, notando  $M \in \overline{\mathbb{R}}$  o supremo do conjunto dos termos da sucessão generalizada, tem-se  $x_j \rightarrow M$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ .
- b) Verificar que se a sucessão generalizada é decrescente então, notando  $m \in \overline{\mathbb{R}}$  o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão generalizada, tem-se  $x_j \rightarrow m$  em  $\overline{\mathbb{R}}$ .
- c) Verificar que o resultado 1.2.70, sobre a existência de soma para uma família de reais maiores ou iguais a 0, poderia ter sido obtida diretamente a partir da conclusão da alínea a) deste exercício.

**Ex 1.2.17 (O integral de Riemann como limite de uma sucessão generalizada)** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Uma partição com pontos escolhidos  $P$  do intervalo  $[a, b]$  é um par de seqüências de números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $t_1, t_2, \dots, t_n$  com

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b, \quad t_i \in [a_{i-1}, a_i].$$

Para cada uma dessas partições com pontos escolhidos  $P$ , define-se uma correspondente soma de Riemann para a função  $f$

$$S_P = \sum_{i=1}^n f(t_i) (a_i - a_{i-1}).$$

Se a definição que estudou para o integral de Riemann da função  $f$  no intervalo  $[a, b]$  foi dada a partir das somas de Riemann como aproximações desse integral, o que é uma via frequentemente seguida, é muito provável que essa definição possa ser interpretada como um limite de uma sucessão generalizada tendo como conjunto de índices o conjunto das partições com pontos escolhidos. Tente explicar essa interpretação determinando qual a relação  $\succeq$  no conjunto dos índices que faz sentido considerar. Note-se que, possivelmente, a relação  $\succeq$  que interessa considerar não é uma relação de ordem parcial, por ser possível que se verifique  $P \succeq P'$  e  $P' \succeq P$  sem que se tenha  $P = P'$ .

**Ex 1.2.18 (Espaços de Hausdorff e unicidade do limite)** Seja  $X$  um espaço topológico. Mostrar que  $X$  é um espaço de Hausdorff se, e só se, não existir nenhuma sucessão generalizada de elementos de  $X$  que admita mais que um limite. **Sugestão:** Quando  $X$  é um espaço de Hausdorff, a unicidade do limite para as funções, em particular para as sucessões generalizadas, já foi estabelecida em 1.2.44. Quando  $X$  não for um espaço de Hausdorff considerar  $b \neq c$  em  $X$  que não tenham vizinhanças disjuntas e construir uma sucessão generalizada tendo  $b$  e  $c$  como limites utilizando como conjunto de índices  $\mathcal{V}_b \times \mathcal{V}_c$ , conjunto dos pares  $(V, W)$  com  $V$  vizinhança de  $b$  e  $W$  vizinhança de  $c$ .

**Ex 1.2.19** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $a \in X$  e consideremos o conjunto  $\mathcal{V}_a$  das vizinhanças de  $a$  em  $X$  como conjunto dirigido, com a relação  $\succeq$  definida em 1.2.72. Caracterizar os subconjuntos de  $\mathcal{V}_a$  que são cofinais.

**Ex 1.2.20** Sejam  $I$  um conjunto não vazio de índices e  $X$  um espaço métrico e consideremos em  $Ap(I, X)$  a topologia da convergência uniforme. Verificar que se  $Y \subset X$  é um subconjunto onde se considera a métrica induzida, então a topologia da convergência uniforme de  $Ap(I, Y)$ , que é um subconjunto de  $Ap(I, X)$ , é a topologia induzida pela topologia da convergência uniforme de  $Ap(I, X)$ .

**Ex 1.2.21** Em contraste com o referido na alínea b) de 1.2.77, verificar que se o conjunto  $I$  for infinito e o espaço métrico  $X$  não for limitado então  $\mathbb{B}(I, X) \neq Ap(I, X)$ , isto é, existem aplicações não limitadas  $(x_i)_{i \in I}$ .

**Ex 1.2.22** Seja  $X \subset \mathbb{R}$  o conjunto cujos elementos são os números reais da forma  $\frac{1}{n}$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Notemos  $d$  a métrica usual de  $\mathbb{R}$  assim como a métrica induzida por esta em  $X$  e notemos  $d'$  a métrica discreta de  $X$  (cf. 1.1.10).

**a)** Verificar que tanto a métrica  $d$  como a métrica  $d'$  definem em  $X$  a topologia discreta.

**b)** Verificar que a topologia da convergência uniforme de  $Ap(\mathbb{N}, X)$  associada à métrica  $d'$  de  $X$  é a topologia discreta mas a topologia da convergência uniforme de  $Ap(\mathbb{N}, X)$  associada à métrica  $d$  não é a topologia discreta, em particular as duas topologias não coincidem.<sup>42</sup> **Sugestão:** Sendo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  o elemento de  $Ap(\mathbb{N}, X)$  definido por  $a_n = \frac{1}{n}$ , verificar que qualquer vizinhança de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para a segunda topologia contém algum elemento distinto de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ex 1.2.23** Sejam  $I$  um conjunto não vazio de índices e  $X$  um espaço topológico e consideremos em  $Ap(I, X)$  a topologia da convergência simples. Verificar que se  $Y \subset X$  é um subconjunto onde se considera a topologia induzida, então a topologia da convergência simples de  $Ap(I, Y)$ , que é um subconjunto de  $Ap(I, X)$ , é a topologia induzida pela topologia da convergência simples de  $Ap(I, X)$ .

**Ex 1.2.24** Considerar no conjunto  $Ap([0, 1], \mathbb{R})$ , das aplicações de  $[0, 1[$  em  $\mathbb{R}$ , a topologia da convergência uniforme (vamos encarar os elementos deste espaço com a notação habitual para as aplicações e não como famílias).

**a)** Seja, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n: [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação definida por  $f_n(t) = t^n$ . Mostrar que se tem  $f_n(t) \rightarrow 0$ , para cada  $t \in [0, 1[$ , mas que a  $\mathbb{N}$ -sucessão das funções  $f_n$  não converge para a função 0, para a topologia da convergência uniforme.

**b)** Seja, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n: [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação definida por  $g_n(t) = t^n(1-t)^n$ . Mostrar que a  $\mathbb{N}$ -sucessão das aplicações  $g_n$  converge para a função 0, para a topologia da convergência uniforme.

**Ex 1.2.25 (Exemplo de ponto aderente a um conjunto que não é limite de uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos do conjunto)** Sejam  $I$  um conjunto infinito não numerável de índices e  $X$  um espaço topológico de Hausdorff com pelo menos dois elementos distintos, que notaremos 0 e 1, e consideremos em  $Ap(I, X)$  a topologia da convergência simples, que sabemos ser de Hausdorff. Vamos encarar os elementos deste espaço com a notação habitual para as aplicações e não como famílias.

**a)** Seja  $\mathcal{C}$  o subconjunto de  $Ap(I, X)$  formado pelas aplicações  $f$  tais que  $f(i) = 0$ , salvo para um conjunto finito ou numerável de valores de  $i$ , conjunto que não contém, por exemplo, a aplicação de valor constante 1. Mostrar que o limite de qualquer  $\mathbb{N}$ -sucessão convergente de aplicações em  $\mathcal{C}$  ainda pertence a  $\mathcal{C}$  (o que se traduz dizendo que  $\mathcal{C}$  é *sequencialmente fechado*) mas que, apesar disso, o conjunto  $\mathcal{C}$  não é fechado, sendo mesmo denso.

**b)** Deduzir de a) que o resultado enunciado em 1.2.73 será em geral falso, se nos limitarmos a considerar  $\mathbb{N}$ -sucessões no seu enunciado.

**c)** Deduzir de a), tendo em conta 1.2.56, que  $Ap(I, X)$ , com a topologia da convergência simples não é metrizável.

<sup>42</sup>Em particular, podemos concluir que, em geral, a topologia da convergência uniforme de  $Ap(I, X)$  não pode ser definida apenas a partir da topologia de  $X$ , dito de outro modo, não é uma noção topológica relativamente a  $X$ .

**Ex 1.2.26 (Exemplo alternativo onde o conjunto é numerável)** Consideremos em  $\{0, 1\}$  a topologia discreta e o conjunto  $\mathcal{J} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , de todas as partes de  $\mathbb{N}$ , como conjunto de índices. Consideremos em  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  a topologia da convergência simples, que sabemos ser de Hausdorff. Para cada  $p \in \mathbb{N}$  notemos  $f_p \in Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  a aplicação definida por

$$f_p(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in A \\ 0, & \text{se } p \notin A \end{cases}$$

e seja  $\widehat{\mathbb{N}} \subset Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  o conjunto numerável cujos elementos são as aplicações  $f_p$ .<sup>43</sup>

**a)** Verificar que a topologia induzida em  $\widehat{\mathbb{N}}$  pela topologia da convergência simples de  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  é a topologia discreta. **Sugestão:** Considerar a vizinhança de  $f_p$  em  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  constituída pelas aplicações que tomam o valor 1 em  $\{1\} \in \mathcal{J}$ .

**b)** Mostrar que o limite de qualquer  $\mathbb{N}$ -sucessão convergente de elementos de  $\widehat{\mathbb{N}}$  ainda pertence a  $\widehat{\mathbb{N}}$  (o que se traduz dizendo que  $\widehat{\mathbb{N}}$  é *sequencialmente fechado*  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$ ).

**Sugestão:** Uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos de  $\widehat{\mathbb{N}}$  será da forma  $n \mapsto f_{p(n)}$  com os  $p(n)$  não necessariamente distintos. Se o conjunto  $A$  dos naturais  $p(n)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , for finito atender a que os conjuntos finitos são fechados para concluir que o limite, a existir, tem que ser um dos termos da sucessão; Se  $A$  for infinito, decompor  $A$  como união de dois conjuntos infinitos disjuntos  $A'$  e  $A''$  e concluir que a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $n \mapsto f_{p(n)}(A')$  não pode convergir em  $\{0, 1\}$ .

**c)** Suponhamos que  $f \in Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  e notemos  $\mathcal{F}$  a classe dos  $A \subset \mathbb{N}$  (isto é,  $A \in \mathcal{J}$ ) tais que  $f(A) = 1$ . Verificar que  $f$  é aderente a  $\widehat{\mathbb{N}}$  se, e só se, se verificam as seguintes condições:

**c1)** Se  $A \in \mathcal{F}$  e  $A \subset A' \subset \mathbb{N}$  então  $A' \in \mathcal{F}$ ;

**c2)**  $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ ;

**c3)** Se  $A \in \mathcal{F}$  e  $A' \in \mathcal{F}$  então  $A \cap A' \in \mathcal{F}$  (condição que arrasta, que, mais geralmente, toda a intersecção finita de conjuntos em  $\mathcal{F}$  pertence a  $\mathcal{F}$ );

**c4)**  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ;

**c5)** Se  $B \notin \mathcal{F}$  então  $\mathbb{N} \setminus B \in \mathcal{F}$ .<sup>44</sup>

**Sugestão:** Se, por exemplo, c3) fosse falsa verificar que a vizinhança de  $f$  em  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  constituída pelos  $g$  tais que  $g(A) = 1$ ,  $g(A') = 1$  e  $g(A \cap A') = 0$  não tinha elementos de  $\widehat{\mathbb{N}}$ . Para a recíproca, supondo todas as condições verificadas, qualquer vizinhança de  $f$  conterá, para conjuntos  $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_\ell$  com os  $A_i$  em  $\mathcal{F}$  e os  $B_j$  fora de  $\mathcal{F}$ , o conjunto dos  $g$  tais que  $g(A_i) = 1$  ( $1 \leq i \leq k$ ) e  $g(B_j) = 0$  ( $1 \leq j \leq \ell$ ) e então  $f_p$  pertence à vizinhança para cada  $p$  no conjunto de  $\mathcal{F}$ , portanto não vazio,

$$A_1 \cap \dots \cap A_k \cap (\mathbb{N} \setminus B_1) \cap \dots \cap (\mathbb{N} \setminus B_\ell).$$

<sup>43</sup>Reparar que, se  $p \neq q$  então  $f_p \neq f_q$  por estas aplicações tomarem valores distintos no conjunto  $\{p\} \in \mathcal{J}$ . Existe assim uma correspondência biunívoca natural entre  $\mathbb{N}$  e  $\widehat{\mathbb{N}}$ .

<sup>44</sup>O leitor que já tenha porventura encontrado a noção de filtro (cf. o exercício 1.6.33 adiante), reconhecerá que as condições c1) a c3) exprimem que  $\mathcal{F}$  é um *filtro* de partes de  $\mathbb{N}$ , as condições c1) a c4) que se trata de um *filtro próprio* e as condições c1) a c5) que estamos na presença de um *ultrafiltro*. Note-se que podíamos ter dispensado as condições c1) e c2) por estas serem consequências simples de c3), c4) e c5).

**Nota:** Para que tenhamos, como anunciado, um exemplo alternativo ao exibido no exercício 1.2.25, falta-nos mostrar que o conjunto  $\widehat{\mathbb{N}}$  não é fechado em  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$ , apesar de, como vimos em b), ser sequencialmente fechado. De facto, apesar de  $\widehat{\mathbb{N}}$  não ser efetivamente fechado em  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  não conseguimos prová-lo neste momento, isto é, não conseguimos exibir nenhum ponto aderente a  $\widehat{\mathbb{N}}$  que não seja um dos  $f_p$  (O leitor poderá fazer várias tentativas para se convencer da dificuldade envolvida). O facto de  $\widehat{\mathbb{N}}$  não ser fechado será estabelecido, embora sem a construção explícita de um tal ponto aderente, num exercício da secção 1.6 adiante (cf. o exercício 1.6.17). Alternativamente, a alínea p) do exercício 1.6.33, da mesma secção garante (também sem uma construção explícita) a existência de um elemento  $f$  aderente a  $\widehat{\mathbb{N}}$  e não pertencente a este conjunto.

### §3. Outros conceitos topológicos.

Na secção precedente, e no contexto dum espaço topológico  $X$ , a única noção de natureza topológica envolvendo um ponto  $a \in X$  e um subconjunto  $A \subset X$  foi a de o ponto ser aderente ao conjunto. Quando se pretende abordar mais profundamente o estudo dos espaços topológicos revela-se muito cómodo introduzir outras noções topológicas, todas elas relacionadas com a de ponto aderente, e é isso que faremos em seguida.

**1.3.1** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$ .

**a)** Diz-se que um ponto  $a \in X$  é *interior* a  $A$  se  $a$  não for aderente a  $X \setminus A$ . Nota-se  $\text{int}(A)$  o conjunto dos pontos interiores a  $A$  (o *interior* de  $A$ ), tendo-se assim

$$\text{int}(A) = X \setminus \text{ad}(X \setminus A).$$

Repare-se que, uma vez que um elemento dum conjunto é sempre aderente a esse conjunto, concluímos que se  $a$  é interior a  $A$  então  $a$  não pertence a  $X \setminus A$ , por outras palavras,  $a \in A$ . Para qualquer conjunto  $A$  tem-se assim

$$(1) \quad \text{int}(A) \subset A.$$

**b)** Diz-se que um ponto  $a \in X$  é *exterior* a  $A$  se for interior a  $X \setminus A$  ou, o que é o mesmo, se não for aderente a  $A$ . Nota-se  $\text{ext}(A)$  o conjunto dos pontos exteriores a  $A$  (o *exterior* de  $A$ ), tendo-se assim

$$\text{ext}(A) = \text{int}(X \setminus A) = X \setminus \text{ad}(A).$$

Repare-se que, pelo que foi referido em a), qualquer ponto exterior a  $A$  pertence a  $X \setminus A$ , por outras palavras, nenhum ponto exterior a  $A$  pertence a  $A$ , ou ainda

$$(2) \quad \text{ext}(A) \subset X \setminus A, \quad \text{ext}(A) \cap A = \emptyset.$$

c) Diz-se que um ponto  $a \in X$  é *fronteiro* a  $A$  se não for interior nem exterior a  $A$ , isto é, se for aderente simultaneamente a  $A$  e a  $X \setminus A$ . Nota-se  $\text{fr}(A)$  o conjunto dos pontos fronteiros a  $A$  (a *fronteira* de  $A$ ), tendo-se assim

$$\text{fr}(A) = \text{ad}(A) \cap \text{ad}(X \setminus A).$$

Note-se que das fórmulas destacadas (1) e (2) decorre trivialmente que  $\text{int}(A)$  e  $\text{ext}(A)$  não têm elementos comuns e portanto tem-se

$$X = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \text{fr}(A),$$

onde os três conjuntos no segundo membro são disjuntos dois a dois.

O diagrama a seguir poderá ajudar a lembrar as relações que são sempre verificadas entre os conjuntos que associámos a um subconjunto  $A$  de  $X$ .

$X$		
$A$	$X \setminus A$	
$\text{ad}(A)$		
	$\text{ad}(X \setminus A)$	
$\text{int}(A)$	$\text{fr}(A)$	$\text{ext}(A)$

**1.3.2 (Caracterização pelos sistemas fundamentais de vizinhanças)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $a \in X$  e  $\mathcal{B}_a$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  (por exemplo, a classe de todas as vizinhanças de  $a$ ). Relembremos que, como referimos em 1.2.8,  $a$  é aderente a  $A$  se, e só se, para cada  $W \in \mathcal{B}_a$  tem-se  $W \cap A \neq \emptyset$ . Utilizando este facto, obtemos a partir das caracterizações referidas em 1.3.1, as seguintes caracterizações:

**a)** O ponto  $a$  é interior a  $A$  se, e só se, existir  $W \in \mathcal{B}_a$  tal que  $W \cap (X \setminus A) = \emptyset$  por outras palavras, se, e só se, existir  $W \in \mathcal{B}_a$  tal que  $W \subset A$ . Em particular, e recordando a definição de sistema fundamental de vizinhanças, podemos dizer que  $a$  é interior a  $A$  se, e só se,  $A$  é uma vizinhança de  $a$ .

**b)** O ponto  $a$  é exterior a  $A$  se, e só se, existir  $W \in \mathcal{B}_a$  tal que  $W \cap A = \emptyset$  por outras palavras, se, e só se, existir  $W \in \mathcal{B}_a$  tal que  $W \subset X \setminus A$ .

**c)** O ponto  $a$  é fronteiro a  $A$  se, e só se, qualquer que seja  $W \in \mathcal{B}_a$ , tem-se  $W \cap A \neq \emptyset$  e  $W \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ .

Se aplicarmos o resultado precedente no caso em que  $X$  é um espaço métrico e em que tomamos como sistema fundamental de vizinhanças de um ponto o conjunto das bolas abertas de centro nesse ponto, constatamos que as definições que demos, de ponto interior, exterior ou fronteiro, vão ser equivalentes às que o estudante porventura já encontrou no estudo dos espaços métricos (ou, eventualmente, no caso particular de  $\mathbb{R}^n$ ).

Quando o subconjunto, que estamos a examinar, é o conjunto vazio  $\emptyset$  ou o próprio espaço topológico  $X$ , é trivial determinar os respectivos interior, exterior e fronteira:

**1.3.3** Seja  $X$  um espaço topológico. Recordemos que, pelo referido nas alíneas a) e c) de 1.2.10, tem-se  $\text{ad}(\emptyset) = \emptyset$  e  $\text{ad}(X) = X$  (os conjuntos  $\emptyset$  e  $X$  são fechados em  $X$ ). Tendo em conta as definições em 1.3.1 resulta destes factos que:

$$\begin{aligned} \text{int}(\emptyset) &= \emptyset, & \text{ext}(\emptyset) &= X, & \text{fr}(\emptyset) &= \emptyset; \\ \text{int}(X) &= X, & \text{ext}(X) &= \emptyset, & \text{fr}(X) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Analogamente, das propriedades dos pontos aderentes coligidas em 1.2.10 deduzimos facilmente propriedades dos pontos interiores. Para sublinhar o paralelo com as diferentes alíneas de 1.2.10, não deixamos de repetir alguns resultados já referidos atrás.

**1.3.4 (Propriedades dos pontos interiores)** Seja  $X$  um espaço topológico.

Tem-se então:

**a)** Se  $a \in X$ , então  $a$  é interior a  $X$ . Por outras palavras,  $\text{int}(X) = X$ .

**b)** Seja  $A \subset C \subset X$ . Se  $a$  é interior a  $A$  então  $a$  também é interior a  $C$ , por outras palavras,  $\text{int}(A) \subset \text{int}(C)$ .

**c)** Seja  $A \subset X$ . Se  $a$  é interior a  $A$  então  $a \in A$ , por outras palavras,  $\text{int}(A) \subset A$ .

**d)** Se  $A \subset X$  e  $B \subset X$  então um ponto  $a \in X$  é interior a  $A \cap B$  se, e só se, é interior a  $A$  e a  $B$ , por outras palavras

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B).$$

**Dem:** Apesar de as conclusões de a) e c) já terem sido encontradas atrás, vamos provar todas as alíneas por um “método algébrico” que torna claro a relação com as alíneas homónimas de 1.2.10. Relativamente a a),

$$\text{int}(X) = X \setminus \text{ad}(\emptyset) = X \setminus \emptyset = X.$$

Quanto a b), se  $A \subset C$ , vem  $X \setminus C \subset X \setminus A$  donde  $\text{ad}(X \setminus C) \subset \text{ad}(X \setminus A)$  e

$$\text{int}(A) = X \setminus \text{ad}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{ad}(X \setminus C) = \text{int}(C).$$

Relativamente a c), de se ter  $X \setminus A \subset \text{ad}(X \setminus A)$ , deduzimos que

$$\text{int}(A) = X \setminus \text{ad}(X \setminus A) \subset X \setminus (X \setminus A) = A.$$

Por fim, quanto a d), temos uma consequência das leis de de Morgan:

$$\begin{aligned} \text{int}(A \cap B) &= X \setminus \text{ad}(X \setminus (A \cap B)) = X \setminus \text{ad}((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = \\ &= X \setminus (\text{ad}(X \setminus A) \cup \text{ad}(X \setminus B)) = \\ &= (X \setminus \text{ad}(X \setminus A)) \cap (X \setminus \text{ad}(X \setminus B)) = \\ &= \text{int}(A) \cap \text{int}(B). \end{aligned}$$

□



**1.3.5 (Exemplos) a)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual se considera a topologia discreta. Como verificámos na alínea a) de 1.2.14, tem-se  $\text{ad}(A) = A$  para cada  $A \subset X$ . Deduzimos daqui que, se  $A \subset X$  é arbitrário,

$$\begin{aligned}\text{int}(A) &= X \setminus \text{ad}(X \setminus A) = X \setminus (X \setminus A) = A, \\ \text{ext}(A) &= \text{int}(X \setminus A) = X \setminus A, \\ \text{fr}(A) &= \emptyset.\end{aligned}$$

**b)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual se considera a topologia caótica. Como vimos na alínea b) de 1.2.14, tem-se  $\text{ad}(A) = X$  sempre que  $A \neq \emptyset$ . Deduzimos daqui que, sempre que  $A$  não seja nem  $\emptyset$  nem  $X$ ,

$$\begin{aligned}\text{int}(A) &= X \setminus \text{ad}(X \setminus A) = X \setminus X = \emptyset, \\ \text{ext}(A) &= \text{int}(X \setminus A) = \emptyset, \\ \text{fr}(A) &= X.\end{aligned}$$

Nos casos em que  $A = \emptyset$  e em que  $A = X$  temos as caracterizações que referimos em 1.3.3, válidas para qualquer topologia.

**c)** Consideremos em  $\mathbb{R}$  a topologia associada à sua métrica usual. Seja  $a < b$  e consideremos o conjunto  $A = ]a, b[$ . Tem-se então:

$$\text{int}(A) = ]a, b[, \quad \text{ext}(A) = ]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[, \quad \text{fr}(A) = \{a, b\}.$$

Com efeito, uma vez que a união dos conjuntos nos segundos membros é  $\mathbb{R}$ , para justificar o facto enunciado basta mostrar que cada primeiro membro contém o segundo membro correspondente. Ora, se  $x \in ]a, b[$ , podemos considerar  $r > 0$  igual ao mínimo entre  $x - a$  e  $b - x$ , tendo então

$$B_r(x) = ]x - r, x + r[ \subset A,$$

se  $x < a$ , tem-se, com  $r = a - x > 0$ ,

$$B_r(x) = ]x - r, x + r[ \subset X \setminus A,$$

se  $x > b$ , tem-se, com  $r = x - b > 0$ ,

$$B_r(x) = ]x - r, x + r[ \subset X \setminus A,$$

e, se  $r > 0$  é arbitrário, a bola  $B_r(a) = ]a - r, a + r[$  tem elementos em  $A$  (aqueles que estão entre  $a$  e o menor dos números  $b$  e  $a + r$ ) e elementos que não estão em  $A$  (aqueles que estão entre  $a - r$  e  $a$ ) e, analogamente, a bola  $B_r(b) = ]b - r, b + r[$  tem elementos em  $A$  (aqueles que estão entre  $b$  e o maior dos números  $a$  e  $b - r$ ) e elementos que não estão em  $A$  (aqueles que estão entre  $b$  e  $b + r$ ).

**d)** Considerando a topologia usual na reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  e tomando  $A = ]-\infty, b[$ , para um certo  $b \in \mathbb{R}$ , verifica-se, por um método análogo ao que utilizámos na alínea precedente, que

$$\text{int}(A) = ]-\infty, b[, \quad \text{ext}(A) = ]b, +\infty[, \quad \text{fr}(A) = \{b\}.$$

Observe-se que  $-\infty$ , apesar de ser uma das extremidades do intervalo  $A$ , é um ponto interior, uma vez que a vizinhança  $[-\infty, b[$  de  $-\infty$  está contida em  $A$ .

e) Voltando a considerar  $\mathbb{R}$  com a sua topologia usual, para o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais, tem-se

$$\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad \text{ext}(\mathbb{Q}) = \emptyset, \quad \text{fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$$

Com efeito, se  $x \in \mathbb{R}$  é arbitrário, em qualquer intervalo  $]x - r, x + r[$  há sempre números racionais e números irracionais, pelo que  $x \in \text{fr}(\mathbb{Q})$ .

**1.3.6 (Conjuntos abertos)** Se  $X$  é um espaço topológico, diz-se que um subconjunto  $A \subset X$  é *aberto* se se tem  $\text{int}(A) = A$ . Repare-se que, uma vez que, para qualquer subconjunto  $A$ , tem-se sempre  $\text{int}(A) \subset A$ , quando se quer verificar que um conjunto  $A$  é aberto basta verificar a inclusão oposta  $A \subset \text{int}(A)$ , isto é, que todos os pontos de  $A$  são pontos interiores a  $A$  (dito de outro modo, que  $A$  é vizinhança de todos os seus elementos).

**1.3.7 (Relações entre abertos e fechados)** Se  $X$  é um espaço topológico, um conjunto  $A \subset X$  é aberto se, e só se, o complementar  $X \setminus A$  é fechado.

**Dem:** Dizer que  $A$  é aberto é equivalente a dizer que  $A$  coincide com o conjunto  $\text{int}(A) = X \setminus \text{ad}(X \setminus A)$ , ou seja, que  $X \setminus A$  coincide com  $\text{ad}(X \setminus A)$ , isto é, que  $X \setminus A$  é fechado.  $\square$

**1.3.8 (O interior é aberto)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Tem-se então que  $\text{int}(A)$  e  $\text{ext}(A)$  são conjuntos abertos e  $\text{fr}(A)$  é um conjunto fechado.

**Dem:** Vamos ter consequências do facto de a aderência de um conjunto arbitrário ser sempre um conjunto fechado (cf. 1.2.16) uma vez que

$$\begin{aligned} X \setminus \text{int}(A) &= \text{ad}(X \setminus A), \\ \text{ext}(A) &= \text{int}(X \setminus A), \\ \text{fr}(A) &= \text{ad}(A) \cap \text{ad}(X \setminus A), \end{aligned}$$

onde a interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.  $\square$

**1.3.9 (Outra caracterização do interior)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Tem-se então que, para cada conjunto aberto  $C \subset X$  tal que  $C \subset A$ , tem-se também  $C \subset \text{int}(A)$ . De forma mais sugestiva, e lembrando 1.3.8 e a alínea c) de 1.3.4, podemos assim dizer que, de entre os conjuntos abertos contidos em  $A$ , há um que é máximo (no sentido de conter todos os outros), nomeadamente  $\text{int}(A)$ .

**Dem:** Sendo  $C \subset A$  com  $C$  aberto, deduzimos da alínea b) de 1.3.4 que

$$C = \text{int}(C) \subset \text{int}(A). \quad \square$$

**1.3.10 (Sistema fundamental de vizinhanças abertas)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $a \in X$ . A classe  $\mathcal{O}_a$ , de todos os abertos  $A \subset X$  com  $a \in A$ , é então um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ .

**Dem:** Se  $A \in \mathcal{O}_a$ ,  $A$  é vizinhança de todos os seus elementos, em particular é vizinhança de  $a$ . Se  $V$  é uma vizinhança arbitrária de  $a$ , então  $a$  é interior a  $V$ , portanto  $a$  pertence ao conjunto aberto  $\text{int}(V)$  que está contido em  $V$  e contém  $a$ , tendo-se assim  $\text{int}(V) \in \mathcal{O}_a$ .  $\square$

**1.3.11 (Os abertos determinam a topologia)<sup>45</sup>** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos duas topologias.

**a)** A primeira topologia é mais fina que a segunda se, e só se, todo o conjunto aberto para a segunda topologia é também aberto para a primeira.<sup>46</sup>

**b)** Em particular, as duas topologias coincidem se, e só se, têm os mesmos conjuntos abertos.

**Dem:** Poderíamos dar uma justificação baseada nas conclusões de 1.2.29 e nas relações entre abertos e fechados mas preferimos seguir um caminho independente alternativo que tira partido do sistema fundamental de vizinhanças referido em 1.3.10. Começemos por supor que a primeira topologia é mais fina que a segunda. Se  $A$  é um aberto de  $X$  para a segunda topologia então, para cada  $x \in A$ ,  $A$  é vizinhança de  $x$  para a segunda topologia, e portanto também para a primeira, o que mostra que  $A$  é também aberto para a primeira topologia. Suponhamos, reciprocamente que todo o aberto para a segunda topologia é também aberto para a primeira. Se  $V$  é vizinhança de  $x$  para a segunda topologia, então existe um aberto  $A$  para a segunda topologia com  $x \in A \subset V$  e então  $A$  é também aberto para a primeira topologia o que implica que  $V$  é também vizinhança de  $x$  para a primeira topologia. Fica assim provado que a primeira topologia é mais fina que a segunda.  $\square$

**1.3.12 (Propriedades dos abertos)** Seja  $X$  um espaço topológico. Então:

**a)** Os subconjuntos  $\emptyset$  e  $X$  são abertos;

**b)** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos abertos então  $A \cap B$  é também aberto. Mais geralmente, se  $I$  é um conjunto finito não vazio de índices a  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família de subconjuntos abertos, então  $\bigcap A_i$  é também um conjunto aberto.<sup>47</sup>

**c)** Se  $I$  é um conjunto, finito ou infinito, de índices e se  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família de subconjuntos abertos, então  $\bigcup A_i$  é também um conjunto aberto. Em particular, se  $A$  e  $B$  são subconjuntos abertos, também  $A \cup B$  é aberto.

**Dem:** Tendo em conta a relação entre abertos e fechados (cf. 1.3.7) vamos ter consequências das propriedades correspondentes de 1.2.19. No caso de a),  $\emptyset$  é aberto porque o seu complementar  $X$  é fechado e  $X$  é aberto porque o seu complementar  $\emptyset$  é fechado. Quanto a b), basta reparar que, se  $A$  e  $B$  são

<sup>45</sup>Comparar com 1.2.29.

<sup>46</sup>Em linguagem mais sugestiva, a topologia mais fina é aquela que tem mais conjuntos abertos.

<sup>47</sup>A razão por que se exige  $I \neq \emptyset$  é simplesmente a dificuldade em definir a interseção de uma família vazia de conjuntos. Num contexto em que esteja claro que só se está a considerar subconjuntos de  $X$  essa interseção pode ser considerada como sendo igual a  $X$  (os elementos de  $X$  que pertencem a todos os  $A_i \dots$ ) e a conclusão vale ainda por  $X$  ser um conjunto aberto.

abertos, então

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

é fechado por ser união de dois fechados, o complemento sobre as uniões de famílias finitas não vazias resultando naturalmente por indução do número de índices. Quanto a c), no caso em que  $I = \emptyset$  a união é  $\emptyset$ , que já sabemos ser aberto, e, caso contrário, atendemos a que se os conjuntos  $A_i$  são abertos então

$$X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

é fechado, por ser a intersecção de uma família não vazia de conjuntos fechados.  $\square$

**1.3.13 (Exemplos de conjunto aberto) a)** Sejam  $X$  um espaço métrico,  $a \in X$  e  $r > 0$ . A bola aberta  $B_r(a)$  é então um conjunto aberto.

Com efeito, se  $x \in B_r(a)$  podemos considerar  $r' = r - d(a, x) > 0$  e então  $x$  é interior a  $B_r(a)$  por ser  $B_{r'}(x) \subset B_r(a)$ , já que, para cada  $y \in B_{r'}(x)$ ,

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + r' = r,$$

portanto  $y \in B_r(a)$ .

**b)** Relativamente ao espaço métrico  $\mathbb{R}$ , para  $a, b \in \mathbb{R}$ , os conjuntos  $] -\infty, b[$  e  $] a, +\infty[$  são abertos, e portanto o mesmo acontece, no caso em que  $a < b$ , a

$$] a, b[ = ] -\infty, b[ \cap ] a, +\infty[.$$

Com efeito, se  $x \in ] -\infty, b[$ , tomando  $\delta = b - x > 0$ , a bola

$$B_\delta(x) = ] x - \delta, x + \delta[ = ] x - \delta, b[$$

está contida em  $] -\infty, b[$  e, se  $x \in ] a, +\infty[$ , tomando  $\delta = x - a > 0$ , a bola

$$B_\delta(x) = ] x - \delta, x + \delta[ = ] a, x + \delta[$$

está contida em  $] a, +\infty[$ .

**c)** Relativamente ao espaço topológico  $\overline{\mathbb{R}}$ , o subconjunto  $\mathbb{R}$  é trivialmente aberto e, para  $a, b \in \mathbb{R}$ , os conjuntos  $] -\infty, b[$  e  $] a, +\infty[$  são abertos, e portanto o mesmo acontece a

$$] -\infty, b[ = \mathbb{R} \cap ] -\infty, b[, \quad ] a, +\infty[ = \mathbb{R} \cap ] a, +\infty[$$

e, no caso em que  $a < b$ , a

$$] a, b[ = ] -\infty, b[ \cap ] a, +\infty[.$$

A justificação é totalmente análoga à dada em b), depois de reparar que os dois conjuntos referidos no início são trivialmente vizinhanças de  $-\infty$  e de  $+\infty$ , respetivamente.

**d)** Se  $X$  é um conjunto sobre o qual se considera a topologia discreta então

qualquer conjunto  $A \subset X$  é aberto visto que, como referimos na alínea d) de 1.2.20, o seu complementar  $X \setminus A$ , como qualquer subconjunto de  $X$ , é fechado.

e) Se  $X$  é um conjunto sobre o qual se considera a topologia caótica, os únicos subconjuntos abertos são  $\emptyset$  e  $X$  (aqueles que tinham que ser). Com efeito, como referido na alínea e) de 1.2.20, os únicos subconjuntos fechados são  $X$  e  $\emptyset$ .

**1.3.14 (Abertos para uma topologia induzida)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$  um subespaço topológico e  $A \subset X'$  um subconjunto. Tem-se então:<sup>48</sup>

a) O conjunto  $A$  é aberto em  $X'$  se, e só se, existe um conjunto  $B$  aberto em  $X$  tal que  $A = B \cap X'$ . Em particular, se  $A$  é aberto em  $X$  então  $A$  é também aberto em  $X'$ .

b) No caso em que  $X'$  é aberto em  $X$ , podemos dizer que  $A$  é aberto em  $X'$  se, e só se,  $A$  é aberto em  $X$ .

**Dem:** a) Suponhamos que  $A$  é aberto em  $X'$ . Uma vez que  $X' \setminus A$  é fechado em  $X'$ , deduzimos da alínea b) de 1.2.26 que existe  $C$  fechado em  $X$  tal que  $X' \setminus A = C \cap X'$ . O conjunto  $B = X \setminus C$  é então aberto em  $X$  e tem-se  $A = B \cap X'$ . Suponhamos, reciprocamente, que existe  $B$  aberto em  $X$  tal que  $A = B \cap X'$ . Tem-se então  $X' \setminus A = (X \setminus B) \cap X'$ , onde  $X \setminus B$  é fechado em  $X$ , o que implica que  $X' \setminus A$  é fechado em  $X'$  e portanto  $A$  é aberto em  $X'$ . No caso em que  $A \subset X'$  é aberto em  $X$  o facto de se ter  $A = A \cap X'$  implica, pelo que vimos atrás, que  $A$  também é aberto em  $X$ .

b) Supomos agora que  $X'$  é aberto em  $X$  e que  $A \subset X'$ . Já sabemos, em geral, que se  $A$  é aberto em  $X$  então  $A$  é aberto em  $X'$ . Reciprocamente, se  $A$  é aberto em  $X'$  então existe um aberto  $B$  em  $X$  tal que  $A = B \cap X'$  e portanto  $A$ , sendo a intersecção de dois abertos de  $X$ , é também aberto em  $X$ .  $\square$

**1.3.15 (O interior relativo a um subespaço aberto)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$  um aberto sobre o qual consideramos a topologia induzida. Se  $A \subset X'$ , então coincidem os interiores de  $A$  relativos à topologia de  $X$  e à de  $X'$  ou seja, com as notações naturais,

$$\text{int}_{X'}(A) = \text{int}_X(A).$$

**Dem:** Uma vez que  $X'$  é vizinhança de todos os seus pontos e que o interior de um conjunto são os pontos dos quais ele é vizinhança, temos uma consequência direta do que enunciámos na alínea a) de 1.2.22.  $\square$

**1.3.16 (Pontos isolados de um conjunto)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Diz-se que um ponto  $a \in A$  é um *ponto isolado* de  $A$  se o conjunto  $\{a\}$  for uma vizinhança de  $a$  para a topologia de  $A$  induzida pela de  $X$ , isto

<sup>48</sup>Comparar com 1.2.26, reparando que não enunciámos, em geral, um resultado análogo ao da respetiva alínea a); um tal resultado será examinado a seguir mas apenas no caso em que o subespaço é aberto.

é, se existir uma vizinhança  $V$  de  $a$  em  $X$  tal que  $V \cap A = \{a\}$ . Equivalentemente, podemos dizer que  $a \in A$  é um ponto isolado de  $A$  se, e só se,  $\{a\}$  é aberto em  $A$  para a topologia induzida (dizer que  $\{a\}$  é uma vizinhança de  $a$  em  $A$  é o mesmo que dizer que é uma vizinhança de todos os seus elementos...) ou ainda que  $a \in A$  é um ponto isolado de  $A$  se, e só se,  $a$  não for aderente a  $A \setminus \{a\}$  (dizer que  $V \cap A = \{a\}$  é o mesmo que dizer que  $V$  não tem nenhum elemento de  $A \setminus \{a\}$ ).

Em particular, chamam-se pontos isolados de  $X$  os pontos isolados de  $X$  enquanto subconjunto de si mesmo, isto é, os pontos  $a \in X$  tais que  $\{a\}$  é vizinhança de  $a$  em  $X$  (equivalentemente, tais que  $\{a\}$  é aberto em  $X$ ).

**1.3.17 (Conjuntos discretos)** Seja  $X$  um espaço topológico. Diz-se que um conjunto  $A \subset X$  é *discreto* se todos os pontos de  $A$  são isolados. Um conjunto  $A \subset X$  é discreto se, e só se, a topologia induzida em  $A$  pela topologia de  $X$  é a topologia discreta.

**Dem:** Basta atender a que dizer que para cada  $a \in A$  o conjunto  $\{a\}$  é vizinhança de  $a$  para a topologia induzida em  $A$  é o mesmo que dizer que as vizinhanças de  $a$  para a topologia induzida de  $A$  são exatamente os subconjuntos de  $A$  que contêm  $a$ .  $\square$

**1.3.18 (Caracterização de uma topologia pelos abertos)** Sejam  $X$  um conjunto e  $\mathcal{O}$  uma classe de subconjuntos de  $X$  verificando as condições:

a) Tem-se  $\emptyset \in \mathcal{O}$  e  $X \in \mathcal{O}$ ;

b) Se  $A$  e  $B$  pertencem a  $\mathcal{O}$  então  $A \cap B$  também pertence a  $\mathcal{O}$ ;

c) Se  $I$  é um conjunto, finito ou infinito, de índices e se  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família de subconjuntos pertencentes a  $\mathcal{O}$ , então  $\bigcup A_i$  também pertence a  $\mathcal{O}$ .

Existe então uma, e uma só, topologia sobre  $X$  tal que os subconjuntos abertos sejam precisamente aqueles que pertencem a  $\mathcal{O}$ .<sup>49</sup>

**Dem:** O facto de não poder haver mais que uma topologia nas condições referidas é uma consequência de 1.3.11. Para cada  $a \in X$ , seja  $\mathcal{V}_a$  a classe dos conjuntos  $V \subset X$  tais que exista  $A \in \mathcal{O}$ , com  $a \in A \subset V$ . Vamos ver que as classes  $\mathcal{V}_a$  verificam as propriedades na definição de topologia e que, para a topologia assim definida, os conjuntos abertos são precisamente os pertencentes a  $\mathcal{O}$ . Começemos então por verificar as condições nas alíneas a) a e) da definição de topologia em 1.2.1:

a) Trata-se de uma consequência imediata de se ter  $X \in \mathcal{O}$ .

b) É uma condição trivialmente verificada.

c) É uma condição trivialmente verificada.

d) É uma consequência de a intersecção de dois conjuntos em  $\mathcal{O}$  que contenham o ponto  $a$  pertencer a  $\mathcal{O}$  e conter o ponto  $a$ .

e) Suponhamos que  $V \in \mathcal{V}_a$  e seja  $A \in \mathcal{O}$ , tal que  $a \in A \subset V$ ; tem-se então também  $A \in \mathcal{V}_a$  e, para cada  $x \in A$ , vem  $x \in A \subset V$ , donde  $V \in \mathcal{V}_x$ .

Mostrámos assim que a noção de vizinhança que estamos a utilizar define

<sup>49</sup>Repare-se que se alguma das propriedades a), b) ou c) não se verificasse não poderia existir uma topologia de  $X$  nas condições pedidas, tendo em conta 1.3.12.

efetivamente uma topologia.

Suponhamos agora que  $A \in \mathcal{O}$ . Para cada  $x \in A$ , tem-se  $x \in A \subset A$  donde  $A \in \mathcal{V}_x$ , isto é,  $x \in \text{int}(A)$ , o que mostra que  $A$  é um aberto da topologia.

Suponhamos, reciprocamente, que  $A$  é um aberto da topologia e tentemos provar que  $A \in \mathcal{O}$ , para o que podemos já supor que  $A$  não é vazio. Para cada  $x \in A$ , tem-se então  $x \in \text{int}(A)$ , ou seja,  $A \in \mathcal{V}_x$ , pelo que vai existir um conjunto  $A_x \in \mathcal{O}$  tal que  $x \in A_x \subset A$ . É então imediato que a união dos conjuntos  $A_x$ , com  $x \in A$ , é igual a  $A$ , o que, por hipótese, implica que  $A \in \mathcal{O}$ .  $\square$

**1.3.19 (Construção de topologias por colagem aberta)** Sejam  $X$  um conjunto,  $J$  um conjunto, finito ou infinito, de índices e  $(X_j)_{j \in J}$  uma família de subconjuntos de  $X$  tal que  $\bigcup X_j = X$ . Suponhamos que cada  $X_j$  está munido de uma topologia e que estas topologias verificam a seguinte condição de compatibilidade: Quaisquer que sejam os índices  $j, j' \in J$  o conjunto  $X_j \cap X_{j'}$  é aberto tanto em  $X_j$  como em  $X_{j'}$  e as topologias induzidas em  $X_j \cap X_{j'}$  pelas topologias de  $X_j$  e de  $X_{j'}$  coincidem<sup>50</sup>. Existe então uma, e uma só, topologia de  $X$  tal que, para cada  $j \in J$ , o subconjunto  $X_j$  seja aberto nessa topologia e a topologia induzida em  $X_j$  seja a considerada à partida. Os abertos desta topologia de  $X$ , que dizemos ser a *colagem aberta* das topologias dadas nos  $X_j$ , são os subconjuntos  $U \subset X$  para os quais  $U \cap X_j$  é aberto para a topologia dada de  $X_j$ , para cada  $j \in J$ .

**Dem:** Suponhamos que existia uma topologia em  $X$  verificando as condições pedidas. Se  $U \subset X$  for aberto para essa topologia então para cada  $j \in J$  o conjunto  $U \cap X_j$  também é aberto para essa topologia e portanto também para a topologia induzida em  $X_j$ , que é a topologia dada em  $X_j$  (cf. a alínea a) de 1.3.14). Suponhamos, reciprocamente, que  $U \subset X$  é tal que para cada  $j \in J$  o conjunto  $U \cap X_j$  é aberto para a topologia dada de  $X_j$ , que coincide com a induzida pela de  $X$ . Para cada  $j$  o conjunto  $U \cap X_j$  é também aberto para a topologia de  $X$  (cf. a alínea b) de 1.3.14) e o facto de se ter  $X = \bigcup X_j$  implica que

$$U = \bigcup (U \cap X_j)$$

é aberto em  $X$ . Ficou assim provada a unicidade de uma topologia nas condições do enunciado. Para provar a existência vamos utilizar 1.3.11, considerando a classe  $\mathcal{O}$  dos subconjuntos  $U \subset X$  tais que  $U \cap X_j$  é aberto em  $X_j$  para cada  $j \in J$ . O facto de se ter  $\emptyset \cap X_j = \emptyset$  e  $X \cap X_j = X_j$  mostra que  $\emptyset$  e  $X$  pertencem à classe  $\mathcal{O}$ . As igualdades

$$\left( \bigcup_k U_k \right) \cap X_j = \bigcup_k (U_k \cap X_j)$$

<sup>50</sup>Reparar que esta condição encontra-se automaticamente verificada sempre que  $X_j \cap X_{j'} = \emptyset$ .

e

$$(U \cap V) \cap X_j = (U \cap X_j) \cap (V \cap X_j)$$

implicam que a união de uma família arbitrária de conjuntos de  $\mathcal{O}$  é ainda um conjunto de  $\mathcal{O}$  e que a interseção de dois conjuntos de  $\mathcal{O}$  é ainda um conjunto de  $\mathcal{O}$ . Tendo em conta 1.3.11, podemos considerar uma topologia em  $X$  cujos conjuntos abertos são exatamente aqueles que pertencem a  $\mathcal{O}$ . Para esta topologia, cada conjunto  $X_k$  é aberto visto que, por uma das hipóteses de compatibilidade, para cada  $j$  a interseção  $X_k \cap X_j$  é aberta em  $X_j$ .

Falta-nos assim apenas provar que a topologia induzida pela topologia que definimos em  $X$  em cada  $X_k$  coincide com a topologia dada à partida, para o que basta verificar que ambas têm os mesmos abertos. Começemos por supor que  $U \subset X_k$  é aberto para a topologia induzida. Tem-se então  $U = \widehat{U} \cap X_k$  para um certo aberto  $\widehat{U}$  de  $X$  e então, pela definição da classe  $\mathcal{O}$ ,  $U$  é aberto em  $X_k$  para a topologia dada. Suponhamos enfim que, reciprocamente,  $U \subset X_k$  é aberto para a topologia original de  $X_k$ . Para cada índice  $j$  podemos concluir que

$$U \cap X_j = U \cap (X_k \cap X_j)$$

é aberto em  $X_k \cap X_j$  com a topologia induzida em  $X_k \cap X_j$  pela topologia original de  $X_k$  a qual, por uma das hipóteses de compatibilidade, coincide com a topologia induzida em  $X_k \cap X_j$  pela topologia original de  $X_j$  e portanto  $U \cap X_j$  também é aberto em  $X_j$  para a sua topologia original (cf. a alínea b) de 1.3.14). Pela definição da classe  $\mathcal{O}$  concluímos que  $U$  é aberto em  $X$  e portanto também em  $X_k$  com a topologia induzida pela de  $X$  (cf. a alínea a) de 1.3.14).  $\square$

**1.3.20 (Bases de abertos)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{B}$  uma classe formada por alguns dos abertos de  $X$ . São então equivalentes as duas condições seguintes:

- a) Para cada aberto  $U$  de  $X$  e cada  $a \in U$  existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $a \in V \subset U$ .  
 b) Para cada aberto  $U$  de  $X$  existe um conjunto (eventualmente vazio) de índices e uma família  $(V_i)_{i \in I}$  de conjuntos de  $\mathcal{B}$  tais que  $U = \bigcup V_i$ .<sup>51</sup>  
 Quando elas se verificam dizemos que  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos de  $X$ .

**Dem:** Suponhamos que se verifica a). Se  $U$  é um aberto de  $X$  podemos considerar, para cada  $a \in U$ , um conjunto  $V_a$  de  $\mathcal{B}$  tal que  $a \in V_a \subset U$ ; Tem-se então

$$U = \bigcup_{a \in U} V_a,$$

o que mostra que também se verifica b). Suponhamos, reciprocamente, que se verifica b). Dados um aberto  $U$  de  $X$  e  $a \in U$ , podemos considerar uma

<sup>51</sup>Reparar que se o conjunto de índices  $I$  é vazio então a união é o conjunto vazio.



família  $(V_i)_{i \in I}$  de conjuntos de  $\mathcal{B}$  tal que  $U = \bigcup V_i$ . Existe então um índice  $i$  tal que  $a \in V_i$  e  $V_i$  é assim um conjunto de  $\mathcal{B}$  que contém  $a$  e está contido em  $U$ , o que mostra que se verifica b).  $\square$

**1.3.21 (Base de abertos dum subespaço)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{B}$  uma base de abertos de  $X$ . Se  $X' \subset X$  é um subespaço topológico então a classe  $\mathcal{B}'$ , das interseções  $U \cap X'$  com  $U \in \mathcal{B}$ , é uma base de abertos de  $X'$ .

**Dem:** Cada  $U \in \mathcal{B}$  é um aberto de  $X$  e portanto para cada  $U \in \mathcal{B}$  a interseção  $U \cap X'$  é um aberto de  $X'$ . Suponhamos agora que  $V'$  é um aberto de  $X'$  e que  $a \in V'$ . Existe então um aberto  $V$  de  $X$  tal que  $V' = V \cap X'$ , em particular  $a \in V$  e podemos assim considerar  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $a \in U \subset V$ . Tem-se então  $U \cap X' \in \mathcal{B}'$  e

$$a \in U \cap X' \subset V \cap X' = V'. \quad \square$$

**1.3.22 (Exemplos) a)** Seja  $X$  um espaço topológico arbitrário. A classe  $\mathcal{O}$  de todos os abertos de  $X$  é uma base de abertos de  $X$ , tal como o é a classe  $\mathcal{O}_* \subset \mathcal{O}$  constituída pelos abertos não vazios. Com efeito, dados um aberto  $U$  e  $a \in U$ , o conjunto  $U \in \mathcal{O}_*$  verifica  $a \in U \subset U$ .

**b)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual se considera a topologia discreta.

A classe  $\mathcal{B}$  dos conjuntos unitários  $\{a\}$ , com  $a \in X$  é então uma base de abertos. Com efeito, se  $U \subset X$  é aberto (isto é, é um subconjunto arbitrário) e se  $a \in U$ , então  $\{a\}$  é um conjunto de  $\mathcal{B}$  que contém  $a$  e está contido em  $U$ .

De facto, podemos garantir que qualquer base de aberto  $\mathcal{B}'$  de  $X$  tem que conter pelo menos todos os conjuntos  $\{a\}$  com  $a \in X$ , uma vez que, considerando o aberto  $\{a\}$ , o único conjunto que contém  $a$  e está contido em  $\{a\}$  é  $\{a\}$ .

**c)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual se considera a topologia caótica. A classe  $\mathcal{B}$  constituída pelo único subconjunto  $X$  é então uma base de abertos de  $X$ . Trata-se de um caso particular do que dissémos em a), uma vez que os únicos abertos de  $X$  são  $\emptyset$  e  $X$  e portanto  $\mathcal{B}$  é a classe dos abertos não vazios de  $X$ .

**d)** Consideremos a reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  com a sua topologia usual. Este espaço topológico admite uma base de abertos  $\mathcal{B}$  constituída pelos intervalos  $]a, b[$ , com  $a < b$  em  $\mathbb{Q}$ , pelos intervalos  $[-\infty, a[$ , com  $a \in \mathbb{Q}$ , e pelos intervalos  $]b, +\infty]$ , com  $b \in \mathbb{Q}$ . Com efeito, como já referimos na alínea c) de 1.3.13, estes conjuntos são abertos de  $\overline{\mathbb{R}}$  e, por outro lado, se  $U$  é um aberto arbitrário de  $\overline{\mathbb{R}}$  e  $c \in U$  vemos que: Se  $c \in \mathbb{R}$ , podemos considerar  $r > 0$  tal que  $]c - r, c + r[ \subset U$  e tomar números racionais  $a \in ]c - r, c[$  e  $b \in ]c, c + r[$ , tendo-se então  $c \in ]a, b[ \subset U$  com  $]a, b[ \in \mathcal{B}$ ; Se  $c = -\infty$  podemos considerar  $a'$  tal que  $[-\infty, a'[ \subset U$  e tomar  $a < a'$  em  $\mathbb{Q}$  tendo-se então  $-\infty \in [-\infty, a[ \subset U$  com  $[-\infty, a[ \in \mathcal{B}$ ; Se  $c = +\infty$  podemos considerar  $b'$  tal que  $]b', +\infty] \subset U$  e tomar  $b > b'$  em  $\mathbb{Q}$  tendo-se então  $+\infty \in ]b, +\infty] \subset U$  com  $]b, +\infty] \in \mathcal{B}$ .

**e)** Com justificação análoga, e mais simples, que a dada em d), vemos que  $\mathbb{R}$

com a sua topologia usual admite uma base de abertos constituída pelos intervalos  $]a, b[$ , com  $a < b$  em  $\mathbb{Q}$ .

Observe-se que esta base de abertos é “melhor” (tem menos abertos) que a que se obém a partir da base de abertos de  $\overline{\mathbb{R}}$  considerada em d) por aplicação de 1.3.21, uma vez que esta última tem, além dos intervalos  $]a, b[$  de extremidades racionais, também os intervalos dos tipos  $] -\infty, a[$  e  $]b, +\infty[$  com  $a$  e  $b$  racionais.

**1.3.23 (Bases de abertos e sistemas fundamentais de vizinhanças)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{B}$  uma base de abertos de  $X$ . Para cada  $a \in X$  a classe  $\mathcal{B}_a$ , constituída pelos conjuntos  $U \in \mathcal{B}$  tais que  $a \in U$ , é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ .

**Dem:** Uma vez que os conjuntos de  $\mathcal{B}_a$  são abertos que contêm  $a$ , estes conjuntos são vizinhanças de  $a$ . Sendo agora  $V$  uma vizinhança de  $a$ , o interior  $\text{int}(V)$  é um aberto de  $X$  que contém  $a$  pelo que existe  $U \in \mathcal{B}$  com

$$a \in U \subset \text{int}(V) \subset V,$$

em particular  $U \in \mathcal{B}_a$ . □

A noção de base de abertos intervém na definição de um tipo de espaço topológico importante em várias situações. Apresentamos simultaneamente outra noção, que, não dependendo da consideração de bases de abertos, apresenta relações notáveis com a que referimos atrás. Uma característica comum destas duas noções é a de fazer intervir o facto de certos conjuntos serem contáveis (isto é, finitos ou numeráveis). Admitimos assim que o leitor conhece as propriedades básicas da noção de conjunto contável.

**1.3.24** Dizemos que um espaço topológico  $X$  é *de base contável*<sup>52</sup> (em inglês “second countable”) se admitir uma base de abertos  $\mathcal{B}$  que seja contável. Diz-se que um espaço topológico  $X$  é *separável* se existe uma parte contável  $A \subset X$  que seja densa.

Por exemplo, lembrando o que foi visto na alínea e) de 1.3.22 e na alínea c) de 1.2.20, vemos que  $\mathbb{R}$ , com a topologia usual é simultaneamente de base contável e separável (recordar que o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é numerável).

É também evidente que se  $X$  é um espaço topológico contável então  $X$  é separável ( $X$  é uma parte densa de si mesmo).

**1.3.25** Se  $X$  é um espaço topológico de base contável e  $X' \subset X$  é um subespaço topológico, então  $X'$  é também de base contável.

**Dem:** Basta atender a que, se  $\mathcal{B}$  é um base contável de abertos de  $X$  então a

<sup>52</sup>Comparar com a noção de espaço topológico de tipo contável introduzida no exercício 1.2.4.

classe  $B'$ , das interseções  $U \cap X'$  com  $U \in \mathcal{B}$ , é também contável e constitui uma base de abertos de  $X'$  (cf. 1.3.21).  $\square$

**1.3.26 (Todo o espaço de base contável é separável)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\mathcal{B}$  uma base de abertos de  $X$ . Para cada conjunto não vazio  $U \in \mathcal{B}$  escolhemos um dos seus elementos  $x_U$ . Tem-se então que o conjunto  $A$  dos elementos escolhidos  $x_U$  é denso.

Em consequência, se  $X$  é um espaço topológico de base contável então  $X$  também é separável.

**Dem:** Começemos por provar a primeira afirmação. Seja  $a \in X$  arbitrário e provemos que  $a$  é aderente a  $A$ . Ora, se  $V$  é uma vizinhança arbitrária,  $\text{int}(V)$  é um aberto de  $X$  que contém  $a$  pelo que podemos considerar  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $a \in U \subset \text{int}(V)$ ; O correspondente elemento  $x_U \in A$  é então um elemento de  $V$  o que prova que  $a$  é efetivamente aderente a  $A$ . A segunda afirmação é uma consequência da primeira uma vez que, se a base de abertos  $\mathcal{B}$  de partida é um conjunto contável o correspondente conjunto  $A$  dos elementos escolhidos  $x_U$  é também contável.  $\square$

**1.3.27 (Todo o espaço métrico separável é de base contável)** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $A \subset X$  um subconjunto denso. A classe  $\mathcal{B}$  de todas as bolas abertas  $B_r(a)$  com  $a \in A$  e  $r > 0$  racional é então uma base de abertos de  $X$ . Em consequência, se um espaço métrico  $X$  é separável, então é também de base contável.

**Dem:** Suponhamos que  $A \subset X$  é um conjunto denso e seja  $\mathcal{B}$  a classe das bolas abertas  $B_r(a)$  com  $a \in A$  e  $r > 0$  racional. Sejam  $V$  um aberto de  $X$  e  $b \in V$ . Seja  $r > 0$  tal que  $B_r(b) \subset V$  e consideremos um racional  $r'$  com  $0 < r' < r/2$ . Tendo em conta o facto de  $b$  ser aderente a  $A$  podemos escolher  $a \in A$  na vizinhança  $B_{r'}(b)$ . Tem-se assim  $d(a, b) < r'$  pelo que  $b$  pertence ao conjunto  $B_{r'}(a)$  da classe  $\mathcal{B}$  e este conjunto está contido em  $V$  visto que, se  $x \in B_{r'}(a)$  vem

$$d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) < r' + r' = 2r' < r$$

portanto  $x \in B_{r'}(a) \subset V$ . Ficou assim provado que a classe  $\mathcal{B}$  é uma base de abertos de  $X$ . No caso em que o espaço métrico  $X$  é separável, podemos considerar uma parte densa  $A \subset X$  que seja contável e então a correspondente classe  $\mathcal{B}$  é também contável (trata-se de uma consequência simples do produto cartesiano de conjuntos contáveis ser contável e de a imagem de um conjunto contável por uma aplicação ser também contável), o que mostra que  $X$  é de base contável.  $\square$

Os dois resultados precedentes mostram que, para um espaço métrico  $X$ , é equivalente ser separável ou ser de base contável. Pelo contrário, como veremos no exercício 1.3.5 adiante, pode acontecer que um espaço topológico (necessariamente não metrizável) seja separável sem que seja de base contável. Embora nada nos garanta que um subespaço topológico dum espaço separável tenha que ser separável (salvo no caso dos espaços

métricos em que ser separável equivale a ter base contável e podemos aplicar 1.3.25), podemos garantir conclusões elementares que “funcionam em sentido oposto”.

**1.3.28 (Condições suficientes para a separabilidade)** Seja  $X$  um espaço topológico. Tem-se então:

- a)** Se  $X' \subset X$  é um subconjunto denso e  $X'$  é separável então  $X$  é separável.  
**b)** Se  $J$  é um conjunto contável de índices e se  $(X_j)_{j \in J}$  é uma família de subconjuntos separáveis com  $\bigcup X_j = X$  então  $X$  é separável.

**Dem: a)** Seja  $A \subset X'$  um conjunto contável denso em  $X'$ . Notando  $\text{ad}(A)$  a aderência de  $A$  relativa ao espaço topológico  $X$ , tem-se assim  $X' \subset \text{ad}(A)$  e portanto, por  $\text{ad}(A)$  ser um subconjunto fechado de  $X$ , resulta de 1.2.17 que

$$X = \text{ad}(X') \subset \text{ad}(A),$$

o que mostra que  $A$  também é denso em  $X$ .

**b)** Seja, para cada  $j \in J$ ,  $A_j \subset X_j$  um subconjunto contável denso em  $X_j$ . Tem-se então que  $A = \bigcup A_j$  é um subconjunto contável de  $X$  denso em  $X$ , uma vez que se  $x \in X$  então existe  $j$  tal que  $x \in X_j$  pelo que  $X$  é aderente a  $A_j$  e portanto também a  $A$  que contém  $A_j$ .  $\square$

O resultado que examinamos a seguir pode servir, por exemplo, para mostrar que um dado espaço topológico não é de base contável (e portanto, no caso de ser um espaço métrico, não é separável).

**1.3.29** Seja  $X$  um espaço topológico de base contável. Então qualquer subconjunto discreto  $A \subset X$  (cf. 1.3.17) é contável.

**Dem:** Seja  $\mathcal{B}$  uma base contável de abertos de  $X$ . Para cada  $a \in A$  o facto de  $\{a\}$  ser aberto em  $A$  implica a existência de um aberto  $U'_a$  de  $X$  tal que  $A \cap U'_a = \{a\}$  pelo que, escolhendo  $U_a \in \mathcal{B}$  tal que  $a \in U_a \subset U'_a$  tem-se ainda  $A \cap U_a = \{a\}$ . Se  $a \neq b$  em  $A$ , tem-se  $U_a \neq U_b$ , uma vez que  $b \in U_b$  e  $b \notin U_a$ . Constatamos assim que a aplicação  $a \mapsto U_a$  de  $A$  para  $\mathcal{B}$  é injetiva pelo que, por  $\mathcal{B}$  ser contável,  $A$  é também contável.  $\square$

## Exercícios

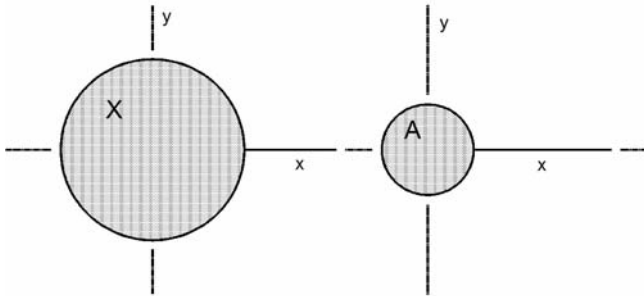
**Ex 1.3.1** Considerando a recta acabada  $\overline{\mathbb{R}}$ , com a topologia usual, verificar qual o interior, o exterior, a fronteira e a aderência de cada um dos seguintes conjuntos:

- a)**  $\mathbb{N}$ ; **b)**  $[-\infty, 0] \cup \mathbb{N}$ ; **c)**  $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ; **d)**  $\mathbb{R}$ .

**Ex 1.3.2** Considerar em  $\mathbb{R}$  a topologia inferior, definida no exercício 1.2.6.

- a) Dizer quais os pontos interiores, exteriores e fronteiros ao conjunto  $] -\infty, 4[$ , relativamente a esta topologia.  
 b) Lembrando as conclusões do exercício referido, determinar quais os subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que são abertos para esta topologia.

**Ex 1.3.3** Seja  $X$  o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  formado pelos pontos  $(x, y)$  tais que, ou  $x^2 + y^2 \leq 1$ , ou  $x \geq 0$  e  $y = 0$ , e consideremos sobre  $X$  a topologia induzida pela topologia canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $A$  o subconjunto de  $X$  formado pelos pontos  $(x, y)$  tais que, ou  $x^2 + y^2 \leq 1/4$ , ou  $x \geq 0$  e  $y = 0$ .



Determinar, sem a preocupação de fazer demonstrações explícitas, quais os pontos interiores, exteriores e fronteiros a  $A$ , relativamente à topologia de  $X$ .

**Ex 1.3.4** Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico de base contável, então  $X$  é também de tipo contável (cf. o exercício 1.2.4). **Sugestão:** Ter em conta 1.3.23.

**Ex 1.3.5 (Exemplo de espaço separável e sem base contável)** Considerar em  $\mathbb{R}$  a topologia direita, definida no exercício 1.2.8

- a) Determinar os pontos interiores, exteriores e fronteiros ao intervalo  $]2, 5[$  relativamente à topologia direita.  
 b) Verificar que, se  $a < b$ , então o intervalo  $[a, b[$  é simultaneamente aberto e fechado, para a topologia direita. O que será a fronteira de um tal intervalo  $[a, b[$ ?  
 c) Verificar que o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é denso em  $\mathbb{R}$  com a topologia direita e que, em consequência,  $\mathbb{R}$  com a topologia direita é um espaço topológico separável.  
 d) Verificar que  $\mathbb{R}$  com a topologia direita é um espaço de tipo contável (cf. o exercício 1.2.4) mas não é um espaço de base contável. **Sugestão:** Mostrar que uma base de abertos  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}$  com a topologia direita não pode ser contável. Para isso, lembrar que  $\mathbb{R}$  não é contável e mostrar que, para cada  $a \in \mathbb{R}$  tem que existir algum conjunto  $U \in \mathcal{B}$  que tenha  $a$  como mínimo.  
 e) Mostrar que  $\mathbb{R}$  com a topologia direita não é metrizável (cf. 1.2.1).

**Ex 1.3.6** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  e  $B$  duas partes de  $X$ . Mostrar que se tem

$$\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$$

e dar um exemplo em  $\mathbb{R}$  que mostre que se pode ter  $\text{int}(A \cup B) \neq \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ . Raciocinar com os complementares para mostrar que se tem

$$\text{ad}(A \cap B) \subset \text{ad}(A) \cap \text{ad}(B)$$

e dar um exemplo em  $\mathbb{R}$  que mostre que se pode ter  $\text{ad}(A \cap B) \neq \text{ad}(A) \cap \text{ad}(B)$ .

**Ex 1.3.7** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Mostrar que  $A$  é simultaneamente aberto e fechado se, e só se,  $\text{fr}(A) = \emptyset$ .

**Ex 1.3.8** Seja  $X$  um espaço topológico. Mostrar que um conjunto  $A \subset X$  é denso se, e só se, qualquer que seja o conjunto aberto não vazio  $U$  de  $X$ ,  $A \cap U \neq \emptyset$ . Deduzir daqui que, se  $A$  e  $B$  são dois abertos densos, então  $A \cap B$  é ainda um aberto denso. Dar um exemplo em  $\mathbb{R}$  que mostre que, em geral, a intersecção de dois conjuntos densos pode não ser um conjunto denso.

**Ex 1.3.9** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$  um subespaço topológico de  $X$  e  $B \subset X'$  um subconjunto arbitrário.

a) Mostrar que  $\text{ext}_{X'}(B) = X' \cap \text{ext}_X(B)$ .

b) Mostrar, com contra-exemplos, que, em geral, as igualdades

$$\text{int}_{X'}(B) = X' \cap \text{int}_X(B), \quad \text{fr}_{X'}(B) = X' \cap \text{fr}_X(B)$$

são falsas.

**Ex 1.3.10** Em 1.3.19 estabelecemos a existência e unicidade de uma topologia, a que demos o nome de colagem aberta das topologias dadas nos subconjuntos, mediante certas hipóteses de compatibilidade das topologias dadas. Mostrar que na ausência de alguma dessas hipóteses de compatibilidade não seria possível existir uma tal colagem aberta.

**Ex 1.3.11 (Caracterização de uma topologia pelos conjuntos fechados)** Sejam  $X$  um conjunto e  $\mathcal{C}$  uma classe de partes de  $X$  verificando as seguintes propriedades:

a) Tem-se  $\emptyset \in \mathcal{C}$  e  $X \in \mathcal{C}$ ;

b) Se  $A$  e  $B$  pertencem a  $\mathcal{C}$  então  $A \cup B$  também pertence a  $\mathcal{C}$ ;

c) Se  $I$  é um conjunto não vazio, finito ou infinito, de índices e se  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família de subconjuntos pertencentes a  $\mathcal{C}$ , então  $\bigcap A_i$  também pertence a  $\mathcal{C}$ .

Mostrar que existe então uma, e uma só, topologia sobre  $X$  cujos conjuntos fechados sejam precisamente aqueles que pertencem a  $\mathcal{F}$ .<sup>53</sup> **Sugestão:** Aplicar o resultado 1.3.11 à classe  $\mathcal{O}$  dos complementares dos conjuntos pertencentes a  $\mathcal{F}$ .

**Ex 1.3.12** Seja  $X$  um espaço topológico. Diz-se que um conjunto  $A \subset X$  é *sequencialmente fechado* se, sempre que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos de  $A$  admitindo um limite  $a \in X$ , tem-se  $a \in A$ .

a) Mostrar que, se  $A \subset X$  é um conjunto fechado então  $A$  é também sequencialmente fechado.

b) Lembrando 1.2.56, mostrar que se o espaço topológico  $X$  é metrizável então todo o subconjunto  $A \subset X$  sequencialmente fechado é também fechado.

c) Mostrar que se pode definir em  $X$  uma nova topologia cujos conjuntos fechados são aqueles que são sequencialmente fechados relativamente à topologia inicial e que esta nova topologia é mais fina que a topologia inicial.

**Ex 1.3.13 (Caracterização de uma topologia pela noção de aderência)** Sejam  $X$  um conjunto,  $\mathcal{P}(X)$  a classe de todas as partes de  $X$  e  $\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  uma aplicação

<sup>53</sup>Repare-se que se alguma das propriedades a), b) ou c) não se verificasse não poderia existir uma topologia de  $X$  nas condições pedidas, tendo em conta 1.2.19.

verificando as seguintes condições:

- a) Para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$  tem-se  $A \subset \varphi(A)$ ;
- b)  $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ ;
- c) Quaisquer que sejam  $A, B \in \mathcal{P}(A)$  tem-se  $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$ ;
- d) Para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$  tem-se  $\varphi(\varphi(A))$ .

Mostrar que existe então uma, e uma só, topologia sobre  $X$  tal que para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$  a aderência de  $A$  seja  $\varphi(A)$ .<sup>54</sup> **Sugestão:** Considerar a classe  $\mathcal{C}$  dos subconjuntos  $A$  tais  $\varphi(A) = A$ , deduzir da condições a), b) e c) que esta classe verifica as propriedades referidas no exercício 1.3.11 (poderá ser conveniente deduzir de c) a propriedade  $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \subset \varphi(B)$ ), considerar a topologia cujos fechados são precisamente os conjuntos de  $\mathcal{C}$  e, com o auxílio da condição d), mostrar que se  $A \subset X$  então  $\varphi(A)$  é a aderência de  $A$  para esta topologia.

**Ex 1.3.14 (Colagens fechadas)** Sejam  $X$  um conjunto,  $J$  um conjunto **finito** de índices e  $(X_j)_{j \in J}$  uma família de subconjuntos de  $X$  tal que  $\bigcup X_j = X$ . Suponhamos que cada  $X_j$  está munido de uma topologia e que estas topologias verificam a seguinte condição de compatibilidade: Quaisquer que sejam os índices  $j, j' \in J$  o conjunto  $X_j \cap X_{j'}$  é fechado tanto em  $X_j$  como em  $X_{j'}$  e as topologias induzidas em  $X_j \cap X_{j'}$  pelas topologias de  $X_j$  e de  $X_{j'}$  coincidem<sup>55</sup>. Mostrar que existe então uma, e uma só, topologia de  $X$  tal que, para cada  $j \in J$ , o subconjunto  $X_j$  seja fechado nessa topologia e a topologia induzida em  $X_j$  seja a considerada à partida. Mostrar que os fechados desta topologia de  $X$ , que dizemos ser a *colagem fechada* das topologias dadas nos  $X_j$ , são os subconjuntos  $A \subset X$  para os quais  $A \cap X_j$  é fechado para a topologia dada de  $X_j$ , para cada  $j \in J$ . **Sugestão:** Adaptar a demonstração de 1.3.19 e reparar por que razão só consideramos agora colagens finitas.

**Ex 1.3.15** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$  um subconjunto. Diz-se que um ponto  $a \in X$  é um *ponto de acumulação* de  $A$  se  $a$  for aderente ao conjunto  $A \setminus \{a\}$ . Ao conjunto dos pontos de acumulação de  $A$  dá-se o nome de *conjunto derivado* de  $A$ .

a) Mostrar que se  $a$  é ponto de acumulação de  $A$  então  $a$  é aderente a  $A$ . Reparar que se  $a \notin A$  então  $a$  é ponto de acumulação de  $A$  se, e só se, é aderente a  $A$  e mostrar que se  $a \in A$  então  $a$  é ponto de acumulação de  $A$  se, e só se, não for ponto isolado de  $A$  (cf. 1.3.16).

b) Deduzir de a) que um conjunto  $A$  é fechado se, e só se, todos os pontos de acumulação de  $A$  pertencem a  $A$ .

c) Suponhamos que o espaço topológico  $X$  é de Hausdorff. Mostrar que se  $a$  é um ponto de acumulação de  $A$  então qualquer vizinhança  $V$  de  $a$  em  $X$  tem infinitos elementos de  $A$  e deduzir, em particular, que um subconjunto finito não pode ter nenhum ponto de acumulação. **Sugestão:** Se  $V$  fosse uma vizinhança de  $a$  com  $V \cap A$  finito deduzir de 1.2.49 a existência de uma vizinhança  $V'$  de  $a$  que não interse o conjunto finito  $V \cap (A \setminus \{a\})$  e então a vizinhança  $V \cap V'$  de  $a$  não tem nenhum elemento de  $A \setminus \{a\}$ .

d) Suponhamos ainda que o espaço topológico  $X$  é de Hausdorff. Mostrar que se  $A$  é um subconjunto arbitrário de  $X$  então o conjunto derivado de  $A$  é fechado.

**Sugestão:** Para mostrar que um ponto  $a$  aderente ao conjunto dos pontos de

<sup>54</sup>Repare-se que se alguma das propriedades a), b), c) ou d) não se verificasse não poderia existir uma topologia de  $X$  nas condições pedidas, tendo em conta 1.2.10 e 1.2.16.

<sup>55</sup>Reparar que esta condição encontra-se automaticamente verificada sempre que  $X_j \cap X_{j'} = \emptyset$ .

acumulação de  $A$  tem que ser ponto de acumulação de  $A$ , considerar o sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  constituído pelos abertos que contêm  $a$  e utilizar a conclusão de c).

e) Mostrar que o conjunto  $A$  não tem nenhum ponto de acumulação se, e só se, for fechado e discreto.

**Ex 1.3.16** Se  $X$  é um espaço topológico, diz-se que um conjunto  $A \subset X$  é *localmente fechado* se existir um conjunto aberto  $U$  e um conjunto fechado  $C$  tais que  $A = U \cap C$ .

a) Mostrar que, tanto os conjuntos abertos como os conjuntos fechados, são conjuntos localmente fechados.

b) Mostrar que, se  $X'$  é um subespaço topológico de  $X$ , então um subconjunto  $B$  de  $X'$  é localmente fechado em  $X'$  se, e só se, existe um conjunto  $A \subset X$ , localmente fechado em  $X$ , tal que  $B = X' \cap A$ .

c) Mostrar que, se  $X'$  é um subespaço topológico localmente fechado de  $X$ , então um subconjunto  $B$  de  $X'$  é localmente fechado em  $X'$  se, e só se, é localmente fechado em  $X$ .

d) Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico, então um conjunto  $A \subset X$  é localmente fechado se, e só se, para cada  $x \in A$ , existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$ , em  $X$ , tal que  $A \cap V_x$  seja fechado em  $V_x$ . **Sugestão:** Supondo a condição anterior verificada, tomar para  $U$  a união dos conjuntos  $\text{int}_X(V_x)$ , com  $x \in A$ , e para  $C$  o conjunto  $\text{ad}_X(A)$ .

**Ex 1.3.17** Sejam  $I$  um conjunto não vazio de índices e  $X$  um espaço métrico e consideremos em  $Ap(I, X)$  a topologia da convergência uniforme (cf. 1.2.76). Sendo  $\mathbb{B}(I, X)$  o subconjunto constituído pelas aplicações limitadas, verificar que, para cada  $(a_i)_{i \in I}$  em  $\mathbb{B}(I, X)$  e  $r > 0$ , tem-se  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \subset \mathbb{B}(I, X)$ .<sup>56</sup> Concluir que  $\mathbb{B}(I, X)$  é um subconjunto aberto de  $Ap(I, X)$  para a topologia da convergência uniforme. Mostrar que  $\mathbb{B}(I, X)$  também é um subconjunto fechado de  $Ap(I, X)$  para a topologia da convergência uniforme.

**Ex 1.3.18** Considerar no conjunto  $Ap([0, 1[, \mathbb{R})$ , das aplicações de  $[0, 1[$  em  $\mathbb{R}$ , a topologia da convergência uniforme.

a) Mostrar que, sendo  $\mathcal{C}$  o conjunto das aplicações  $f: [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f(t) > 0$ , para cada  $t \in [0, 1[$ , o conjunto  $\mathcal{C}$  não é nem aberto nem fechado.

b) Determinar o interior do conjunto  $\mathcal{C}$ .

<sup>56</sup>Esta conclusão mostra que na demonstração de 1.2.77 os conjuntos escritos da forma  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) \cap \mathbb{B}(I, X)$  poderiam ter sido substituídos simplesmente por  $\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$ . Não ganharíamos no entanto nada em simplicidade e teríamos sido obrigados a obter nessa demonstração a conclusão deste exercício.



## §4. Funções contínuas e homeomorfismos.

**1.4.1** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Diz-se que  $f$  é *contínua no ponto*  $x_0 \in X$  se,  $f(x_0)$  é um limite de  $f$  quando  $x \rightarrow x_0$  (cf. 1.2.27). Diz-se que  $f$  é uma *aplicação contínua* se  $f$  é contínua em todos os pontos de  $X$ . Como caracterizações alternativas que decorrem das correspondentes caracterizações da noção de limite podemos referir:

**a)** Lembrando a definição de limite em 1.2.27, podemos dizer que  $f$  é contínua no ponto  $x_0$  se, e só se, qualquer que seja a vizinhança  $W$  de  $f(x_0)$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que  $f(V) \subset W$ , por outras palavras, tal que  $f(x) \in W$  para cada  $x \in V$ . Alternativamente, podemos dizer que  $f$  é contínua no ponto  $x_0$  se, e só se, qualquer que seja a vizinhança  $W$  de  $f(x_0)$  a imagem recíproca  $f^{-1}(W)$  é uma vizinhança de  $x_0$  (reparar que  $f(f^{-1}(W)) \subset W$  e que se  $f(V) \subset W$  então  $V \subset f^{-1}(W)$ ).

**b)** Lembrando a caracterização dos limites em termos de sistemas fundamentais de vizinhanças, referida na alínea b) de 1.2.27, podemos dizer que, se  $\mathcal{B}_{x_0}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $x_0$  em  $X$  e  $\mathcal{B}'_{f(x_0)}$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $f(x_0)$  em  $Y$ , a aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é contínua no ponto  $x_0$  se, e só se, qualquer que seja  $W \in \mathcal{B}'_{f(x_0)}$  existe  $V \in \mathcal{B}_{x_0}$  tal que  $f(V) \subset W$ , isto é, tal que  $f(x) \in W$  para cada  $x \in V$ .

**c)** No caso em que  $X$  e  $Y$  são espaços métricos podemos considerar como sistemas fundamentais de vizinhanças dos pontos os constituídos pelas bolas abertas de centros nesses pontos e concluímos que  $f$  é contínua no ponto  $x_0$  se, e só se, qualquer que seja  $\delta > 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que se tenha  $f(B_\varepsilon(x_0)) \subset B_\delta(f(x_0))$ , isto é, tal que

$$d(x, x_0) < \varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \delta.$$

**d)** No caso em que  $X$  é um espaço métrico e  $Y$  é um espaço topológico, podemos deduzir de 1.2.57 que  $f$  é contínua no ponto  $x_0$  se, e só se, qualquer que seja a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $X$  com  $x_n \rightarrow x_0$  tem-se  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

**e)** Voltando ao caso geral em que  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, decorre de 1.2.75 que  $f$  é contínua em  $x_0$  se, e só se, qualquer que seja a sucessão generalizada  $(x_j)_{j \in J}$  com  $x_j \rightarrow x_0$  tem-se  $f(x_j) \rightarrow f(x_0)$ .

O leitor já encontrou decerto a noção de continuidade no contexto particular em que os espaços  $X$  e  $Y$  envolvidos são ambos  $\mathbb{R}$  ou, mais geralmente,  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ . Nesse contexto revelava-se conveniente examinar a continuidade no caso mais geral em que o domínio da aplicação, em vez de ter que ser a totalidade de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^m$ , podia ser uma parte  $A$  de  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{R}^m$ . A razão por que não explicitamos em 1.4.1 a situação aparentemente

mais geral em que o domínio da aplicação seja uma parte  $A$  de  $X$  é a de que essa parte também é um espaço topológico (com a topologia induzida) e podemos portanto sempre colocar-nos no contexto anterior usando  $A$  no papel de  $X$ .

**1.4.2 (Comparação com a situação encontrada em estudos mais elementares)** Suponhamos que  $X$  é  $\mathbb{R}$  ou, mais geralmente,  $\mathbb{R}^m$  e que  $Y$  é  $\mathbb{R}$  ou, mais geralmente,  $\mathbb{R}^n$ . Sejam  $A \subset X$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Tem-se então:

**a)** A aplicação  $f$  é contínua no ponto  $x_0$ , no sentido referido em 1.4.1 considerando o domínio  $A$  como subespaço topológico de  $X$ , se, e só se,  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e, como observado em 1.2.32, para esta afirmação é equivalente considerar  $A$  como espaço topológico ou  $A$  como parte do espaço topológico  $X$ .

Se a definição de continuidade num ponto que encontrou anteriormente neste contexto se tiver baseado na definição de limite, o que acabamos de referir é certamente suficiente para mostrar que neste contexto a definição que foi anteriormente encontrada é equivalente à que vamos a utilizar a partir de agora.

**b)** Considerando a condição de continuidade de  $f$  no ponto  $x_0$  referida na alínea c) de 1.4.1 e tendo em conta o facto trivial de a bola de centro  $x_0$  e raio  $\varepsilon$  no subespaço métrico  $A$  ser igual a  $B_\varepsilon(x_0) \cap A$ , onde  $B_\varepsilon(x_0)$  nota a bola do espaço métrico  $X$ , vemos que a aplicação  $f$  é contínua no ponto  $x_0$ , no sentido referido em 1.4.1 considerando como domínio  $A$  como subespaço topológico de  $X$ , se, e só se, para cada  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f(B_\varepsilon(x_0) \cap A) \subset B_\delta(f(x_0)),$$

por outras palavras, tal que  $d(f(x), f(x_0)) < \delta$  para cada  $x \in A$  com  $d(x, x_0) < \varepsilon$ .

Se a definição de continuidade num ponto que encontrou anteriormente neste contexto se tiver baseado numa condição do tipo  $\delta$ - $\varepsilon$ , o que acabamos de referir é certamente suficiente para mostrar que neste contexto a definição que foi anteriormente encontrada é equivalente à que vamos a utilizar a partir de agora.

**1.4.3 (Condição de Lipschitz e continuidade)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Diz-se que um real  $M \geq 0$  é uma *constante de Lipschitz* para  $f$  se se tem  $d(f(x), f(x')) \leq M d(x, x')$  quaisquer que sejam  $x, x' \in X$ . É claro que então qualquer constante maior que  $M$  é também uma constante de Lipschitz para  $f$ . Diz-se que  $f: X \rightarrow Y$  é *lipschitziana* se admitir alguma constante de Lipschitz  $M \geq 0$ .

Se  $X$  e  $Y$  são espaço métricos e  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação lipschitziana, então  $f$  é uma aplicação contínua.

**Dem:** Seja  $M$  uma constante de Lipschitz para  $f$  que podemos já supor ser diferente de 0 (se 0 for uma constante de Lipschitz então qualquer número

maior que 0 também o é). Seja  $x_0 \in X$  arbitrário. Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar  $\varepsilon = \frac{\delta}{M}$  e constatamos que, para cada  $x \in X$  com  $d(x, x_0) < \varepsilon$  vem

$$d(f(x), f(x_0)) \leq M d(x, x_0) < M\varepsilon = \delta.$$

Ficou assim provada a continuidade de  $f$  no ponto  $x_0$ .  $\square$

**1.4.4** Repare-se que dizer que duas métricas  $d$  e  $d'$  sobre um mesmo conjunto  $X$  são Lipschitz-equivalentes (cf. 1.1.26) é o mesmo que dizer que a aplicação identidade  $Id_X: X \rightarrow X$  é lipschitziana tanto quando se considera a métrica  $d$  no domínio e a métrica  $d'$  no codomínio como quando se considera a métrica  $d'$  no domínio e a métrica  $d$  no codomínio. Tendo em conta esta observação, o próximo resultado é uma generalização de 1.1.35.

**1.4.5 (Aplicações lipschitzianas e conjuntos limitados)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação lipschitziana. Se  $A \subset X$  é um conjunto limitado então o subconjunto  $f(A) \subset Y$  é também limitado.

**Dem:** Sendo  $M$  uma constante de Lipschitz para  $f$  e  $R \geq 0$  tal que  $d(x, x') \leq R$  quaisquer que sejam  $x, x' \in A$ , vemos que, dados  $y, y' \in f(A)$ , vem  $y = f(x)$  e  $y' = f(x')$  com  $x, x' \in A$  donde

$$d(y, y') = d(f(x), f(x')) \leq M d(x, x') \leq MR,$$

o que mostra que  $f(A)$  é efetivamente limitado.  $\square$

**1.4.6 (Composta de aplicações lipschitzianas)** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  duas aplicações lipschitzianas, admitindo as constantes de Lipschitz  $M$  e  $M'$  respetivamente. Tem-se então que a aplicação  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é lipschitziana com a constante de Lipschitz  $MM'$ .

**Dem:** Quaisquer que sejam  $x, x'$  em  $X$  vem

$$d(g(f(x)), g(f(x'))) \leq M' d(f(x), f(x')) \leq M' M d(x, x'). \quad \square$$

**1.4.7 (Exemplo — a continuidade das projeções)** Considerando em  $\mathbb{R}^n$  e em  $\mathbb{R}$  as suas topologias usuais (cf. 1.2.3), para cada  $1 \leq i \leq n$  a *projeção canónica*  $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i,$$

admite a constante de Lipschitz 1, em particular é uma aplicação contínua.

**Dem:** Sabemos que a topologia de  $\mathbb{R}$  é a definida pela métrica associada à norma “valor absoluto” e que a de  $\mathbb{R}^n$  é a definida, por exemplo, pela métrica  $d_\infty$  associada à norma  $\|\cdot\|_\infty$  (cf. 1.1.8). Dados  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , tem-se então

$$d(\pi_i(x), \pi_i(x')) = |x_i - x'_i| \leq \max_j |x_j - x'_j| = d_\infty(x, x'). \quad \square$$

**1.4.8 (Isometrias)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Diz-se que  $f$  é uma *aplicação isométrica* se se tem  $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$  quaisquer que sejam  $x, x' \in X$ . Uma tal aplicação é contínua, uma vez que admite 1 como constante de Lipschitz, e é injetiva uma vez que se for  $f(x) = f(x')$  vem

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) = 0,$$

donde  $x = x'$ . Diz-se que  $f: X \rightarrow Y$  é uma *isometria* se for uma aplicação isométrica bijetiva, caso em que a aplicação inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  é também uma isometria, uma vez que, para  $y, y' \in Y$ ,

$$d(y, y') = d(f(f^{-1}(y)), f(f^{-1}(y'))) = d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

Note-se dados espaços métricos  $X, Y$  e  $Z$  e aplicações isométricas  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$ , conclui-se trivialmente que a composta  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é ainda uma aplicação isométrica.

Vamos agora referir algumas propriedades das aplicações contínuas que são consequências diretas de propriedades que já encontramos para a noção de limite. Para essas propriedades limitamo-nos, como demonstração, a referir quais as propriedades das quais elas decorrem.

**1.4.9** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação constante, de valor  $b$ . Tem-se então que  $f$  é contínua.

**Dem:** Cf. a alínea a) de 1.2.30. □

**1.4.10** Seja  $X$  um espaço topológico. É então contínua a *aplicação identidade*  $Id: X \rightarrow X$ , definida por  $Id(x) = x$ .

**Dem:** Cf. a alínea b) de 1.2.30. □

No resultado precedente estava implícito que considerávamos a mesma topologia no domínio e no codomínio. Por vezes é útil examinar o que se pode dizer quando se consideram duas topologias sobre um mesmo conjunto  $X$ .

**1.4.11 (Topologias mais finas e continuidade)** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos duas topologias. Considerando a *aplicação identidade*  $Id: X \rightarrow X$ , definida por  $Id(x) = x$ , tem-se então que a primeira topologia é mais fina que a segunda se, e só se, esta aplicação é contínua quando no domínio se considera a primeira topologia e no espaço de chegada a segunda. Em particular, as duas topologias coincidem se, e só se, a aplicação identidade  $Id: X \rightarrow X$  for contínua tanto da primeira topologia para a segunda como da segunda para a primeira.

**Dem:** Cf. 1.2.31. □

**1.4.12 (Continuidade nos pontos isolados do domínio)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Tem-se então que  $f$  é contínua em qualquer ponto isolado  $x_0$  de  $X$  (cf. 1.3.16). Em particular, se a topologia de  $X$  é a discreta, todas as aplicações  $f: X \rightarrow Y$  são contínuas.

**Dem:** Se  $W$  é uma vizinhança arbitrária de  $f(x_0)$  em  $Y$  podemos considerar a vizinhança  $V = \{x_0\}$  de  $x_0$  em  $X$  para a qual se tem  $f(x) = f(x_0) \in W$  para cada  $x \in V$ .  $\square$

**1.4.13 (Exemplo)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $Y$  um conjunto sobre o qual consideramos a topologia caótica. Tem-se então que qualquer aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é contínua.

**Dem:** Cf. a alínea d) de 1.2.30.  $\square$

**1.4.14** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $Y' \subset Y$  um subespaço topológico e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação tal que  $f(X) \subset Y'$ . Tem-se então que  $f$  é contínua num ponto  $x_0 \in X$  como aplicação  $X \rightarrow Y$  se, e só se, o é como aplicação  $X \rightarrow Y'$ .

**Dem:** Cf. 1.2.32.  $\square$

**1.4.15** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua num ponto  $x_0 \in X$ . Sendo  $X' \subset X$  com  $x_0 \in X'$ , a restrição  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$  também é contínua em  $x_0$ .

**Dem:** Cf. 1.2.35 e 1.2.36.  $\square$

**1.4.16** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $X'$  e  $X''$  dois subconjuntos de  $X$  com  $X = X' \cup X''$ . Tem-se então:

**a)** Se  $x_0 \in X' \cap X''$  e ambas as restrições  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$  e  $f|_{X''}: X'' \rightarrow Y$  são contínuas no ponto  $x_0$  então  $f: X \rightarrow Y$  é também contínua no ponto  $x_0$ .

**b)** Se  $x_0 \in X'$ ,  $x_0$  não é aderente a  $X''$  e  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$  é contínua no ponto  $x_0$  então  $f: X \rightarrow Y$  é também contínua no ponto  $x_0$ .

**Dem:** Cf. as alíneas a) e b) de 1.2.37.  $\square$

O recíproco de 1.4.15 será, em geral, falso: Por exemplo, a *função de Heaviside*  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

tem restrição contínua ao intervalo  $]-\infty, 0]$  (essa restrição é uma aplicação constante) e, no entanto, ela não é contínua em 0 (O limite quando  $x \rightarrow 0^+$  existe e é igual a  $1 \neq H(0)$ ). Há, no entanto, um caso particular importante em que, da continuidade da restrição de uma aplicação num ponto, se pode deduzir a continuidade da aplicação nesse ponto:

**1.4.17 (Corolário — caráter local da continuidade num ponto)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  e  $X' \subset X$  uma vizinhança de  $x_0$ . Tem-se então que  $f: X \rightarrow Y$  é contínua no ponto  $x_0$  se, e

só se, a restrição  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$  for contínua em  $x_0$ .

**Dem:** Uma das implicações resulta de 1.4.15 e a outra resulta de 1.4.16, tendo em conta o facto de se ter  $X = X' \cup (X \setminus X')$  com  $x_0$  não aderente a  $X \setminus X'$  (por possuir a vizinhança  $X'$  que não intersesta este conjunto).  $\square$

**1.4.18** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua num ponto  $x_0 \in X$ . Se  $A \subset X$  é tal que  $x_0$  seja aderente a  $A$  então  $f(x_0)$  é aderente a  $f(A)$ .

**Dem:** Cf. 1.2.40 aplicado à restrição de  $f$  a  $A$  que, por 1.2.36, ainda tem limite  $f(x_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.4.19 (Corolário — Aplicações contínuas e separabilidade)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua e sobrejetiva. Se  $X$  é separável então  $Y$  também é separável.

**Dem:** Podemos considerar um subconjunto contável denso  $A \subset X$  e então 1.4.18 garante que o conjunto contável  $f(A) \subset Y$  é denso.  $\square$

**1.4.20 (Continuidade da função composta)** Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  espaços topológicos,  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua num ponto  $x_0 \in X$  e  $g: Y \rightarrow Z$  uma aplicação contínua no ponto  $f(x_0)$ . A aplicação composta  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é então contínua no ponto  $x_0$ . Em particular, se  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  são aplicações contínuas então  $g \circ f: X \rightarrow Z$  também é uma aplicação contínua.

**Dem:** Cf. 1.2.41.  $\square$

**1.4.21 (Operações algébricas com funções contínuas)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  duas aplicações contínuas num ponto  $x_0 \in X$ . São então contínuas no ponto  $a$  as funções  $f + g$ ,  $f \times g$  e  $f - g$  de  $X$  para  $\mathbb{R}$ , definidas respetivamente por

$$x \mapsto f(x) + g(x), \quad x \mapsto f(x) \times g(x), \quad x \mapsto f(x) - g(x).$$

Além disso, no caso em que  $g(X) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , é também contínua no ponto  $x_0$  a aplicação  $\frac{f}{g}: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Dem:** Cf. 1.2.50 e 1.2.51.  $\square$

**1.4.22 (Continuidade da função distância)** Seja  $X$  um espaço métrico. Se  $B \subset X$  é um subconjunto não vazio, pode-se considerar-se uma função contínua  $d_B: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d_B(x) = d(x, B)$$

(cf. 1.1.11). Em particular, se  $x_0 \in X$ , podemos considerar  $B = \{x_0\}$  e concluímos que é contínua a aplicação  $d_{x_0}: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d_{x_0}(x) = d(x, x_0).$$

**Dem:** Tendo em conta a desigualdade em 1.1.13, vemos que

$$d(d_B(x), d_B(x')) = |d(x, B) - d(x', B)| \leq d(x, x') < \delta$$

pelo que a aplicação  $d_B$  admite 1 como constante de Lipschitz, sendo portanto contínua (cf. 1.4.3).  $\square$

Vamos agora examinar alguns resultados em que a continuidade (num ponto ou “global”) é caracterizada a partir do estudo das imagens recíprocas de subconjuntos do codomínio. Lembremos a propósito que, quando  $X$  e  $Y$  são conjuntos e  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação, define-se para cada subconjunto  $B \subset Y$  a sua *imagem recíproca*  $f^{-1}(B)$  como sendo o conjunto dos pontos de  $X$  cuja imagem está em  $B$ :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Esta imagem recíproca está definida para uma aplicação arbitrária  $f$  mas, quando  $f$  é bijetiva, e faz portanto sentido considerar a aplicação inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , a imagem recíproca referida coincide com a imagem direta de  $B$  por meio da aplicação  $f^{-1}$ , o que nos tranquiliza quanto ao perigo de eventuais ambiguidades na notação. É importante o leitor habituar-se a reconhecer em certas definições de conjuntos o facto de estes serem imagens recíprocas.

**1.4.23 (Caracterização da continuidade num ponto pelas imagens recíprocas)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Tem-se então que  $f$  é contínua num ponto  $x_0 \in X$  se, e só se, para cada vizinhança  $W$  de  $f(x_0)$ , o conjunto imagem recíproca

$$f^{-1}(W) = \{x \in X \mid f(x) \in W\}$$

é uma vizinhança de  $x_0$ .

**Dem:** O facto de esta condição implicar a continuidade de  $f$  no ponto  $x_0$  resulta da caracterização da continuidade na alínea a) de 1.4.1 por se ter trivialmente  $f(f^{-1}(W)) \subset W$  para qualquer  $W \subset Y$ . Reciprocamente, se  $f$  é contínua em  $x_0 \in X$  e  $W$  é uma vizinhança de  $f(x_0)$ , então, sendo  $V$  uma vizinhança de  $x_0$  tal que  $f(V) \subset W$ , tem-se trivialmente  $V \subset f^{-1}(W)$ , pelo que  $f^{-1}(W)$  é também uma vizinhança de  $x_0$ .  $\square$

**1.4.24 (Caracterização das aplicações contínuas pelos conjuntos abertos)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Tem-se então que  $f$  é contínua se, e só se, qualquer que seja o subconjunto aberto  $W$  de  $Y$ , o subconjunto imagem recíproca

$$f^{-1}(W) = \{x \in X \mid f(x) \in W\}$$

é aberto em  $X$ .

**Dem:** Começemos por supor que  $f$  é contínua e que  $W$  é um aberto de  $Y$ . Para cada  $x_0 \in f^{-1}(W)$ , vem  $f(x_0) \in W$  pelo que  $W$  é uma vizinhança de  $f(x_0)$ , o que, por 1.4.23, implica que  $f^{-1}(W)$  é uma vizinhança de  $x_0$ ; concluimos assim que  $f^{-1}(W)$ , sendo uma vizinhança de cada um dos seus pontos, vai ser um conjunto aberto. Suponhamos agora, reciprocamente, que, para cada aberto  $W$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(W)$  é um aberto de  $X$ . Dado  $x_0 \in A$  arbitrário, tem-se, em particular, que, para cada aberto  $W$  de  $Y$ , com  $f(x_0) \in W$ ,  $f^{-1}(W)$  vai ser um aberto de  $X$ , com  $x_0 \in f^{-1}(W)$ , o qual verifica trivialmente  $f(f^{-1}(W)) \subset W$ , pelo que, lembrando que, por 1.3.10, a classe dos abertos contendo um ponto é um sistema fundamental de vizinhanças desse ponto, concluimos que  $f$  é contínua em  $x_0$ .  $\square$

Note-se que não afirmamos, de modo nenhum, que, para uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$ , a imagem directa de um subconjunto aberto de  $X$  tenha que ser um subconjunto aberto de  $Y$  (pensar, por exemplo, com o que sucede em geral com uma aplicação constante  $f: X \rightarrow Y$ ).

#### 1.4.25 (Caracterização das aplicações contínuas pelos conjuntos fechados)

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Tem-se então que  $f$  é contínua se, e só se, qualquer que seja o subconjunto fechado  $C$  de  $Y$ , o subconjunto imagem recíproca

$$f^{-1}(C) = \{x \in X \mid f(x) \in C\}$$

é fechado em  $X$ .

**Dem:** Suponhamos que  $f$  é contínua e que  $C$  é um subconjunto fechado de  $Y$ . Tem-se então que  $Y \setminus C$  é aberto em  $Y$ , pelo que vem aberto em  $X$  o conjunto

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C),$$

o que implica que  $f^{-1}(C)$  é fechado em  $X$ . Suponhamos, reciprocamente, que, para cada fechado  $C$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(C)$  é fechado em  $X$ . Se  $W$  é aberto em  $Y$ , vem que  $Y \setminus W$  é fechado em  $Y$ , pelo que

$$X \setminus f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \setminus W)$$

é fechado em  $X$  e portanto  $f^{-1}(W)$  é aberto em  $X$ . Fica assim provado que a aplicação  $f$  é contínua.  $\square$

Uma das utilizações mais frequentes dos dois resultados precedentes é a de partir do conhecimento da continuidade de uma aplicação para provar que certos conjuntos são abertos ou fechados.

Por exemplo, para garantir que a hipérbole

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^2$  e que a região



$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$$

é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , atendemos a que tem lugar uma aplicação contínua  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) = xy$ , e reparamos que se tem  $A = f^{-1}(\{1\})$  e  $B = f^{-1}(]-\infty, 1[)$ , onde  $\{1\}$  e  $]-\infty, 1[$  são, respectivamente, um subconjunto fechado e um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$ .

Como segundo exemplo, podemos apresentar justificações mais simples do facto as bolas abertas de um espaço métrico serem conjuntos abertos e de as bolas fechadas serem conjuntos fechados (cf. a alínea a) de 1.3.13 e a alínea a) de 1.2.20). Com efeito, dados  $a \in X$  e  $r > 0$ , podemos considerar a aplicação contínua  $d_a: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d_a(x) = d(x, a)$  (cf. 1.4.22) e reparamos então que  $B_r(a)$  e  $\overline{B}_r(a)$  são as imagens recíprocas por meio de  $d_a$  dos subconjuntos  $]-\infty, r[$  e  $]-\infty, r]$ , respetivamente aberto e fechado em  $\mathbb{R}$ .

**1.4.26 (Continuidade a partir da continuidade das restrições I)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $(X_i)_{i \in I}$  uma família de abertos de  $X$ , tal que  $X = \bigcup X_i$ . Se  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação tal que a restrição  $f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$  seja contínua para cada  $i \in I$  então  $f$  é contínua.

**Dem:** Se  $x_0 \in X$  é arbitrário podemos considerar um índice  $i$  tal que  $x_0 \in X_i$  e então, por  $X_i$  ser aberto,  $X_i$  é uma vizinhança de  $x_0$  pelo que, como referimos em 1.4.17, a continuidade de  $f$  no ponto  $x_0$  decorre da continuidade em  $x_0$  da restrição  $f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$ .  $\square$

**1.4.27 (Formulação alternativa)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação tal que, para cada  $x \in X$ , exista um aberto  $U$  de  $X$  com  $x \in U$  e  $f|_U: U \rightarrow Y$  contínua. Tem-se então que  $f: X \rightarrow Y$  é contínua.

**Dem:** Notando, para cada  $x \in X$ ,  $U_x$  um aberto de  $X$ , com  $x \in U_x$ , tal que  $f|_{U_x}: U_x \rightarrow Y$  seja contínua, a família dos abertos  $U_x$ , com  $x \in X$ , vai ter união  $X$ , pelo que estamos nas condições do resultado precedente.  $\square$

**1.4.28 (Continuidade a partir da continuidade das restrições II)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $(X_i)_{i \in I}$  uma família finita de fechados de  $X$ , tal que  $X = \bigcup X_i$ . Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação tal que, para cada  $i$ , a restrição  $f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$  seja contínua. Tem-se então que a aplicação  $f$  é contínua.<sup>57</sup>

**Dem:** Apesar de ser possível apresentar uma demonstração com o mesmo espírito da precedente (ver o exercício 1.4.24 adiante) vamos utilizar a caracterização da continuidade em 1.4.25. Suponhamos que  $C$  é fechado em  $Y$ . Para cada  $i$  tem-se então que

$$X_i \cap f^{-1}(C) = f_{X_i}^{-1}(C)$$

<sup>57</sup>Repare-se que é essencial que a família dos subconjuntos  $X_i$  seja finita. Se assim não fosse, qualquer aplicação cujo domínio fosse um espaço topológico de Hausdorff era contínua, visto que o seu domínio é união de conjuntos unitários, que são fechados, a sua restrição a cada um desses conjuntos unitários sendo constante, e portanto contínua.

é fechado em  $X_i$  e portanto, uma vez que  $X_i$  é fechado em  $X$ , é também fechado em  $X$ . Conclui-se daqui que  $f^{-1}(C)$ , sendo a união finita dos fechados  $X_i \cap f^{-1}(C)$ , vai ser fechado em  $X$ .  $\square$

Como aplicação típica do resultado precedente, temos a prova de que é contínua a aplicação  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1, & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

(onde consideramos em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}$  as topologias usuais). Para isso, começamos por reparar que a fórmula  $f(x, y) = 1$  é válida, mais geralmente, para  $x^2 + y^2 \geq 1$ , e concluímos então a continuidade de  $f$  da continuidade das suas restrições a cada um dos seguintes conjuntos fechados, de união  $\mathbb{R}^2$ :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\},$$

a continuidade da primeira restrição resultando dos resultados algébricos sobre aplicações contínuas (cf. 1.4.21) e da continuidade das aplicações que a  $(x, y)$  associam  $x$  e  $y$  respetivamente.

Repare-se que uma versão dos resultados precedentes em que se “misturem” subconjuntos fechados com subconjuntos abertos não é válida: Um contra-exemplo simples é a função de Heaviside  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , já referida anteriormente, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

a qual não é contínua em 0 apesar de ter restrições contínuas ao fechado  $]-\infty, 0]$  e ao aberto  $]0, +\infty[$ , conjuntos cuja união é  $\mathbb{R}$ .

**1.4.29 (Unicidade do prolongamento por continuidade)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, o segundo dos quais de Hausdorff,  $A \subset X$  um subconjunto denso (cf. 1.2.15) e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Não pode então existir mais que uma aplicação contínua  $\bar{f}: X \rightarrow Y$  cuja restrição a  $A$  seja  $f$  (um *prolongamento contínuo* de  $f$ ). Mais precisamente, a existir um tal prolongamento contínuo  $\bar{f}$ , terá que ser

$$\bar{f}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} f(x').^{58}$$

**Dem:** Seja  $\bar{f}$  um tal prolongamento contínuo. Para cada  $x \in X$  deduzimos de

<sup>58</sup>Repare-se que o facto de se pedir que  $A$  seja denso destina-se a garantir que qualquer  $x \in X$  é aderente a  $A$ , condição necessária para fazer sentido falar do limite de  $f$  quando  $x'$  tende para  $x$ , e que o facto de  $Y$  ser de Hausdorff é o que garante a unicidade de tais limites, condição implícita na notação  $\lim_{x' \rightarrow x}$ .

1.2.36 e da continuidade de  $\bar{f}$  que tem que ser

$$\bar{f}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \bar{f}(x') = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x \in A}} \bar{f}(x') = \lim_{x' \rightarrow x} f(x'). \quad \square$$

O resultado precedente poderá levar-nos a conjecturar que a existência dos limites referidos no enunciado bastaria para garantir a existência de um prolongamento contínuo da aplicação  $f$ . De facto, fazendo uma hipótese suplementar sobre o espaço de chegada  $Y$ , vamos ver que isso acontece.

**1.4.30** Diz-se que um espaço topológico  $Y$  é *regular* se é de Hausdorff e cada ponto  $y_0 \in Y$  admite um sistema fundamental de vizinhanças constituído por subconjuntos fechados ou, o que é o mesmo, se é de Hausdorff e para cada  $y_0 \in Y$  a classe das vizinhanças fechadas de  $y_0$  constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $y_0$ .

Como exemplo de espaços regulares temos os espaços métricos, que já sabemos serem de Hausdorff e em que cada ponto  $y_0$  admite o conjunto das bolas fechadas de centro  $y_0$  e raio maior que 0 como sistema fundamental de vizinhanças fechadas (cf. a alínea b) de 1.2.7 e 1.2.20).

**1.4.31** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço topológico regular,  $A \subset X$  um subconjunto denso e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Uma condição necessária e suficiente para a existência de um aplicação contínua  $\bar{f}: X \rightarrow Y$  tal que  $\bar{f}|_A = f$  é que, para cada  $x \in X \setminus A$ , exista limite de  $f$  no ponto  $x$ . Quando isso acontecer, um tal prolongamento é único e está definido por

$$\bar{f}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} f(x').$$

**Dem:** Repare-se que a continuidade da aplicação  $f$  implica que para cada  $x \in A$  também existe o limite  $\lim_{x' \rightarrow x} f(x')$ , limite que é igual a  $f(x)$ . A unicidade do prolongamento contínuo resulta de 1.4.29. Consideremos então a aplicação  $\bar{f}: X \rightarrow Y$  definida por  $\bar{f}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} f(x')$ . Esta aplicação tem, como referimos no início, restrição a  $A$  igual a  $f$  pelo que apenas temos que provar a sua continuidade num ponto  $x_0 \in X$  arbitrário. Seja então  $W$  uma vizinhança arbitrária de  $f(x_0)$  e, tendo em conta o facto de o espaço topológico  $Y$  ser regular, consideremos uma vizinhança fechada  $W'$  de  $\bar{f}(x_0)$  com  $W' \subset W$ . A caracterização de  $\bar{f}(x_0)$  como um limite e o facto de a classe dos abertos de  $X$  que contêm  $x_0$  constituírem um sistema fundamental de vizinhanças de  $x_0$  permitem-nos considerar um aberto  $U$  de  $X$  com  $x_0 \in U$  tal que  $f(U \cap A) \subset W'$ . Vamos mostrar que se tem mesmo  $\bar{f}(U) \subset W$ , o que provará a continuidade de  $\bar{f}$  no ponto  $x_0$ . Ora, se  $x \in U$  então  $x$  é aderente a  $U \cap A$  (já que  $A = (U \cap A) \cup (A \setminus U)$  com  $x$  não aderente a  $A \setminus U$  por  $U$  ser uma vizinhança de  $x$  que não intersesta este conjunto) e portanto, por 1.2.42, tem-se

$$\bar{f}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} f(x') = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ x \in U \cap A}} f(x'),$$

o que, por 1.2.40, implica que  $\bar{f}(x)$  é aderente a  $f(U \cap A)$  e portanto também a  $W'$ , donde  $\bar{f}(x) \in W' \subset W$ , por  $W'$  ser um subconjunto fechado de  $X$ .  $\square$

**1.4.32 (Continuidade e limites uniformes)** Sejam  $X$  um espaço topológico não vazio e  $Y$  um espaço métrico e consideremos no conjunto  $Ap(X, Y)$ , de todas as aplicações  $X \rightarrow Y$  (para as quais usaremos agora a notação funcional habitual), a topologia da convergência uniforme (cf. 1.2.76, com as notações adaptadas). Tem-se então:

**a)** Dado  $x_0 \in X$ , o subconjunto  $\mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  de  $Ap(X, Y)$ , constituído pelas aplicações que são contínuas no ponto  $x_0$ , é fechado em  $Ap(X, Y)$ .

**b)** Em consequência, o subconjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  de  $Ap(X, Y)$ , constituído pelas aplicações que são contínuas, é fechado em  $Ap(X, Y)$ .

**Dem:** **a)** Suponhamos que  $f \in Ap(X, Y)$  é aderente a  $\mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  e provemos que  $f \in \mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$ , isto é, que  $f$  é contínua no ponto  $x_0$ . Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Podemos então escolher  $g \in \mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  na vizinhança  $\mathcal{B}'_{\delta/3}(f)$  de  $f$ , portanto tal que  $d(f(x), g(x)) < \frac{\delta}{3}$  para todo o  $x \in X$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $x_0$  em  $X$  tal que, para cada  $x \in V$ ,  $d(g(x), g(x_0)) < \frac{\delta}{3}$ . Para cada  $x \in V$  tem-se então

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(x_0)) + d(g(x_0), f(x_0)) < \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que  $f$  é efetivamente contínua no ponto  $x_0$ .

**b)** Temos uma consequência de a) uma vez que o conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  não é mais do que a interseção, para  $x_0 \in X$ , dos conjuntos  $\mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  e uma interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.  $\square$

**1.4.33 (Continuidade das aplicações de restrição para as topologias da convergência simples e da convergência uniforme)** Sejam  $J \subset I$  conjuntos não vazios.

**a)** Se  $X$  é um espaço métrico e se considerarmos em  $Ap(I, X)$  e  $Ap(J, X)$  a topologia da convergência uniforme (cf. 1.2.76) é contínua a aplicação de  $Ap(I, X)$  para  $Ap(J, X)$  que a cada família  $(x_i)_{i \in I}$  associa a sua restrição  $(x_i)_{i \in J}$ .

**b)** Se  $X$  é um espaço topológico e se considerarmos em  $Ap(I, X)$  e  $Ap(J, X)$  a topologia da convergência simples (cf. 1.2.82) é contínua a aplicação de  $Ap(I, X)$  para  $Ap(J, X)$  que a cada família  $(x_i)_{i \in I}$  associa a sua restrição  $(x_i)_{i \in J}$ .

**Dem:** **a)** Considerando os sistemas fundamentais de vizinhanças referidos em 1.2.76, para provar a continuidade em  $(a_i)_{i \in I}$  basta atender a que, para cada  $r > 0$ , tem-se  $(x_i)_{i \in J} \in \mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in J})$  sempre que  $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I})$ .

**b)** Consideremos os sistemas fundamentais de vizinhanças referidos em 1.2.82 e provemos a continuidade num elemento  $(a_i)_{i \in I}$ . Para isso, consideramos uma vizinhança arbitrária  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$  no sistema fundamental de vizinhanças de  $(a_i)_{i \in J}$ , onde  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in J}$  é tal que cada  $U_i$  é uma vizinhança de  $a_i$  e que se tem  $U_i = X_i$  salvo para um número finito de índices  $i \in I$ . Podemos então considerar a família  $\mathcal{U}' = (U_i)_{i \in J}$  prolongando  $\mathcal{U}$  com  $U_i = X_i$  para cada  $i \in J \setminus I$  e então para cada  $(x_i)_{i \in J}$  na vizinhança  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}'}$  de  $(a_i)_{i \in J}$  tem-se  $(x_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ .  $\square$

Vamos examinar em seguida a noção de homeomorfismo entre espaços topológicos. Com o objetivo de motivar esta noção e de estabelecer pontes com outras noções análogas porventura já encontradas anteriormente, vamos fazer algumas considerações muito gerais sobre a ideia de “tipo de estrutura” e sobre o transporte de uma estrutura dum certo tipo por meio de uma bijecção. Estas considerações situar-se-ão apenas no plano intuitivo, na medida em que o que se pretende é uma motivação e não uma construção formal. Vamos então examinar a ideia de tipo de estrutura com o auxílio de exemplos de certo modo familiares:

**a)** Uma estrutura de grupo sobre um conjunto  $X$  é definida por uma aplicação de  $X \times X$  em  $X$ , que verifica certas propriedades (propriedade associativa, existência de elemento neutro e existência de inverso para cada elemento).

**b)** Uma estrutura de espaço vetorial real sobre o conjunto  $E$  é definida por duas aplicações, uma de  $E \times E$  em  $E$  (a adição) e outra de  $\mathbb{R} \times E$  em  $E$  (a multiplicação pelos escalares), aplicações que devem verificar um certo número de propriedades que o leitor já encontrou.

**c)** Uma estrutura de ordem parcial sobre um conjunto  $X$  é definida por uma relação  $\leq$  em  $X$ , que verifica as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva.

**d)** Uma estrutura de espaço métrico sobre o conjunto  $X$  é definida por uma aplicação  $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ , que verifica as propriedades referidas em 1.1.1.

**e)** Uma estrutura de espaço topológico sobre um conjunto  $X$  é definida por uma família  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_x)_{x \in X}$ , onde cada  $\mathcal{V}_x$  é uma classe de partes de  $X$ , família que deve verificar as propriedades das vizinhanças referidas em 1.2.1.

Constatamos nestes exemplos que uma estrutura de um dado tipo tem sempre um conjunto sobre o qual está definida. Em todos os tipos de estrutura atrás exemplificados ocorre uma situação, que é a seguinte: Se tivermos uma estrutura de um dado tipo sobre um conjunto  $X$  e se  $f: X \rightarrow Y$  for uma aplicação bijetiva, essa bijecção permite-nos considerar, de maneira muito natural, uma estrutura do mesmo tipo sobre o conjunto  $Y$ , estrutura que se costuma dizer ter sido obtida a partir da original por transporte por meio da bijecção  $f$ . Vejamos, para cada um dos casos, qual é essa maneira muito natural, pela qual se transportam as estruturas<sup>59</sup>.

<sup>59</sup>A ideia intuitiva que está por detrás de cada uma das construções de que falaremos é sempre a mesma: Podemos olhar para uma aplicação bijetiva  $f: X \rightarrow Y$  como estando a

a) Suponhamos que sobre o conjunto  $X$  está definida uma operação de grupo, que notaremos  $*$ , e que  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação bijectiva. Definimos então uma operação transportada sobre  $Y$ , que poderemos notar  $\bullet$ , pondo

$$(1) \quad y \bullet y' = f(f^{-1}(y) * f^{-1}(y')).$$

Por outras palavras, dados dois elementos de  $Y$ , aplicamos  $f^{-1}$  para obter dois elementos de  $X$ , combinamos esses elementos com a operação de  $X$  e transferimos de novo o resultado para  $Y$ , utilizando  $f$ . Antes de verificarmos que  $Y$ , com a operação  $\bullet$ , é também um grupo, é cómodo reescrever (1) de duas outras maneiras:

$$(2) \quad f^{-1}(y \bullet y') = f^{-1}(y) * f^{-1}(y');$$

$$(3) \quad f(x) \bullet f(x') = f(x * x')$$

(para a primeira, aplicamos  $f^{-1}$  a ambos os membros de (1) e, para a segunda, substituímos em (1)  $y$  e  $y'$  por  $f(x)$  e  $f(x')$ , respectivamente). Repare-se que (2) e (3) vão exprimir o facto que  $f$  e  $f^{-1}$  vão ser morfismos relativamente às operações definidas nos dois conjuntos. Podemos agora escrever

$$\begin{aligned} (f(x) \bullet f(x')) \bullet f(x'') &= f(x * x') \bullet f(x'') = f((x * x') * x'') = \\ &= f(x * (x' * x'')) = f(x) \bullet f(x' * x'') = f(x) \bullet (f(x') \bullet f(x'')), \end{aligned}$$

o que, tendo em conta a sobrejectividade de  $f$ , implica que a operação  $\bullet$  é associativa. Sendo  $e$  o elemento neutro da operação  $*$  de  $X$ , vem

$$f(x) \bullet f(e) = f(x * e) = f(x) = f(e * x) = f(e) \bullet f(x),$$

o que mostra que  $f(e)$  é elemento neutro para a operação  $\bullet$  de  $Y$ . Sendo  $x^{-1}$  o inverso do elemento  $x \in X$ , tem-se

$$f(x) \bullet f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e) = f(x^{-1} * x) = f(x^{-1}) \bullet f(x),$$

o que mostra que o elemento  $f(x) \in Y$  admite  $f(x^{-1})$  como inverso. Ficou assim provado que  $Y$ , com a operação transportada  $\bullet$ , é também um grupo. Reparemos por fim que, aplicando  $f^{-1}$  a ambos os membros de (3), obtemos

$$(4) \quad x * x' = f^{-1}(f(x) \bullet f(x')),$$

o que mostra que, transportando a operação  $\bullet$  para  $X$ , por meio da bijecção inversa  $f^{-1}$ , obtém-se de novo a operação original  $*$ .

b) Suponhamos que sobre o conjunto  $E$  está definida uma estrutura de espaço vetorial real, que  $F$  é um conjunto e que  $f: E \rightarrow F$  é uma aplicação bijectiva. Podemos então definir sobre  $F$  uma estrutura transportada de espaço vetorial real pondo, para  $y, y' \in F$  e  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$(1) \quad y + y' = f(f^{-1}(y) + f^{-1}(y')),^{60} \quad ay = f(af^{-1}(y)).$$

A verificação de que  $F$  fica a ser efectivamente um espaço vetorial é análoga à que fizemos no caso dos grupos e, tal como nesse caso, deduzimos de (1) as fórmulas

$$(2) \quad f^{-1}(y + y') = f^{-1}(y) + f^{-1}(y'), \quad f^{-1}(ay) = af^{-1}(y),$$

$$(3) \quad f(x) + f(x') = f(x + x'), \quad f(ax) = af(x'),$$

que mostram que  $f$  e  $f^{-1}$  ficam a ser aplicações lineares. Mais uma vez, transportando por meio de  $f^{-1}$  a estrutura que obtivemos sobre  $F$ , obtemos a estrutura original de  $E$ .

c) Se no conjunto  $X$  está definida uma relação de ordem parcial  $\leq$  e se  $f$  é uma aplicação bijectiva de  $X$  sobre  $Y$ , obtemos uma relação de ordem parcial transportada sobre  $Y$ , pondo, por definição

$$y \leq y' \Leftrightarrow f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y')$$

(mais uma vez é fácil demonstrar que a relação obtida sobre  $Y$  é efectivamente uma relação de ordem parcial). Substituindo na equivalência precedente  $y$  e  $y'$  por  $f(x)$  e  $f(x')$ , respectivamente, vemos que

$$f(x) \leq f(x') \Leftrightarrow x \leq x',$$

o que mostra, mais uma vez, que, transportando por  $f^{-1}$  a ordem parcial obtida sobre  $Y$ , recuperamos a ordem parcial original de  $X$ .

As noções de transporte nos exemplos d) e e) são mais importantes para o nosso curso pelo que as destacamos especialmente.

**1.4.34** Sejam  $X$  um espaço métrico, com a métrica  $d$ ,  $Y$  um conjunto e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação bijectiva. Podemos então definir sobre  $Y$  uma métrica  $d'$ , que diremos ser a *transportada* da métrica  $d$  por meio de  $f$ , pondo

$$d'(y, y') = d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

Além disso a métrica transportada da métrica  $d'$  por meio de  $f^{-1}$  é a métrica original  $d$ , por outras palavras,

$$d'(f(x), f(x')) = d(x, x').$$

A métrica transportada é a única para a qual a aplicação  $f$  fica a ser uma isometria (cf. 1.4.8) e portanto a aplicação inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  é então também uma isometria.

**Dem:** A demonstração de que a aplicação  $d': Y \times Y \rightarrow [0, +\infty[$  é efectivamente uma métrica é muito simples pelo que nos dispensamos de a explicitar

<sup>60</sup>Ao contrário do que fizemos no exemplo anterior, estamos a utilizar o mesmo símbolo para a operação original sobre  $E$  e para a operação transportada sobre  $F$ . Trata-se de um abuso que se faz frequentemente quando não há risco de confusão.

aqui. O facto de a métrica transportada da métrica  $d'$  ser novamente a métrica  $d$  resulta de substituirmos na fórmula de definição  $y$  e  $y'$  por  $f(x)$  e  $f(x')$ , respectivamente.  $\square$

Antes de passarmos ao estudo das topologias transportadas, façamos algumas observações triviais que nos vão ser úteis. Suponhamos então que  $X$  e  $Y$  são dois conjuntos e que  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação bijectiva. Se  $B \subset Y$ , a expressão  $f^{-1}(B)$  teria *a priori* dois sentidos: ou a imagem directa do conjunto  $B$  por meio da aplicação  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , ou a imagem recíproca de  $B$  por meio de  $f$ , isto é, o conjunto  $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ; acontece, no entanto que, como é fácil verificar-se, as duas interpretações conduzem ao mesmo subconjunto de  $X$ . Resulta daqui, em particular, que a operação de imagem directa vai ter, no caso das bijecções, propriedades que, em geral, são apenas verificadas pela operação de imagem recíproca. Assim, tendo em conta o facto de  $f$  ser a aplicação inversa de  $f^{-1}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\ f(A \cap B) &= f(A) \cap f(B), \\ f(X \setminus A) &= Y \setminus f(A).^{61} \end{aligned}$$

Outro dos factos que não seriam verdadeiros se a aplicação  $f$  não fosse bijectiva é a possibilidade de escrevermos, para cada parte  $A$  de  $X$  e cada parte  $B$  de  $Y$ ,

$$f^{-1}(f(A)) = A, \quad f(f^{-1}(B)) = B.$$

Passemos então ao estudo das topologias transportadas:

**1.4.35** Sejam  $X$  um espaço topológico, em que notamos, para cada  $x$ ,  $\mathcal{V}_x$  o conjunto das vizinhanças de  $x$ ,  $Y$  um conjunto e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação bijectiva. Existe então sobre  $Y$  uma topologia, a que daremos o nome de *topologia transportada* da de  $X$  por meio de  $f$ , tal que, para cada  $y \in Y$ , o conjunto  $\mathcal{V}'_y$  das vizinhanças de  $y$  é formado pelos subconjuntos  $W$  de  $Y$  tais que  $f^{-1}(W)$  é vizinhança de  $f^{-1}(y)$ . Para cada  $x \in X$  e  $V \subset X$ , tem-se então  $V \in \mathcal{V}_x$  se, e só se,  $f(V) \in \mathcal{V}'_{f(x)}$ , em particular, se transportarmos para  $X$  a topologia obtida em  $Y$ , obtemos de novo a topologia original de  $X$ .

**Dem:** Seja  $y \in Y$  e notemos  $x = f^{-1}(y)$ . O facto de se ter  $Y \in \mathcal{V}'_y$  vem de que  $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{V}_x$ . Se  $W$  e  $W'$  pertencem a  $\mathcal{V}'_y$ , tem-se que  $f^{-1}(W)$  e  $f^{-1}(W')$  pertencem a  $\mathcal{V}_x$  pelo que

$$f^{-1}(W \cap W') = f^{-1}(W) \cap f^{-1}(W') \in \mathcal{V}_x,$$

o que mostra que  $W \cap W' \in \mathcal{V}'_y$ . Se  $W \in \mathcal{V}'_y$  e  $W \subset W' \subset Y$ , tem-se  $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$  e  $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(W')$ , o que implica que  $f^{-1}(W') \in \mathcal{V}_x$ , e

<sup>61</sup>A primeira propriedade é válida mesmo no caso em que a aplicação  $f$  não é bijectiva mas o mesmo já não se pode dizer em relação às outras duas.



portanto  $W' \in \mathcal{V}'_y$ . Se  $W \in \mathcal{V}'_y$ , vem  $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$ , donde  $x \in f^{-1}(W)$  e portanto  $y = f(x) \in W$ . Verifiquemos enfim a última propriedade das vizinhanças, para o que consideramos, mais uma vez,  $W \in \mathcal{V}'_y$ ; tem-se então  $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_x$ , pelo que podemos considerar  $V \in \mathcal{V}_x$ , tal que, para cada  $x' \in V$ ,  $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_{x'}$ ; tem-se então  $f^{-1}(f(V)) = V$ , pelo que  $f(V) \in \mathcal{V}'_y$ , e, para cada  $y' \in f(V)$ , tem-se que  $f^{-1}(y') \in V$ , pelo que  $f^{-1}(W)$  é uma vizinhança de  $f^{-1}(y')$ , ou seja,  $W$  é uma vizinhança de  $y'$ . Ficámos portanto com uma topologia bem definida sobre  $Y$ . Substituindo  $y$  por  $f(x)$  e  $W$  por  $f(V)$  na definição das vizinhanças para a topologia de  $Y$ , e atendendo a que  $f^{-1}(f(V)) = V$ , vemos que  $V$  é vizinhança de  $x$ , para a topologia original de  $X$ , se, e só se,  $f(V)$  é vizinhança de  $f(x)$ , para a topologia de  $Y$ , e isto mostra que a topologia original de  $X$  é a que se obtém por transporte da topologia obtida em  $Y$  por meio de  $f^{-1}$  (reparar que  $f(V)$  também é a imagem recíproca de  $V$  por  $f^{-1}$ ).  $\square$

**1.4.36** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um conjunto e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação bijectiva. Consideremos em  $Y$  a topologia transportada por meio de  $f$ . Sendo  $a \in X$  e  $\mathcal{B}_a$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ , tem-se então que o conjunto  $\mathcal{B}'_{f(a)}$  dos  $f(V)$ , com  $V \in \mathcal{B}_a$ , é um sistema fundamental de vizinhanças de  $f(a)$ .

**Dem:** Para cada  $V \in \mathcal{B}_a$ ,  $V$  é, em particular, uma vizinhança de  $a$ , pelo que  $f(V)$  é uma vizinhança de  $f(a)$ . Por outro lado, se  $W$  é vizinhança de  $f(a)$ ,  $f^{-1}(W)$  vai ser vizinhança de  $a$ , o que implica a existência de  $V \in \mathcal{B}_a$ , tal que  $V \subset f^{-1}(W)$ ; tem-se então  $f(V) \subset W$ , donde o resultado.  $\square$

**1.4.37** Sejam  $X$  um espaço métrico, com a métrica  $d$ ,  $Y$  um conjunto e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação bijectiva. Considerando em  $Y$  a métrica  $d'$ , transportada por meio de  $f$ , tem-se então que a topologia de  $Y$  associada a essa métrica é a topologia transportada por meio de  $f$  da topologia de  $X$  associada à métrica  $d$ .

**Dem:** Comecemos por reparar que, dados  $a \in X$  e  $r > 0$ , tem-se, para cada  $x \in X$ ,  $d(a, x) = d'(f(a), f(x))$ , de onde resulta, tendo em conta a sobrejectividade de  $f$ , que  $f(B_r(a)) = B_r(f(a))$ . Uma vez que as bolas abertas de centro num ponto são um sistema fundamental de vizinhanças desse ponto, para a topologia associada à métrica, concluímos do resultado precedente que as bolas abertas de centro  $f(a)$  são sistemas fundamentais de vizinhanças de  $f(a)$ , tanto para a topologia associada à métrica  $d'$  como para a topologia transportada da topologia de  $X$ , pelo que estas topologias coincidem.  $\square$

**1.4.38** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação bijectiva. Diz-se que  $f$  é um *homeomorfismo* se a topologia dada em  $Y$  coincide com a topologia que se obtém por transporte da topologia de  $X$  por meio de  $f$ . Diz-se que dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são *homeomorfos* se existir um homeomorfismo  $f: X \rightarrow Y$ .

**1.4.39 (Homeomorfismos e continuidade)** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação bijectiva. Tem-se então que  $f$  é um homeomorfismo se, e só se, tanto  $f: X \rightarrow Y$  como  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  são aplicações contínuas.

**Dem:** Suponhamos que  $f$  é um homeomorfismo. Para cada  $x_0 \in X$  e cada vizinhança  $W$  de  $f(x_0)$ ,  $f^{-1}(W)$  vai ser uma vizinhança de  $x_0$ , tal que  $f(f^{-1}(W)) = W \subset W$ , que prova que  $f$  é contínua no ponto  $x_0$ . Por outro lado, a última afirmação de 1.4.35 mostra-nos que  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  é também um homeomorfismo, de onde se conclui que a aplicação  $f^{-1}$  é também contínua. Suponhamos, reciprocamente, que  $f$  e  $f^{-1}$  são aplicações contínuas. Se  $W$  é uma vizinhança de  $f(x_0)$  verificámos em 1.4.23 que  $f^{-1}(W)$  é uma vizinhança de  $x_0$ ; por outro lado, se  $W \subset Y$  é tal que  $f^{-1}(W)$  é uma vizinhança de  $x_0$ , a continuidade de  $f^{-1}$  no ponto  $f(x_0)$  garante, por 1.4.23, que  $f(f^{-1}(W)) = W$  é uma vizinhança de  $f(x_0)$ . Verificámos assim que as vizinhanças de  $f(x_0)$  em  $Y$  para a topologia dada são as mesmas que as vizinhanças de  $f(x_0)$  para a topologia transportada, o que mostra que  $f$  é um homeomorfismo.  $\square$

**1.4.40 a)** Se  $X$  é um espaço topológico, então a aplicação identidade  $I_X: X \rightarrow X$  é um homeomorfismo;

**b)** Se  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são espaços topológicos e se as aplicações bijectivas  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  são homeomorfismos, então  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é também um homeomorfismo.<sup>62</sup>

**c)** A relação entre espaços topológicos “ser homeomorfo a” é uma relação de equivalência.

**Dem:** A alínea a) é uma consequência de que a aplicação identidade é contínua. Para a alínea b), reparamos que, uma vez que  $f$ ,  $g$ ,  $f^{-1}$  e  $g^{-1}$  são aplicações contínuas, o mesmo vai acontecer a  $g \circ f$  e a  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ . A alínea c) é uma consequência das duas primeiras e do facto de o inverso de um homeomorfismo ser ainda um homeomorfismo.  $\square$

**1.4.41** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  um homeomorfismo. Se  $A$  é um subconjunto de  $X$  e se  $B = f(A)$ , então a restrição de  $f$ ,  $f|_A: A \rightarrow B$  é ainda um homeomorfismo.

**Dem:** Se atendermos à caracterização dos homeomorfismos como aplicações bijectivas que são contínuas assim como as respectivas inversas, o resultado é uma consequência de 1.4.14 e 1.4.15.  $\square$

Voltando a pensar intuitivamente nas estruturas transportadas como uma espécie de fotografia torna-se evidente que, se tivermos uma aplicação

<sup>62</sup>De facto, estas duas propriedades, que estamos a enunciar para os homeomorfismos, são válidas mais geralmente no quadro do transporte de qualquer tipo de estrutura, e com a demonstração usual do “tipo fotográfico”. O que se passa é que um objecto pode ser olhado como uma óptima fotografia dele mesmo e que, ao tirarmos uma fotografia a uma fotografia dum objecto, obtemos ainda uma fotografia desse objecto. A demonstração que vamos apresentar peca talvez por mascarar um pouco a generalidade desta situação.

bijetiva  $f: X \rightarrow Y$  e uma estrutura de um dado tipo sobre  $X$  e considerarmos a estrutura sobre  $Y$  obtida por transporte, então uma propriedade envolvendo subconjuntos e pontos de  $X$  que apenas envolva conceitos do contexto da estrutura em causa é verdadeira se, e só se, for verdadeira a mesma propriedade relativamente aos subconjuntos e pontos de  $Y$  que se obtêm como imagem. Analogamente, uma certa estrutura sobre  $X$  verifica alguma propriedade suplementar se, e só se, a estrutura transportada para  $Y$  possuir a mesma propriedade suplementar. Por exemplo, se transportarmos uma estrutura de grupo sobre o conjunto  $X$  para um conjunto  $Y$  por meio de uma aplicação bijetiva então um subconjunto de  $X$  é subgrupo se, e só se, o correspondente subconjunto de  $Y$  é subgrupo e, por outro lado, a estrutura original sobre  $X$  é comutativa, se, e só se, estrutura obtida sobre  $Y$  é comutativa. Claro que esta afirmação não serve formalmente para demonstrar nada, mas ela torna claro que, em cada caso particular, vai ser muito simples, quase maquinal, arranjar uma demonstração formal. Vejamos alguns exemplos do que referimos no caso em que a estrutura em causa é a de espaço topológico, caso em que os conceitos que apenas envolvem esta estrutura são aqueles a que se dá o nome de *conceitos topológicos*, dando-se o nome de *propriedades topológicas* à propriedades que envolvem estes conceitos. A lista de exemplos apresentada não é exaustiva mas espera-se que seja suficiente para tornar claro ao leitor o modo como pode ser estendida a outras situações, como aquelas em que estarão envolvidos outros conceitos topológicos que ainda não introduzimos.

**1.4.42** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  um homeomorfismo.

Tem-se então:

- a)** Um ponto  $a \in X$  é interior a um subconjunto  $A \subset X$  se, e só se,  $f(a)$  é interior a  $f(A)$ .
- b)** Um ponto  $a \in X$  é aderente a um subconjunto  $A \subset X$  se, e só se,  $f(a)$  é aderente a  $f(A)$ .
- c)** Um ponto  $a \in X$  é exterior a um subconjunto  $A \subset X$  se, e só se,  $f(a)$  é exterior a  $f(A)$ .
- d)** Um ponto  $a \in X$  é fronteiro a um subconjunto  $A \subset X$  se, e só se,  $f(a)$  é fronteiro a  $f(A)$ .
- e)** Um conjunto  $A \subset X$  é aberto se, e só se, o conjunto  $f(A) \subset Y$  for aberto.
- f)** Um conjunto  $A \subset X$  é fechado se, e só se, o conjunto  $f(A) \subset Y$  for fechado.

**Dem:** **a)** Trata-se de uma consequência direta das propriedades das vizinhanças para a topologia transportada referidas em 1.4.35, visto que um ponto é interior a um subconjunto se, e só se, o subconjunto é vizinhança do ponto (cf. a alínea a) de 1.3.2).

**b)** Lembrando a alínea a) de 1.3.1,  $a$  ser aderente a  $A$  é equivalente a  $a$  não ser interior a  $X \setminus A$  que é equivalente pela alínea precedente, a  $f(a)$  não ser interior a  $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ , e portanto também a  $f(a)$  ser aderente a  $f(A)$ .

**c)** Temos uma consequência da conclusão de a) uma vez que um ponto é

exterior a um conjunto se, e só se, for interior ao seu complementar.

**d)** Temos uma consequência das alíneas a) e c) uma vez que um ponto é fronteiro a um conjunto se, e só se, não for interior nem exterior.

**e)** Resulta de que os conjuntos abertos são aqueles cujos pontos são todos interiores.

**f)** Basta lembrar que um conjunto é fechado se, e só se, contém todos os seus pontos aderentes.  $\square$

**1.4.43** Sejam  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos homeomorfos.

**a)** O espaço  $X$  é de Hausdorff, se, e só se,  $Y$  é de Hausdorff.

**b)** O espaço  $X$  é regular se, e só se,  $Y$  é regular.

**c)** O espaço  $X$  é metrizável se, e só se,  $Y$  é metrizável.

**Dem:** Em cada um dos casos basta provar uma das implicações uma vez que, sendo  $f: X \rightarrow Y$  um homeomorfismo,  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  é também um homeomorfismo.

**a)** Suponhamos que  $X$  é um espaço de Hausdorff. Sejam  $y$  e  $y'$  dois pontos distintos de  $Y$ . Sendo  $x = f^{-1}(y)$  e  $x' = f^{-1}(y')$ ,  $x$  e  $x'$  vão ser pontos distintos de  $X$ , pelo que existem vizinhanças  $V$ , de  $x$ , e  $V'$ , de  $x'$ , tais que  $V \cap V' = \emptyset$ . Tem-se então que  $f(V)$  e  $f(V')$  vão ser vizinhanças de  $f(x) = y$  e de  $f(x') = y'$ , respectivamente, para as quais

$$f(V) \cap f(V') = f(V \cap V') = \emptyset,$$

o que mostra que  $Y$  é de Hausdorff.

**b)** Suponhamos que  $X$  é regular. Dado  $b = f(a) \in Y$ , podemos considerar um sistema fundamental de vizinhanças  $\mathcal{B}_a$  de constituído por conjuntos fechados em  $X$  e então a classe dos conjuntos  $f(V)$  com  $V \in \mathcal{B}_a$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $b$  constituído por conjuntos fechados em  $Y$ . Uma vez que  $Y$  é de Hausdorff, por isso acontecer com  $X$ , concluímos que  $Y$  é regular.

**c)** O facto de  $Y$  ser metrizável sempre que  $X$  é metrizável é uma consequência direta de 1.4.37.  $\square$

Como aplicação do que estudámos nesta secção, vamos mostrar que a topologia usual da reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  é metrizável, o que permitirá em várias situações aplicar a  $\overline{\mathbb{R}}$  resultados que foram estabelecidos para os espaços métricos.

**1.4.44 (A reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  é metrizável)** Considerando em  $[-1, 1]$  a topologia induzida pela topologia usual de  $\mathbb{R}$  e em  $\overline{\mathbb{R}}$  a topologia usual, tem lugar um homeomorfismo  $\varphi: [-1, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , definido por  $\varphi(-1) = -\infty$ ,  $\varphi(1) = +\infty$  e, para cada  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

cujos inverso  $\varphi^{-1}: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$  está definido por  $\varphi^{-1}(-\infty) = -1$ ,  $\varphi^{-1}(+\infty) = 1$  e, para cada  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Em consequência, a topologia usual da reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  pode ser definida por uma métrica<sup>63</sup>.

**Dem:** Notemos  $\varphi_0: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  a restrição de  $f$ , definida portanto pela primeira expressão referida no enunciado, e  $\psi_0: \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$  a função definida pela segunda expressão referida no enunciado, nomeadamente

$$\psi_0(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

onde o facto de  $] -1, 1[$  ser um codomínio de  $\psi_0$  resulta de se ter, para cada  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\psi_0(y)^2 = \frac{y^2}{1+y^2} < 1.$$

Reparemos agora que para cada  $x \in ]-1, 1[$  tem-se  $\varphi_0(x)^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ , donde  $1 + \varphi_0(x)^2 = \frac{1}{1-x^2}$  e portanto

$$\psi_0(\varphi_0(x)) = \frac{\varphi_0(x)}{\sqrt{1 + \varphi_0(x)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}} = x.$$

Analogamente, para cada  $y \in \mathbb{R}$  tem-se  $\psi_0(y)^2 = \frac{y^2}{1+y^2}$ , donde  $1 - \psi_0(y)^2 = \frac{1}{1+y^2}$  e portanto

$$\varphi_0(\psi_0(y)) = \frac{\psi_0(y)}{\sqrt{1 - \psi_0(y)^2}} = \frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}} = y.$$

As identidades  $\psi_0(\varphi_0(x)) = x$  e  $\varphi_0(\psi_0(y)) = y$  implicam que a aplicação  $\varphi_0: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  é bijetiva<sup>64</sup> e que a sua inversa é  $\psi_0$  e daqui decorre trivialmente que  $\varphi: [-1, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é bijetiva e com a inversa  $\varphi^{-1}: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$  definida pela condição enunciada. Para mostrar que  $\varphi$  é um homeomorfismo resta-nos mostrar que  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  são ambas aplicações contínuas.

O facto de  $\varphi_0: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  ser contínua é uma consequência dos teoremas habituais sobre funções contínuas que se utilizam no estudo das funções reais de variável real e, uma vez que  $] -1, 1[$  é aberto em  $\mathbb{R}$ , e portanto também em  $[-1, 1]$ , podemos concluir que  $\varphi$  é contínua em todos os pontos de  $] -1, 1[$

<sup>63</sup>Note-se que essa métrica não pode ser uma extensão da métrica usual de  $\mathbb{R}$ , uma vez que, para esta última, tem-se  $d(a, x) \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

<sup>64</sup>A primeira implica que  $f_0$  é injetiva e a segunda que  $f_0$  é sobrejetiva.

(cf. 1.4.17). Para provar que  $\varphi$  é contínua em  $-1$ , isto é, que  $\varphi(-1) = -\infty$  é limite de  $\varphi(x)$  quando  $x \rightarrow -1$ , basta verificar que  $-\infty$  é limite quando  $x \rightarrow -1$  da restrição de  $\varphi$  a  $] -1, 1[$  ( $-1$  não é aderente a  $\{1\}$  e a restrição de  $\varphi$  a  $\{-1\}$  tem trivialmente limite  $\varphi(-1)$ ) e isso resulta das propriedades usuais que permitem calcular limites no contexto das funções reais de variável real:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Analogamente se verifica que  $\varphi$  é contínua em  $1$ , isto é que  $\varphi(1) = +\infty$  é limite de  $\varphi(x)$  quando  $x \rightarrow 1$ .

Do mesmo modo, o facto de a restrição de  $\varphi^{-1}$  a  $\mathbb{R}$  ser contínua é uma consequência dos teoremas habituais sobre funções contínuas no contexto das funções reais de variável real e, uma vez que  $\mathbb{R}$  é aberto em  $\overline{\mathbb{R}}$ , resulta daqui que  $\varphi^{-1}: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$  é contínua nos pontos de  $\mathbb{R}$ . Para provar que  $\varphi^{-1}$  é contínua em  $-\infty$ , isto é, que  $\varphi^{-1}(-\infty) = -1$  é limite de  $\varphi^{-1}(y)$  quando  $y \rightarrow -\infty$ , basta mostrar que  $-1$  é limite da sua restrição a  $\mathbb{R}$  quando  $y \rightarrow -\infty$  e, uma vez que  $-\infty$  não é aderente a  $[0, +\infty[$  basta examinar qual o limite da sua restrição a  $] -\infty, 0[$ . Ora, isso resulta das propriedades usuais que permitem calcular limites no contexto das funções reais de variável real:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ y < 0}} \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} &= \lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ y < 0}} \frac{-\sqrt{y^2}}{\sqrt{1+y^2}} = \lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ y < 0}} -\sqrt{\frac{y^2}{1+y^2}} = \\ &= \lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ y < 0}} -\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{y^2} + 1}} = -1. \end{aligned}$$

Analogamente se verifica que  $\varphi^{-1}$  é contínua em  $+\infty$ , isto é, que  $\varphi^{-1}(+\infty) = 1$  é limite de  $\varphi^{-1}(y)$  quando  $y \rightarrow +\infty$ .

Uma vez provado que  $\varphi: [-1, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é um homeomorfismo, o facto de  $\overline{\mathbb{R}}$  ser metrizável resulta de que, por 1.4.37 e 1.4.38, considerando em  $\overline{\mathbb{R}}$  a métrica transportada da métrica usual de  $[-1, 1]$  por meio de  $\varphi$ , a topologia associada é a topologia para a qual  $\varphi$  é um homeomorfismo, portanto a topologia usual de  $\overline{\mathbb{R}}$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex 1.4.1** Consideremos a recta acabada  $\overline{\mathbb{R}}$ , com a sua topologia usual.

**a)** Mostrar que é contínua a aplicação  $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , definida por  $f(x) = -x$ , se  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-\infty) = +\infty$  e  $f(+\infty) = -\infty$ .

**b)** Mostrar que é contínua a aplicação  $g: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$  definida por  $g(x) = \frac{1}{x}$  se  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(0) = +\infty$  e  $f(+\infty) = 0$ .

**Ex 1.4.2** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $a \in X$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua no ponto  $a$  tal que  $f(x) \geq 0$  para cada  $x \in X$ . Mostrar que é também contínua em  $a$  a aplicação  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ . **Sugestão:** Lembrar a continuidade da função “raiz quadrada”, já estabelecida quando se estudaram as funções reais de variável real.

**Ex 1.4.3** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  duas aplicações contínuas. Utilizar 1.2.52 para mostrar que é aberto em  $X$  o conjunto

$$U = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}.$$

No caso em que as aplicações  $f$  e  $g$  tomam valores em  $\mathbb{R}$ , apresentar uma justificação alternativa deste facto que passa pela consideração da aplicação contínua  $g - f$  e pela identificação de  $U$  como um conjunto imagem recíproca.

**Ex 1.4.4** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços métricos e suponhamos que  $X$  é um conjunto finito. Mostrar que qualquer aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é lipschitziana.

**Ex 1.4.5** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função contínua definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  (a continuidade desta função já foi encontrada no estudo das funções reais de variável real). Mostrar que  $f$  não é lipschitziana.

**Ex 1.4.6** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Mostrar que  $f$  é contínua se, e só se, para cada subconjunto  $A \subset X$

$$f(\text{ad}(A)) \subset \text{ad}(f(A)).$$

**Sugestão:** Uma das implicações resulta de 1.4.18. Supondo, reciprocamente, que a inclusão referida é válida para cada  $A \subset X$ , mostrar que para cada fechado  $B \subset Y$  a imagem recíproca  $f^{-1}(B)$  é fechada em  $X$ , tomando  $A = f^{-1}(B)$  na inclusão referida e reparando que  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

**Ex 1.4.7** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, o segundo dos quais de Hausdorff, e  $f, g: X \rightarrow Y$  duas aplicações contínuas. Mostrar que é fechado em  $X$  o conjunto

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$

**Ex 1.4.8** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $U$  um conjunto aberto de  $X$ .

a) Mostrar que se pode escolher, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , um conjunto fechado  $C_n$ , de modo que se tenha  $C_n \subset \text{int}(C_{n+1})$  e  $\bigcup C_n = U$ . **Sugestão:** Afastando já o caso trivial em que  $U = X$ , ter em conta 1.4.22 e definir  $C_n = \{x \in X \mid d(x, X \setminus U) \geq 1/n\}$ .

b) Mostrar que, refinando um pouco o raciocínio de a), pode-se conseguir que os conjuntos  $C_n$ , além de fechados, sejam limitados.

**Ex 1.4.9** Consideremos em  $\mathbb{R}$  a topologia inferior (cf. o exercício 1.2.6).

a) Mostrar que se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação contínua então  $f$  é crescente, no sentido lato.

b) Mostrar que a aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ x + 1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

apesar de ser estritamente crescente, não é contínua.

**Ex 1.4.10** Apresentar uma demonstração alternativa de 1.4.28, com um espírito análogo à que foi feita para 1.4.26, reparando que, com um raciocínio simples por indução, basta examinar o caso em que temos dois subconjuntos e que, nesse caso, podemos aplicar 1.4.16.

**Ex 1.4.11** Apresentar uma demonstração alternativa de 1.4.26, com um espírito análogo à que foi feita para 1.4.28.

**Ex 1.4.12** Consideremos em  $\mathbb{R}^2$  a topologia usual e lembremos que as projeções canônicas  $\pi_1, \pi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas. Mostrar que é fechado em  $\mathbb{R}^2$  o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

mas que  $\pi_1(A)$  não é fechado em  $\mathbb{R}$ .

**Ex 1.4.13** Verificar que a reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  é um espaço topológico regular (cf. 1.4.30).

**Ex 1.4.14** Mostrar que se  $X$  é um espaço topológico regular e  $Y \subset X$  é um subespaço topológico então  $Y$  é também um espaço topológico regular.

**Ex 1.4.15** Mostrar que um espaço topológico de Hausdorff  $X$  é regular se, e só se, para cada  $a \in X$  a classe de todas as vizinhanças fechadas de  $a$  constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ .

**Ex 1.4.16 (Caracterização alternativa dos espaços regulares)** Seja  $X$  um espaço topológico.

**a)** Mostrar que  $X$  é um espaço de Hausdorff se, e só se, quaisquer que sejam os pontos  $a \neq b$  em  $X$ , existem abertos  $U$  e  $V$  de  $X$  com  $a \in U, b \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

**b)** Mostrar que se  $X$  é regular então quaisquer que sejam  $a \in X$  e o conjunto fechado  $B \subset X$  com  $a \notin B$  existem abertos  $U$  e  $V$  de  $X$  com  $a \in U, B \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

**Sugestão:** Considerar uma vizinhança fechada  $W$  de  $a$  contida em  $X \setminus B$  e pensar nos abertos  $\text{int}(W)$  e  $X \setminus W$ .

**c)** Suponhamos agora que  $X$  é um espaço de Hausdorff e que quaisquer que sejam  $a \in X$  e o conjunto fechado  $B \subset X$  com  $a \notin B$  existem abertos  $U$  e  $V$  de  $X$  com  $a \in U, B \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Mostrar que  $X$  é um espaço regular. **Sugestão:** Se  $W$  é uma vizinhança de  $a$  considerar o fechado  $X \setminus \text{int}(W)$  que não contém  $a$  e, sendo  $U$  e  $V$  abertos disjuntos de  $X$  com  $a \in U$  e  $X \setminus \text{int}(W) \subset V$ , verificar que  $\text{ad}(U)$  é uma vizinhança fechada de  $a$  contida em  $W$ .

**Ex 1.4.17** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $X$  um espaço topológico e consideremos no conjunto  $Ap(I, X)$  de todas as aplicações  $I \rightarrow X$ , aplicações essas que, por comodidade, serão encaradas como famílias  $(x_i)_{i \in I}$ , a topologia da convergência simples (cf. 1.2.82).

**a)** Mostrar que, para cada  $i_0 \in I$  fixado, é contínua a aplicação  $Ap(I, X) \rightarrow X$  que a cada família  $(x_i)_{i \in I}$  associa  $x_{i_0}$ .

**b)** Seja  $(A_i)_{i \in I}$  uma família de subconjuntos fechados de  $X$  e notemos  $\mathcal{A}$  o subconjunto de  $Ap(I, X)$  constituído pelas famílias  $(x_i)_{i \in I}$  com  $x_i \in A_i$  para cada  $i$ . Mostrar que  $\mathcal{A}$  é um subconjunto fechado de  $Ap(I, X)$ . **Sugestão:** Reparar que  $\mathcal{A}$  pode ser identificado como a interseção de uma família, possivelmente infinita, de subconjuntos, cada um dos quais imagem recíproca de um fechado por meio de uma das aplicações referidas em a).

**c)** Deduzir de b) que no caso em que  $X$  é regular (por exemplo se a topologia de  $X$  for definida por uma métrica) o espaço  $Ap(I, X)$  também é regular.



**Ex 1.4.18** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $X$  um espaço métrico e consideremos no conjunto  $Ap(I, X)$  de todas as aplicações  $I \rightarrow X$ , aplicações essas que, por comodidade, serão encaradas como famílias  $(x_i)_{i \in I}$ , a topologia da convergência uniforme (cf. 1.2.76), que lembramos ser mais fina que a da convergência simples.

**a)** Deduzir do exercício 1.4.17 que, para cada  $i_0 \in I$  fixado, é contínua a aplicação  $Ap(I, X) \rightarrow X$  que a cada família  $(x_i)_{i \in I}$  associa  $x_{i_0}$ .

**b)** Seja  $(A_i)_{i \in I}$  uma família de subconjuntos fechados de  $X$  e notemos  $\mathcal{A}$  o subconjunto de  $Ap(I, X)$  constituído pelas famílias  $(x_i)_{i \in I}$  com  $x_i \in A_i$  para cada  $i$ . Mostrar que  $\mathcal{A}$  é um subconjunto fechado de  $Ap(I, X)$ .

**c)** Mostrar que  $Ap(I, X)$  é um espaço topológico regular.

**Ex 1.4.19** Sejam  $X$  um espaço topológico não vazio e  $Y$  um espaço topológico e consideremos no conjunto  $Ap(X, Y)$ , de todas as aplicações  $X \rightarrow Y$  (para as quais usaremos agora a notação funcional habitual), a topologia da convergência simples (cf. 1.2.82, com as notações adaptadas). Por contraste com o que verificámos em 1.4.32, no caso da topologia da convergência uniforme, mostrar que não se pode garantir que para cada  $x_0 \in X$  o subconjunto  $\mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  de  $Ap(X, Y)$ , constituído pelas aplicações que são contínuas no ponto  $x_0$ , seja fechado em  $Ap(X, Y)$ .

**Sugestão:** Considerar  $X = [0, 1]$  e  $Y = \mathbb{R}$  e reparar que a  $\mathbb{N}$ -sucessão das funções contínuas  $f_n$  definidas  $f_n(x) = x^n$  tem como limite em  $Ap(X, Y)$  uma aplicação que não é contínua em 1.

**Ex 1.4.20 (Exemplo de um espaço de Haudorff não regular)** Consideremos em  $\mathbb{R}$ , em vez da topologia usual, a topologia obtida a partir desta por refinamento pelo subconjunto  $\mathbb{Q}$  dos racionais (cf. o exercício 1.2.9). Lembrar que um subconjunto  $\hat{V} \subset \mathbb{R}$  é vizinhança de um ponto  $a \in \mathbb{R}$  para esta topologia se, e só se, existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  para a topologia usual tal que

$$V \cap (\{a\} \cup \mathbb{Q}) \subset \hat{V}.$$

**a)** Mostrar que  $\hat{V} \subset \mathbb{R}$  é vizinhança de um ponto  $a \in \mathbb{R}$  para a topologia refinada se, e só se, existir  $\varepsilon > 0$  tal que

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \cap (\{a\} \cup \mathbb{Q}) \subset \hat{V}.$$

**b)** Verificar que se  $\varepsilon > 0$  então a aderência de  $] -\varepsilon, \varepsilon[ \cap \mathbb{Q}$  para a topologia refinada é igual a  $] -\varepsilon, \varepsilon[$  e concluir, em particular, que qualquer vizinhança fechada de 0 para a topologia refinada contém números irracionais.

**c)** Reparando que  $] -\varepsilon, \varepsilon[ \cap \mathbb{Q}$  é uma vizinhança de 0 para a topologia refinada constituída apenas por números racionais, utilizar a conclusão de b) para mostrar que  $\mathbb{R}$ , com a topologia refinada, é um espaço topológico de Hausdorff que não é regular.

**Ex 1.4.21** Dar um enunciado geral, ao nível das estruturas transportadas, das propriedades dos espaços topológicos enunciadas nas alíneas a) e b) de 1.4.40. Mostrar que a propriedade, que referimos, de a transportada, por meio de  $f^{-1}$  de uma estrutura que foi obtida por transporte por meio de  $f$  ser novamente a estrutura original, vai ser uma consequência dessas duas propriedades. Verificar as duas propriedades referidas, tanto para o caso dos grupos como para o dos espaços métricos e o dos conjuntos com ordens parciais<sup>65</sup>.

<sup>65</sup>Essas verificações serão decerto suficientes para convencer o mais céptico da possibilidade de fazer uma demonstração análoga para qualquer tipo de estrutura.

**Ex 1.4.22** Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação bijetiva.

- a) Mostrar que, se  $X$  está munido de uma estrutura de grupo comutativo, então a estrutura de grupo sobre  $Y$ , obtida por transporte por meio de  $f$ , é também comutativa.
- b) Mostrar que, se  $X$  está munido de uma ordem parcial, que seja mesmo uma ordem total, então a ordem parcial em  $Y$ , obtida por transporte por meio de  $f$ , é também uma ordem total.<sup>66</sup>

**Ex 1.4.23** Sejam  $a < b$  dois números reais.

- a) Mostrar que existe um homeomorfismo  $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ , definido por

$$f(t) = (1 - t)a + tb,$$

e deduzir daí que dois intervalos fechados, limitados e com mais que um elemento são sempre homeomorfos.

- b) Mostrar que existe um homeomorfismo  $g: [0, 1[ \rightarrow ]0, 1]$  e deduzir que qualquer intervalo de  $\mathbb{R}$ , com extremidades distintas e finitas, que seja fechado numa delas e aberto na outra, é homeomorfo a  $]0, 1[$ .
- c) Mostrar que qualquer intervalo aberto, com extremidades finitas e distintas, é sempre homeomorfo a  $]0, 1[$ .
- d) Mostrar que qualquer intervalo de  $\mathbb{R}$  da forma  $[a, +\infty[$  ou da forma  $] -\infty, a]$  é homeomorfo a  $]0, +\infty[$ .<sup>67</sup>
- e) Mostrar que qualquer intervalo de  $\mathbb{R}$  da forma  $]a, +\infty[$  ou da forma  $] -\infty, a[$  é homeomorfo a  $]0, +\infty[$ .<sup>68</sup>

**Ex 1.4.24 a)** Lembrar que se identificou em 1.4.44 um homeomorfismo entre  $[-1, 1]$  e a reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$ . Utilizar esse isomorfismo para verificar que os intervalos  $]0, +\infty[$  e  $]0, +\infty[$  são homeomorfos, respectivamente, a  $]0, 1[$  e  $]0, 1[$  e que  $\mathbb{R}$  é homeomorfo  $]0, 1[$ . Concluir que qualquer intervalo não vazio de  $\mathbb{R}$  é homeomorfo a um dos seguintes quatro “modelos”:  $\{0\}$ ,  $[0, 1]$ ,  $]0, 1[$ ,  $]0, 1[$ .

b) Uma das consequências do homeomorfismo atrás referido foi a possibilidade de definir uma métrica em  $\overline{\mathbb{R}}$  cuja topologia associada é a topologia usual deste espaço. Notando  $\tilde{d}$  a métrica de  $\overline{\mathbb{R}}$  utilizada na demonstração desta possibilidade determinar explicitamente as distâncias  $\tilde{d}(-1, 2)$  e  $\tilde{d}(1, +\infty)$ .

**Ex 1.4.25** Seja  $S \subset \mathbb{R}^2$  a circunferência,  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , conjunto onde consideramos a topologia induzida pela topologia usual de  $\mathbb{R}^2$ . Mostrar que existe uma bijecção contínua  $f: [0, 2\pi[ \rightarrow S$ , definida por  $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ , mas que esta bijecção não é um homeomorfismo. Encontrar outros exemplos de bijecção contínua, cuja inversa não é contínua, em que a bijecção em questão é a aplicação identidade de um dado conjunto.

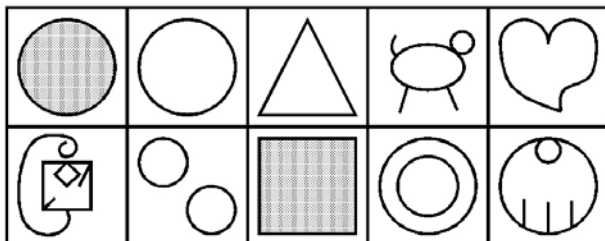
**Ex 1.4.26** Indicar, de entre os subconjuntos do plano sugeridos na figura seguinte, quais os que são homeomorfos entre si (em cada conjunto considerar a topologia associada à métrica induzida pela métrica usual do plano). Não se pretendem demonstrações

<sup>66</sup>A verificação destas propriedades será decerto suficiente para o convencer de que, em cada caso particular, é possível arranjar uma demonstração trivial da nossa “afirmação filosófica” de que uma estrutura obtida por transporte, a partir de uma estrutura que verifique uma certa propriedade suplementar, verifica ainda essa propriedade suplementar.

<sup>67</sup>De facto, como veremos no exercício 1.4.24, ele é também homeomorfo a  $]0, 1[$

<sup>68</sup>De facto, como veremos no exercício 1.4.24, ele é também homeomorfo a  $]0, 1[$ .

formais, mas apenas uma visualização intuitiva dos homeomorfismos em questão. Uma das maneiras de apoiar a intuição é reparar que um conjunto, que possa ser deformado noutro, sem “cortes” nem “colagens”, vai ser homeomorfo a este (as deformações podem “esticar” ou “comprimir” certas partes do conjunto).



**Ex 1.4.27** O mesmo que no exercício anterior, mas relativamente aos subconjuntos do plano sugeridos pelas letras e algarismos, por exemplo na versão seguinte:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R  
S T U V W X Y Z 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Se quiser, pode juntar outras versões de algumas das maiúsculas, assim como as letras minúsculas.

**Ex 1.4.28** O mesmo que no exercício anterior, mas relativamente aos seguintes sólidos no espaço:

- |                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| a) Bóia maciça;          | b) Bola maciça;              |
| c) Copo;                 | d) Chávena;                  |
| e) Funil sem pega;       | f) Funil com pega;           |
| g) Boné com pala;        | h) Terrina com duas pegadas; |
| i) Bola de borracha oca; | j) Cachimbo.                 |

**Nota:** Consideramos todos os conjuntos como sólidos, pelo que não desprezamos a espessura do material que os constitui.

## §5. Produto cartesiano de espaços topológicos.

Lembremos que se  $X$  e  $Y$  são dois conjuntos o seu produto cartesiano  $X \times Y$  é o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  com  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Dados um conjunto  $Z$  e uma aplicação  $h: Z \rightarrow X \times Y$ , podemos considerar duas aplicações  $f: Z \rightarrow X$  e  $g: Z \rightarrow Y$  (designadas, respetivamente, *primeira e segunda coordenadas* de  $h$  e notadas por vezes  $h_1$  e  $h_2$ ) definidas pela condição de se ter

$$h(z) = (f(z), g(z))$$

para cada  $z \in Z$ . Reciprocamente, dadas duas aplicações  $f: Z \rightarrow X$  e  $g: Z \rightarrow Y$  existe uma única aplicação  $h: Z \rightarrow X \times Y$  que as tem por coordenadas, nomeadamente a definida pela igualdade destacada acima. O nosso primeiro objetivo é encontrar um modo natural de definir uma topologia em  $X \times Y$  no caso em que  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos. Será cómodo encontrar uma propriedade natural que caracterize a topologia procurada antes de definir explicitamente quais as vizinhanças dessa topologia.

**1.5.1 (A topologia produto)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Tem-se então:

**a)** Existe uma única topologia no produto cartesiano  $X \times Y$  (a que chamamos *topologia produto* e que é a que se considera implicitamente num produto cartesiano de espaços topológicos) com a propriedade de, quaisquer que sejam o espaço topológico  $Z$ , o subconjunto  $C \subset Z$ , o ponto  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e a aplicação  $h: C \rightarrow X \times Y$ , com coordenadas  $f: C \rightarrow X$  e  $g: C \rightarrow Y$ , vir  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a, b) \in X \times Y$  se, e só se,  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a$  e  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} b$ .

**b)** Esta topologia pode também ser caracterizada como sendo a única em  $X \times Y$  para a qual uma sucessão generalizada  $((x_j, y_j))_{j \in J}$  tem limite  $(a, b)$  se, e só se,  $x_j \rightarrow a$  e  $y_j \rightarrow b$ .

**c)** Um subconjunto  $\Omega \subset X \times Y$  é uma vizinhança de um elemento  $(a, b)$  para a topologia produto se, e só se, existir  $U$  vizinhança de  $a$  em  $X$  e  $V$  vizinhança de  $b$  em  $Y$  tais que  $U \times V \subset \Omega$ , isto é, tal que  $(x, y) \in \Omega$  para quaisquer  $x \in U$  e  $y \in V$  (em particular os produtos cartesianos  $U \times V$  com  $U$  vizinhança de  $a$  e  $V$  vizinhança de  $b$  são vizinhanças de  $(a, b)$ ).

**Dem:** Comecemos por notar que uma topologia em  $X \times Y$  que verifique a propriedade referida em a) verifica também em particular a propriedade referida em b), uma vez que os limites das sucessões generalizadas são casos particulares de limites de funções num ponto aderente ao domínio (cf. 1.2.62). Uma vez que duas topologias para as quais as sucessões generalizadas que convergem para os diferentes pontos são as mesmas coincidem necessariamente (cf. a alínea b) de 1.2.74), podemos concluir que não pode existir mais que uma topologia em  $X \times Y$  que verifique a propriedade referida em b), e portanto também não pode haver mais que uma topologia em  $X \times Y$  que verifique a propriedade referida em a). Resta-nos mostrar que a caracterização das vizinhanças referida em c) define uma topologia e que, para esta topologia, verifica-se a propriedade referida em a). Mostremos, em primeiro lugar, que as vizinhanças dos pontos de  $X \times Y$  definidas em c) verificam as cinco propriedades da definição de topologia em 1.2.1.

O facto de  $X \times Y$  ser uma vizinhança de qualquer ponto  $(a, b)$  resulta de se ter  $X \times Y \subset X \times Y$  com  $X$  vizinhança de  $a$  e  $Y$  vizinhança de  $b$ . O facto de qualquer subconjunto de  $X \times Y$  que contenha uma vizinhança de  $(a, b)$  ser ainda uma vizinhança de  $(a, b)$  é uma consequência direta da definição das

vizinhanças. Quanto à terceira propriedade, vemos que qualquer vizinhança  $\Omega$  de  $(a, b)$  contém um produto  $U \times V$  com  $U$  vizinhança de  $a$  e  $V$  vizinhança de  $b$  e então o facto de se ter  $a \in U$  e  $b \in V$  implica que  $(a, b) \in U \times V$  e portanto  $(a, b) \in \Omega$ . Sendo agora  $\Omega$  e  $\Omega'$  vizinhanças de  $(a, b)$  podemos considerar  $U$  e  $U'$  vizinhanças de  $a$  e  $V$  e  $V'$  vizinhanças de  $b$  com  $U \times V \subset \Omega$  e  $U' \times V' \subset \Omega'$  e então tem-se

$$(U \cap U') \times (V \cap V') \subset \Omega \cap \Omega',$$

com  $U \cap U'$  vizinhança de  $a$  e  $V \cap V'$  vizinhança de  $b$ , o que implica que  $\Omega \cap \Omega'$  é também uma vizinhança de  $(a, b)$ . Por fim, quanto à quinta propriedade, se  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a, b)$ , podemos considerar uma vizinhança  $U$  de  $a$  e uma vizinhança  $V$  de  $b$  com  $U \times V \subset \Omega$  e seguidamente vizinhanças  $U'$  de  $a$  e  $V'$  de  $b$  tais que  $U$  seja vizinhança de todos os pontos de  $U'$  e  $V$  seja vizinhança de todos os pontos de  $V'$  e então  $U' \times V'$  é uma vizinhança de  $(a, b)$  tal que  $\Omega$  é vizinhança de todos os pontos de  $U' \times V'$ .

Consideremos agora um espaço topológico  $Z$ , um subconjunto  $C \subset Z$  e  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$ , assim como uma aplicação  $h: C \rightarrow X \times Y$  com coordenadas  $f: C \rightarrow X$  e  $g: C \rightarrow Y$ . Suponhamos que  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a$  e que  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} b$ . Sendo  $\Omega$  uma vizinhança de  $(a, b)$  em  $X \times Y$ , podemos considerar uma vizinhança  $U$  de  $a$  e uma vizinhança  $V$  de  $b$  tais que  $U \times V \subset \Omega$  e seguidamente vizinhanças  $W$  e  $W'$  de  $z_0$  em  $Z$  tais que  $f(z) \in U$  para cada  $z \in W \cap C$  e  $g(z) \in V$  para cada  $z \in W' \cap C$ . Tem-se então que  $W \cap W'$  é uma vizinhança de  $z_0$  em  $Z$  e, para cada  $z \in (W \cap W') \cap C$  vem  $f(z) \in U$  e  $g(z) \in V$  donde

$$h(z) = (f(z), g(z)) \in U \times V \subset \Omega,$$

o que mostra que se tem  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a, b) \in X \times Y$ . Suponhamos reciprocamente que  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a, b) \in X \times Y$ . Sendo  $U$  uma vizinhança arbitrária de  $a$  em  $X$ , o facto de  $Y$  ser uma vizinhança de  $b$  em  $Y$  permite-nos considerar a vizinhança  $U \times Y$  de  $(a, b)$  em  $X \times Y$ , podendo assim garantir-se a existência de uma vizinhança  $W$  de  $z_0$  em  $Z$  tal que para cada  $z \in W \cap C$

$$(f(z), g(z)) = h(z) \in U \times Y.$$

em particular  $f(z) \in U$  o que mostra que  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a$ . Analogamente, sendo  $V$  uma vizinhança arbitrária de  $b$  em  $Y$ , o facto de  $X$  ser uma vizinhança de  $a$  em  $X$  permite-nos considerar a vizinhança  $X \times V$  de  $(a, b)$  em  $X \times Y$ , podendo assim garantir-se a existência de uma vizinhança  $W$  de  $z_0$  em  $Z$  tal que para cada  $z \in W \cap C$

$$(f(z), g(z)) = h(z) \in X \times V.$$

em particular  $g(z) \in V$  o que mostra que  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} b$ .  $\square$

**1.5.2 (Corolário)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e consideremos em  $X \times Y$  a topologia produto. Tem-se então:

a) Se  $Z$  é um espaço topológico e  $h: Z \rightarrow X \times Y$  é uma aplicação com coordenadas  $f: Z \rightarrow X$  e  $g: Z \rightarrow Y$ , então  $h$  é contínua num ponto  $z_0 \in Z$  se, e só se, ambas as coordenadas  $f$  e  $g$  são contínuas em  $z_0$ .

b) As *projeções canônicas*  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ , definidas por

$$\pi_1(x, y) = x, \quad \pi_2(x, y) = y,$$

são aplicações contínuas.

**Dem:** A conclusão de a) resulta diretamente da caracterização da topologia produto na alínea a) de 1.5.1 se nos lembrarmos da definição de função contínua num ponto em termos de limites (cf. 1.4.1) que nos diz que  $h$  é contínua em  $z_0$  se, e só se  $h(c) = (f(c), g(c))$  for um limite de  $g$  quando  $z \rightarrow z_0$  (e analogamente para as aplicações coordenadas  $f$  e  $g$ ). A conclusão de b) resulta da de a) se repararmos que as projeções canônicas  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$  não são mais do que as duas coordenadas da aplicação identidade  $Id: X \times Y \rightarrow X \times Y$  que sabemos ser contínua.  $\square$

**1.5.3 (Produto de subespaços topológicos)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $A \subset X$  e  $B \subset Y$  subconjuntos sobre os quais se consideram as topologias induzidas. Tem-se então que a topologia produto de  $A \times B$  coincide com a topologia induzida neste conjunto pela topologia produto de  $X \times Y$ .

**Dem:** Vamos verificar que a topologia induzida de  $A \times B$  verifica a propriedade na alínea a) de 1.5.1, que caracteriza a topologia produto. Sejam então  $Z$  um espaço topológico,  $C \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e  $h: Z \rightarrow A \times B$  uma aplicação com coordenadas  $f: C \rightarrow A$  e  $g: C \rightarrow B$ . Lembrando a caracterização dos limites de aplicações com valores num subespaço referida em 1.2.32, vemos que  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a, b) \in A \times B$  para a topologia induzida se, e só se,  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a, b)$  para a topologia de  $X \times Y$ , se, e só se,  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a$  e  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} b$  para as topologias de  $X$  e de  $Y$ , se, e só se,  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a$  e  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} b$  para as topologias induzidas de  $A$  e de  $B$ .  $\square$

**1.5.4 (Caracterização dos espaços de Hausdorff)** Seja  $X$  um espaço topológico e consideremos o *subconjunto diagonal*  $\Delta_X \subset X \times X$ , definido por

$$\Delta_X = \{(x, x)\}_{x \in X} = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}.$$

Tem-se então que  $X$  é um espaço de Hausdorff se, e só se,  $\Delta_X$  é um subconjunto fechado de  $X \times X$ .

**Dem:** Suponhamos que  $X$  é de Hausdorff. Para mostrarmos que  $\Delta_X$  é

fechado, temos que mostrar que todo o ponto  $(a, b) \in X \times Y$  aderente a  $\Delta_X$  pertence a  $\Delta_X$  ou seja, que se  $(a, b) \notin \Delta_X$  então  $(a, b)$  não é aderente a  $\Delta_X$ . Ora, sendo  $(a, b) \notin \Delta_X$ , tem-se  $a \neq b$  e portanto podemos considerar vizinhanças  $U$  de  $a$  e  $V$  de  $b$  tais que  $U \cap V = \emptyset$ , tendo-se então que  $U \times V$  é uma vizinhança de  $(a, b)$  em  $X \times Y$  sem nenhum ponto em  $\Delta_X$ , o que mostra que  $(a, b)$  não é aderente a  $\Delta_X$ . Suponhamos, reciprocamente, que  $\Delta_X$  é fechado em  $X \times X$ . Sejam  $a \neq b$  em  $X$ , portanto com  $(a, b) \notin \Delta_X$ . Uma vez que  $(a, b)$  não é aderente a  $\Delta_X$ , podemos considerar uma vizinhança  $\Omega$  de  $(a, b)$  em  $X \times Y$  que não tenha nenhum elemento de  $\Delta_X$  ou seja, tal que cada  $(x, y) \in \Omega$  verifica  $x \neq y$ . Sendo  $U$  vizinhança de  $a$  e  $V$  vizinhança de  $b$  tais que  $U \times V \subset \Omega$  tem-se, em particular,  $x \neq y$  para cada  $x \in U$  e  $y \in V$ , o que mostra que  $U \cap V = \emptyset$  e portanto  $X$  é um espaço de Hausdorff.  $\square$

**1.5.5 (Corolário)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, o segundo dos quais de Hausdorff, e  $f, g: X \rightarrow Y$  duas aplicações contínuas. É então fechado em  $X$  o conjunto

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}.$$
 <sup>69</sup>

**Dem:** Podemos considerar a aplicação contínua  $h: X \rightarrow Y \times Y$  definida por  $h(x) = (f(x), g(x))$  bastando então reparar que

$$A = \{x \in X \mid h(x) \in \Delta_Y\}$$

é a imagem recíproca por meio de  $h$  do subconjunto  $\Delta_Y$  fechado em  $Y \times Y$  (cf. 1.4.25).  $\square$

**1.5.6 (Continuidade das operações em  $\mathbb{R}$ )** Considerando em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  a topologia produto das topologias usuais de  $\mathbb{R}$ , são contínuas as aplicações  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x \times y, \quad h(x, y) = y - x.$$

**Dem:** Temos uma consequência direta do resultado 1.4.21 sobre a continuidade da soma, do produto e da diferença de funções contínuas com valores reais aplicado às duas projeções canônicas  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que sabemos serem aplicações contínuas.  $\square$

**1.5.7 (Comparar com 1.5.4)** Considerando em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  a topologia produto das topologias usuais de  $\mathbb{R}$ , são respetivamente aberto e fechado em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  os conjuntos

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}.$$

**Dem:** Considerando a aplicação contínua  $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x, y) = y - x$  tem-se que  $U$  e  $A$  são as imagens recíprocas por  $h$  dos subconjuntos  $]0, +\infty[$  e  $[0, +\infty[$  respetivamente aberto e fechado em  $\mathbb{R}$ .  $\square$

<sup>69</sup>Reparar que esta conclusão já foi obtida, de um modo alternativo, no exercício 1.4.7.

No mesmo espírito que em 1.5.6, podemos também afirmar a continuidade da exponenciação, a qual se vai deduzir da continuidade da multiplicação que aí referimos.

### 1.5.8 (Continuidade da exponenciação I) É contínua a aplicação

$$\varphi: ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

definida por  $\varphi(x, y) = x^y$ .

**Dem:** Lembrar que é contínua a função real de variável real  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  definida por  $\exp(x) = e^x$  assim como a sua inversa  $\ln: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . A continuidade da aplicação  $\varphi$  resulta então do teorema sobre a continuidade da aplicação composta e da continuidade da multiplicação em 1.5.6, tendo em conta a fórmula  $\ln(x^y) = y \times \ln(x)$  que implica que

$$\varphi(x, y) = \exp(y \times \ln(x)). \quad \square$$

Há situações em que é conveniente considerar a exponenciação também definida quando a base é 0, desde que o expoente seja estritamente positivo. Define-se então, como seria fácil prever,  $0^y = 0$ , sempre que  $y > 0$ , o que é compatível com a definição conhecida no caso em que  $y \in \mathbb{N}$ . Refira-se, a propósito, que com esta definição continuam trivialmente a ser válidas as propriedades algébricas usuais das potências

$$(x \times x')^y = x^y \times x'^y, \quad x^{y+y'} = x^y \times x^{y'}, \quad x^{y \times z} = (x^y)^z,$$

desde que as bases sejam maiores ou iguais a 0 e os expoentes sejam estritamente positivos. Obtém-se assim uma nova aplicação de exponenciação que não é restrição nem extensão da aplicação  $\varphi$  considerada em 1.5.8, embora as duas aplicações coincidam naturalmente na interseção dos seus domínios.

### 1.5.9 (Continuidade da exponenciação II) É contínua a aplicação

$$\psi: [0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$$

definida por  $\psi(x, y) = x^y$ .

**Dem:** A continuidade da restrição de  $\psi$  ao subconjunto aberto do seu domínio  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  resulta de essa restrição ser restrição da aplicação contínua  $\varphi$  em 1.5.8. Tendo em conta 1.4.17 concluímos que  $\psi$  é contínua em cada ponto de  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . Resta-nos provar a continuidade de  $\psi$  em cada ponto  $(0, y_0)$  com  $y_0 > 0$ , ponto esse para o qual se tem  $\psi(0, y_0) = 0$ . Consideremos então  $\delta > 0$  arbitrário. Seja  $\varepsilon' = \frac{y_0}{2} > 0$  e  $\varepsilon = \min\{1, \delta^{-\varepsilon'}\} > 0$ . Dados

$$x \in B_\varepsilon(0) \cap [0, +\infty[ = [0, \varepsilon[, \quad y \in B_{\varepsilon'}(y_0) = ]\varepsilon', 3\varepsilon'[ \subset ]0, +\infty[$$



arbitrários, vem  $x < 1$  e  $x < \delta^{-\varepsilon'}$  donde

$$0 \leq x^y \leq x^{\varepsilon'} < (\delta^{-\varepsilon'})^{\varepsilon'} = \delta,$$

portanto,  $\psi(x, y) \in B_\delta(0)$ , o que mostra que  $0$  é efetivamente limite de  $\psi(x, y)$  quando  $(x, y) \rightarrow (0, y_0)$ .  $\square$

**1.5.10 (Continuidade da métrica)** Seja  $X$  um espaço métrico, cuja métrica será notada  $d$  e consideremos em  $X \times X$  a topologia produto. É então contínua a aplicação  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada par  $(x, y)$  de elementos de  $X$  associa a sua distância  $d(x, y)$ .

**Dem:** Mostremos a continuidade da aplicação  $d$  num ponto  $(a, b)$  arbitrário. Com esse objetivo, começamos por estabelecer uma desigualdade que nos vai ser útil e que envolve, além de  $a$  e  $b$ , dois pontos arbitrários  $x$  e  $y$  de  $X$ . Para isso, aplicamos duas vezes a desigualdade triangular generalizada referida em 1.1.2 para deduzir que

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y), \\ d(a, b) &\leq d(a, x) + d(x, y) + d(y, b), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} d(x, y) - d(a, b) &\leq d(x, a) + d(y, b), \\ d(a, b) - d(x, y) &\leq d(x, a) + d(y, b). \end{aligned}$$

Uma vez que o valor absoluto  $|d(x, y) - d(a, b)|$  é igual a um dos dois primeiros membros precedentes, estas últimas desigualdades implicam que

$$|d(x, y) - d(a, b)| \leq d(x, a) + d(y, b),$$

que é a desigualdade que vamos utilizar.

Consideremos então uma vizinhança arbitrária  $W$  de  $d(a, b)$  em  $\mathbb{R}$  e fixemos  $\delta > 0$  tal que a bola aberta de  $\mathbb{R}$  de centro  $d(a, b)$  e raio  $\delta$  esteja contida em  $W$ . Considerando como vizinhanças de  $a$  e  $b$ , respetivamente, as bolas abertas  $B_{\delta/2}(a)$  e  $B_{\delta/2}(b)$ , vemos agora que para cada  $(x, y)$  na vizinhança  $B_{\delta/2}(a) \times B_{\delta/2}(b)$  de  $(a, b)$  para a topologia produto de  $X \times Y$  tem-se

$$|d(x, y) - d(a, b)| \leq d(x, a) + d(y, b) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

pelo que  $d(x, y)$  pertence à bola de centro  $d(a, b)$  e raio  $\delta$  de  $\mathbb{R}$ , em particular  $d(x, y) \in W$ , o que prova a continuidade pretendida.  $\square$

**1.5.11 (Nota)** Repare-se que o resultado precedente implica o facto de, para  $a \in X$  fixado, ser contínua a aplicação  $d_a: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_a(x) = d(a, x)$ , facto que foi estabelecido em 1.4.22. Com efeito, esta última aplicação é a composta da aplicação  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  com a aplicação  $X \rightarrow X \times X$  definida por  $x \mapsto (a, x)$ , aplicação que é contínua por isso

acontecer às suas duas coordenadas, a primeira constante a a segunda igual à identidade de  $X$ .

Em vez de continuar a examinar outras propriedades da topologia produto no produto cartesiano de dois espaços topológicos vamos agora generalizar o que foi estudado até este momento à situação em que temos um produto cartesiano podendo envolver mais que dois espaços topológicos. Para isso partimos da observação de que considerar um par ordenado  $(x, y) \in X \times Y$  é o mesmo que considerar a aplicação de domínio  $\{1, 2\}$  que a 1 associa  $x$  e a 2 associa  $y$  (a primeira e a segunda coordenadas). A generalização que temos em vista consiste em substituir o conjunto de índices  $\{1, 2\}$ , que está implícito quando se considera  $X \times Y$ , por um conjunto não vazio de índices  $I$  que em geral poderá ser arbitrário, embora para alguns resultados deva ser suposto finito.

**1.5.12 (Generalidades sobre produtos cartesianos)** Consideremos um conjunto não vazio  $I$  de índices e, para cada  $i \in I$ , um conjunto  $X_i$ . Chamamos então *produto cartesiano* dos conjuntos  $X_i$  (ou, mais precisamente, da família de conjuntos  $(X_i)_{i \in I}$ ) o conjunto  $\prod_{i \in I} X_i$  de todas as

aplicações de domínio  $I$  que aplicam cada índice  $i$  num elemento do conjunto  $X_i$ . Para uma tal aplicação será utilizada com frequência a notação de família  $(x_i)_{i \in I}$ , onde  $x_i$  é naturalmente a imagem do índice  $i$  pela aplicação.

Analogamente ao que sucedia com o produto cartesiano de dois conjuntos, dados um conjunto  $Z$  e uma aplicação  $h: Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ , ficam-lhe associadas

aplicações  $h_i: Z \rightarrow X_i$  (as *coordenadas* da aplicação  $h$ ) pela condição de se ter

$$(1) \quad h(z) = (h_i(z))_{i \in I}$$

para cada  $z \in Z$  e podemos, para cada índice  $i_0$  fixado considerar uma aplicação

$$\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}, \quad \pi_{i_0}((x_i)_{i \in I}) = x_{i_0},$$

aplicação a que se dá o nome de *projeção canónica* correspondente ao índice  $i_0$  e que não é mais do que a coordenada de índice  $i_0$  da aplicação identidade de  $\prod_{i \in I} X_i$ . Também como no caso em que temos dois fatores, podemos notar

que, dadas aplicações arbitrárias  $h_i: Z \rightarrow X_i$ , existe uma única aplicação  $h: Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  que as tem como coordenadas, nomeadamente a definida pela

igualdade em (1).

Repare-se que, no caso em que todos os conjuntos  $X_i$  coincidem com um mesmo conjunto  $X$ , o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$  não é mais do que o conjunto

$Ap(I, X)$  de todas as aplicações de  $I$  em  $X$ .

No caso particular em que  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , onde  $n \geq 1$ , também se usa a notação  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  como alternativa a  $\prod_{i \in I} X_i$  e a notação

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  como alternativa a  $(x_i)_{i \in I}$  e, se todos os  $X_i$  forem iguais a um mesmo  $X$  também se escreve  $X^n$  no lugar de  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  (é neste contexto que se insere a notação  $\mathbb{R}^n$  já encontrada decerto em ocasiões anteriores).

**1.5.13 (A topologia produto)** Seja  $I$  um conjunto não vazio de índices, finito ou infinito, e seja  $X_i$  um espaço topológico para cada  $i \in I$ . Tem-se então:

**a)** Existe uma única topologia no produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$  com a propriedade

de, quaisquer que sejam o espaço topológico  $Z$ , o subconjunto  $C \subset Z$ , o ponto  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e a aplicação  $h: C \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ , com coordenadas

$h_i: C \rightarrow X_i$ , ter-se  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} X_i$  se, e só se  $h_i(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a_i$  em  $X_i$

para cada índice  $i$ . Dizemos que esta topologia é a *topologia produto* ou a *topologia de Tichonoff*<sup>70</sup> de  $\prod_{i \in I} X_i$ , sendo ela a que se considera implicitamente num produto cartesiano de espaços topológicos quando outra não for explicitada.<sup>71</sup>

**b)** Um subconjunto  $\Omega \subset \prod_{i \in I} X_i$  é uma vizinhança de um ponto  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia produto se, e só se, se tiver  $\Omega \supset \prod_{i \in I} U_i$  para alguma família

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  com  $U_i \subset X_i$  tal que cada  $U_i$  seja vizinhança de  $a_i$  em  $X_i$  e que seja finito o conjunto dos índices  $i$  com  $U_i \neq X_i$ .<sup>72</sup>

**Dem:** Começemos por notar que se duas topologias em  $\prod_{i \in I} X_i$  verificam

ambas a propriedade referida em a) elas têm ambas as mesmas sucessões generalizadas a convergir para cada ponto  $(a_i)_{i \in I}$  (lembrar que os limites das sucessões generalizadas são casos particulares de limites de funções num ponto aderente a domínio como referimos em 1.2.62) e portanto coincidem necessariamente (cf. a alínea b) de 1.2.74). Por outras palavras, podemos garantir a unicidade de uma topologia com a propriedade referida em a). Resta-nos mostrar que a caracterização das vizinhanças referida em b) define uma topologia e que, para esta topologia, verifica-se a propriedade referida

<sup>70</sup>Esta última designação costuma se utilizada com mais frequência no caso em que o conjunto de índice  $I$  é infinito.

<sup>71</sup>O facto de não explicitarmos o resultado sobre as sucessões generalizadas convergentes no produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$  que corresponde ao enunciado na alínea b) de 1.5.1, e que é

também válido com justificação trivial, tem como único objetivo evitarmos notações que se poderão considerar confusas (por fazerem intervir dois tipos de índices, o das coordenadas do produto cartesiano e o das sucessões generalizadas).

<sup>72</sup>Esta última condição costuma ser enunciada, de modo mais sugestivo, dizendo que para *quase todos* os índices  $i$  a vizinhança  $U_i$  coincide com o espaço todo  $X_i$ .

em a).

Mostremos, em primeiro lugar, que as vizinhanças dos pontos de  $\prod_{i \in I} X_i$  definidas em b) verificam as cinco propriedades da definição de topologia em 1.2.1. O facto de  $\prod_{i \in I} X_i$  ser uma vizinhança de qualquer ponto  $(a_i)_{i \in I}$  resulta de se ter  $\prod_{i \in I} X_i \subset \prod_{i \in I} X_i$  com  $X_i$  vizinhança de  $a_i$ , sendo vazio, em particular finito, o conjunto dos  $i$  tais que  $X_i \neq X_i$ . O facto de qualquer subconjunto de  $\prod_{i \in I} X_i$  que contenha uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  ser ainda uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  é uma consequência direta da definição das vizinhanças. Quanto à terceira propriedade, vemos que qualquer vizinhança  $\Omega$  de  $(a_i)_{i \in I}$  contém um produto  $\prod_{i \in I} U_i$  com cada  $U_i$  vizinhança de  $a_i$  e então  $a_i \in U_i$  para cada  $i$ , donde  $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i$  e portanto  $(a_i)_{i \in I} \in \Omega$ . Sendo agora  $\Omega$  e  $\Omega'$  vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$  podemos considerar famílias  $(U_i)_{i \in I}$  e  $(U'_i)_{i \in I}$  com  $U_i$  e  $U'_i$  vizinhanças de  $a_i$  tais que sejam finitos os conjuntos  $K$  e  $K'$  dos índices  $i \in I$  para os quais se tenha respetivamente  $U_i \neq X_i$  e  $U'_i \neq X_i$  e para as quais se tenha  $\Omega \supset \prod_{i \in I} U_i$  e  $\Omega' \supset \prod_{i \in I} U'_i$ ; tem-se então que

$$\Omega \cap \Omega' \supset \prod_{i \in I} (U_i \cap U'_i),$$

onde cada  $U_i \cap U'_i$  é vizinhança de  $a_i$  e é finito, por estar contido em  $K \cup K'$ , o conjunto dos  $i$  tais que  $U_i \cup U'_i \neq X_i$ , o que implica que  $\Omega \cap \Omega'$  é também uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$ . Por fim, quanto à quinta propriedade, se  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$ , podemos considerar vizinhanças  $U_i$  dos  $a_i$  tais que  $\prod_{i \in I} U_i \subset \Omega$  e que seja finito o conjunto  $K$  dos índices  $i$  tais que

$U_i \neq X_i$  e seguidamente para cada  $i \in K$  uma vizinhança  $U'_i$  de  $a_i$  tal que  $U_i$  seja vizinhança de todos os elementos de  $U'_i$  e então, pondo  $U'_i = X_i$  para cada  $i \notin K$ , vemos que  $\prod_{i \in I} U'_i$  é uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  tal que  $\Omega$  é

vizinhança de todos os seus elementos.

Consideremos agora um espaço topológico  $Z$ , um subconjunto  $C \subset Z$  e  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$ , assim como uma aplicação  $h: C \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  com

coordenadas  $h_i: C \rightarrow X_i$ .

Suponhamos que  $h_i(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a_i$  para cada  $i \in I$ . Seja  $\Omega$  uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} X_i$ . Podemos considerar vizinhanças  $U_i$  dos  $a_i$  tais que

$\prod_{i \in I} U_i \subset \Omega$  e que seja finito o conjunto  $K$  dos índices  $i$  tais que  $U_i \neq X_i$  e

seguidamente para cada  $i \in K$  uma vizinhança  $V_i$  de  $z_0$  em  $Z$  tal que  $h_i(z) \in U_i$  para cada  $z \in V_i \cap C$ . Seja  $V$  a vizinhança de  $z_0$  em  $Z$  interseção finita dos conjuntos  $V_i$  com  $i \in K$  (no caso em que  $K = \emptyset$  tomamos

$V = Z$ ). Para cada  $z \in V \cap C$  vem  $h_i(z) \in U_i$  para todo o  $i$  (se  $i \in K$  por ser  $z \in V_i \cap C$  e se  $i \notin K$  por ser  $U_i = X_i$ ) e portanto

$$h(z) = (h_i(z))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i \subset \Omega.$$

Provamos assim que  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} X_i$ .

Suponhamos, reciprocamente, que  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} X_i$  e seja  $i_0 \in I$  um índice arbitrário. Seja  $U_{i_0}$  uma vizinhança arbitrária de  $a_{i_0} = h_{i_0}((a_i)_{i \in I})$ . Pondo  $U_i = X_i$  para todo o  $i \neq i_0$ , podemos considerar a vizinhança  $\prod_{i \in I} U_i$  de  $(a_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} X_i$  e, a partir desta, uma vizinhança  $V$  de  $z_0$  em  $Z$  tal que para cada  $z \in V \cap C$  se tenha

$$h(z) = (h_i(z))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i,$$

em particular  $h_{i_0}(z) \in U_{i_0}$ . Fica assim provado que  $h_{i_0}(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a_{i_0}$ .  $\square$

**1.5.14 (Notas) a)** No caso em que  $I = \{1, 2\}$  e encaramos  $X_1 \times X_2$  como sendo o produto cartesiano  $\prod_{i \in \{1,2\}} X_i$  constatamos que a topologia produto definida

em 1.5.13 coincide com a topologia produto referida em 1.5.1, visto que a condição que a caracteriza, referida na alínea a) do resultado precedente, coincide com a referida na alínea a) de 1.5.1. Podemos assim concluir que a definição precedente generaliza efetivamente a dada no caso particular estudado no início.

**b)** No caso em que o conjunto de índices  $I$  é finito, a caracterização das vizinhanças de um elemento  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia produto pode ser enunciada de forma mais simples: Um conjunto  $\Omega$  é vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  se, e só se,  $\Omega \supset \prod_{i \in I} W_i$  para alguma família  $(W_i)_{i \in I}$  com  $W_i \subset X_i$  vizinhança de

$a_i$  em  $X_i$ . Com efeito, para uma tal família  $(W_i)_{i \in I}$  o conjunto dos índices  $i$  tais que  $W_i \neq X_i$ , sendo uma parte de  $I$ , é automaticamente finito. É claro que, em particular, os próprios conjuntos da forma  $\prod_{i \in I} W_i$  com cada  $W_i$

vizinhança de  $a_i$  vão ser vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$  (por conterem elas mesmas).

**c)** No caso em que o conjunto não vazio  $I$  de índices é finito ou infinito mas todos os espaços topológicos  $X_i$  coincidem com um mesmo espaço topológico  $X$  já referimos que o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$  não é mais do que

o conjunto  $Ap(I, X)$  de todas as aplicações de  $I$  em  $X$ . Além disso, a topologia produto de  $\prod_{i \in I} X_i$  coincide com a topologia da convergência simples de  $Ap(I, X)$ , definida em 1.2.82.

Para o reconhecermos, basta-nos reparar que as caracterizações das

vizinhanças de uma família  $(a_i)_{i \in I}$  em 1.2.82 e em 1.5.13 coincidem, uma vez que, para cada família  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ , o conjunto  $\mathcal{B}'_{\mathcal{U}}$  referido em 1.2.82 não é mais do que o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} U_i$ . Alternativamente, também seria suficiente reparar que a caracterização dos limites de funções com valores em  $\prod_{i \in I} X_i$  para a topologia produto, referida na alínea a) de 1.5.13, é uma propriedade que se verificou em 1.2.82 ser válida para a topologia da convergência simples.

**1.5.15 (Corolário)** Seja  $I$  um conjunto não vazio de índices, finito ou infinito, e seja  $X_i$  um espaço topológico para cada  $i \in I$  e consideremos no produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$  a topologia produto. Tem-se então:

a) Se  $Z$  é um espaço topológico e  $h: Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  é uma aplicação com coordenadas  $h_i: Z \rightarrow X_i$ , então  $h$  é contínua num ponto  $z_0 \in Z$  se, e só se, todas as coordenadas  $h_i$  são contínuas em  $z_0$ .

b) Para cada  $i_0 \in I$  a projeção canónica  $\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}$  é uma aplicação contínua.

**Dem:** Tal como em 1.5.2, conclusão de a) resulta diretamente da caracterização da topologia produto na alínea a) de 1.5.13 se nos lembrarmos da definição de função contínua num ponto em termos de limites (cf. 1.4.1) que nos diz que  $h$  é contínua em  $z_0$  se, e só se  $h(z_0) = (h_i(z_0))_{i \in I}$  for um limite de  $h$  quando  $z \rightarrow z_0$  (e analogamente para as aplicações coordenadas  $h_i$ ). A conclusão de b) resulta da de a) se repararmos que cada projeção canónica  $\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}$  não é mais do que a coordenada de índice  $i_0$  da aplicação identidade  $Id: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  que sabemos ser contínua.  $\square$

**1.5.16 (Produto de subespaços topológicos)** Seja  $I$  um conjunto não vazio de índices, finito ou infinito, e seja  $X_i$  um espaço topológico para cada  $i \in I$ . Seja para cada  $i \in I$  um subconjunto  $A_i \subset X_i$  onde consideramos a topologia induzida. No produto cartesiano  $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i$  coincidem então a topologia produto das topologias dos  $A_i$  e a topologia induzida pela topologia produto de  $\prod_{i \in I} X_i$ .

**Dem:** Tal como em 1.5.3, basta mostrarmos que a segunda topologia verifica a propriedade na alínea a) de 1.5.13, que caracteriza a topologia produto de  $\prod_{i \in I} A_i$ . Sejam então  $Z$  um espaço topológico,  $C \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e  $h: Z \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$  uma aplicação com coordenadas  $h_i: C \rightarrow A_i$ . Lembrando a caracterização dos limites de aplicações com valores num subespaço referida em 1.2.32, vemos que  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$  para a topologia induzida se,

e só se,  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (a_i)_{i \in I}$  para a topologia de  $\prod_{i \in I} X_i$ , se, e só se,  $h_i(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a_i$  para a topologia de  $X_i$  para cada  $i$ , se, e só se, para cada  $i$ ,  $h_i(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a_i$  para as topologias induzidas de  $A_i$ .  $\square$

**1.5.17 (Produto finito de espaços métricos)** Sejam  $I$  um conjunto finito e não vazio de índices e para cada  $i \in I$  um espaço topológico  $X_i$  cuja topologia é a associada a uma certa métrica  $d_i$ . Pode então definir-se uma métrica  $d$  no produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$ , a que damos o nome de *métrica do máximo*, por

$$d((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \max_{i \in I} d_i(x_i, y_i)$$

e a topologia associada a esta métrica é a topologia produto de  $\prod_{i \in I} X_i$ .

**Dem:** Começemos por verificar que a aplicação  $d$  definida no enunciado, que toma valores em  $[0, +\infty[$  é efetivamente uma métrica em  $\prod_{i \in I} X_i$ , isto é, que

verifica as propriedades a) a d) em 1.1.1. Uma vez que as propriedades a) e b) são triviais e que a propriedade d) resulta de que o máximo de um número finito de números em  $[0, +\infty[$  é 0 se, e só se, estes são todos iguais a 0, temos apenas de examinar a propriedade c). Ora, dados três elementos  $x = (x_i)_{i \in I}$ ,  $y = (y_i)_{i \in I}$  e  $z = (z_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} X_i$ , vemos que para cada  $i$  tem-se  $d(x_i, y_i) \leq d(x, y)$  e  $d(y_i, z_i) \leq d(y, z)$ , donde

$$d(x_i, z_i) \leq d(x_i, y_i) + d(y_i, z_i) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

e portanto, uma vez que  $d(x, z)$  é igual a um dos valores  $d_i(x_i, z_i)$ , tem-se, como queríamos,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Resta-nos mostrar que a topologia associada à métrica  $d$  é a topologia produto e, para isso, vamos verificar que ela verifica a propriedade referida na alínea a) de 1.5.13. Consideremos então um espaço topológico  $Z$ , um conjunto  $C \subset Z$ , um ponto  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e uma aplicação  $h: C \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  com coordenadas  $h_i: C \rightarrow X_i$ . Começemos por reparar que, se

$i_0 \in I$ , quaisquer que sejam  $x = (x_i)_{i \in I}$  e  $y = (y_i)_{i \in I}$  tem-se

$$d_{i_0}(\pi_{i_0}(x), \pi_{i_0}(y)) = d(x_{i_0}, y_{i_0}) \leq d(x, y),$$

pelo que a aplicação  $\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}$  admite 1 como constante de Lipschitz

(cf. 1.4.3) e é portanto contínua. Tendo em conta 1.2.41, deduzimos daqui que se  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a = (a_i)_{i \in I}$  então para cada  $i_0$

$$h_{i_0}(z) = \pi_{i_0}(h(z)) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \pi_{i_0}(a) = a_{i_0}.$$

Suponhamos, reciprocamente, que se tem  $h_i(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a_i$  para cada  $i$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, consideremos para cada  $i \in I$  uma vizinhança  $V_i$  de  $z_0$  em  $Z$  tal que, para cada  $z \in V_i \cap C$ ,  $d_i(h_i(z), a_i) < \delta$  e, considerando a vizinhança  $V$  de  $z_0$  em  $Z$  intersecção do número finito de vizinhanças  $V_i$ , vemos agora que para cada  $z \in V \cap C$  tem-se  $z \in V_i \cap C$  para cada  $i$  portanto  $d_i(h_i(z), a_i) < \delta$  para cada  $i$ , donde

$$d(h(z), (a_i)_{i \in I}) = \max_{i \in I} d_i(h_i(z), a_i) < \delta,$$

o que mostra que  $h(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a = (a_i)_{i \in I}$  (cf. a alínea b) de 1.2.27, com a classe das bolas abertas como sistema fundamental de vizinhanças no espaço de chegada.  $\square$

**1.5.18 (Corolário)** Lembremos que o espaço  $\mathbb{R}^n$  não é mais do que o produto cartesiano indexado em  $\{1, 2, \dots, n\}$  com todos os factores iguais a  $\mathbb{R}$ . Neste contexto, a topologia usual de  $\mathbb{R}^n$  (cf. 1.2.3) coincide com a topologia produto associada à topologia usual em cada fator  $\mathbb{R}$ .

**Dem:** Por definição, a topologia usual de  $\mathbb{R}^n$  é a associada à métrica  $d_\infty$  associada à norma do máximo (cf. 1.1.8) e esta não é mais do que a métrica do máximo correspondente à métrica usual de  $\mathbb{R}$  em cada factor.  $\square$

**1.5.19 (Produtos contáveis de espaços métricos)** Sejam  $I$  um conjunto contável não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $X_i$  um espaço topológico metrizável. Tem-se então que o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$ , com a topologia produto, é metrizável. Em particular, se  $X$  é um espaço topológico metrizável então  $Ap(I, X)$  com a topologia da convergência simples é metrizável.<sup>73</sup>

Mais precisamente, se para cada  $i \in I$  considerarmos uma métrica  $d_i$  em  $X_i$  que defina a respetiva topologia e que verifique  $d_i(x, y) \leq 1$  quaisquer que sejam  $x, y \in X_i$  (métrica cuja existência decorre do lema 1.2.78), podemos considerar uma família de reais  $\delta_i > 0$  com  $\sum_{i \in I} \delta_i = 1$  e tomar como métrica definindo a topologia produto de  $\prod_{i \in I} X_i$  a definida por

$$\bar{d}((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \delta_i d_i(x_i, y_i).$$

**Dem:** Vamos dividir a prova em várias partes:

**1)** Mostremos que se pode considerar para cada  $i \in I$  um real  $\delta_i > 0$  de modo que  $\sum_{i \in I} \delta_i = 1$ .

**Subdem:** Se  $I$  for finito com  $n$  elementos, podemos tomar  $\delta_i = \frac{1}{n}$ . Se  $I$  for

<sup>73</sup>Pelo contrário, como se verificou no exercício 1.2.25, se  $I$  é infinito não contável podemos garantir que  $Ap(I, X)$  não é metrizável, desde que afastemos os casos triviais em que  $X = \emptyset$  ou  $X$  tem um único elemento.



numerável, podemos considerar uma bijeção  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow I$  e tomar

$$\delta_i = \frac{1}{2^{\varphi^{-1}(i)}}.$$

Atendendo a 1.2.69 para calcular a soma (que existe, tendo em conta 1.2.70), obtemos

$$\sum_{i \in I} \delta_i = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

2) Vamos definir agora para  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} X_i$

$$\bar{d}((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \delta_i d_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i \in I} \delta_i = 1,$$

que é assim um elemento de  $[0, 1]$ . Vamos mostrar que  $\bar{d}$  constitui uma métrica em  $\prod_{i \in I} X_i$ .

**Subdem:** São evidentes as propriedades

$$\begin{aligned} \bar{d}((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) &= \bar{d}((y_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}), \\ \bar{d}((x_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}) &= 0, \\ \bar{d}((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) &= 0 \Rightarrow (x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I}. \end{aligned}$$

Além disso, vemos que, dados  $(x_i)_{i \in I}$ ,  $(y_i)_{i \in I}$  e  $(z_i)_{i \in I}$ , vem

$$\begin{aligned} \bar{d}((x_i)_{i \in I}, (z_i)_{i \in I}) &= \sum_{i \in I} \delta_i d(x_i, z_i) \leq \sum_{i \in I} \delta_i (d(x_i, y_i) + d(y_i, z_i)) = \\ &= \sum_{i \in I} \delta_i d(x_i, y_i) + \sum_{i \in I} \delta_i d(y_i, z_i) = \\ &= \bar{d}((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) + \bar{d}((y_i)_{i \in I}, (z_i)_{i \in I}). \end{aligned}$$

3) Suponhamos que  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da produto. Vamos ver que  $\Omega$  é também uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia associada à métrica  $\bar{d}$ .

**Subdem:** Existe uma família de conjuntos  $U_i \subset X_i$  tal que cada  $U_i$  é vizinhança de  $a_i$ , que, para uma certa parte finita  $I_0$  de  $I$  se tenha  $U_i = X_i$  para todo o  $i \notin I_0$  e que o conjunto  $\prod_{i \in I} U_i$  esteja contido em  $\Omega$ . Para cada

$i \in I_0$  seja  $r_i > 0$  tal que  $B_{r_i}(a_i) \subset U_i$  e seja  $r > 0$  com  $r \leq \delta_i r_i$  para todo o  $i \in I_0$ . Vamos mostrar que a bola aberta de centro  $(a_i)_{i \in I}$  e raio  $r$  para a métrica  $\bar{d}$  está contida em  $\prod_{i \in I} U_i$ , e portanto em  $\Omega$ , o que mostrará que  $\Omega$  é

efetivamente uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para essa métrica. Seja então  $(x_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} X_i$  tal que  $\bar{d}((a_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}) < r$ . Para cada  $i \in I_0$  tem-se então

$$\delta_i d(a_i, x_i) \leq \bar{d}((a_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}) < r \leq \delta_i r_i,$$

donde  $d(a_i, x_i) < r_i$  e  $x_i \in B_{r_i}(a_i) \subset U_i$ . Uma vez que para cada  $i \notin I_0$  vem trivialmente  $x_i \in X_i = U_i$  concluímos que se tem  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i$ .

4) Suponhamos que  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da métrica  $\bar{d}$ . Vamos ver que  $\Omega$  é também uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia produto, o que terminará a demonstração.

**Subdem:** Seja  $r > 0$  tal que a bola fechada de centro  $(a_i)_{i \in I}$  e raio  $r$  para a métrica  $\bar{d}$  esteja contida em  $\Omega$ . Lembrando que a soma dos  $\delta_i$  é igual a 1, consideremos uma parte finita  $I_0$  de  $I$  tal que

$$\sum_{i \in I_0} \delta_i > 1 - \frac{r}{2}.$$

Consideremos a família  $(U_i)_{i \in I}$  onde  $U_i = B_{\frac{r}{2}}(a_i)$  se  $i \in I_0$  e  $U_i = X_i$  se  $i \notin I_0$  e a correspondente vizinhança  $\prod_{i \in I} U_i$  de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia produto. Consideremos  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i$  arbitrário. Reparemos que, para cada parte finita  $J$  de  $I$ , o facto de  $J \cup I_0$  ser a união disjunta dos subconjuntos finitos  $I_0$  e  $J \setminus I_0$  implica que

$$1 \geq \sum_{i \in J \cup I_0} \delta_i = \sum_{i \in I_0} \delta_i + \sum_{i \in J \setminus I_0} \delta_i > 1 - \frac{r}{2} + \sum_{i \in J \setminus I_0} \delta_i$$

e portanto

$$\sum_{i \in J \setminus I_0} \delta_i < \frac{r}{2}.$$

Deduzimos agora que, para cada parte finita  $J$  de  $I$ ,

$$\sum_{i \in J} \delta_i d(a_i, x_i) = \sum_{i \in J \cap I_0} \delta_i d(a_i, x_i) + \sum_{i \in J \setminus I_0} \delta_i < \sum_{i \in I_0} \delta_i \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \leq r$$

pelo que, tendo em conta o facto de a soma geral ser o supremo de todas as somas finitas, vem

$$\bar{d}((a_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \delta_i d(a_i, x_i) \leq r$$

e portanto  $(x_i)_{i \in I} \in \Omega$ . Provámos assim que  $\prod_{i \in I} U_i \subset \Omega$  e portanto que  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a_i)_{i \in I}$  para a topologia da convergência simples.  $\square$

**1.5.20 (Produto de espaços de Haudorff)** Seja  $I$  um conjunto não vazio de índices, finito ou infinito, e seja  $X_i$  um espaço topológico de Hausdorff para

cada  $i \in I$ . Tem-se então que o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$ , com a topologia produto, é também um espaço de Hausdorff.

**Dem:** Sejam  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  dois elementos distintos de  $\prod_{i \in I} X_i$ . Existe assim

$i_0 \in I$  tal que  $a_{i_0} \neq b_{i_0}$ . Uma vez que  $X_{i_0}$  é um espaço de Hausdorff, podemos considerar  $U_{i_0}$  vizinhança de  $a_{i_0}$  e  $U'_{i_0}$  vizinhança de  $b_{i_0}$  tais que  $U_{i_0}$  e  $U'_{i_0}$  não tenham nenhum elemento comum. Considerando então para cada  $i \neq i_0$  as vizinhanças  $U_i = X_i$  de  $a_i$  e  $U'_i = X_i$  de  $b_i$  constatamos que os conjuntos  $\prod_{i \in I} U_i$  e  $\prod_{i \in I} U'_i$  são vizinhanças de  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  que não têm nenhum elemento comum. Fica assim provado que o produto cartesiano é efetivamente um espaço de Hausdorff.  $\square$

**1.5.21 (Produto de fechados)** Seja  $I$  um conjunto não vazio de índices, finito ou infinito. Para cada  $i \in I$  sejam  $X_i$  um espaço topológico e  $A_i \subset X_i$  um subconjunto fechado. Tem-se então que o conjunto  $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i$  é fechado relativamente à topologia produto.

**Dem:** Para cada  $i_0 \in I$  o facto de a projecção  $\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}$  ser contínua implica que é fechado para a topologia produto o conjunto

$$\Omega_{i_0} = \pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_{i_0} \in A_{i_0}\}.$$

Reparando que o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} A_i$  não é mais do que a intersecção dos conjuntos fechados  $\Omega_i$  com  $i \in I$ , concluímos que  $\prod_{i \in I} A_i$  é efetivamente um conjunto fechado (cf. a alínea c) de 1.2.19).  $\square$

**1.5.22 (Produto finito de abertos)** Seja  $I$  um conjunto **finito** não vazio de índices. Para cada  $i \in I$  sejam  $X_i$  um espaço topológico e  $A_i \subset X_i$  um subconjunto aberto. Tem-se então que o conjunto  $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} X_i$  é aberto relativamente à topologia produto.

**Dem:** Para cada  $i_0 \in I$  o facto de a projecção  $\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}$  ser contínua implica que é aberto para a topologia produto o conjunto

$$\Omega_{i_0} = \pi_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_{i_0} \in A_{i_0}\}.$$

Reparando que o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} A_i$  não é mais do que a intersecção dos conjuntos abertos  $\Omega_i$  com  $i \in I$ , concluímos que  $\prod_{i \in I} A_i$  é efetivamente um conjunto aberto (cf. a alínea b) de 1.3.12— a necessidade da hipótese de o conjunto de índices  $I$  ser finito resulta de que, em geral, uma intersecção infinita de conjuntos abertos não ter que ser um conjunto aberto).  $\square$

**1.5.23 (Pontos aderentes a um produto cartesiano)** Seja  $I$  um conjunto não vazio de índices, finito ou infinito. Para cada  $i \in I$  sejam  $X_i$  um espaço topológico,  $A_i \subset X_i$  um subconjunto e  $a_i \in X_i$ . Tem-se então que  $(a_i)_{i \in I}$  é aderente a  $\prod_{i \in I} A_i$  se, e só se para cada  $i \in I$  o ponto  $a_i$  é aderente ao conjunto

$A_i$ .<sup>74</sup>

**Dem:** Se  $(a_i)_{i \in I}$  for aderente a  $\prod_{i \in I} A_i$  o facto de, para cada índice  $i_0$ , o ponto

$a_{i_0}$  ser aderente a  $A_{i_0}$  é uma consequência de aplicar 1.2.40 à restrição a  $\prod_{i \in I} A_i$

da projecção  $\pi_{i_0}$  que, pela continuidade desta, tem limite  $a_{i_0}$  quando  $(x_i)_{i \in I}$  tende para  $(a_i)_{i \in I}$  e toma valores em  $A_{i_0}$ . Suponhamos, reciprocamente, que  $a_i$  é aderente a  $A_i$  para todo o  $i \in I$ . Sendo  $\Omega$  uma vizinhança arbitrária de  $(a_i)_{i \in I}$ , podemos considerar uma família  $(U_i)_{i \in I}$  com cada  $U_i$  vizinhança de  $a_i$  e  $\prod_{i \in I} U_i \subset \Omega$  e, escolher para cada  $i \in I$  um ponto  $x_i \in U_i \cap A_i$ , tendo-se

então que  $(x_i)_{i \in I}$  é um elemento de  $\Omega$  no conjunto  $\prod_{i \in I} A_i$ , o que mostra que

$(a_i)_{i \in I}$  é efetivamente aderente a  $\prod_{i \in I} A_i$ .<sup>75</sup> □

**1.5.24 (Corolário — Produtos finitos de espaços separáveis)** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $X_i$  um espaço topológico separável. Tem-se então que o espaço topológico produto  $\prod_{i \in I} X_i$  é também separável.<sup>76</sup>

**Dem:** Sendo, para cada  $i \in I$ ,  $A_i \subset X_i$  um conjunto contável denso, resulta de 1.5.23 que o conjunto contável  $\prod_{i \in I} A_i$  (produto finito de contáveis) é denso

em  $\prod_{i \in I} X_i$ . □

**1.5.25 (Produtos contáveis de espaços de base contável)** Sejam  $I$  um conjunto contável não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $X_i$  um espaço topológico de base contável. Tem-se então que o espaço topológico produto  $\prod_{i \in I} X_i$  é também de base contável.

**Dem:** Para cada  $i \in I$ , seja  $\mathcal{U}_i$  uma base contável de abertos de  $X_i$  que, para simplificar, suporemos verificar  $X_i \in \mathcal{U}_i$  (podemos sempre acrescentar mais um aberto a uma base de abertos dada). Tem-se então que a classe contável  $\mathcal{U}$  dos abertos da forma  $\prod_{i \in I} U_i$  com  $U_i \in \mathcal{U}_i$  e, salvo para um número finito de

<sup>74</sup>Reparar que este resultado permitiria apresentar uma demonstração alternativa de 1.5.21.

<sup>75</sup>Reparar que, apesar de a família das vizinhanças  $U_i$  dever verificar a condição suplementar de ser finito o conjunto dos índices  $i$  tais que  $U_i \neq X_i$ , não precisamos de tirar partido desta condição.

<sup>76</sup>Ver o exercício 1.5.14 adiante para uma generalização em que o conjunto  $I$  é contável, podendo não ser finito.

índices  $i$ ,  $U_i = X_i$ , é uma base de abertos de  $\prod_{i \in I} X_i$ . Com efeito, dados um aberto  $\Omega$  de  $\prod_{i \in I} X_i$  e  $(a_i)_{i \in I} \in \Omega$ , podemos considerar para cada  $i \in I$  uma vizinhança  $V_i$  de  $a_i$  em  $X_i$ , com  $V_i = X_i$  salvo para um número finito de índices  $i$ , de modo que  $\prod_{i \in I} V_i \subset \Omega$  e então, sendo, para cada  $i \in I$ ,  $U_i \in \mathcal{U}_i$  tal que  $a_i \in U_i \subset \text{int}(V_i)$ , com o cuidado de tomar  $U_i = X_i$  sempre que  $V_i = X_i$ , tem-se que  $\prod_{i \in I} U_i$  pertence a  $\mathcal{U}$  e

$$(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} U_i \subset \prod_{i \in I} V_i \subset \Omega. \quad \square$$

Vamos concluir esta secção examinando alguns exemplos de homeomorfismos entre produtos cartesianos com a característica comum de serem consequência das propriedades da topologia produto referidas no corolário 1.5.15.

**1.5.26 (Comutatividade)** Sejam  $I$  e  $J$  dois conjuntos de índices,  $\varphi: J \rightarrow I$  uma aplicação bijetiva e  $X_i$  um espaço topológico para cada índice  $i \in I$ . Considerando nos produtos cartesianos  $\prod_{i \in I} X_i$  e  $\prod_{j \in J} X_{\varphi(j)}$  as topologias produto, tem lugar um homeomorfismo  $\Phi: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{j \in J} X_{\varphi(j)}$  definido por

$$\Phi((x_i)_{i \in I}) = (x_{\varphi(j)})_{j \in J}.$$

**Dem:** Começemos por notar que a aplicação  $\Phi$  é uma bijeção cuja inversa é a aplicação do mesmo tipo associada à aplicação bijetiva  $\varphi^{-1}: I \rightarrow J$  e à família de espaços topológicos  $Y_j = X_{\varphi(j)}$ , onde  $j \in J$ . Ficamos assim reduzidos a mostrar que a aplicação  $\Phi$  é contínua. Ora, isso resulta de 1.5.15, uma vez que a coordenada  $j$  da aplicação  $\Phi$  é a projeção de índice  $\varphi(j)$  de  $\prod_{i \in I} X_i$  para  $X_{\varphi(j)}$ .  $\square$

**1.5.27 (Corolário)** Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos podemos considerar um homeomorfismo  $\Phi: X \times Y \rightarrow Y \times X$ , definido por  $\Phi(x, y) = (y, x)$ .

**Dem:** Trata-se do caso particular de 1.5.26 em que  $I = J = \{1, 2\}$ ,  $X_1 = X$ ,  $X_2 = Y$ ,  $\varphi(1) = 2$  e  $\varphi(2) = 1$ .  $\square$

**1.5.28 (Produtos com um único factor)** Seja  $I = \{i_0\}$  um conjunto de índices com um único elemento e  $X$  um espaço topológico. Consideremos a família de espaços topológicos indexada em  $I$  definida por  $X_{i_0} = X$  e notemos  $(x)$ , para cada  $x \in X$  o elemento de  $\prod_{i \in I} X_i$  definido por  $x_{i_0} = x$ . Temos então um homeomorfismo  $\Phi: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  definido por  $\Phi(x) = (x)$ .

**Dem:** A continuidade de  $\Phi$  resulta de 1.5.26 uma vez que a sua única

aplicação coordenada é a identidade de  $X$ . A aplicação  $\Phi$  é bijetiva e a sua inversa é contínua por se tratar da projecção de índice  $i_0$  de  $\prod_{i \in I} X_i$  para  $X_{i_0} = X$ .  $\square$

**1.5.29 (Um exemplo de associatividade)** Sejam  $I$  um conjunto de índices com pelo menos dois elementos, finito ou infinito, e  $X_i$  um espaço topológico para cada  $i \in I$ . Dado um índice  $i_0 \in I$ , podemos considerar um homeomorfismo

$$\Phi: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \left( \prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i \right) \times X_{i_0}$$

definido por

$$\Phi((x_i)_{i \in I}) = ((x_i)_{i \neq i_0}, x_{i_0}).$$

**Dem:** O facto de  $\Phi$  ser contínua resulta de serem contínuas as suas duas coordenadas, a segunda por ser a projecção canónica de índice  $i_0$ , de  $\prod_{i \in I} X_i$  para  $X_{i_0}$ , e a primeira por ser uma aplicação de  $\prod_{i \in I} X_i$  para  $\prod_{i \neq i_0} X_i$  que é contínua por o serem as suas coordenadas, cada uma sendo uma projecção canónica de  $\prod_{i \in I} X_i$  para  $X_i$  (onde  $i \neq i_0$ ). A aplicação  $\Phi$  é bijetiva e a sua inversa é contínua uma vez que a sua coordenada de índice  $i_0$  é a segunda projecção canónica de  $\left( \prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i \right) \times X_{i_0}$  para  $X_{i_0}$  e cada coordenada de índice  $i \neq i_0$  é contínua por ser a composta de duas aplicações contínuas, nomeadamente a primeira coordenada de  $\left( \prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i \right) \times X_{i_0}$  para  $\prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i$  seguida da projecção canónica de índice  $i$  de  $\prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i$  para  $X_i$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex 1.5.1** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e consideremos em  $X \times Y$  a topologia produto. Verificar que, se  $U \times V$  for uma vizinhança de um ponto  $(a, b) \in X \times Y$ , então  $U$  é vizinhança de  $a$  e  $V$  é vizinhança de  $b$ . Dar, no entanto, um exemplo de uma vizinhança de  $(a, b)$  num produto  $X \times Y$  que não seja do tipo referido anteriormente, por não ser igual a nenhum produto cartesiano de dois conjuntos.

**Ex 1.5.2** Enunciar e justificar um resultado do mesmo tipo que 1.5.6, envolvendo a divisão, como aplicação definida num produto cartesiano.

**Ex 1.5.3** Chama-se *espaço vetorial topológico* a um espaço vetorial  $E$  munido de uma topologia tal que sejam contínuas as aplicações

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y, \\ \mathbb{R} \times E &\rightarrow E, (t, x) \mapsto tx. \end{aligned}$$

a) Mostrar que, se  $E$  é um espaço vetorial normado, sobre o qual se considera a métrica e a topologia associadas, então  $E$  é um espaço vetorial topológico.

**Sugestão:** Lembrar o exercício 1.2.5.

b) Seja  $E$  um espaço vetorial topológico. Sejam  $X$  um espaço topológico,  $a \in X$  e  $f, g: X \rightarrow E$  e  $\lambda: X \rightarrow E$  três aplicações contínuas no ponto  $a$ . Mostrar que são contínuas as aplicações  $f + g: X \rightarrow E$  e  $\lambda f: X \rightarrow E$  definidas respectivamente por

$$x \mapsto f(x) + g(x), \quad x \mapsto \lambda(x)f(x).$$

c) Verificar que um espaço vetorial topológico  $E$  é de Hausdorff se, e só se, o conjunto unitário  $\{0\} \subset E$  for fechado. **Sugestão:** Ter em conta a caracterização dos espaços de Hausdorff em 1.5.4.

**Ex 1.5.4** Sejam  $I$  um conjunto não vazio de índices e  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão  $n \geq 1$ , sobre o qual se considera a métrica associada. Consideremos no espaço vetorial  $Ap(I, E)$ , de todas as aplicações  $I \rightarrow E$ , a topologia da convergência uniforme (cf. 1.2.76).

a) Verificar que no caso em que  $I$  é finito  $Ap(I, E)$  é um espaço vetorial topológico.

**Sugestão:** Ter em conta a alínea b) de 1.2.77 e 1.1.21.

b) Verificar que no caso em que  $I$  é infinito  $Ap(I, E)$  não é um espaço vetorial topológico. **Sugestão:** Sendo  $(a_i)_{i \in I}$  uma aplicação não limitada  $I \rightarrow E$  (cf. o exercício 1.2.21), verificar que não é contínua em 0 a aplicação  $\mathbb{R} \rightarrow Ap(I, E)$  que a cada  $t \in \mathbb{R}$  associa  $t(a_i)_{i \in I} = (ta_i)_{i \in I}$ .

**Ex 1.5.5** Consideremos na reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  a sua topologia usual.

a) Mostrar que são respetivamente aberto e fechado em  $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$  os conjuntos

$$U = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \mid x < y\}, \quad A = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \mid x \leq y\}.$$

**Sugestão:** Comparar com 1.5.7 reparando que não se pode decalcar a respetiva demonstração uma vez que a subtração não está bem definida em  $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ . Poderá ser útil tirar partido da condição de separação de  $\overline{\mathbb{R}}$  enunciada em 1.2.47.

b) Deduzir de a) que, se  $Z$  é um espaço topológico e  $f, g: Z \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  são duas aplicações contínuas então são respetivamente aberto e fechado em  $Z$  os conjuntos

$$\hat{U} = \{z \in Z \mid f(z) < g(z)\}, \quad \hat{A} = \{z \in Z \mid f(z) \leq g(z)\}.$$

**Ex 1.5.6** Consideremos na reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  a sua topologia usual.

a) Mostrar que, sendo  $A \subset \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  o complementar do conjunto

$$\{(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)\},$$

existe uma, e uma só, aplicação contínua  $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , tal que  $f(x, y) = x + y$ , sempre que  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . **Sugestão:** Lembrar 1.5.6, verificar que  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  é um aberto denso de  $A$ , determinar explicitamente quais os valores que  $f$  vai ter em todos os pontos de  $A$  que não estão em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e provar, em seguida, a continuidade de  $f$  nesses pontos com o auxílio de 1.4.17. Alternativamente, utilizar 1.4.31.

b) Utilizar as conclusões de a) para enunciar e justificar resultados sobre os limites em  $\overline{\mathbb{R}}$  de aplicações definidas numa parte dum espaço topológico e com valores reais obtidas como soma de funções com limites eventualmente infinitos.

**Ex 1.5.7** Enunciar e resolver resultados no mesmo espírito que o do exercício 1.5.6 mas com a multiplicação no lugar da adição.

**Ex 1.5.8** Mostrar que é contínua a aplicação  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x + y, & \text{se } x + y \leq 1 \\ \frac{x^2 + xy + 1}{x + y}, & \text{se } x + y > 1 \end{cases}.$$

**Sugestão:** Utilizar 1.4.28.

**Ex 1.5.9** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Seja  $G_f \subset X \times Y$  o gráfico de  $f$ ,

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

**a)** Mostrar que existe um homeomorfismo de  $X$  sobre  $G_f$ .

**b)** Mostrar que, no caso em que  $Y$  é de Hausdorff,  $G_f$  é um subconjunto fechado de  $X \times Y$ .

**c)** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação definida por  $f(0) = 0$  e  $f(x) = \frac{1}{x}$ , se  $x \neq 0$ . Mostrar que  $f$  não é contínua mas que o seu gráfico, o conjunto

$$\{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\},$$

é fechado em  $\mathbb{R}^2$ .

**Ex 1.5.10** Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  espaços topológicos. Diz-se que uma aplicação  $f: X \times Y \rightarrow Z$  é *separadamente contínua* no ponto  $(a, b) \in X \times Y$  se forem contínuas, em  $b$  e  $a$ , respectivamente, as aplicações  $f_a: Y \rightarrow Z$  e  $f^b: X \rightarrow Z$ , definidas por

$$f_a(y) = f(a, y), \quad f^b(x) = f(x, b).$$

**a)** Mostrar que, se  $f$  é contínua em  $(a, b)$ , então  $f$  é também separadamente contínua em  $(a, b)$ .

**b)** Mostrar que a aplicação  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(0, 0) = 0$  e

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$ , é separadamente contínua em todos os pontos, mas não é contínua no ponto  $(0, 0)$ .

**Ex 1.5.11** Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  o conjunto dos pares  $(x, y)$  tais que  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e  $xy = 0$ . Mostrar que  $A$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}$ , construindo explicitamente um homeomorfismo entre os dois espaços.

**Ex 1.5.12** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $Y$  um espaço métrico e considere-se no conjunto  $Ap(X, Y)$ , das aplicações de  $X$  em  $Y$  a topologia da convergência uniforme (cf. 1.2.76). Seja  $\Phi: Ap(X, Y) \times X \rightarrow Y$  a *aplicação de avaliação*, definida por  $\Phi(f, x) = f(x)$ . Mostrar que  $\Phi$  é contínua num ponto  $(f_0, x_0)$  se, e só se, a aplicação  $f_0: X \rightarrow Y$  for contínua em  $x_0$ .

**Ex 1.5.13** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Diz-se que a aplicação  $f$  é *aberta* se, para cada aberto  $U$  de  $X$ ,  $f(U)$  é um aberto de  $Y$ ; diz-se que ela é *fechada* se, para cada fechado  $C$  de  $X$ ,  $f(C)$  é um fechado de  $Y$ .

**a)** Mostrar que uma aplicação, mesmo contínua, pode não ser nem aberta nem



fechada. **Sugestão:** Pensar na função  $f: [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x$ .

**b)** Mostrar que, se  $I$  é um conjunto não vazio, finito ou infinito, de índices e se, para cada  $i \in I$ ,  $X_i$  é um espaço topológico, então, para cada  $i_0 \in I$ , a projecção canónica  $\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}$ , além de contínua, é também aberta.

**c)** Mostrar que a primeira projecção  $\pi_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  não é uma aplicação fechada.

**Sugestão:** Considerar o conjunto  $C$  dos pares  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , tais que  $xy = 1$ .

**Ex 1.5.14 (Produtos contáveis de espaços topológicos separáveis)** Sejam  $I$  um conjunto contável não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $X_i$  um espaço topológico separável. Mostrar que o espaço topológico produto  $\prod_{i \in I} X_i$  é também separável.

**Sugestão:** Afastando já o caso trivial em que  $X_i = \emptyset$  para algum  $i$ , considerar um subconjunto contável denso  $A_i \subset X_i$  e um elemento escolhido  $a_i \in A_i$  para cada  $i$ . Sendo  $\mathcal{A}$  o subconjunto de  $\prod_{i \in I} X_i$  constituído pelas famílias  $(x_i)_{i \in I}$  com  $x_i \in A_i$  para cada  $i$  e com  $x_i = a_i$  salvo para um número finito de valores de  $i$ , verificar que  $\mathcal{A}$  é denso e que é contável, enquanto união de uma família de conjuntos contáveis indexada no conjunto contável das partes finitas de  $I$ .

**Ex 1.5.16** Enunciar e justificar uma generalização da propriedade de associatividade dos produtos de espaços topológicos enunciada em 1.5.29, envolvendo a situação em que o conjunto não vazio de índices  $I$  é a união de uma família de conjuntos não vazios  $I_\alpha$ , com  $\alpha \in A$ , disjuntos dois a dois, onde  $A$  é um conjunto não vazio, também finito ou infinito de índices.

## §6. Sublimites e espaços topológicos compactos.

**1.6.1 (Sublimite numa aplicação num ponto)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Dados  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ <sup>77</sup> e  $b \in Y$ , são então equivalentes as seguintes propriedades:

**a)** Quaisquer que sejam as vizinhanças  $V$  de  $b$ , em  $Y$ , e  $U$  de  $x_0$ , em  $X$ , existe  $x \in U \cap A$  tal que  $f(x) \in V$ .<sup>78</sup>

**b)** Existe um espaço topológico  $Z$ , um conjunto  $C \subset Z$ , um ponto  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e uma aplicação  $g: C \rightarrow A$  tais que  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} x_0$  e  $f(g(z)) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} b$ .

**c)** Existe uma sucessão generalizada  $(x_j)_{j \in J}$  de elementos de  $A$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$  e  $f(x_j) \rightarrow b$ .

Quando se verificar uma destas propriedades, e portanto todas elas, dizemos que  $b$  é um *sublimite* de  $f(x)$  (ou de  $f$ ) quando  $x \rightarrow x_0$  ou que  $b$  é um *ponto aderente* de  $f(x)$  (ou de  $f$ ) quando  $x \rightarrow x_0$ .<sup>79</sup>

<sup>77</sup>Reparar que esta hipótese implica, em particular, que  $A$  não é vazio.

<sup>78</sup>Comparar com a definição de limite em 1.2.27, reparando que a diferença consiste essencialmente na substituição de um quantificador existencial pelo universal e de um quantificador universal pelo existencial.

<sup>79</sup>Ver 1.6.13 adiante para uma explicação da razão de ser desta última designação.

Tal como acontecia com a noção de limite (cf. 1.2.55), quando nos referirmos a um sublimite de uma  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de um espaço topológico  $Y$  estará subentendido que se trata de um sublimite quando  $n \rightarrow +\infty$ . Análoga observação vale, mais geralmente, quando nos referirmos aos sublimites de uma sucessão generalizada  $(y_j)_{j \in J}$  de elementos de  $Y$  (comparar com 1.2.62).

**Dem:** Se nos lembrarmos que a noção de limite de uma sucessão generalizada é um caso particular da de limite duma função num ponto aderente ao seu domínio (cf. 1.2.62) constatamos que a propriedade c) implica a propriedade b).

Suponhamos agora que se verifica a propriedade b). Dadas vizinhanças arbitrárias  $V$  de  $b$  em  $Y$  e  $U$  de  $x_0$  em  $X$ , podemos considerar duas vizinhanças  $W$  e  $W'$  de  $z_0$  em  $Z$  tais que, para cada  $z \in W \cap C$  se tenha  $g(z) \in U$  e para cada  $z \in W' \cap C$  se tenha  $f(g(z)) \in V$ . Considerando a vizinhança  $W \cap W'$  de  $z_0 \in Z$  o facto de  $z_0$  ser aderente a  $C$  permite-nos considerar  $z$  em  $W \cap W' \cap C$  e então  $g(z)$  é um elemento de  $U \cap A$  para o qual se tem  $f(g(z)) \in V$ . Provámos assim que se verifica a propriedade a).

Suponhamos por fim que se verifica a propriedade a) e, para estabelecer a propriedade c), tentemos arranjar uma sucessão generalizada de elementos de  $A$  com limite  $x_0$  cuja imagem por  $f$  seja uma sucessão generalizada de elementos de  $Y$  com limite  $b$ . Para isso consideramos como conjunto dirigido dos índices o conjunto dos pares  $(U, V)$  com  $U$  vizinhança de  $x_0$  em  $X$  e  $V$  vizinhança de  $b$  em  $Y$  com a relação

$$(U, V) \succeq (U', V') \Leftrightarrow U \subset U' \wedge V \subset V'$$

(cf. 1.2.72 e 1.2.71) e escolhemos, para cada índice  $(U, V)$  um elemento  $x_{(U, V)} \in U \cap A$  tal que  $f(x_{(U, V)}) \in V$ . Obtivémos assim uma sucessão generalizada de elementos  $x_{(U, V)}$  de  $A$  e resta-nos mostrar que se tem  $x_{(U, V)} \rightarrow x_0$  e  $f(x_{(U, V)}) \rightarrow b$ . Para o primeiro destes objetivos, consideramos uma vizinhança arbitrária  $U_0$  de  $x_0$  em  $X$ . Uma vez que  $Y$  é uma vizinhança de  $b$  em  $Y$ , podemos considerar o índice  $(U_0, Y)$  e vemos que para cada índice  $(U, V) \succeq (U_0, Y)$  tem-se  $U \subset U_0$  e  $x_{(U, V)} \in U$ , donde  $x_{(U, V)} \in U_0$ . Ficou assim provado que se tem efetivamente  $x_{(U, V)} \rightarrow x_0$ . Para o segundo objetivo apontado, consideramos uma vizinhança arbitrária  $V_0$  de  $b$  em  $Y$ . Uma vez que  $X$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , podemos considerar o índice  $(X, V_0)$  e vemos que para cada índice  $(U, V) \succeq (X, V_0)$  tem-se  $V \subset V_0$  e  $f(x_{(U, V)}) \in V$ , donde  $f(x_{(U, V)}) \in V_0$ . Ficou assim provado que se tem efetivamente  $f(x_{(U, V)}) \rightarrow b$ .  $\square$

**1.6.2 (Sublimites estritos)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Dizemos que um elemento  $b \in Y$  é um *sublimite estrito* de  $f(x)$  (ou de  $f$ ) quando  $x \rightarrow x_0$  se existir um subconjunto  $A' \subset A$ , com  $x_0$  ainda aderente a  $A'$ , tal que a restrição  $f|_{A'}$  tenha limite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ , por outras palavras, tal que

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{x \in A'}$$

Os sublimites estritos de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  são, em particular, sublimites de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .<sup>80</sup>

**Dem:** Basta reparar que a restrição de  $f$  a  $A'$  é o mesmo que a composta de  $f: A \rightarrow Y$  com a identidade  $\iota: A' \rightarrow A$ , que sabemos ter limite  $x_0$  quando  $x \rightarrow x_0$ , e ter então em conta a caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1.  $\square$

**1.6.3 (Sublimites num ponto do domínio)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $x_0 \in A$ . Tem-se então que  $f(x_0)$  é sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , sendo de facto mesmo um sublimite estrito.

**Dem:** Basta utilizar a propriedade dos sublimites em 1.6.2, tomando  $A' = \{x_0\}$ , visto que a restrição de  $f$ , sendo constante, tem essa constante como limite.  $\square$

**1.6.4 (Os sublimites são aderentes ao codomínio)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$ ,  $f: A \rightarrow B$  uma aplicação e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Se  $b \in Y$  é um sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , então  $b$  é aderente ao codomínio  $B$ .

**Dem:** Tendo em conta a caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1, podemos considerar um espaço topológico  $Z$ , um subconjunto  $C \subset Z$ , um ponto  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e uma aplicação  $g: C \rightarrow A$  tal que  $g(z) \rightarrow x_0$  quando  $z \rightarrow z_0$  e  $f(g(z)) \rightarrow b$  quando  $z \rightarrow z_0$ . O facto de  $b$  ser aderente a  $B$  é então uma consequência do resultado correspondente 1.2.40 sobre os limites, visto que se tem  $f \circ g: C \rightarrow B$ .  $\square$

**1.6.5 (Limites e sublimites I)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$  tais que  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]$ .

Tem-se então que  $b$  é também sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e, no caso em que  $Y$  é um espaço de Hausdorff,  $b$  é o único sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Dem:** O facto de  $b$  ser também sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  é uma consequência imediata da caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1 uma vez que se pode tomar para  $g$  a aplicação identidade  $Id: A \rightarrow A$ , que tem limite  $x_0$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Supondo agora que o espaço  $Y$  é de Hausdorff, o facto de  $b$  ser o único sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  resulta de que, se  $b'$  fosse um tal sublimite, podíamos, mais uma vez pela caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1, considerar um espaço topológico  $Z$ ,  $C \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e  $g: C \rightarrow A$  com  $g(z) \xrightarrow[z \rightarrow z_0]{} x_0$  e  $f(g(z)) \xrightarrow[z \rightarrow z_0]{} b'$  e então pelo resultado sobre o limite da função composta (cf. 1.2.41) tinha-se também  $f(g(z)) \xrightarrow[z \rightarrow z_0]{} b$ , donde, pela unicidade do limite (cf. 1.2.44),  $b' = b$ .  $\square$

<sup>80</sup>Se assim não fosse, a utilização da designação “estrito” seria, no mínimo, confusa.

**1.6.6 (Comportamento dos sublimites quando se consideram subespaços topológicos)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Seja  $X' \subset X$  tal que  $x_0 \in X'$  e  $A \subset X'$  e seja  $Y' \subset Y$  tal que  $b \in Y'$ . Tem-se então que  $b$  é sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  no contexto dos espaços topológicos  $X$  e  $Y$  se, e só se, isso acontecer no contexto dos subespaços topológicos  $X'$  e  $Y'$ .

**Dem:** Temos, mais uma vez, uma consequência da caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1 se recordarmos o correspondente resultado sobre limites em 1.2.32.  $\square$

**1.6.7 (Sublimites e aplicações compostas I)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Sejam  $Z$  um espaço topológico,  $C \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e  $g: C \rightarrow A$  com  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} x_0$  tal que  $b$  seja sublimite de  $f(g(z))$  quando  $z \rightarrow z_0$ . Tem-se então que  $b$  também é sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .<sup>81</sup>

**Dem:** Tendo em conta a caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1, podemos considerar um espaço topológico  $W$ , um conjunto  $D \subset W$ ,  $w_0 \in W$  aderente a  $D$  e uma aplicação  $h: D \rightarrow C$  tal que  $h(w) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} z_0$  e

$$f(g(h(w))) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} b.$$

Uma vez que, por 1.2.41, tem-se  $g(h(w)) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} x_0$ , a caracterização dos sublimites já referida garante que  $b$  é efetivamente sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.6.8 (Corolário)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Seja  $A' \subset A$  tal que  $x_0$  ainda seja aderente a  $A'$  e que  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  tenha sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tem-se então que  $f: A \rightarrow Y$  tem sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .<sup>82</sup>

**Dem:** Trata-se do caso particular de 1.6.7 em que tomamos para o papel de  $g$  a aplicação identidade  $\iota: A' \rightarrow A$ , definida por  $\iota(x) = x$  que sabemos ter limite  $x_0$  quando  $x \rightarrow x_0$  (cf. a alínea b) de 1.2.30).  $\square$

**1.6.9 (Limites e sublimites II)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $b \in Y$  que não seja limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Existe então um subconjunto  $A' \subset A$ , com  $x_0$  aderente a  $A'$ , tal que a restrição  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  não tenha  $b$  como sublimite quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Dem:** Consideremos uma vizinhança  $V$  de  $b$  em  $Y$  tal que para nenhuma vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $X$  se tenha  $f(A \cup U) \subset V$ , portanto tal que para cada vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $X$  exista  $x \in A \cap U$  com  $f(x) \notin V$ . Sendo

<sup>81</sup>Comparar com 1.2.41.

<sup>82</sup>Comparar com 1.2.36.

$$A' = \{x \in A \mid f(x) \notin V\},$$

o que acabámos de referir diz-nos que qualquer vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $X$  possui algum elemento no subconjunto  $A'$  de  $A$ , portanto que  $x_0$  é aderente a  $A'$ . O facto de  $b$  não ser sublimite da restrição  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  quando  $x \rightarrow x_0$  resulta de a vizinhança  $V$  de  $b$  não ter nenhum elemento do contradomínio  $f(A')$  e portanto  $b$  não ser aderente a este contradomínio (cf. 1.6.4).  $\square$

**1.6.10 (Sublimites e aplicações compostas II)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $y_0 \in Y$  um sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tem-se então:

**a)** Sendo  $Z$  um espaço topológico,  $B \subset Y$  um subconjunto com  $f(A) \subset B$  e  $y_0$  aderente a  $B$  e  $h: B \rightarrow Z$  uma aplicação com  $h(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} c$ , a aplicação  $h \circ f: A \rightarrow Z$  admite o sublimite  $c$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**b)** Em particular, sendo  $Z$  um espaço topológico e  $h: Y \rightarrow Z$  uma aplicação contínua no ponto  $y_0$ , tem-se que  $h(f(x))$  admite o sublimite  $h(y_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Dem:** É claro que b) é uma consequência de a), uma vez que a continuidade de  $h$  no ponto  $y_0$  diz-nos precisamente que  $h(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} h(y_0)$ . Para provar a) aplicamos mais uma vez a caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1. Seja então  $W$  um espaço topológico,  $D \subset W$ ,  $w_0 \in W$  aderente a  $D$  e  $g: W \rightarrow A$  uma aplicação com  $g(w) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} x_0$  e  $f(g(w)) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} y_0$ . O resultado sobre o limite da aplicação composta (cf. 1.2.41) garante então que se tem  $h(f(g(w))) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} c$  o que, mais uma vez pela caracterização referida, implica que  $c$  é um sublimite de  $h(f(x))$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.6.11 (Sublimites quando o domínio é uma união)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Sejam  $A'$  e  $A''$  dois subconjuntos de  $A$  tais que  $A = A' \cup A''$  e lembremos que  $x_0$  tem que ser aderente a pelo menos um destes subconjuntos. Tem-se então:

**a)** Se  $x_0$  é aderente a  $A'$  e a  $A''$  então  $b$  é sublimite de  $f: A \rightarrow Y$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se,  $b$  for sublimite de pelo menos uma das restrições  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  e  $f|_{A''}: A'' \rightarrow Y$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**b)** Se  $x_0$  é aderente a  $A'$  e não é aderente a  $A''$  então  $b$  é sublimite de  $f: A \rightarrow Y$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se,  $b$  for sublimite de  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  quando  $x \rightarrow x_0$ .<sup>83</sup>

**Dem:** **a)** Já verificámos em 1.6.8 que se pelo menos uma das restrições  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  e  $f|_{A''}: A'' \rightarrow Y$  tiver sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$  então  $f: A \rightarrow Y$  também tem sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Suponhamos, reciprocamente, que nenhuma das restrições  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  e  $f|_{A''}: A'' \rightarrow Y$  tem sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Utilizando a caracterização dos sublimites na

<sup>83</sup>Comparar com 1.2.37.

alínea a) de 1.6.1, podemos, por um lado, considerar vizinhanças  $U'$  de  $x_0$  e  $V'$  de  $b$  tais que  $f(x) \notin V'$  para cada  $x \in U' \cap A'$  e, por outro lado, considerar vizinhanças  $U''$  de  $x_0$  e  $V''$  de  $b$  tais que  $f(x) \notin V''$  para cada  $x \in U'' \cap A''$ . Considerando agora as vizinhanças  $U = U' \cap U''$  de  $x_0$  e  $V = V' \cap V''$  de  $b$  vemos agora que para cada  $x \in U \cap A$ , ou  $x \in A'$ , e portanto  $x \in U' \cap A'$  donde  $f(x) \notin V'$ , ou  $x \in A''$ , e portanto  $x \in U'' \cap A''$  donde  $f(x) \notin V''$ , em qualquer dos casos  $f(x) \notin V$ . Provámos assim que  $f: A \rightarrow Y$  não tem sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**b)** Já verificámos em 1.6.8 que se  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  tiver sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$  então  $f: A \rightarrow Y$  também tem sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Suponhamos, reciprocamente, que a restrição  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  não tem sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Podemos então considerar vizinhanças  $U'$  de  $x_0$  e  $V$  de  $b$  tais que  $f(x) \notin V$  para cada  $x \in U' \cap A'$  e, por  $x_0$  não ser aderente a  $A''$ , uma vizinhança  $U''$  de  $x_0$  que não tenha nenhum ponto de  $A''$ . Considerando então a vizinhança  $U = U' \cap U''$  de  $x_0$ , vemos que para cada  $x \in U \cap A$ , o facto de se ter  $x \in U''$  e portanto  $x \notin A''$  implica que  $x \in A'$ , em particular  $x \in U' \cap A'$  e portanto  $f(x) \notin V$ . Provámos assim que  $f: A \rightarrow Y$  não tem sublimite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.6.12 (Exemplo)** Consideremos a sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\overline{\mathbb{R}}$  definida por

$$x_n = \begin{cases} 2, & \text{se } x < 10, \\ \frac{n+1}{n}, & \text{se } n \text{ par e } n \geq 10, \\ n, & \text{se } n \text{ ímpar e } n \geq 10. \end{cases}$$

Uma vez que  $+\infty$  não é aderente ao conjunto dos naturais menores que 10 uma aplicação da alínea b) de 1.6.11 mostra-nos que os sublimites desta sucessão são os sublimites da sua restrição ao conjunto dos naturais maiores ou iguais a 10. Olhando para este conjunto como a união daqueles que são pares com os que são ímpares, ambos tendo  $+\infty$  como ponto aderente vemos que os sublimites da sucessão são os reais estendidos que são sublimites das restrições a estes dois últimos conjuntos sendo assim 1 e  $+\infty$  por estas restrições terem mesmo estes elementos como limites.

**1.6.13 (Sublimites e propriedades de aderência)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação e  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ . Tem-se então:

**a)** Um elemento  $b \in Y$  é sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, para cada vizinhança  $U$  de  $x_0$ ,  $b$  for aderente ao conjunto  $f(A \cap U)$ .<sup>84</sup>

**b)** O conjunto dos sublimites de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  é um subconjunto fechado (eventualmente vazio) de  $Y$ .

**Dem:** Reformulando a caracterização dos sublimites na alínea a) de 1.6.1, podemos dizer que  $b$  é sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, qualquer

<sup>84</sup>Esta caracterização dos sublimites explica a designação de *pontos aderentes* à função quando  $x \rightarrow x_0$ , que também é atribuída aos sublimites.

que seja a vizinhança  $U$  de  $x_0$  o conjunto  $f(A \cap U)$  tem elementos em qualquer vizinhança  $V$  de  $b$  e esta última afirmação corresponde exactamente a dizer que  $b$  é aderente ao conjunto  $f(A \cap U)$ . Fica assim justificada a caracterização dos sublimites indicada em a). Essa condição permite-nos dizer que o conjunto dos sublimites de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  é a intersecção para todas as vizinhanças  $U$  de  $x_0$  das aderências  $\text{ad}(f(A \cap U))$  pelo que, uma vez que a aderência de um conjunto é sempre um conjunto fechado (cf. 1.2.16) e que uma intersecção de uma família não vazia de fechados é um conjunto fechado (cf. 1.2.19), podemos concluir que o conjunto dos sublimites quando  $x \rightarrow x_0$  é efetivamente fechado.  $\square$

Os sublimites estritos, definidos em 1.6.2, são porventura os sublimites mais fáceis de identificar em situações concretas e o resultado que apresentamos em seguida mostra que, de facto, quando os dois espaços topológicos envolvidos são metrizáveis (é o que acontece, em particular, no contexto das funções reais de variável real, decerto já encontrado anteriormente pelo leitor), todo o sublimite é um sublimite estrito. Examinamos no exercício 1.6.17, no fim desta secção um exemplo de sublimite de uma função (de facto de uma sucessão) que não é sublimite estrito.

**1.6.14 (O caso dos espaços metrizáveis)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos, sobre os quais consideramos as topologias associadas,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$  um sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tem-se então que  $b$  é mesmo um sublimite estrito de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Dem:** Começamos por reparar que no caso em que  $x_0 \in A$  e  $b = f(x_0)$  a conclusão já foi obtida em 1.6.3. Podemos assim afastar esse caso trivial e examinar apenas o que se passa quando a hipótese anterior não se verifica, isto é quando  $x_0 \notin A$  ou  $x_0 \in A$  mas  $b \neq f(x_0)$ . Comecemos por reparar que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos considerar  $x_n \in A$  com  $x_n \neq x_0$ ,  $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$  e  $d(f(x_n), b) < \frac{1}{n}$ . A possibilidade de escolher um tal  $x_n$  resulta, no caso em que  $x_0 \notin A$ , de aplicar a caracterização dos sublimites na alínea a) de 1.6.1 tomando para  $U$  a bola aberta de  $X$  de centro  $x_0$  e raio  $\frac{1}{n}$  e para  $V$  a bola aberta de centro  $b$  e raio  $\frac{1}{n}$  (o facto de se ter  $x_n \neq x_0$  resulta de ser  $x_n \in A$ ) e, no caso em que  $x_0 \in A$  e  $b \neq f(x_0)$ , de aplicar a mesma caracterização mais uma vez com  $U$  igual à bola aberta de  $X$  de centro  $x_0$  e raio  $\frac{1}{n}$  mas agora com  $V$  igual à bola aberta de centro  $b$  e raio igual a

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{n}, d(f(x_0), b)\right\} > 0$$

(o facto de ser  $x_n \neq x_0$  resulta agora de se ter

$$d(f(x_n), b) < \delta \leq d(f(x_0), b)).$$

Consideremos agora o subconjunto  $A' \subset A$  cujos elementos são os  $x_n$

considerados para os diferentes naturais  $n$ . De se ter

$$0 \leq d(x_n, x_0) < \frac{1}{n},$$

onde  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  em  $\mathbb{R}$ , deduzimos por enquadramento que  $d(x_0, x_n) \rightarrow 0$  e portanto que  $x_n \rightarrow x_0$  (cf. 1.2.29), em particular,  $x_0$  é aderente a  $A'$ . Resta-nos mostrar que  $b$  é limite da restrição de  $f$  a  $A'$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Ora, dado  $\delta > 0$  arbitrário, fixemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \delta$  e, em seguida,  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_0)$  não tenha nenhum elemento do conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$  (trata-se de um conjunto fechado que não contém  $x_0$ ). Para cada  $x \in A' \cap B_\varepsilon(x_0)$  tem-se assim  $x = x_n$  para um certo  $n > n_0$ , portanto

$$d(f(x), b) = d(f(x_n), b) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \delta$$

ou seja  $f(x) \in B_\delta(b)$ . Lembrando que as bolas abertas de centro num ponto e raio maior que 0 constituem um sistema fundamental de vizinhanças desse ponto ficou assim provado que se tem efetivamente

$$f(x) \underset{x \in A'}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} b. \quad \square$$

### 1.6.15 (Corolário — Sublimites de $\mathbb{N}$ -sucessões num espaço metrizável)

Sejam  $Y$  um espaço métrico, sobre o qual consideramos a topologia associada,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de elementos de  $Y$  e  $b \in Y$ . Tem-se então que  $b$  é sublimite da sucessão se, e só se, existe um subconjunto infinito  $J \subset \mathbb{N}$  tal que a restrição  $(x_n)_{n \in J}$  tenha limite  $b$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

**Dem:** Reparando que um subconjunto de  $\mathbb{N}$  é infinito se, e só se, não for majorado, isto é, se, e só se, tiver  $+\infty$  como ponto aderente, temos uma consequência de 1.6.2 e 1.6.14, já que  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , tendo a topologia induzida pela de  $\overline{\mathbb{R}}$  é um espaço metrizável (cf. 1.4.44).  $\square$

### 1.6.16 (Sublimites na reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$ )

Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma aplicação. Para cada vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $X$  notemos  $M_U \in \overline{\mathbb{R}}$  e  $m_U \in \overline{\mathbb{R}}$  respetivamente o supremo e o ínfimo do conjunto  $f(U \cap A)$ , conjunto que não é vazio por  $x_0$  ser aderente a  $A$ . Sendo  $M \in \overline{\mathbb{R}}$  o ínfimo do conjunto dos reais estendidos  $M_U$  e  $m \in \overline{\mathbb{R}}$  o supremo dos reais estendidos  $m_U$ , tem-se então que  $M$  e  $m$  são sublimites de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e qualquer sublimite  $b$  de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  verifica as desigualdades  $m \leq b \leq M$ . Por esse motivo, a  $M$  e a  $m$  dá-se respetivamente o nome de *sublimite máximo* e *sublimite mínimo* de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e usa-se para eles as notações

$$M = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad m = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

**Dem:** Vamos explicitar apenas a demonstração de que  $M$  é um sublimite de



$f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e de que se tem  $b \leq M$  para qualquer sublimite  $b$  de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$ . A prova, que não explicitaremos, de que  $m$  é um sublimite com  $m \leq b$  para cada sublimite  $b$  seria uma adaptação evidentemente da que vamos examinar obtida a partir de uma troca do sentido das desigualdades.

Vamos dividir a demonstração em várias partes para uma melhor sistematização:

**a)** Vamos verificar que, no caso em que  $M$  é finito,  $M$  é um sublimite, utilizando para isso a caracterização na alínea a) de 1.6.1. Fixemos então vizinhanças arbitrárias  $U_0$  de  $x_0$  e  $V_0$  de  $M$  e consideremos  $\delta > 0$  tal que

$$]M - \delta, M + \delta[ = V_\delta(M) \subset V_0.$$

Tendo em conta a caracterização de  $M$  como um ínfimo, podemos considerar uma vizinhança  $U_1$  de  $x_0$  tal que  $M_{U_1} < M + \delta$ . Considerando agora a vizinhança  $U = U_0 \cap U_1$  de  $x_0$ , para a qual se tem  $U \subset U_1$ , a caracterização de  $M$  com um ínfimo e de  $M_U$  e  $M_{U_1}$  como supremos implica que  $M \leq M_U \leq M_{U_1}$  e que podemos escolher  $x \in U \cap A$  com  $f(x) > M_U - \delta$ . Uma vez que, por  $M_U$  ser um supremo, temos  $f(x) \leq M_U$ , vemos agora que

$$M - \delta \leq M_U - \delta < f(x) \leq M_U \leq M_{U_1} < M + \delta$$

portanto  $f(x) \in ]M - \delta, M + \delta[ \subset V_0$ . Uma vez que  $x \in U_0 \cap A$ , por ser  $U \subset U_0$ , podemos assim concluir que  $M$  é sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**b)** Vamos agora verificar que, no caso em que  $M = +\infty$ ,  $M$  é um sublimite, utilizando para isso, mais uma vez, a caracterização na alínea a) de 1.6.1. Fixemos então vizinhanças arbitrárias  $U_0$  de  $x_0$  e  $V_0$  de  $+\infty$  e consideremos  $\delta > 0$  tal que

$$]\frac{1}{\delta}, +\infty] = V_\delta(+\infty) \subset V_0.$$

Tendo em conta a caracterização de  $M = +\infty$  como um ínfimo, tem-se também  $M_{U_0} = +\infty$  e portanto, pelo facto de  $M_{U_0}$  ser um supremo, existe  $x \in U_0 \cap A$  tal que  $f(x) > \frac{1}{\delta}$ , em particular  $f(x) \in V_0$ . Podemos assim concluir que  $M = +\infty$  é sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**c)** Verifiquemos enfim que, no caso em que  $M = -\infty$ ,  $M$  é ainda um sublimite, utilizando para isso, como antes, a caracterização na alínea a) de 1.6.1. Fixemos então vizinhanças arbitrárias  $U_0$  de  $x_0$  e  $V_0$  de  $-\infty$  e consideremos  $\delta > 0$  tal que

$$[-\infty, -\frac{1}{\delta}[ = V_\delta(-\infty) \subset V_0.$$

Tendo em conta a caracterização de  $M = -\infty$  como um ínfimo, podemos considerar uma vizinhança  $U_1$  de  $x_0$  tal que  $M_{U_1} < -\frac{1}{\delta}$ . Considerando agora a vizinhança  $U = U_0 \cap U_1$  de  $x_0$ , para a qual se tem  $U \subset U_1$ , a caracterização de  $M_U$  e  $M_{U_1}$  como supremos implica que  $M_U \leq M_{U_1}$ .

Escolhendo agora  $x \in U \cap A$  arbitrário, tem-se ainda  $x \in U_0 \cap A$ , por ser  $U \subset U_0$ , e, pelo facto de  $M_U$  ser um supremo,

$$f(x) \leq M_U \leq M_{U_1} < -\frac{1}{\delta}$$

portanto  $f(x) \in [-\infty, -\frac{1}{\delta}[ \subset V_0$ . Podemos assim concluir que  $M = -\infty$  é sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**d)** Consideremos agora um sublimite arbitrário  $b$  de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Seja  $U$  uma vizinhança arbitrária de  $x_0$ . Tendo em conta 1.6.13,  $b$  é aderente ao conjunto não vazio  $f(A \cap U)$  e portanto, sendo  $M_U$  o supremo deste conjunto, a alínea d) de 1.2.13 garante que  $b \leq M_U$ . O facto de se ter  $b \leq M_U$  para toda a vizinhança  $U$  de  $x_0$ , implica agora que  $b$  é menor ou igual ao ínfimo  $M = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$  do conjunto dos  $M_U$ .  $\square$

A propriedade precedente, especialmente enquanto garantia da existência de sublimite em qualquer ponto aderente ao domínio para funções com valores em  $\mathbb{R}$  é uma propriedade topológica importante que é compartilhada por outros espaços topológicos. Essa importância conduz à definição que apresentamos a seguir.

**1.6.17** Diz-se que um espaço topológico  $Y$  é *compacto* se, quaisquer que sejam o espaço topológico  $X$ , o conjunto  $A \subset X$ , o ponto  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e a aplicação  $f: A \rightarrow Y$ , esta aplicação admite algum sublimite  $b \in Y$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

Se  $Y$  é um espaço topológico diz-se que  $B \subset Y$  é um conjunto compacto se  $B$ , com a topologia induzida pela de  $Y$  é um espaço topológico compacto.

É claro que um espaço topológico  $Y$  é compacto se, e só se, for um subconjunto compacto dele mesmo.

**1.6.18 (Exemplos de compactos) a)** O que estabelecemos em 1.6.16 mostra, em particular, que a reta estendida  $\overline{\mathbb{R}}$  é um espaço topológico compacto.

**b)** Se  $Y$  é um espaço topológico arbitrário, então o conjunto vazio  $\emptyset$  é um subconjunto compacto de  $Y$  e, para cada  $b \in Y$ , o conjunto unitário  $\{b\}$  é um subconjunto compacto de  $Y$ .

Com efeito, a primeira afirmação resulta de não haver aplicações com valores em  $\emptyset$  cujo domínio  $A$  seja diferente do vazio e a segunda resulta de que uma aplicação com valores em  $\{b\}$  é necessariamente constante e portanto tem  $b$  como limite, em particular como sublimite.

**1.6.19 (Compacidade e sucessões generalizadas)** Um espaço topológico  $Y$  é compacto se, e só se, qualquer sucessão generalizada  $(y_j)_{j \in J}$  de elementos de  $Y$  admitir um sublimite.

**Dem:** Se  $Y$  é compacto, o facto de uma sucessão generalizada  $(y_j)_{j \in J}$  ser uma aplicação  $J \rightarrow Y$ , onde se encara  $J$  como parte dum espaço topológico  $\overline{J}$ , com um elemento  $+\infty$  aderente a  $J$  (cf. 1.2.61), garante que esta sucessão

generalizada admite um sublimite (quando  $j \rightarrow +\infty$ ). Suponhamos, reciprocamente, que qualquer sucessão generalizada de elementos de  $Y$  admite um sublimite. Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Tendo em conta a caracterização dos pontos aderentes em 1.2.73, podemos considerar uma sucessão generalizada  $(x_j)_{j \in J}$  de elementos de  $A$  tal que  $x_j \rightarrow x_0$ . A sucessão generalizada  $(f(x_j))_{j \in J}$  de elementos de  $Y$  admite então algum sublimite  $b$  e, tendo em conta 1.6.7,  $b$  é também sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Fica assim provado que  $Y$  é um espaço topológico compacto.  $\square$

**1.6.20 (Unicidade dos sublimites e limites)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Se  $Y$  for compacto e  $b \in Y$  for o único sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , então tem-se mesmo  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Dem:** Suponhamos, por absurdo, que  $b$  não é limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tendo em conta 1.6.9, podemos considerar  $A' \subset A$  com  $x_0$  aderente a  $A'$  tal que a restrição  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  não admita  $b$  como sublimite quando  $x \rightarrow x_0$ . O facto de  $Y$  ser compacto implica que  $f|_{A'}: A' \rightarrow Y$  admite algum sublimite  $b'$  quando  $x \rightarrow x_0$ , tendo-se assim  $b' \neq b$ . Mas, tendo em conta 1.6.8,  $b'$  é também sublimite de  $f: A \rightarrow Y$  quando  $x \rightarrow x_0$ , o que é absurdo por contradizer o facto de  $b$  ser o único sublimite.  $\square$

**1.6.21 (Conjuntos compactos e conjuntos fechados)** a) Se  $Y$  é um espaço topológico compacto e  $B \subset Y$  é um subconjunto fechado então é um subconjunto compacto.

b) Se  $Y$  é um espaço topológico de Hausdorff e  $B \subset Y$  é um subconjunto compacto então  $B$  é um subconjunto fechado.

c) Em particular, se  $Y$  é um espaço de Hausdorff compacto então os subconjuntos compactos de  $Y$  são exatamente aqueles que são fechados.

**Dem:** a) Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow B$  uma aplicação. Em particular  $f$  toma valores no espaço compacto  $Y$ , pelo que existe  $b \in Y$  que seja sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Como vimos em 1.6.4,  $b$  é aderente ao codomínio  $B$  e portanto  $b \in B$ , por  $B$  ser fechado. Concluímos assim que  $b \in B$  é um sublimite de  $f: A \rightarrow B$  quando  $x \rightarrow x_0$  (cf. 1.6.6).

b) Seja  $y_0 \in Y$  aderente a  $B$ . Tem-se então que a aplicação identidade  $\iota: B \rightarrow Y$  tem limite  $y_0$  quando  $y \rightarrow y_0$  (cf. a alínea b) de 1.2.30), em particular, por  $Y$  ser de Hausdorff,  $y_0$  é o único sublimite desta aplicação quando  $y \rightarrow y_0$  (cf. 1.6.3). Mas, por  $B$  ser compacto, existe  $y_1 \in B$  que seja sublimite de  $\iota: B \rightarrow B$  quando  $y \rightarrow y_0$ , e, uma vez que  $y_1$  também é sublimite quando o espaço de chegada que se considera é  $Y$ , a propriedade de unicidade implica que  $y_1 = y_0$ , portanto  $y_0 \in B$ . Fica assim provado que  $B$  é um subconjunto fechado de  $Y$ .

c) Temos uma consequência da conjunção das conclusões de a) e b).  $\square$

**1.6.22 (Corolário) a)** Um conjunto  $B \subset \overline{\mathbb{R}}$  é compacto se, e só se, for fechado em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**b)** Um conjunto  $B \subset \mathbb{R}$  é compacto se, e só se, for fechado em  $\mathbb{R}$  e limitado.<sup>85</sup>

**Dem:** A conclusão de a) resulta de  $\overline{\mathbb{R}}$  ser um espaço topológico de Hausdorff compacto. Quanto a b), pela transitividade das topologias induzidas, dizer que  $B \subset Y$  é compacto no espaço topológico  $\mathbb{R}$  é equivalente a dizer que é compacto no espaço topológico  $\overline{\mathbb{R}}$  pelo que basta então repararmos que um conjunto  $B \subset \mathbb{R}$  é fechado em  $\overline{\mathbb{R}}$  se, e só se, for fechado em  $\mathbb{R}$  (contém todos os reais que são aderentes) e não tiver  $-\infty$  e  $+\infty$  como pontos aderentes, onde estas últimas exigências são equivalentes respetivamente a  $B$  ser minorado e ser majorado.  $\square$

**1.6.23 (Unões finitas de compactos)** Seja  $Y$  um espaço topológico. Se  $B' \subset Y$  e  $B'' \subset Y$  são conjuntos compactos então  $B' \cup B''$  é também um conjunto compacto. Em consequência, se  $J$  é um conjunto finito de índices e  $B_j \subset Y$  é um subconjunto compacto para cada  $j \in J$  então a união finita  $\bigcup B_j$  é também um conjunto compacto. Em particular, qualquer subconjunto finito de  $Y$  é compacto.

**Dem:** Suponhamos que  $B'$  e  $B''$  são subconjuntos compactos de  $Y$ . Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow B' \cup B''$  uma aplicação. Tem-se então  $A = A' \cup A''$ , onde

$$A' = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}, \quad A'' = \{x \in A \mid f(x) \in B''\},$$

e portanto  $x_0$  é aderente a pelo menos um dos conjunto  $A'$  e  $A''$ . Se  $x_0$  for aderente a  $A'$ , o facto de  $B'$  ser compacto implica que a restrição  $f|_{A'}: A' \rightarrow B'$  admite algum sublimite  $b \in B'$  quando  $x \rightarrow x_0$  e então  $b \in B' \cup B''$  é também sublimite de  $f: A \rightarrow B' \cup B''$  quando  $x \rightarrow x_0$  (cf. 1.6.8). Se  $a$  for aderente a  $A''$ , o facto de  $B''$  ser compacto implica que a restrição  $f|_{A''}: A'' \rightarrow B''$  admite algum sublimite  $b \in B''$  quando  $x \rightarrow x_0$  e então, como antes,  $b \in B' \cup B''$  é também sublimite de  $f: A \rightarrow B' \cup B''$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Em qualquer das hipóteses verificámos que  $f: A \rightarrow B' \cup B''$  admite sublimite quando  $x \rightarrow x_0$ , o que mostra que  $B' \cup B''$  é compacto. Lembrando que o conjunto vazio<sup>86</sup> é compacto, o facto da a união de uma família finita de compactos ser compactos tem agora uma demonstração evidente, por indução no número de elementos do conjunto de índices  $J$ . Por fim, o facto de qualquer subconjunto finito de  $Y$  ser compacto resulta de que um tal conjunto pode ser obtido como união finita de conjuntos com um único elemento, conjuntos esses que já verificámos serem compactos.  $\square$

**1.6.24 (Imagem directa de um compacto)** Sejam  $Y$  e  $Y'$  dois espaços topológicos e  $f: Y \rightarrow Y'$  uma aplicação contínua. Se  $B \subset Y$  é um subconjunto

<sup>85</sup>Em Análise no contexto dos números reais é frequente definirem-se os conjuntos compactos como aqueles que são fechados e limitados.

<sup>86</sup>Que pode ser olhado como a união de 0 conjuntos compactos.

compacto então a sua imagem directa  $f(B) \subset Y'$  é também um subconjunto compacto.<sup>87</sup>

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $g: A \rightarrow f(B)$  uma aplicação arbitrária. Para cada  $x \in A$ , consideremos um elemento  $h(x) \in B$  tal que  $g(x) = f(h(x))$ . Considerando a aplicação  $h: A \rightarrow B$ , o facto de  $B$  ser compacto garante a existência de  $b \in B$  que seja sublimite de  $h(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tendo em conta a continuidade de  $f$  concluimos agora da alínea b) de 1.6.10 que  $g(x) = f(h(x))$  tem o elemento  $f(b) \in f(B)$  como sublimite quando  $x \rightarrow x_0$ . Fica assim provado que  $f(B)$  é um subconjunto compacto de  $Y'$ .  $\square$

**1.6.25 (Corolário)** Se  $Y$  e  $Y'$  são espaços topológicos homeomorfos e  $Y$  é compacto, então  $Y'$  é também compacto.

**Dem:** Apesar de este resultado se inserir na situação geral de dois espaços topológicos homeomorfos terem as mesmas propriedades topológicas, é mais directo notar que um homeomorfismo  $f: Y \rightarrow Y'$  é, em particular, uma aplicação contínua com  $f(Y) = Y'$ .  $\square$

**1.6.26 (Corolário — Teorema de Weierstrass)** Sejam  $Y$  um espaço topológico compacto e não vazio e  $f: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  um aplicação contínua. Tem-se então que a aplicação  $f$  atinge um valor máximo e um valor mínimo, isto é, o contradomínio  $f(Y)$  tem máximo e mínimo.

**Dem:** Tendo em conta 1.6.24, o conjunto  $f(Y)$  é compacto e portanto, por  $\overline{\mathbb{R}}$  ser um espaço de Hausdorff, é um subconjunto fechado de  $\overline{\mathbb{R}}$ , evidentemente não vazio. Uma vez que, como referido em 1.2.13, o supremo e o ínfimo de  $f(Y)$  são aderentes a  $f(Y)$ , podemos concluir que eles são respetivamente máximo e mínimo deste conjunto.  $\square$

**1.6.27 (Corolário — Os compactos são limitados)** Sejam  $Y$  um espaço métrico e  $B \subset Y$  um subconjunto compacto. Tem-se então que  $B$  é limitado.

**Dem:** Uma vez que o conjunto vazio é limitado, podemos já supor que  $B \neq \emptyset$ . Fixemos  $b \in Y$  e consideremos a aplicação contínua  $d_b: Y \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_b(y) = d(b, y)$  (cf. 1.4.22). Tendo em conta 1.6.26, a restrição a  $B$  desta aplicação contínua vai atingir um valor máximo  $R \in [0, +\infty[$ , tendo-se assim  $d(b, y) \leq R$  para cada  $y \in B$ , o que implica que  $B$  é efetivamente um conjunto limitado (cf. 1.1.17).  $\square$

**1.6.28 (Corolário — Distância de um compacto a um fechado)** Sejam  $Y$  um espaço métrico e  $A \subset Y$  um conjunto fechado e  $B \subset Y$  um conjunto compacto com  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$  e  $A \cap B = \emptyset$ . Tem-se então  $d(A, B) > 0$  (cf.

<sup>87</sup>Comparar com a propriedade dos conjuntos fechados referida em 1.4.25: Vimos então que imagem recíproca de um conjunto fechado por uma aplicação contínua é um conjunto fechado enquanto que, para os compactos, o que podemos afirmar é que a imagem directa por uma aplicação contínua de um conjunto compacto é compacto. No exercício 1.4.12 examinámos um exemplo de uma imagem direta de um conjunto fechado por uma aplicação contínua que não é fechada e, para uma aplicação constante  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de valor  $b$ , a imagem recíproca do compacto  $\{b\}$ , igual a  $\mathbb{R}$ , não é um compacto.

1.1.14),<sup>88</sup>

**Dem:** Lembremos que, como se viu em 1.4.22, podemos considerar uma aplicação contínua  $d_A: Y \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $d_A(y) = d(y, A)$  e, uma vez que  $A$  é fechado, tem-se  $d_A(y) = 0$  se, e só se,  $y \in A$  (cf. 1.1.29). A restrição desta função contínua ao compacto não vazio  $B$  vai assim, pelo teorema de Weierstrass, ter um mínimo  $r > 0$  e, como referido em 1.1.15, esse mínimo é igual a  $d(A, B)$ .  $\square$

**1.6.29 (Aplicação aos homeomorfismos)** Sejam  $Y$  um espaço topológico compacto,  $Y'$  um espaço topológico de Hausdorff e  $f: Y \rightarrow Y'$  uma aplicação contínua e bijetiva. Tem-se então que a aplicação inversa  $f^{-1}: Y' \rightarrow Y$  é também contínua, por outras palavras,  $f: Y \rightarrow Y'$  é um homeomorfismo.

**Dem:** Tendo em conta a caracterização das aplicações contínuas em 1.4.25, tudo o que temos que verificar é que se  $B \subset Y$  é um conjunto fechado então a sua imagem recíproca por  $f^{-1}$ , que é igual a  $f(B)$  é um subconjunto fechado de  $Y'$ . Ora, pela alínea a) de 1.6.21, o facto de  $B$  ser fechado no compacto  $Y$  implica que  $B$  é compacto e daqui deduzimos, por 1.6.24, que  $f(B)$  é um subconjunto compacto de  $Y'$  e, finalmente, o facto de  $Y'$  ser de Hausdorff permite-nos concluir, pela alínea b) de 1.6.21, que  $f(B)$  é um subconjunto fechado de  $Y'$ .  $\square$

**1.6.30 (Aplicação a um teorema de metrizabilidade)** Sejam  $Y$  um espaço topológico compacto,  $Z$  um espaço métrico,  $J$  um conjunto contável de índices e  $(f_j)_{j \in J}$  uma família de aplicações contínuas  $f_j: Y \rightarrow Z$  que *separe os pontos de  $Y$* , no sentido que para cada par de pontos  $y \neq y'$  em  $Y$  existe  $j \in J$  tal que  $f_j(y) \neq f_j(y')$ . O espaço topológico  $Y$  é então metrizável.

**Dem:** Consideremos no espaço  $Ap(J, Z)$  a topologia da convergência simples que, como verificámos em 1.5.19, é metrizável. Podemos considerar uma aplicação  $f: Y \rightarrow Ap(J, Z)$  definida por  $f(y) = (f_j(y))_{j \in J}$ , aplicação essa que é contínua por isso acontecer a cada uma das suas coordenada  $f_j: Y \rightarrow Z$ . Além disso, a condição de a família dos  $f_j$  separar os pontos de  $Y$  exprime precisamente o facto de  $f: Y \rightarrow Ap(J, Z)$  ser injetiva, portanto uma bijeção contínua do espaço compacto  $Y$  sobre o espaço separado  $f(Y) \subset Ap(J, Z)$  que é metrizável, em particular de Hausdorff. Tendo em conta 1.6.29 essa bijeção é um homeomorfismo o que implica que  $Y$ , sendo homeomorfo ao espaço metrizável  $f(Y)$ , é um espaço metrizável.  $\square$

Vamos agora examinar outro método de obter espaços topológicos compactos, mostrando nomeadamente que o produto cartesiano de uma família de espaços topológicos compactos, munido da topologia produto, é um espaço topológico compacto. Começamos por examinar o caso em que temos uma família finita de espaços compactos, deixando para mais tarde o caso geral das famílias possivelmente infinitas (Teorema de Tichonoff)

<sup>88</sup>No exercício 1.6.5 adiante veremos um exemplo de dois conjuntos fechados disjuntos dum espaço métrico cuja distância é igual a 0.

cuja demonstração exige a utilização de um resultado profundo de Teoria dos Conjuntos (Teorema de Zorn) que alguns leitores poderão não conhecer.

**1.6.31 (Lema)** Sejam  $Y_1$  e  $Y_2$  dois espaços topológicos compactos. Tem-se então que  $Y_1 \times Y_2$ , com a topologia produto, é um espaço topológico compacto.

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y_1 \times Y_2$  uma aplicação. Podemos então considerar as coordenadas  $f_1: A \rightarrow Y_1$  e  $f_2: A \rightarrow Y_2$  de  $f$ , definidas por  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ , e o facto de  $Y_1$  ser compacto permite-nos considerar um sublimite  $b_1$  de  $f_1$  quando  $x \rightarrow x_0$ , e portanto um espaço topológico  $Z$ , um subconjunto  $C \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e uma aplicação  $g: C \rightarrow A$  com  $g(z) \rightarrow x_0$  quando  $z \rightarrow z_0$  e  $f_1(g(z)) \rightarrow b_1$  quando  $z \rightarrow z_0$ . O facto de  $Y_2$  também ser compacto garante-nos agora que, para a aplicação  $f_2 \circ g: C \rightarrow Y_2$ , é possível considerar um sublimite  $b_2$  quando  $z \rightarrow z_0$ ,<sup>89</sup> e portanto um espaço topológico  $W$ , um subconjunto  $D \subset W$ ,  $w_0 \in W$  aderente a  $D$  e uma aplicação  $h: D \rightarrow C$  com  $h(w) \rightarrow z_0$  quando  $w \rightarrow w_0$  e  $f_2(g(h(w))) \rightarrow b_2$  quando  $w \rightarrow w_0$ . Tendo em conta o resultado sobre o limite da aplicação composta (cf. 1.2.41) vemos agora que  $g(h(w)) \rightarrow x_0$  quando  $w \rightarrow w_0$  e que vem também  $f_1(g(h(w))) \rightarrow b_1$  quando  $w \rightarrow w_0$  de onde concluímos, pela caracterização da topologia produto em 1.5.1, que

$$f(g(h(w))) = (f_1(g(h(w))), f_2(g(h(w)))) \rightarrow (b_1, b_2)$$

quando  $w \rightarrow w_0$  e portanto que  $(b_1, b_2)$  é um sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Provámos assim que  $Y_1 \times Y_2$  é efetivamente compacto.  $\square$

**1.6.32 (Produto finito de compactos)** Seja  $I \neq \emptyset$  um conjunto finito de índices e seja, para cada  $i \in I$ ,  $Y_i$  um espaço topológico compacto. Tem-se então que o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} Y_i$ , com a topologia produto (cf. 1.5.13), é também um espaço topológico compacto.

**Dem:** Vamos provar o resultado, com o auxílio do lema 1.6.31, por indução no número de elementos do conjunto  $I$ . Se  $I = \{i_0\}$  tem 1 elemento a conclusão resulta de que, por 1.5.28, o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} Y_i$  é

homeomorfo a  $Y_{i_0}$ . Supondo o resultado verdadeiro quando  $I$  tem  $p$  elementos a constatação de que ele é também verdadeiro quando  $I$  tem  $p + 1$  elementos resulta de que, escolhendo então  $i_0 \in I$ , podemos considerar o conjunto  $I \setminus \{i_0\}$  com  $p$  elementos e então, pela hipótese de indução, o produto cartesiano  $\prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i$  é compacto e portanto, pelo o lema referido,

$\prod_{i \in I} X_i$  é compacto por ser homeomorfo a  $(\prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i) \times X_{i_0}$  (cf. 1.5.29).  $\square$

<sup>89</sup>Se tirássemos partido de  $Y_2$  ser compacto diretamente através da consideração da aplicação  $f_2$  não conseguiríamos prosseguir a demonstração.

**1.6.33 (Corolário — Compactos de  $\mathbb{R}^n$ )** Consideremos em  $\mathbb{R}^n$  a métrica do máximo  $d_\infty$ , que sabemos definir a topologia produto (cf. 1.5.18 e 1.2.3). Tem-se então que um conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  é compacto se, e só se, for fechado e limitado (comparar com a alínea b) de 1.6.22).

É claro que, uma vez que métricas Lipschitz-equivalentes têm os mesmos subconjuntos limitados, também podemos dizer que, considerando em  $\mathbb{R}^n$  a métrica euclidiana  $d_2$ , os subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$  continuam a ser aqueles que são fechados e limitados (cf. 1.1.27 e 1.1.35)

**Dem:** Tendo em conta a alínea b) de 1.6.21 e 1.6.27, já sabemos que se  $B \subset \mathbb{R}^n$  é compacto então é fechado e limitado. Suponhamos, reciprocamente, que  $B$  é fechado e limitado. Uma vez que  $B$  é limitado, podemos considerar  $r \geq 0$  tal que

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = d_\infty((x_1, x_2, \dots, x_n), 0) \leq r$$

para cada  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B$  (cf. 1.1.17), portanto tal que  $B$  esteja contido no compacto  $[-r, r]^n$  (produto de compactos de  $\mathbb{R}$ ). Uma vez que  $B$ , sendo fechado em  $\mathbb{R}^n$ , também é fechado em  $[-r, r]^n$ , concluímos finalmente, pela alínea a) de 1.6.21, que  $B$  é compacto.  $\square$

Vamos agora generalizar o resultado 1.6.32 mostrando que o produto cartesiano de uma família, mesmo que infinita, de espaços compactos é um espaço compacto. Como já referido, trata-se de um resultado que utiliza um teorema profundo de Teoria dos Conjuntos, o teorema de Zorn e, por esse motivo, poderá ser dispensado por quem não se sinta à vontade neste contexto.

O *teorema de Zorn* examina a situação em que temos um conjunto não vazio  $\mathcal{J}$  munido de uma relação de ordem parcial, que notaremos  $\succeq$ . Um subconjunto não vazio  $\mathcal{X} \subset \mathcal{J}$  diz-se uma *cadeia* se a ordem parcial em  $\mathcal{X}$  obtida por restrição da de  $\mathcal{J}$  for mesmo uma ordem total. O teorema de Zorn afirma-nos que se qualquer cadeia  $\mathcal{X} \subset \mathcal{J}$  admitir um *majorante*  $j_0 \in \mathcal{J}$  (isto é, um elemento que verifica  $j_0 \succeq j$  para todo o  $j \in \mathcal{X}$ ), então existe pelo menos um maximal  $j_{\max} \in \mathcal{J}$  (cf. 1.2.60).

**1.6.34 (Teorema de Tichonoff)** Sejam  $J$  um conjunto de índices não vazio, finito ou infinito e, para cada  $j \in J$ , um espaço topológico compacto  $Y_j$ . Tem-se então que o produto cartesiano  $\prod_{j \in J} Y_j$ , com a topologia produto (cf.

1.5.13), é um espaço topológico compacto.

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \prod_{j \in J} Y_j$  uma aplicação. Temos que provar a existência de um sublímite

$(b_j)_{j \in J}$  de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e é isso que vamos fazer em seguida, dividindo, para uma melhor sistematização, a prova em várias alíneas.

**1)** Sejam  $f_j: A \rightarrow Y_j$  as aplicações coordenadas de  $f$ , definidas portanto pela condição de se ter



$$f(x) = (f_j(x))_{j \in J}$$

para cada  $x \in A$ . Para cada parte não vazia  $K$  de  $J$ , notemos  $f_K: A \rightarrow \prod_{j \in K} Y_j$

a aplicação com valores no produto cartesiano “parcial” (onde consideramos também a topologia produto) com as coordenadas  $f_j$ ,  $j \in K$  (tem-se assim  $f = f_J$ ).

2) Vamos considerar a classe  $\mathcal{J}$  de todos os pares  $(K, (b_j)_{j \in K})$  com  $K \subset J$  não vazio e  $(b_j)_{j \in K}$  sublimite da aplicação  $f_K: A \rightarrow \prod_{j \in K} Y_j$  quando  $x \rightarrow x_0$  e

reparemos que o nosso objetivo é mostrar que esta classe possui um elemento com  $K = J$ . Nesta classe consideramos a relação  $\succeq$  definida por

$$(K, (b_j)_{j \in K}) \succeq (K', (b'_j)_{j \in K'})$$

se, e só se,  $K \supset K'$  e  $b'_j = b_j$  para cada  $j \in K'$  (por outras palavras, o segundo par é essencialmente uma restrição do primeiro). É muito simples constatar que esta relação é uma ordem parcial na classe  $\mathcal{J}$ . Repare-se que  $\mathcal{J}$  não é vazio por conter pelo menos, para cada  $j_0 \in J$ , o par formado pelo conjunto unitário  $\{j_0\}$  e pela família que a  $j_0$  associa um sublimite da coordenada  $f_{j_0}: A \rightarrow Y_{j_0}$  quando  $x \rightarrow x_0$  (cf. 1.5.28 e a alínea b) de 1.6.10).

3) Vamos agora verificar que a ordem parcial que estamos a considerar na classe  $\mathcal{J}$  verifica a hipótese do teorema de Zorn, isto é, que qualquer cadeia  $\mathcal{X} \subset \mathcal{J}$  admite um majorante em  $\mathcal{J}$ .

**Subdem:** Por comodidade, notemos  $(K_\gamma, (b_{\gamma,j})_{j \in K_\gamma})$ , com  $\gamma \in \Gamma$ , uma indexação dos elementos da cadeia  $\mathcal{X}$ . Notemos  $K$  a união dos conjuntos  $K_\gamma$  e, para cada  $j \in K$ , seja  $b_j = b_{\gamma,j}$  para cada  $\gamma$  tal que  $j \in K_\gamma$  (o facto desta definição não depender de  $\gamma$  resulta de  $\mathcal{X}$  ser uma cadeia e da definição da relação  $\succeq$  em  $\mathcal{J}$ ). Se mostrarmos que  $(K, (b_j)_{j \in K})$  pertence a  $\mathcal{J}$ , isto é, que  $(b_j)_{j \in K}$  é sublimite da aplicação  $f_K: A \rightarrow \prod_{j \in K} Y_j$  quando  $x \rightarrow x_0$ , é claro

que  $(K, (b_j)_{j \in K})$  vai ser um majorante da cadeia  $\mathcal{X}$ . Para mostrar que temos efetivamente um sublimite, utilizamos a caracterização destes na alínea a) de 1.6.1. Consideremos então vizinhanças arbitrárias  $U$  de  $x_0$  em  $X$  e  $\Omega$  de  $(b_j)_{j \in K}$  em  $\prod_{j \in K} Y_j$ . A caracterização das vizinhanças para a topologia produto

em 1.5.13 permite-nos considerar para cada  $j \in K$  uma vizinhança  $V_j$  de  $b_j$  em  $Y_j$  de modo que  $\prod_{j \in K} V_j \subset \Omega$  e que seja finito o conjunto dos  $j \in K$  tais que

$V_j \neq Y_j$ . O facto de  $\mathcal{X}$  ser uma cadeia implica que qualquer subconjunto finito de  $\mathcal{X}$  admite um majorante em  $\mathcal{X}$  (que se pode tomar como o máximo se o conjunto não for vazio) e daqui decorre, considerando para cada índice  $j$  com  $V_j \neq Y_j$  um conjunto  $K_\gamma$  que o contenha, que podemos considerar um índice  $\gamma_0$  tal que  $j \in K_{\gamma_0}$  sempre que  $V_j \neq Y_j$ . O facto de

$$(b_j)_{j \in K_{\gamma_0}} = (b_{\gamma_0, j})_{j \in K_{\gamma_0}}$$

ser um sublimite de  $f_{K_{\gamma_0}} : A \rightarrow \prod_{j \in K_{\gamma_0}} Y_j$  quando  $x \rightarrow x_0$  permite-nos considerar  $x \in U$  tal que  $f_{K_{\gamma_0}}(x)$  pertença à vizinhança  $\prod_{j \in K_{\gamma_0}} V_j$  de  $(b_j)_{j \in K_{\gamma_0}}$  isto é, tal que  $f_j(x) \in V_j$  para cada  $j \in K_{\gamma_0}$  e uma vez que, para cada  $j \in K \setminus K_{\gamma_0}$  tem-se trivialmente  $f_j(x) \in Y_j = V_j$ , concluímos que

$$f_K(x) = (f_j(x))_{j \in K} \in \prod_{j \in K} V_j \subset \Omega,$$

o que mostra que  $(b_j)_{j \in K}$  é efetivamente sublimite da aplicação  $f_K : A \rightarrow \prod_{j \in K} Y_j$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

4) Podemos agora aplicar o teorema de Zorn para concluir a existência de um elemento maximal de  $\mathcal{J}$ , que notaremos  $(\widehat{K}, (\widehat{b}_j)_{j \in \widehat{K}})$ , de  $\mathcal{J}$ . Como referido em 2), o teorema ficará provado se mostrarmos que  $\widehat{K} = J$ . Suponhamos, por absurdo, que isso não acontece e fixemos um índice  $\widehat{j} \in J \setminus \widehat{K}$ . Utilizando a caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1, consideremos um espaço topológico  $Z$ , um conjunto  $C \subset Z$ , um ponto  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e uma aplicação  $g : C \rightarrow A$  tais que  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} x_0$  e que  $f_{\widehat{K}}(g(z)) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} (\widehat{b}_j)_{j \in \widehat{K}}$ . Notemos  $\widehat{b}_{\widehat{j}}$  um sublimite da aplicação  $f_{\widehat{j}} \circ g : C \rightarrow Y_{\widehat{j}}$ , cuja existência resulta de  $Y_{\widehat{j}}$  ser compacto e sejam  $W$  um espaço topológico,  $D \subset W$ ,  $w_0 \in W$  aderente a  $D$  e  $h : D \rightarrow C$  uma aplicação com  $h(w) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} z_0$  e  $f_{\widehat{j}}(g(h(w))) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} \widehat{b}_{\widehat{j}}$ . Uma vez que, de se ter  $f_j(g(z)) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \widehat{b}_j$  para cada  $j \in \widehat{K}$  donde, pelo resultado sobre o limite da aplicação composta, também  $f_j(g(h(w))) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} \widehat{b}_j$ , constatamos agora que, sendo  $K = \widehat{K} \cup \{\widehat{j}\}$ , a família  $(\widehat{b}_j)_{j \in K} \in \prod_{j \in K} Y_j$  é o limite de  $f_K(g(h(w)))$  quando  $w \rightarrow w_0$  e portanto, por se ter  $g(h(w)) \xrightarrow{w \rightarrow w_0} x_0$ , é um sublimite de  $f_K(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Vemos assim que o par  $(K, (\widehat{b}_j)_{j \in K})$  é um elemento de  $\mathcal{J}$  que é diferente e  $\succeq$  ao par  $(\widehat{K}, (\widehat{b}_j)_{j \in \widehat{K}})$ , o que é o absurdo procurado, tendo em conta o facto de este último ser um elemento maximal de  $\mathcal{J}$ .  $\square$

**1.6.35 (Corolário)** Sejam  $J$  um conjunto de índices não vazio e  $Y$  um espaço topológico compacto. Tem-se então que  $Ap(J, Y)$ , com a topologia da convergência simples, é também um espaço topológico compacto.

**Dem:** Trata-se do caso particular do resultado precedente em que tomamos todos os espaços topológicos  $Y_j$  iguais a  $Y$  (cf. a alínea c) em 1.5.14).  $\square$

Vamos agora examinar uma caracterização alternativa dos espaços topológicos compactos que em muitos textos é tomada como definição. Será cómodo, para simplificar algumas aplicações, enunciar a caracterização em termos de subconjuntos compactos de um espaço topológico, o que inclui a caracterização referida no início se nos lembramos que um espaço topológico compacto é o mesmo que um subconjunto compacto dele mesmo.

**1.6.36 (Compacidade e propriedade das coberturas)** Sejam  $Y$  um espaço topológico e  $B \subset Y$  um subconjunto. Tem-se então que  $B$  é compacto se, e só se, é válida a seguinte *propriedade das coberturas*:

Qualquer que seja a *cobertura aberta* de  $B$ , isto é, a família  $(V_i)_{i \in I}$  de abertos de  $Y$  com  $B \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ , existe uma *subcobertura finita*, isto é, uma parte finita  $K \subset I$  tal que se tenha ainda  $B \subset \bigcup_{i \in K} V_i$ .

**Dem: 1)** Suponhamos  $B$  não verifica a propriedade das coberturas e tentemos mostrar que  $B$  não é compacto. Consideremos assim uma família  $(V_i)_{i \in I}$  de abertos de  $Y$  com  $B \subset \bigcup_{i \in I} V_i$  tal que para cada parte finita  $K \subset I$  não se tenha  $B \subset \bigcup_{i \in K} V_i$ . Podemos assim, para cada parte finita  $K \subset I$ ,

considerar  $y_K \in B$  com  $y_K \notin \bigcup_{i \in K} V_i$ . Lembrando que (cf. 1.2.67) a classe

$\mathcal{F}(I)$  de todas as partes finitas de  $I$  é um conjunto dirigido para a relação  $K \succeq K' \Leftrightarrow K \supset K'$ , podemos considerar a sucessão generalizada  $(y_K)_{K \in \mathcal{F}(I)}$  de elementos de  $B$ . Seja  $b$  um elemento arbitrário de  $B$ . Escolhendo  $i_0 \in I$  tal que  $b \in V_{i_0}$ , vemos que  $V_{i_0}$  é uma vizinhança de  $b$  tal que, para qualquer  $K \in \mathcal{F}(I)$  com  $K \succeq \{i_0\}$ ,  $y_K \notin V_{i_0}$  (uma vez que  $y_K \notin \bigcup_{i \in K} V_i$  e  $i_0 \in K$ ); Uma vez que o conjunto desses  $K$  é a intersecção de

$\mathcal{F}(I)$  com uma vizinhança de  $+\infty$  em  $\overline{\mathcal{F}(I)}$  (notação de 1.2.61), concluímos que  $b$  não é sublimite da sucessão generalizada de elementos de  $B$  (cf. a alínea a) de 1.6.1) e portanto, dada a arbitrariedade de  $b$ , o conjunto  $B$  não é compacto.

**2)** Suponhamos, reciprocamente, que o conjunto  $B$  não é compacto e tentemos mostrar que  $B$  não verifica a propriedade das coberturas. Consideremos um espaço topológico  $X$ , um subconjunto  $A \subset X$ , um ponto  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e uma aplicação  $f: A \rightarrow B$  que não admita nenhum sublimite pertencente a  $B$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Lembrando a caracterização dos sublimites na alínea a) 1.6.13, para cada  $b \in B$  podemos considerar uma vizinhança  $U_b$  de  $x_0$  em  $X$  tal que  $b$  não seja aderente a  $f(A \cap U_b)$ , ou seja não pertença à aderência  $\overline{f(A \cap U_b)}$ , que é um subconjunto fechado de  $Y$ . Vemos assim que a família dos abertos  $Y \setminus \overline{f(A \cap U_b)}$  de  $Y$ , com  $b \in B$ , constitui uma cobertura aberta de  $B$ . Vamos verificar que esta cobertura aberta de  $B$  não possui subcobertura finita, o que terminará a demonstração. Consideremos então uma parte finita arbitrária de  $B$ , que podemos já supor

não vazia, e notemos  $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$  os seus elementos. Consideremos a vizinhança

$$U = U_{b_1} \cap U_{b_2} \cap \dots \cap U_{b_p}$$

de  $x_0$  em  $X$ . Uma vez que  $x_0$  é aderente a  $A$ , podemos considerar  $x_1 \in A \cap U$  e então o elemento  $f(x_1) \in B$  pertence a cada um dos

$$f(A \cap U_{b_j}) \subset \overline{f(A \cap U_{b_j})},$$

com  $1 \leq j \leq p$ , e portanto não pertence à união finita dos  $Y \setminus \overline{f(A \cap U_{b_j})}$ , o que mostra que esta família finita de abertos não é uma cobertura de  $B$ .  $\square$

Vamos agora examinar algumas propriedades dos conjuntos compactos que se estabelecem mais naturalmente a partir da caracterização precedente da compacidade.

**1.6.37 (Propriedade do encaixe)** Seja  $Y$  um espaço topológico compacto e sejam  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  subconjuntos fechados não vazios de  $Y$  tais que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_{n+1} \subset K_n$ . Tem-se então  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ .

**Dem:** Se a intersecção fosse vazia, os abertos  $Y \setminus K_n$  de  $Y$  tinham união  $Y$  e verificavam  $Y \setminus K_{n+1} \supset Y \setminus K_n$ , para cada  $n$ , pelo que, por  $Y$  ser compacto, existia uma subcobertura finita, portanto existia  $n_0$  tal que

$$Y \setminus K_{n_0} = \bigcup_{n \leq n_0} Y \setminus K_n = Y,$$

o que era absurdo, por  $K_{n_0}$  não ser vazio.  $\square$

**1.6.38 (Lema)** Seja  $Y$  um espaço topológico de Hausdorff e sejam  $A \subset Y$  um conjunto compacto e  $a \in Y \setminus A$ . Existem então abertos  $U$  e  $V$  de  $Y$  tais que  $A \subset U$ ,  $a \in V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

**Dem:** Podemos já supor  $A \neq \emptyset$ , sem o que tomávamos  $U = \emptyset$  e  $V = Y$ . Tendo em conta o facto de o conjunto dos abertos que contêm um ponto constituir um sistema fundamental de vizinhanças desse ponto, vemos que o facto de  $Y$  ser de Hausdorff implica que, para cada  $x \in A$ , existe um aberto  $U_x$ , com  $x \in U_x$ , e um aberto  $V_x$ , com  $a \in V_x$ , tais que  $U_x \cap V_x = \emptyset$ . A família dos  $U_x$ , com  $x \in A$ , vai ser uma cobertura aberta de  $A$ , pelo que podemos considerar uma parte finita  $K$  de  $A$  tal que o conjunto aberto

$$U = \bigcup_{x \in K} U_x$$

ainda contenha  $A$ . Tem-se então que o conjunto

$$V = \bigcap_{x \in K} V_x$$

vai ser um aberto contendo  $a$  (uma intersecção finita de abertos) tal que  $U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

**1.6.39 (Separação de conjuntos compactos)** Sejam  $Y$  um espaço topológico de Hausdorff e  $A \subset Y$  e  $B \subset Y$  dois subconjuntos compactos, tais que  $A \cap B = \emptyset$ . Existem então conjuntos abertos  $U$  e  $V$  de  $Y$ , tais que  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

**Dem:** Podemos já supor  $B \neq \emptyset$ , sem o que tomávamos  $U = Y$  e  $V = \emptyset$ . Para cada  $y \in B$ , podemos, pelo lema 1.6.38, considerar dois abertos  $U_y$  e  $V_y$  de  $Y$ , com  $A \subset U_y$ ,  $y \in V_y$  e  $U_y \cap V_y = \emptyset$ . Tem-se então que a família dos  $V_y$ , com  $y \in B$ , constitui uma cobertura aberta de  $B$ , pelo que podemos considerar uma parte finita  $K$  de  $B$  tal que o conjunto aberto  $V = \bigcup_{y \in K} V_y$

ainda contenha  $B$ . Tem-se então que o conjunto  $U = \bigcap_{y \in K} U_y$  vai ser um aberto contendo  $A$  e tal que  $U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

**1.6.40 (Um tipo de continuidade uniforme)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço topológico compacto e  $Z$  um espaço métrico. Sejam  $x_0 \in X$  e  $f: X \times Y \rightarrow Z$  uma aplicação contínua em cada  $(x_0, y)$  com  $y \in Y$ . Para cada  $\delta > 0$  existe então uma vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $X$  tal que

$$d(f(x, y), f(x_0, y)) < \delta$$

sempre que  $x \in U$  e  $y \in Y$ .

**Dem:** Para cada  $y_0 \in Y$  a continuidade de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  permite-nos considerar uma vizinhança  $U_{y_0}$  de  $x_0$  em  $X$  e uma vizinhança aberta  $V_{y_0}$  de  $y_0$  em  $Y$  tais que

$$d(f(x, y), f(x_0, y_0)) < \frac{\delta}{2}$$

sempre que  $x \in U_{y_0}$  e  $y \in V_{y_0}$ . Para cada  $x \in U_{y_0}$  e  $y \in V_{y_0}$  tem-se então também

$$\begin{aligned} d(f(x, y), f(x_0, y)) &\leq d(f(x, y), f(x_0, y_0)) + d(f(x_0, y_0), (x_0, y)) < \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Tendo em conta a propriedade das cobertura em 1.6.36, podemos considerar pontos  $y_1, \dots, y_n$  em  $Y$  tais que  $Y = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$  e, considerando então a vizinhança  $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$  de  $x_0$  em  $X$ , tem-se, para cada  $x \in U$  e  $y \in Y$  que  $y \in V_{y_j}$  para algum  $1 \leq j \leq n$  e portanto, por ser  $x \in U_{y_j}$ ,

$$d(f(x, y), f(x_0, y)) < \delta. \quad \square$$

**1.6.41 (Espaços localmente compactos)** Diz-se que um espaço topológico  $Y$  é *localmente compacto* se, para cada  $y_0 \in Y$ , existe um sistema fundamental de

vizinhanças  $\mathcal{B}_{y_0}$  de  $y_0$ , constituído por subconjuntos compactos ou, o que é o mesmo, se, para cada  $y_0 \in Y$ , o conjunto das vizinhanças compactas de  $y_0$  constitui um sistema fundamental de vizinhanças desse ponto.<sup>90</sup>

**1.6.42 (Regularidade)** Se  $Y$  é um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto então  $Y$  é um espaço topológico regular (cf. 1.4.30).

**Dem:** Basta atender a que um sistema fundamental de vizinhanças compactas de  $b \in Y$  é, em particular um sistema fundamental de vizinhanças fechadas de  $b$  (cf. 1.6.21).  $\square$

**1.6.43 (Compactos e localmente compactos)** Se  $Y$  é um espaço topológico Hausdorff compacto então  $Y$  é localmente compacto, em particular é regular.

**Dem:** Dado  $b \in Y$ , vamos ver que o conjunto  $\mathcal{B}_b$ , das vizinhanças compactas de  $b$ , constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $b$ . Seja então  $W$  uma vizinhança arbitrária de  $b$ . Tem-se então que  $W' = \text{int}(W)$  é um aberto contendo  $b$  e contido em  $W$ , pelo que  $Y \setminus W'$  é um conjunto fechado, e portanto compacto, que não contém  $b$ . Tendo em conta 1.6.39, podemos considerar abertos  $U$  e  $V$  de  $Y$ , com  $Y \setminus W' \subset U$ ,  $\{b\} \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ . Uma vez que  $V$  está contido no conjunto fechado  $Y \setminus U$ , tem-se

$$\text{ad}(V) \subset \text{ad}(Y \setminus U) = Y \setminus U \subset W' \subset W,$$

onde  $\text{ad}(V)$  é uma vizinhança de  $b$ , por conter  $V$  e é compacto, por ser fechado no espaço topológico compacto  $Y$ .  $\square$

**1.6.44 (Exemplo)** O espaço topológico  $\mathbb{R}$ , com a sua topologia usual, apesar de não ser compacto, é localmente compacto. Com efeito, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , a classe dos intervalos  $[a - r, a + r] = \overline{B}_r(a)$ , com  $r > 0$ , constitui um sistema fundamental de vizinhanças compactas de  $a$ .

**1.6.45 (Subespaços localmente compactos)** Se  $Y$  é um espaço topológico localmente compacto e se  $Y' \subset Y$  é um subconjunto aberto ou fechado, então  $Y'$ , com a topologia induzida, é também localmente compacto.

**Dem:** Dado  $b \in Y'$ , seja  $\mathcal{B}_b$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $b$  em  $Y$ , constituído por conjuntos compactos. No caso em que  $Y'$  é fechado, o conjunto das intersecções  $Y' \cap V$ , com  $V \in \mathcal{B}_b$ , vai ser um sistema fundamental de vizinhanças de  $b$  em  $Y'$  (cf. 1.2.21), constituído por conjuntos compactos (o facto de  $Y' \cap V$  ser compacto vem de que é fechado

<sup>90</sup>Note-se que Kelley [9], define os espaços localmente compactos como sendo aqueles em que cada ponto tem pelo menos uma vizinhança compacta (propriedade trivialmente verificada pelos espaços compactos). Seguimos aqui uma definição mais restritiva para não nos afastarmos da situação habitual de definir um espaço como tendo localmente uma certa propriedade quando cada ponto tem um sistema fundamental de vizinhanças com essa propriedade. Note-se que resulta facilmente de 1.4.43 adiante que, para um espaço de Hausdorff, a existência de uma vizinhança compacta de um ponto implica a existência de um sistema fundamental de vizinhanças compactas desse ponto, o que mostra que, para espaços de Hausdorff, as duas definições são equivalentes. É talvez essa a razão por que Bourbaki [3], só define a compacidade local no contexto dos espaços de Hausdorff.

no compacto  $V$ ). No caso em que  $Y'$  é aberto, o conjunto  $\widehat{B}_b$ , dos  $V \in \mathcal{B}_b$  tais que  $V \subset Y'$  é ainda um sistema fundamental de vizinhanças de  $b$  em  $Y$ , como se reconhece imediatamente se se reparar que, para cada vizinhança  $W$  de  $b$  em  $Y$ ,  $W \cap Y'$  é também vizinhança de  $b$ ; resulta daqui que  $\widehat{B}_b$ , que é também igual ao conjunto das intersecções dos conjuntos de  $\widehat{B}_b$  com  $Y'$ , é um sistema fundamental de vizinhanças de  $b$  em  $Y'$ , constituído por conjuntos compactos.  $\square$

**1.6.46** Sejam  $J$  um conjunto **finito** não vazio de índices e, para cada  $j \in J$ ,  $Y_j$  um espaço topológico localmente compacto. Tem-se então que  $\prod_{j \in J} Y_j$ , com a topologia produto, é também localmente compacto.

**Dem:** Dado  $(b_j)_{j \in J}$  em  $\prod_{j \in J} Y_j$  começamos por reparar que, sendo, para cada

$j \in J$ ,  $W_j$  uma vizinhança compacta de  $b_j$ , o produto cartesiano  $\prod_{j \in J} W_j$  é uma

vizinhança compacta de  $(b_j)_{j \in J}$  (cf. a alínea b) da nota 1.5.14 e 1.6.32). O facto de as vizinhanças compactas deste tipo constituírem um sistema fundamental de vizinhanças resulta de que se  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(b_j)_{j \in J}$  podemos considerar para cada  $j$  uma vizinhança  $V_j$  de  $b_j$  com  $\prod_{j \in J} V_j \subset \Omega$  e,

sendo então para cada  $j$ ,  $W_j$  uma vizinhança compacta de  $b_j$  contida em  $V_j$ , a correspondente vizinhança  $\prod_{j \in J} W_j$  está contida em  $\prod_{j \in J} V_j$ , e portanto em  $\Omega$ .  $\square$

**1.6.47 (Corolário)** Para cada  $n \geq 1$ , o espaço  $\mathbb{R}^n$ , com a sua topologia usual, é um espaço localmente compacto.

**Dem:** Basta lembrar que a topologia usual de  $\mathbb{R}^n$  é, como referido em 1.5.18, a topologia produto das topologias usuais de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

O resultado que examinamos em seguida será útil em várias situações em que o espaço topológico localmente compacto é de base contável.

**1.6.48 (Espaços localmente compactos de base contável)** Seja  $X$  um espaço topológico localmente compacto e de base contável. Existe então uma sucessão  $(U_n)_{n \geq 1}$  de abertos de  $X$  e uma sucessão  $(K_n)_{n \geq 1}$  de compactos de  $X$  tais que  $U_n \subset K_n$ ,  $\bigcup U_n = X$ ,  $U_n \subset U_{n+1}$  e  $K_n \subset K_{n+1}$ .<sup>91</sup>

No caso em que  $X \neq \emptyset$  pode supor-se que  $U_n \neq \emptyset$  para cada  $n$ .

**Dem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $X = \emptyset$ , caso em que se toma  $U_n = K_n = \emptyset$  para cada  $n$ . Consideremos uma base contável de abertos  $\mathcal{U}$  de  $X$  e consideremos a parte de  $\mathcal{U}$  constituída pelos  $U \in \mathcal{U}$  não vazios e que estão contidos nalgum compacto de  $X$ . Consideremos uma sucessão de abertos  $(U'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cujo conjunto dos termos seja a parte referida de  $\mathcal{U}$  e, para

<sup>91</sup>De facto, examinando a demonstração, podemos constatar que em vez de pedir que  $X$  seja localmente compacto, bastaria pedir a existência de pelo menos uma vizinhança compacta de cada ponto de  $X$ .

cada  $n$  seja  $K'_n$  um compacto de  $X$  com  $U'_n \subset K'_n$ . Reparemos que a união dos  $U'_n$  é igual a  $X$  uma vez que para cada  $x \in X$  podemos considerar uma vizinhança compacta  $V$  de  $x$  e então, considerando o aberto  $\text{int}(V)$  que contém  $x$  vai existir  $U \in \mathcal{U}$  com  $x \in U \subset \text{int}(V)$  e esse aberto  $U$  é um dos  $U'_n$ . Definindo agora para cada  $n \geq 1$ ,

$$U_n = \bigcup_{p=1}^n U'_p, \quad K_n = \bigcup_{p=1}^n K'_p,$$

os  $U_n$  são abertos, os  $K_n$  são compactos e verificam-se trivialmente as condições do enunciado.  $\square$

Verificaremos em seguida que qualquer espaço topológico de Hausdorff localmente compacto é subespaço topológico de um espaço topológico de Hausdorff compacto que se obtém juntando-lhe um único elemento. Esse facto permite em várias situações aplicar a espaços topológicos de Hausdorff localmente compactos propriedades conhecidas no contexto dos espaços topológicos de Hausdorff compactos.

**1.6.49 (Compactificado de Alexandroff)** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto. Consideremos um ponto não pertencente a  $X$ , que notaremos  $\infty$ , e seja  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ . Existe então em  $\hat{X}$  uma única topologia de espaço compacto de Hausdorff que induza em  $X$  a topologia dada (diz-se que  $\hat{X}$  é o *compactificado de Alexandroff* de  $X$ ). Mais precisamente, tem-se:

**a)** As vizinhanças de  $a \in X$  no compactificado de Alexandroff são os subconjuntos  $V$  de  $\hat{X}$  tais que  $V \cap X$  é vizinhança de  $a$  em  $X$  e as vizinhanças de  $\infty$  são os conjuntos  $\hat{V}$  de  $\hat{X}$  para os quais exista algum subconjunto compacto  $K$  de  $X$  com  $\hat{V} \cup K = \hat{X}$ .

**b)** O conjunto  $X$  é aberto em  $\hat{X}$ .

**c)** Se  $A \subset X$  então  $\infty$  é exterior a  $A$  se, e só se, existir um compacto  $K \subset X$  com  $A \subset K$ .<sup>92</sup> Em particular,  $\infty$  é exterior a  $X$  se, e só se,  $X$  for compacto, ou seja o ponto  $\infty \in \hat{X}$  é aderente a  $X$  se, e só se,  $X$  não for compacto.

**Dem: 1)** Começemos por provar a propriedade de unicidade, supondo assim dada uma topologia de espaço compacto e de Hausdorff em  $\hat{X}$  que induza em  $X$  a topologia dada. O facto de  $\{\infty\}$  ser fechado, por  $\hat{X}$  ser de Hausdorff, implica que  $X = \hat{X} \setminus \{\infty\}$  é aberto em  $\hat{X}$ .

Vemos agora que se  $V \subset \hat{X}$  for vizinhança de  $a \in X$  para a topologia de  $\hat{X}$  então, pela caracterização das vizinhanças para uma topologia induzida,  $V \cap X$  é vizinhança de  $a$  para a topologia induzida e, reciprocamente, se

<sup>92</sup>Dito de outro modo, com a definição referida adiante no exercício 1.7.10,  $\infty$  é exterior a  $A$  se, e só se,  $A$  é relativamente compacto em  $X$ .



$V \cap X$  for vizinhança de  $a$  para a topologia de  $X$  então, por  $X$  ser vizinhança de  $a$  para a topologia de  $\widehat{X}$ , resulta de 1.2.22 que  $V \cap X$ , e portanto também  $V \supset V \cap X$  é vizinhança de  $a$  para a topologia de  $\widehat{X}$ .

Se  $\widehat{V}$  for vizinhança de  $\infty$  para a topologia de  $\widehat{X}$  então  $\infty \in \text{int}(\widehat{V})$  que é aberto em  $\widehat{X}$  pelo que  $K = \widehat{X} \setminus \text{int}(\widehat{V})$  é um subconjunto de  $X$  fechado em  $\widehat{X}$ , e portanto compacto e vem  $\widehat{V} \cup K = \widehat{X}$ . Reciprocamente, se existir um compacto  $K \subset X$  tal que  $\widehat{V} \cup K = \widehat{X}$  então, por  $K$  ser fechado em  $\widehat{X}$ ,  $\widehat{X} \setminus K$  é um aberto de  $\widehat{X}$  contendo  $\infty$  e, por ser  $\widehat{V} \supset \widehat{X} \setminus K$ ,  $\widehat{V}$  é vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$ . Acabamos assim de mostrar que as vizinhanças da topologia dada em  $\widehat{X}$  são as caracterizadas na alínea a) do enunciado.

2) Vamos agora verificar que as vizinhanças definidas pelas condições na alínea a) do enunciado verificam as condições na definição de topologia em 1.2.1, começando com as que partem de um ponto  $a \in X$ . O facto de  $\widehat{X}$  ser vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$  resulta de  $\widehat{X} \cap X = X$  ser vizinhança de  $a$  em  $X$ . Se  $V$  é vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$  e  $V \subset V' \subset \widehat{X}$  então

$$V \cap X \subset V' \cap X \subset X$$

com  $V \cap X$  vizinhança de  $a$  em  $X$  pelo que  $V' \cap X$  é vizinhança de  $a$  em  $X$  e  $V'$  é vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$ . Se  $V$  é vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$  então  $V \cap X$  é vizinhança de  $a$  em  $X$  pelo que  $a \in V \cap X \subset V$ . Se  $V$  e  $V'$  são vizinhanças de  $a$  em  $\widehat{X}$  então  $V \cap X$  e  $V' \cap X$  são vizinhanças de  $a$  em  $X$  pelo que

$$(V \cap V') \cap X = (V \cap X) \cap (V' \cap X)$$

é vizinhança de  $a$  em  $X$  e  $V \cap V'$  é vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$ . Se  $V$  é vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$  então  $V \cap X$  é vizinhança de  $a$  em  $X$  pelo que podemos considerar uma vizinhança  $W$  de  $a$  em  $X$  tal que para cada  $x \in W$  o conjunto  $V \cap X$  seja vizinhança de  $x$  em  $X$  e então, por ser  $W \cap X = W$ , o conjunto  $W$  é também vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$  e  $V$  é vizinhança em  $\widehat{X}$  de cada ponto  $x \in W$ .

Verifiquemos agora as mesmas condições mas quando partem do ponto  $\infty \in \widehat{X}$ . O facto de o conjunto vazio  $\emptyset$  ser um compacto de  $X$  com  $\widehat{X} \cup \emptyset = \widehat{X}$  mostra que  $\widehat{X}$  é uma vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$ . Se  $\widehat{V}$  é vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$  e  $\widehat{V} \subset \widehat{V}' \subset \widehat{X}$  então, sendo  $K \subset X$  um compacto tal que  $\widehat{V} \cup K = \widehat{X}$ , tem-se também  $\widehat{V}' \cup K = \widehat{X}$  pelo que  $\widehat{V}'$  é também uma vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$ . Se  $\widehat{V}$  é uma vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$  então existe um compacto  $K \subset X$  tal que  $\widehat{V} \cup K = \widehat{X}$  e então, como  $\infty \notin K$ , vem  $\infty \in \widehat{V}$ . Se  $\widehat{V}$  e  $\widehat{V}'$  são vizinhanças de  $\infty$  em  $\widehat{X}$  então existem compactos  $K \subset X$  e  $K' \subset X$  tais que  $\widehat{V} \cup K = \widehat{X}$  e  $\widehat{V}' \cup K' = \widehat{X}$  e então  $K \cup K' \subset X$  é compacto (cf. 1.6.23) e

$$(\widehat{V} \cap \widehat{V}') \cup (K \cup K') = \widehat{X},$$

o que mostra que  $\widehat{V} \cap \widehat{V}'$  é uma vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$ . Se  $\widehat{V}$  é uma vizi-

nhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$  então existe um compacto  $K \subset X$  tal que  $\widehat{V} \cup K = \widehat{X}$  e então, por ser  $(\widehat{X} \setminus K) \cup K = \widehat{X}$ ,  $\widehat{X} \setminus K$  é uma vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$  tendo-se que  $\widehat{V}$  é vizinhança de todos os elementos de  $\widehat{X} \setminus K$  em  $\widehat{X}$  visto que, por hipótese,  $\widehat{V}$  é vizinhança de  $\infty$  e para cada  $a \neq \infty$  em  $\widehat{X} \setminus K$  o facto de  $\widehat{V}$  ser vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$  resulta de  $\widehat{V} \cap X$  ser uma vizinhança de  $a$  em  $X$ , por conter o aberto  $X \setminus K$  de  $X$  que contém  $a$  (reparar que o facto de  $X$  ser um espaço de Hausdorff implica que o compacto  $K$  é fechado em  $X$ ).

3) Se  $V \subset X$  é uma vizinhança de  $a \in X$  para a topologia original, então o facto de se ter  $V \cap X = V$  implica que  $V$  é também uma vizinhança de  $a$  em  $\widehat{X}$ , em particular  $V$  é também é uma vizinhança de  $a$  em  $X$  para a topologia induzida. Em particular  $X$  é vizinhança de cada  $a \in X$  para a topologia de  $\widehat{X}$ , o que mostra que  $X$  é um subconjunto aberto de  $\widehat{X}$ . Reciprocamente, se  $V \subset X$  é uma vizinhança de  $a \in X$  para a topologia induzida então existe uma vizinhança  $W$  de  $a$  para a topologia de  $\widehat{X}$  tal que  $V = W \cap X$  e isso implica que  $V$  é vizinhança de  $a$  para a topologia original. Ficou assim provado que a topologia induzida em  $X$  pela topologia de  $\widehat{X}$  é a topologia original de  $X$  e que  $X$  é aberto em  $\widehat{X}$ .

4) Sendo  $a \neq b$  em  $X$ , o facto de  $X$  ser um espaço de Hausdorff implica que existem vizinhanças  $V$  de  $a$  e  $V'$  de  $b$  em  $X$  tais que  $V \cap V' = \emptyset$  e então, como vimos na prova de 3),  $V$  e  $V'$  são também vizinhanças de  $a$  e  $b$  respetivamente relativamente a  $\widehat{X}$ . Por outro lado, sendo  $a \in X$ , o facto de  $X$  ser localmente compacto implica a existência de uma vizinhança compacta  $K$  de  $a$  em  $X$  e então, por ser  $(\widehat{X} \setminus K) \cup K = \widehat{X}$ , concluímos que  $\widehat{X} \setminus K$  é uma vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$  para a qual se tem  $K \cap (\widehat{X} \setminus K) = \emptyset$ . Ficou assim provado que  $\widehat{X}$  é um espaço de Hausdorff. Para provarmos que  $\widehat{X}$  é compacto, vamos utilizar a propriedade das coberturas referida em 1.6.36. Seja então  $(U_j)_{j \in J}$  uma família de abertos de  $\widehat{X}$  com união igual a  $\widehat{X}$ . Seja  $j_0 \in J$  tal que  $\infty \in U_{j_0}$ . Como  $U_{j_0}$  é uma vizinhança de  $\infty$ , podemos considerar um compacto  $K \subset X$  tal que  $U_{j_0} \cup K = \widehat{X}$ . O conjunto  $K$ , que, por  $X$  ser subespaço topológico de  $\widehat{X}$ , é também compacto em  $\widehat{X}$ , está contido na união dos abertos  $U_j$  pelo que, pela propriedade das coberturas, vai existir um número finito destes,  $U_{j_1}, \dots, U_{j_n}$  tais que

$$K \subset U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_n}$$

e tem-se então

$$\widehat{X} = U_{j_0} \cup U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_n}.$$

Concluímos assim que  $\widehat{X}$  é um espaço topológico compacto.

5) Se  $\infty$  for exterior a  $A$ , isto é, interior a  $\widehat{X} \setminus A$ , então  $\widehat{X} \setminus A$  é vizinhança de  $\infty$ , ou seja, existe um compacto  $K \subset X$  tal que  $(\widehat{X} \setminus A) \cup K = \widehat{X}$ , condição que implica que  $A \subset K$ . Reciprocamente, se  $A \subset K$ , com  $K \subset X$

compacto, vem  $(\widehat{X} \setminus A) \cup K = \widehat{X}$ , pelo que  $\widehat{X} \setminus A$  é uma vizinhança de  $\infty$  em  $\widehat{X}$  e portanto  $\infty$  é interior a  $\widehat{X} \setminus A$ , isto é,  $\infty$  é exterior a  $A$ .  $\square$

**1.6.50 (Compactificado de Alexandroff de um subespaço fechado)** Sejam  $X$  um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e  $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$  um compactificado de Alexandroff de  $X$ . Se  $Y \subset X$  é um subconjunto fechado então  $Y$  é também localmente compacto e  $\widehat{Y} = Y \cup \{\infty\}$ , com a topologia induzida pela de  $\widehat{X}$ , é um compactificado de Alexandroff de  $Y$ .

**Dem:** Já vimos em 1.6.45 que  $Y$  é localmente compacto. Pela transitividade das topologias induzidas, a topologia induzida em  $Y$  pela topologia induzida de  $\widehat{Y}$  é a topologia de  $Y$  induzida pela de  $X$ . Tendo em conta a unicidade na definição do compactificado de Alexandroff, resta-nos mostrar que  $\widehat{Y}$  é compacto em  $\widehat{X}$ , ou seja que é fechado, e isso resulta de  $\widehat{X} \setminus \widehat{Y} = X \setminus Y$  ser aberto em  $X$ , e portanto em  $\widehat{X}$ .  $\square$

**1.6.51 (Compactificado de Alexandroff da topologia discreta)** Seja  $I$  um conjunto sobre o qual se considera a topologia discreta. Tem-se então:

- 1) Um subconjunto  $A \subset I$  é compacto se, e só se, é finito.
- 2)  $I$  é um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto.
- 3) Sendo  $\widehat{I} = I \cup \{\infty\}$  o compactificado de Alexandroff de  $I$ , um conjunto  $\widehat{V} \subset \widehat{I}$  é uma vizinhança de  $\infty$  se, e só se,  $\widehat{V} = \widehat{I} \setminus K$  para alguma parte finita  $K$  de  $I$ .
- 4) O ponto  $\infty$  é aderente a  $I$  se, e só se,  $I$  é infinito.
- 5) Se  $J$  é outro conjunto, com o correspondente compactificado de Alexandroff  $\widehat{J} = J \cup \{\infty\}$  e se  $\varphi: J \rightarrow I$  é uma aplicação injetiva então tem-se  $\varphi(j) \rightarrow \infty$  em  $I$  quando  $j \rightarrow \infty$  em  $J$ .

**Dem:** Já sabemos que se  $A \subset I$  é finito então  $A$  é compacto (cf. 1.6.23). Reciprocamente, se  $A \subset I$  é compacto então como a família dos conjuntos  $\{i\}$ , com  $i \in A$ , constitui uma cobertura aberta de  $A$ , deduzimos de 1.6.36 a existência de  $K \subset A$  finito tal que  $A$  esteja contido na união dos  $\{i\}$  com  $i \in K$ , o que só é possível com  $K = A$ , e portanto  $A$  é finito. Já sabemos que a topologia discreta é de Hausdorff e o facto de  $I$  ser localmente compacto resulta de que, para cada  $i \in I$ , a classe formada pelo único conjunto  $\{i\}$ , que é compacto, constitui um sistema fundamental de vizinhanças de  $i$ . Se  $K \subset I$  é finito, portanto compacto, o facto e se ter  $\widehat{I} = (\widehat{I} \setminus K) \cup K$  implica que  $\widehat{I} \setminus K$  é vizinhança de  $+\infty$ . Reciprocamente, se  $\widehat{V}$  é vizinhança de  $\infty$ , então existe  $K' \subset I$  compacto, e portanto finito, tal que  $\widehat{V} \cup K' = \widehat{I}$ , o que implica que  $K = \widehat{I} \setminus \widehat{V} \subset K'$  é também finito, tendo-se então  $\widehat{V} = \widehat{I} \setminus K$ . A conclusão de 4) resulta diretamente da alínea c) de 1.6.49. Quanto a 5), dada uma vizinhança  $\widehat{V}$  de  $\infty$  em  $\widehat{I}$ , tem-se  $\widehat{V} = \widehat{I} \setminus K$  com  $K \subset I$  finito e então  $\varphi^{-1}(K) = \{j \in J \mid \varphi(j) \in K\}$  é finito e para cada  $j \in J$  na vizinhança  $\widehat{J} \setminus \varphi^{-1}(K)$  de  $\infty$  vem  $\varphi(j) \in \widehat{V}$ .  $\square$

**1.6.52 (Exemplo)** A topologia de  $\mathbb{N}$  induzida pela de  $\mathbb{R}$  (e portanto também pela de  $\overline{\mathbb{R}}$ ) é a topologia discreta e a topologia de  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  (aquela que é

utilizada na definição do limite das  $\mathbb{N}$ -sucessões) coincide com a topologia do compactificado de Alexandroff de  $\mathbb{N}$ .

**Dem:** O facto de a topologia de  $\mathbb{N}$  ser a discreta resulta do referido em 1.2.54 e o facto de a topologia de  $\overline{\mathbb{N}}$  ser a do compactificado de Alexandroff resulta da unicidade em 1.6.49, uma vez que  $\mathbb{N}$  tem a topologia induzida pela de  $\overline{\mathbb{N}}$  e que a topologia de  $\overline{\mathbb{N}}$  é de Hausdorff e compacta, já que  $\overline{\mathbb{R}}$  é compacto e  $\overline{\mathbb{N}} = \overline{\mathbb{Z}} \cap [1, +\infty]$  é fechado em  $\overline{\mathbb{R}}$  (cf. a alínea f) de 1.2.20).  $\square$

**1.6.53 (Compactificado de Alexandroff de um espaço de base contável)** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e de base contável. Um compactificado de Alexandroff  $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$  de  $X$  é então também um espaço de base contável.

**Dem:** Seja  $\mathcal{U}$  uma base contável de abertos de  $X$  e reparemos que, por  $X$  ser um subespaço aberto de  $\widehat{X}$ , os conjuntos em  $\mathcal{U}$  são também abertos de  $\widehat{X}$ .

Consideremos uma sucessão  $(U_n)_{n \geq 1}$  de abertos de  $X$  e uma sucessão  $(K_n)_{n \geq 1}$  de compactos de  $X$  nas condições de 1.6.48. Vamos verificar que a classe contável de abertos de  $\widehat{X}$  constituída pelos que pertencem a  $\mathcal{U}$  e pelos abertos  $\widehat{X} \setminus K_n$  constitui uma base de abertos de  $\widehat{X}$ , o que terminará a demonstração.

Consideremos então um aberto arbitrário  $W$  de  $\widehat{X}$  e  $x \in W$ . Se  $x \in X$  então considerando o aberto  $W \cap X$  de  $X$  vai existir  $U \in \mathcal{U}$  tal que

$$x \in U \subset W \cap X \subset W.$$

Se  $x = \infty$  então  $K = \widehat{X} \setminus W$  é um compacto de  $X$ ; uma vez que  $K$  está contido na união dos abertos  $U_n$ , a propriedade das coberturas em 1.6.36 garante que  $K$  está contido numa união finita de tais  $U_n$  e portanto, considerando o maior dos índices,  $K \subset U_n$ ; tem-se então que, para o correspondente compacto  $K_n$  tem-se

$$\infty \in \widehat{X} \setminus K_n \subset \widehat{X} \setminus U_n \subset \widehat{X} \setminus K = W. \quad \square$$

Como aplicação do compactificado de Alexandroff de um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto, enunciamos a propriedade a seguir que teremos ocasião de aplicar mais adiante.

**1.6.54** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e seja  $A \subset X$  um subconjunto compacto. Para cada aberto  $V$  de  $X$ , tal que  $A \subset V$ , existe então um aberto  $U$  e um compacto  $B$ , tais que

$$A \subset U \subset B \subset V. \quad ^{93}$$

<sup>93</sup>Este resultado também costuma ser enunciado dizendo-se que cada subconjunto compacto admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas. Ele é também válido, embora com uma demonstração diferente, sem a hipótese de o espaço  $X$  ser de Hausdorff

**Dem:** Seja  $\hat{X}$  o compactificado de Alexandroff de  $X$ . Uma vez que  $V$  é aberto em  $\hat{X}$ , vemos que  $\hat{X} \setminus V$  é fechado em  $\hat{X}$  e portanto um compacto que contém  $\infty$ . Aplicando 1.6.39, concluímos a existência de abertos  $U$  e  $W$  de  $\hat{X}$  tais que

$$(1) \quad A \subset U, \quad \hat{X} \setminus V \subset W, \quad U \cap W = \emptyset.$$

Tem-se então que  $\infty \in W$ , portanto  $\infty \notin U$  e  $U$  é aberto em  $X$ , e, sendo  $B = \hat{X} \setminus W$ , que é fechado em  $\hat{X}$ , portanto compacto, e está contido em  $X$ , vemos que  $U \subset B$  e  $B \subset V$ , como consequências da terceira e segunda asserção em (1), respetivamente.  $\square$

## Exercícios

**Ex 1.6.1 a)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $b \in Y$ . Dados sistemas fundamentais de vizinhanças  $\mathcal{B}_{x_0}$  de  $x_0$ , em  $X$ , e  $\mathcal{B}'_b$  de  $b$ , em  $Y$ , mostrar que  $b$  é um sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, quaisquer que sejam  $U \in \mathcal{B}_{x_0}$  e  $V \in \mathcal{B}'_b$ , existe  $x \in U \cap A$  tal que  $f(x) \in V$ .

**b)** Deduzir, em particular, que, no caso em que  $X$  e  $Y$  são espaços métricos,  $b$  é um sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, quaisquer que sejam  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ , existe  $x \in A$  tal que  $d(x_0, x) < \varepsilon$  e  $d(b, f(x)) < \delta$ .

**c)** Ainda no caso em que  $X$  e  $Y$  são espaços métricos, mostrar que  $b$  é um sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, qualquer que seja  $\delta > 0$ , existe  $x \in A$  tal que  $d(x_0, x) < \delta$  e  $d(b, f(x)) < \delta$  (ligeira variante da caracterização em b)).

**Ex 1.6.2** Sejam  $X$  um espaço topológico de Hausdorff e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos de  $X$  (portanto uma aplicação de  $\mathbb{N}$  para  $X$ ). Mostrar que, se  $b \in X$  é distinto de todos os termos  $x_n$  da sucessão, então  $b$  é sublimite da sucessão (quando  $n \rightarrow +\infty$ ) se, e só se,  $b$  é aderente ao conjunto  $\{x_n\}$  dos termos da sucessão.<sup>94</sup>

**Sugestão:** Utilizar a caracterização dos sublimites na alínea a) de 1.6.13, reparando que  $b$  não é aderente a nenhuma parte finita do conjunto dos seus termos.

**Ex 1.6.3 (O lim sup e o lim inf em  $\overline{\mathbb{R}}$  e os sistemas fundamentais de vizinhanças)**

Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $\mathcal{B}_{x_0}$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $x_0$  em  $X$ . Sendo  $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma aplicação, notemos, para cada  $U \in \mathcal{B}_{x_0}$ , tal como em 1.6.16,  $M_U$  e  $m_U$  o supremo e o ínfimo do conjunto não vazio dos  $f(x)$  com  $x \in A \cap U$ . Verificar que os sublimites máximo e mínimo  $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e  $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$  são respetivamente o ínfimo do conjunto dos  $M_U$  com

$U \in \mathcal{B}_{x_0}$  e o supremo do conjunto dos  $m_U$  com  $U \in \mathcal{B}_{x_0}$  (reparar que as caracteri-

---

(cf. o exercício 1.6.29 adiante) mas esta hipótese é verificada nas aplicações que teremos ocasião de encontrar.

<sup>94</sup>Repare-se que não afirmamos, de modo nenhum, que um resultado deste tipo seja válido por outros tipos de sublimites de funções, nem sequer para sucessões generalizadas mais gerais.

zações no resultado referido são as que correspondem ao sistema fundamental de vizinhanças de  $x_0$  constituído por todas as vizinhanças de  $x_0$ ).

**Ex 1.6.4 (O lim sup e o lim inf de sucessões generalizadas em  $\overline{\mathbb{R}}$ )** Seja  $J \neq \emptyset$  um conjunto dirigido, com a correspondente relação  $\succeq$  e seja  $(x_j)_{j \in J}$  uma sucessão generalizada de elementos de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Consideremos, para cada  $j \in J$ , o supremo  $M_j \in \overline{\mathbb{R}}$  e o ínfimo  $m_j \in \overline{\mathbb{R}}$  do conjunto dos termos  $x_{j'}$  com  $j' \succeq j$ .

**a)** Aplicando a conclusão do exercício 1.6.3 a um sistema fundamental de vizinhanças conveniente de  $+\infty$  em  $\overline{J} = J \cup \{+\infty\}$ , deduzir que  $\limsup x_j$  é o ínfimo dos  $M_j$  e que  $\liminf x_j$  é o supremo dos  $m_j$ .

**b)** Verificar que a sucessão generalizada  $(M_j)_{j \in J}$  é decrescente e que a sucessão generalizada  $(m_j)_{j \in J}$  é crescente (cf. o exercício 1.2.16) e concluir que se tem mesmo

$$M_j \rightarrow \limsup x_j, \quad m_j \rightarrow \liminf x_j.$$

**Ex 1.6.5** Considerar o espaço  $\mathbb{R}^2$  com a métrica do máximo  $d_\infty$  (cf. 1.1.8) e sejam  $A$  e  $B$  os subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$A = \{0\} \times \mathbb{R}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

Verificar que  $A$  e  $B$  são conjuntos fechados com  $A \cap B = \emptyset$  e que, apesar disso,  $d(A, B) = 0$ .

**Ex 1.6.6 (O ponto mais próximo)** Sejam  $Y$  um espaço métrico e  $B \subset Y$  um subconjunto compacto não vazio. Dado  $y_0 \in Y$ , mostrar que existe  $b \in B$  tal que

$$d(y_0, B) = d(y_0, b)$$

(por outras palavras,  $b$  é o ponto de  $B$  mais próximo de  $y_0$ ). **Sugestão:** A aplicação contínua  $d_{y_0}: Y \rightarrow \mathbb{R}$  deve atingir um mínimo sobre  $B$ .

**Ex 1.6.7 (O diâmetro dum compacto)** Sejam  $Y$  um espaço métrico e  $B \subset Y$  um subconjunto compacto não vazio. Mostrar que existem  $b, b' \in B$  tais que  $\text{diam}(B) = d(b, b')$  (cf. 1.1.16), isto é tal que  $d(y, y') \leq d(b, b')$  quaisquer que sejam  $y, y' \in B$ . **Sugestão:** Lembrar que a distância  $d$  é contínua como aplicação  $Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  e considerar o máximo desta aplicação no compacto  $B \times B$ .

**Ex 1.6.8** Mostrar que a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \geq 1}$  de elementos de  $\mathbb{R}$ , definida por

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 - \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

não é convergente e determinar quais são os seus sublimites.

**Ex 1.6.9** Determinar quais os sublimites, quando  $x \rightarrow 0$  da função  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{sen}(\frac{1}{x})$ .

**Ex 1.6.10** Mostrar que a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \geq 1}$  de números reais, definida por

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \\ n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

tem 0 como único sublimite no espaço topológico  $\mathbb{R}$  mas não tem limite 0.

**Ex 1.6.11** Seja  $Y$  um espaço métrico compacto. Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $X'$  e  $f: X' \rightarrow Y$  uma aplicação. Sendo  $B \subset Y$  o conjunto dos sublimites de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , que sabemos ser não vazio, verificar que se tem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} d(f(x), B) = 0.$$

**Sugestão:** Supondo que a conclusão não se verificava, reparar que se pode considerar  $\delta > 0$  tal que, sendo  $A = \{x \in X' \mid d(f(x), B) \geq \delta\}$ ,  $x_0$  seja aderente a  $A$  e chegar a um absurdo considerando um sublimite  $b$  da restrição de  $f$  a  $A$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Ex 1.6.12** Mostrar que o subconjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^4 + 4y^6 \leq 23\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  é compacto.

**Ex 1.6.13 (O gráfico fechado)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, com  $Y$  compacto, e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação cujo gráfico

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

seja fechado em  $X \times Y$ . Mostrar que  $f: X \rightarrow Y$  é contínua.<sup>95</sup> **Sugestão:** Utilizar 1.6.20, mostrando que, dado  $x_0 \in X$ , se  $b \in Y$  for sublimite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , então  $(x_0, b)$  é aderente a  $G_f$  e portanto  $b = f(x_0)$ .

**Ex 1.6.14** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff compacto. Mostrar que não existe sobre  $X$  nenhuma outra topologia compacta que seja mais fina, nem nenhuma outra topologia de Hausdorff que seja menos fina. **Sugestão:** Utilizar 1.6.29 e ter em conta 1.4.11.

**Ex 1.6.15** Sendo  $S \subset \mathbb{R}^2$ ,  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , mostrar que tem lugar uma aplicação bijectiva e contínua  $f: [0, 2\pi[ \rightarrow S$ , definida por  $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ , a qual não é um homeomorfismo (comparar com 1.6.29).

**Ex 1.6.16 a)** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto,  $Y$  um espaço topológico de Hausdorff e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua e sobrejectiva. Mostrar que, se  $Z$  é um espaço topológico e se  $g: Y \rightarrow Z$  é uma aplicação, então  $g$  é contínua num ponto  $y_0 \in Y$  se, e só se, qualquer que seja  $x_0 \in X$ , tal que  $f(x_0) = y_0$ , a aplicação  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é contínua em  $x_0$ .

**Sugestão generosa:** Raciocinar por absurdo, supondo que  $g$  não é contínua em  $y_0$ . Então: **1)** Tendo em conta 1.6.9, considerar  $B \subset Y$  com  $y_0$  aderente a  $B$  tal que a restrição  $g|_B$  não tenha  $g(y_0)$  como sublimite quando  $y \rightarrow y_0$ . **2)** Sendo  $A = f^{-1}(B)$ , considerar uma aplicação  $\varphi: B \rightarrow A$  tal que  $f(\varphi(y)) = y$  para cada  $y \in B$  e considerar um sublimite  $x_0 \in X$  de  $\varphi(y)$  quando  $y \rightarrow y_0$ , reparando que  $x_0$  é necessariamente aderente a  $A$ . **3)** Deduzir que  $y = f(\varphi(y))$  tem sublimite  $f(x_0)$  quando  $y \rightarrow y_0$  e, portanto, que  $y_0 = f(x_0)$ . **4)** Da continuidade de  $g \circ f$  no ponto  $x_0$  deduzir que  $g(f(x))$  tem limite  $g(y_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e, por ser  $f(A) \subset B$ , concluir que a restrição  $g|_B$  tem sublimite  $g(y_0)$  quando  $y \rightarrow y_0$ , contradizendo 1).

**b)** Mostrar que a conclusão de a) conduz a uma demonstração alternativa de 1.6.29.

**Ex 1.6.17 (O que faltava ao exercício 1.2.26 e um sublimite de uma  $\mathbb{N}$ -sucessão que não é sublimite estrito)** Este exercício constitui uma sequência do exercício 1.2.26,

<sup>95</sup>Comparar com a situação examinada no exercício 1.5.9.

do qual retoma, em particular, as notações. Consideremos a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de elementos do espaço topológico  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  definida no exercício 1.2.26, cujo conjunto dos termos notamos  $\hat{\mathbb{N}}$ .

- a) Utilizar a conclusão da alínea a) do exercício referido para mostrar que nenhum elemento de  $\hat{\mathbb{N}}$  é sublimite daquela  $\mathbb{N}$ -sucessão.
- b) Utilizar a conclusão da alínea b) do exercício referido para mostrar que aquela  $\mathbb{N}$ -sucessão não admite nenhum sublimite estrito.
- c) Utilizar o corolário do teorema de Tichonoff em 1.6.35 para garantir que  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  é compacto e portanto aquela sucessão tem algum sublimite que, pelo que se viu em a), não pode pertencer a  $\hat{\mathbb{N}}$ . Deduzir daqui que o conjunto  $\hat{\mathbb{N}}$ , apesar de sequencialmente fechado, não é fechado.

**Ex 1.6.18 (Um espaço topológico compacto com origem disfarçada)** Seja  $X$  um conjunto e notemos  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto de todas as partes de  $X$ . Dado  $A \in \mathcal{P}(X)$  e dois conjuntos finitos  $B \subset A$  e  $B' \subset X \setminus A$ , cada um dos quais pode ser vazio, notemos

$$\mathcal{V}_{B, B'}(A) = \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid B \subset Y \text{ e } B' \subset X \setminus Y\}.$$

- a) Verificar que se pode definir uma topologia em  $\mathcal{P}(X)$  pelo condição de um conjunto de partes de  $X$  ser vizinhança de  $A \in \mathcal{P}(X)$  se, e só se, tiver algum dos conjuntos  $\mathcal{V}_{B, B'}(A)$ .
- b) Verificar que  $\mathcal{P}(X)$ , com a topologia definida em a), é um espaço de Hausdorff compacto.
- c) Verificar que a topologia de  $\mathcal{P}(X)$  é metrizável se, e só se, o conjunto  $X$  for contável.
- d) Sejam  $Z$  um espaço topológico,  $C \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e  $\varphi: C \rightarrow \mathcal{P}(X)$  uma aplicação. Verificar que se tem  $\varphi(z) \rightarrow A \in \mathcal{P}(X)$  quando  $z \rightarrow z_0$  se, e só se, para cada  $x \in A$  existe uma vizinhança  $W$  de  $z_0$  em  $Z$  tal que  $x \in \varphi(z)$  para todo o  $z \in W \cap C$  e para cada  $x \notin A$  existe uma vizinhança  $W$  de  $z_0$  em  $Z$  tal que  $x \notin \varphi(z)$  para todo o  $z \in W \cap C$ .

**Sugestão:** Reparar que existe uma bijeção de  $\mathcal{P}(X)$  sobre o conjunto  $Ap(X, \{0, 1\})$  de todas as aplicações  $X \rightarrow \{0, 1\}$ , que a cada conjunto associa a sua função indicatriz, e que a topologia que estamos a definir não é mais do que a que torna esta bijeção um homeomorfismo, quando se considera em  $Ap(X, \{0, 1\})$  a topologia da convergência simples. Ter então em conta o corolário do teorema de Tichonoff, as conclusões de 1.5.19 e do exercício 1.2.25 e a caracterização em 1.2.82 dos limites para a topologia da convergência simples.

**Ex 1.6.19** Seja  $X$  um conjunto, sobre o qual se considera a topologia caótica (cf. 1.2.4). Mostrar que qualquer subconjunto  $A$  de  $X$  é compacto, apesar de, com as exceções de  $\{0\}$  e  $X$ , não ser fechado.

**Ex 1.6.20** Considerar em  $\mathbb{R}$  a topologia inferior, definida no exercício 1.2.6. Mostrar que um subconjunto não vazio  $A \subset \mathbb{R}$  é compacto, para esta topologia se, e só se, ele admite um elemento mínimo  $a$ . **Sugestão:** Reparar que se existir mínimo  $a$  qualquer função com valores em  $A$  tem  $a$  como limite e que, no caso de o mínimo não existir existe uma cobertura aberta de  $A$  sem subcobertura finita.

**Ex 1.6.21** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua e seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in f([x, x + 1])\}.$$

Mostrar que  $A$  é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^2$ . **Sugestão:** Reparar que se pode



considerar uma aplicação  $g: A \rightarrow [0, 1]$  tal que, para cada  $(x, y) \in A$ , venha  $y = f(x + g(x, y))$  e, supondo  $(a, b)$  é aderente a  $A$ , considerar  $t \in [0, 1]$  sublimite desta aplicação quando  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  e utilizar a caracterização dos sublimites na alínea b) de 1.6.1 para verificar que  $b = f(a + t)$ .

**Ex 1.6.22** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, o segundo dos quais compacto. Mostrar que a primeira projecção  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  é uma aplicação fechada, isto é, que, para cada subconjunto fechado  $A$  de  $X \times Y$ ,  $\pi_1(A)$  é fechado em  $X$  (comparar com a alínea c) do exercício 1.5.13). **Sugestão:** Considerar uma aplicação  $g: \pi_1(A) \rightarrow Y$  tal que, para cada  $x \in \pi_1(A)$  se tenha  $(x, g(x)) \in A$ . Se  $x_0$  for aderente a  $\pi_1(A)$  considerar um sublimite  $y_0 \in Y$  de  $g(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e verificar que  $(x_0, y_0) \in A$ .

**Ex 1.6.23** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $(x_n)_{n \geq 1}$  uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos de  $X$ , convergente para um ponto  $a \in X$ . Mostrar que  $\{a\} \cup \{x_n\}_{n \geq 1}$  é um subconjunto compacto de  $X$ . **Sugestão:** Utilizar a propriedade das coberturas. Alternativamente, verificar que o conjunto referido é a imagem direta do compacto  $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  por uma aplicação contínua.

**Ex 1.6.24** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço topológico de Hausdorff e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Seja  $A \subset X$  um subconjunto compacto tal que  $f$  seja contínua nos pontos de  $A$ , que  $f|_A: A \rightarrow Y$  seja injectiva e que, para cada  $x \in A$ , exista um aberto  $U$  de  $X$ , com  $x \in U$ , tal que  $f|_U: U \rightarrow Y$  seja injectiva (isto é,  $f$  seja *localmente injectiva* nos pontos de  $A$ ). Mostrar que existe um aberto  $U$  de  $X$ , com  $A \subset U$ , tal que  $f|_U: U \rightarrow Y$  seja injectiva.

**Sugestão:** Começar por fixar  $x_0 \in A$  e verificar que se pode considerar, para cada  $x \in A$ , abertos  $U'_x$  e  $U''_x$  de  $X$ , com  $x_0 \in U'_x$  e  $x \in U''_x$ , tais que, sempre que  $x' \in U'_x$ ,  $x'' \in U''_x$  e  $x' \neq x''$ , se tenha  $f(x') \neq f(x'')$ . Utilizando a propriedade das coberturas, deduzir a existência, para cada  $x_0 \in A$ , de abertos  $U_{x_0}$  e  $V_{x_0}$  de  $X$ , com  $x_0 \in U_{x_0}$  e  $A \subset V_{x_0}$ , tais que, sempre que  $x' \in U_{x_0}$ ,  $x'' \in V_{x_0}$  e  $x' \neq x''$ , se tenha  $f(x') \neq f(x'')$ . Aplicar então de novo a propriedade das coberturas aos abertos  $U_{x_0}$ , com  $x_0$  a variar em  $A$ .

**Ex 1.6.25** Seja  $X$  um espaço métrico com a propriedade de todo o subconjunto fechado e limitado ser compacto. Mostrar que  $X$  é localmente compacto.

**Ex 1.6.26** Mostrar que todo o espaço topológico de Hausdorff localmente compacto é regular (cf. 1.4.30).

**Ex 1.6.27** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e seja  $Y \subset X$  um subconjunto, sobre o qual se considera a topologia induzida. Mostrar que  $Y$  é localmente compacto se, e só se,  $Y$  é um subconjunto localmente fechado de  $X$  (cf. o exercício 1.3.16). **Sugestão:** Para uma das implicações utilizar a definição de conjunto localmente fechado e 1.6.45 e para a outra a respectiva caracterização dada na alínea d) do exercício referido.

**Ex 1.6.28** Sejam  $X$  um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$  um compactificado de Alexandroff de  $X$ . Seja  $Y \subset X$  um subconjunto localmente compacto mas não fechado. Verificar que  $Y \cup \{\infty\}$  não é compacto em  $\hat{X}$  e, consequentemente, quando munido da topologia induzida pela de  $\hat{X}$  não é um compactificado de Alexandroff de  $Y$  (comparar com 1.6.50).

**Ex 1.6.29** Seja  $X$  um espaço topológico localmente compacto, não necessariamente de Hausdorff. Mostrar que, dados um compacto  $A \subset X$  e um aberto  $V \subset X$ , com

$A \subset V$ , existe um aberto  $U \subset X$  e um compacto  $B \subset X$  tais que

$$A \subset U \subset B \subset V.$$

Reparar que esta é a mesma conclusão a que se chegou em 1.6.54, mas agora sem estarmos a exigir que  $X$  seja um espaço de Hausdorff.

**Sugestão:** Considerar, para cada  $x \in A$ , uma vizinhança compacta  $B_x$  de  $x$  contida em  $V$ , tomar para  $U$  uma união finita de conjuntos  $\text{int}(B_x)$  que contenha  $A$  e para  $B$  a união dos correspondentes conjuntos  $B_x$ .

**Ex 1.6.30** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto e  $Y$  um espaço métrico e considere-se no conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$ , das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ , a topologia da convergência uniforme (isto é, a topologia induzida pela topologia da convergência uniforme de  $Ap(X, Y)$ , definida em 1.2.76). Mostrar que, se  $U$  é um aberto de  $Y$ , então  $\mathcal{C}(X, U)$  é aberto em  $\mathcal{C}(X, Y)$  e verificar que esta conclusão não seria válida se não tivéssemos exigido a compacidade de  $X$ . **Sugestão:** Afastando já o caso trivial em que  $U = Y$ , considerar, para cada  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ , a aplicação contínua de  $X$  em  $\mathbb{R}$ , que a  $x$  associa  $d(f(x), Y \setminus U)$  (cf. 1.4.22).

**Ex 1.6.31** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto e não vazio e  $Y$  um espaço métrico e considere-se no conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$ , das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ , a topologia da convergência uniforme (isto é, a topologia induzida pela topologia da convergência uniforme de  $Ap(X, Y)$ , definida em 1.2.76). Sejam  $Z$  um espaço topológico e  $\varphi: Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$  uma aplicação e notemos  $\widehat{\varphi}: Z \times X \rightarrow Y$  a aplicação definida por  $\widehat{\varphi}(z, x) = \varphi(z)(x)$ . Mostrar que a aplicação  $\varphi$  é contínua num ponto  $z_0 \in Z$  se, e só se, para cada  $a \in X$ , a aplicação  $\widehat{\varphi}$  é contínua no ponto  $(z_0, a)$ .

**Sugestão:** Para uma das implicações, atender a que, pelo exercício 1.5.12, é contínua a aplicação de avaliação  $\Phi: \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$  definida por  $\Phi(f, x) = f(x)$ . Para a outra implicação, ter em conta o tipo de continuidade uniforme em 1.6.40.

**Ex 1.6.32 (A topologia compacta-aberta)** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto e  $Y$  um espaço topológico e consideremos o conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ . Para cada compacto  $K \subset X$  e cada aberto  $V \subset Y$  notemos  $\mathcal{V}_{K, V}$  o subconjunto de  $\mathcal{C}(X, Y)$  constituídos pelos  $f$  tais que  $f(K) \subset V$ .

**a)** Verificar que se pode definir uma topologia em  $\mathcal{C}(X, Y)$ , a que se dá o nome de *topologia compacta-aberta*, pela condição de as vizinhanças de  $f_0 \in \mathcal{C}(X, Y)$  serem os conjuntos que contêm uma interseção finita do tipo

$$\mathcal{V}_{K_1, V_1} \cap \mathcal{V}_{K_2, V_2} \cap \cdots \cap \mathcal{V}_{K_n, V_n}$$

com os  $K_j$  compactos de  $X$ , os  $V_j$  abertos de  $Y$  e  $f_0 \in \mathcal{V}_{K_j, V_j}$  para cada  $1 \leq j \leq n$ .

**b)** No caso em que o espaço  $Y$  é de Hausdorff verificar que  $\mathcal{C}(X, Y)$ , com a topologia compacta aberta, é também um espaço de Hausdorff. **Sugestão:** Se  $f_0(a) \neq f_1(a)$  considerar vizinhanças de  $f_0$  e de  $f_1$  dos tipos  $\mathcal{V}_{\{a\}, V_0}$  e  $\mathcal{V}_{\{a\}, V_1}$ , com abertos  $V_0$  e  $V_1$  convenientes.

**c)** Verificar que é contínua a aplicação de avaliação  $\xi: \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$  definida por  $\xi(f, x) = f(x)$ . **Sugestão:** Para verificar a continuidade de  $\xi$  em  $(f_0, a)$  considerar para cada aberto  $V$  de  $Y$  contendo  $f_0(a)$  uma vizinhança compacta  $K$  de  $a$  em  $X$  tal que  $f_0(K) \subset V$  e, a partir desta, a correspondente vizinhança  $\mathcal{V}_{K, V}$  de  $f_0$ .

**d)** Sejam  $Z$  um espaço topológico e  $\varphi: Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$  uma aplicação e notemos  $\widehat{\varphi}: Z \times X \rightarrow Y$  a aplicação definida por  $\widehat{\varphi}(z, x) = \varphi(z)(x)$ . Mostrar que a aplicação  $\varphi$  é contínua num ponto  $z_0 \in Z$  se, e só se, para cada  $a \in X$ , a aplicação  $\widehat{\varphi}$  é contínua

no ponto  $(z_0, a)$ .<sup>96</sup> **Sugestão:** Para uma das implicações atender à continuidade da aplicação de avaliação estabelecida em c). Supondo  $\hat{\varphi}$  contínua em cada  $(z_0, a)$  com  $a \in X$ , começar por considerar vizinhanças particulares de  $f_0 = \alpha(z_0)$  do tipo  $\mathcal{V}_{K,V}$  com  $f_0(K) \subset V$ ,  $K$  compacto de  $X$  e  $V$  aberto de  $Y$ ; usando a propriedade das coberturas do compacto  $K$  considerar consideramos abertos  $U_1, \dots, U_n$  de  $X$  cuja união contenha  $K$  e vizinhanças  $W_1, \dots, W_n$  de  $z_0$  em  $Z$  tais que para cada  $1 \leq j \leq n$  se tenha  $\hat{\varphi}(W_j \times U_j) \subset V$  e reparar que para a vizinhança  $W = W_1 \cap \dots \cap W_n$  de  $z_0$ , tem-se  $\varphi(W) \subset \mathcal{V}_{K,V}$ .

e) Suponhamos agora que  $Y$  é um espaço métrico e que  $X$  é compacto e localmente compacto<sup>97</sup>, de modo que nos possamos colocar simultaneamente no contexto deste exercício e no do exercício 1.6.31. Verificar que a topologia compacta-aberta de  $\mathcal{C}(X, Y)$  coincide com a topologia da convergência uniforme deste espaço.

**Sugestão:** Não precisamos utilizar a definição explícita destas topologias. A ideia mais simples é partir da conclusão de d) e da do exercício 1.6.31 para mostrar que a aplicação identidade de  $\mathcal{C}(X, Y)$  é contínua de cada uma das topologias para a outra.

**Ex 1.6.33 (Filtros e ultrafiltros)** Seja  $X$  um conjunto. Diz-se que uma classe  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$  é um *filtro* de  $X$  se se verificam as condições:

**F1)** Se  $A \in \mathcal{F}$  e  $A \subset A' \subset X$  então  $A' \in \mathcal{F}$ ;

**F2)**  $X \in \mathcal{F}$ ;

**F3)** Se  $A \in \mathcal{F}$  e  $A' \in \mathcal{F}$  então  $A \cap A' \in \mathcal{F}$  (condição que arrasta que, mais geralmente, toda a intersecção finita de conjuntos em  $\mathcal{F}$  pertence a  $\mathcal{F}$ ).

**a) (Filtro impróprio e filtros próprios)** Reparar que o conjunto  $\mathcal{P}(X)$  de todos os subconjuntos de  $X$  é um filtro, a que se dá o nome de *filtro impróprio*. Chamam-se *filtros próprios* de  $X$  todos os filtros de  $X$  diferentes do filtro impróprio. Mostrar que um filtro  $\mathcal{F}$  de  $X$  é próprio se, e só se,  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .

**b) (Filtros principais)** Verificar que, se  $A \subset X$ , então a classe  $\mathcal{F}_A$  de todos os subconjuntos de  $X$  que contêm  $A$  é um filtro, filtro que é próprio se, e só se,  $A \neq \emptyset$  (aos filtros deste tipo dá-se o nome de *filtros principais*). Em particular, a classe  $\mathcal{F}_X = \{X\}$  é um filtro.

Verificar que no caso em que  $X$  é finito qualquer filtro  $\mathcal{F}$  em  $X$  é principal.

**Sugestão:** Considerar a intersecção de todos os conjuntos pertencentes a  $\mathcal{F}$ .

**c) (Filtro de Fréchet)** Suponhamos que  $X$  é um conjunto infinito. Verificar que a classe  $\hat{\mathcal{F}}$  dos conjuntos  $A \subset X$  tal que  $X \setminus A$  é um conjunto finito é um filtro próprio, a que se dá o nome de *filtro de Fréchet* de  $X$ . Verificar que  $\hat{\mathcal{F}}$  não é principal nem está contido em nenhum filtro próprio principal.

**d)** Verificar que se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $X$ , com os correspondentes filtros principais  $\mathcal{F}_A$  e  $\mathcal{F}_B$ , então tem-se  $A \subset B$  se, e só se,  $\mathcal{F}_A \supset \mathcal{F}_B$ .<sup>98</sup> Em particular, tem-se  $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_B$  se, e só se,  $A = B$ .

**e)** Se  $X$  é um espaço topológico e  $a \in X$  verificar que a classe  $\mathcal{V}_a$  de todas as vizinhanças de  $a$  é um filtro próprio, que está contido no filtro principal  $\mathcal{F}_{\{a\}}$ . Em que situação é que se tem  $\mathcal{V}_a = \mathcal{F}_{\{a\}}$ ?

**f)** Verificar que se  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são dois filtros de  $X$  então  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  é também um filtro de  $X$ ,

<sup>96</sup>Comparar com a conclusão no exercício 1.6.31 num contexto diferente.

<sup>97</sup>O que acontece, por exemplo, no caso em que  $X$  é compacto e de Hausdorff, como se verificou em 1.6.43.

<sup>98</sup>Reparar na troca na relação de ordem quando se passa dos subconjuntos para os correspondentes filtros principais, fenómeno de que encontraremos mais exemplos nas alíneas e) e f) a seguir.

naturalmente “o maior” filtro de  $X$  que está contido em  $\mathcal{F}$  e em  $\mathcal{G}$ , explicando qual o significado da expressão entre aspas. Verificar que se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $X$  então, para os correspondentes filtros principais,

$$\mathcal{F}_A \cap \mathcal{F}_B = \mathcal{F}_{A \cup B}.$$

**g)** Verificar que se  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são dois filtros de  $X$  então, embora  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  possa não ser um filtro de  $X$  (encontrar um contraexemplo), existe “o menor” filtro de  $X$  que contém  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  e que este filtro, que notaremos  $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ , é constituído pelos subconjuntos de  $X$  que contém alguma interseção  $A \cap B$  com  $A \in \mathcal{F}$  e  $B \in \mathcal{G}$ . Verificar que se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $X$  então, para os correspondentes filtros principais,

$$\mathcal{F}_A \vee \mathcal{F}_B = \mathcal{F}_{A \cap B}.$$

Verificar ainda que, se  $A \subset X$  e  $\widehat{\mathcal{F}}$  é o filtro de Fréchet, então o filtro  $\mathcal{F}_A \vee \widehat{\mathcal{F}}$  é próprio se, e só se, o conjunto  $A$  for infinito.

**h) (Restrição dum filtro e pontos aderentes)** Sejam  $X$  um conjunto,  $\mathcal{F}$  um filtro de  $X$  e  $X' \subset X$ . Verificar que a classe das intersecções  $X' \cap A$  com  $A \in \mathcal{F}$  é um filtro de  $A$  (notamo-lo  $\mathcal{F}_{X'}$  e dizemos que é o *filtro restrição* de  $\mathcal{F}$  a  $X'$ ).

Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$  e  $x_0 \in X$  e consideremos o filtro das vizinhanças  $\mathcal{V}_{x_0}$  e o filtro principal  $\mathcal{F}_{X'}$ . Verificar que  $x_0$  é aderente a  $X'$  se, e só se, o filtro restrição  $\mathcal{V}_{x_0/X'}$  de  $X'$  for próprio, e se, e só se, o filtro  $\mathcal{V}_{x_0} \vee \mathcal{F}_{X'}$  de  $X$  for próprio.

**i) (Limites de filtros em espaços topológicos)** Se  $X$  é um espaço topológico e  $a \in X$  diz-se que um filtro  $\mathcal{F}$  de  $X$  tem  $a$  como *limite* se  $\mathcal{F}$  contém o filtro das vizinhanças  $\mathcal{V}_a$ . Por exemplo o filtro impróprio tem qualquer elemento de  $X$  como limite e, de acordo com o que se verificou em e), o filtro principal  $\mathcal{F}_{\{a\}}$  tem  $a$  como limite. Verificar que o espaço topológico  $X$  é de Hausdorff se, e só se,  $\mathcal{V}_a \vee \mathcal{V}_b$  é o filtro impróprio sempre que  $a \neq b$  e portanto que  $X$  é de Hausdorff se, e só se, nenhum filtro próprio admite mais que um limite (comparar com a propriedade no exercício 1.2.18 no contexto dos limites de sucessões generalizadas).

**j) (Imagem direta de um filtro, limites de aplicações e limites de filtros)** Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos,  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $\mathcal{F}$  um filtro sobre  $X$ . Mostrar que a classe  $f(\mathcal{F})$  dos subconjuntos de  $Y$  que contém algum conjunto  $f(A)$  com  $A \in \mathcal{F}$  é um filtro de  $Y$ , a que se dá o nome de *imagem direta* de  $\mathcal{F}$  por meio de  $f$ . Verificar que  $f(\mathcal{F})$  é o filtro impróprio se, e só se,  $\mathcal{F}$  é o filtro impróprio.

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $X' \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $X'$  e  $f: X' \rightarrow Y$  uma aplicação. Mostrar que se pode considerar o filtro próprio  $f(\mathcal{V}_{x_0/X'})$  de  $Y$  (constituído assim pelos subconjuntos de  $Y$  que contém algum conjunto do tipo  $f(X' \cap A)$  com  $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ ) e que um elemento  $b \in Y$  é limite deste filtro se, e só se, for limite da função  $f$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**k) (Sublimites de filtros em espaços topológicos)** Se  $X$  é um espaço topológico e  $a \in X$  diz-se que um filtro  $\mathcal{F}$  de  $X$  tem  $a$  como *sublimite* se  $\mathcal{F} \vee \mathcal{V}_a$  for um filtro próprio. Verificar que qualquer das condições seguintes é equivalente ao facto de  $a$  ser um sublimite do filtro  $\mathcal{F}$ : **k<sub>1</sub>**) Para cada  $A \in \mathcal{F}$  tem-se  $a$  aderente a  $A$ ; **k<sub>2</sub>**) Existe um filtro próprio  $\mathcal{F}'$  de  $X$  admitindo  $a$  como limite e tal que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ .

Reparar que se  $\mathcal{F}$  é um filtro próprio de  $X$  todo o limite de  $\mathcal{F}$  é também sublimite de  $\mathcal{F}$  (de facto, o único sublimite no caso em que o espaço topológico  $X$  é de Hausdorff) mas que o filtro impróprio não tem sublimite, apesar de ter todos os pontos de  $X$  como limites.

**l) (Sublimites de aplicações e sublimites de filtros)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços

topológicos,  $X' \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $X'$  e  $f: X' \rightarrow Y$  uma aplicação e consideremos o filtro associado  $f(\mathcal{V}_{x_0/X'})$  (cf. a alínea j)). Mostrar que um elemento  $b \in Y$  é sublimite de  $f$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, for sublimite do filtro próprio  $f(\mathcal{V}_{x_0/X'})$ . **Sugestão:** Lembrar  $k_2$ ) e a caracterização dos sublimites em 1.6.13.

**m) (Compacidade e filtros)** Verificar que um espaço topológico  $Y$  é compacto se, e só se, todo o filtro próprio  $\mathcal{G}$  de  $Y$  tiver algum sublimite. **Sugestão:** Para uma das implicações ter em conta a conclusão de  $\ell$ ). Para a outra reparar que se  $\mathcal{G}$  fosse um filtro próprio sem sublimite então a família dos abertos  $X \setminus \text{ad}(A)$  com  $A \in \mathcal{G}$  teria união  $X$  e não admitiria subcobertura finita, por ser

$$(X \setminus \text{ad}(A_1)) \cup \dots \cup (X \setminus \text{ad}(A_n)) \subset X \setminus (A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

**n) (Ultrafiltros)** Diz-se que um filtro  $\mathcal{F}$  em  $X$  é um *ultrafiltro* se  $\mathcal{F}$  é um filtro próprio de  $X$  que não está contido estritamente em nenhum filtro próprio de  $X$  (por outras palavras, se for um maximal da classe dos filtros próprios de  $X$ ). Mostrar que um filtro próprio  $\mathcal{F}$  é um ultrafiltro se, e só se, para cada  $B \subset X$  tem-se  $B \in \mathcal{F}$  ou  $X \setminus B \in \mathcal{F}$ . **Sugestão:** Se existir  $B \subset X$  com  $B \notin \mathcal{F}$  e  $X \setminus B \notin \mathcal{F}$  considerar o filtro principal  $\mathcal{F}_B$  e mostrar que o filtro  $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_B$  é próprio e contém estritamente  $\mathcal{F}$ . Se  $\mathcal{F}$  estiver contido estritamente num filtro próprio  $\mathcal{F}'$  então, sendo  $B \in \mathcal{F}'$  com  $B \notin \mathcal{F}$  tem-se também  $X \setminus B \notin \mathcal{F}$ .

Deduzir que se  $\mathcal{F}$  é um ultrafiltro em  $X$  e  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}$  então  $A_j \in \mathcal{F}$  para algum  $1 \leq j \leq n$ . **Sugestão:** Reparar que

$$(X \setminus A_1) \cap \dots \cap (X \setminus A_n) = X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

não pode pertencer a  $\mathcal{F}$  por termos um filtro próprio.

**o) (Ultrafiltros principais)** Verificar que se  $A \subset X$  o filtro principal  $\mathcal{F}_A$  é um ultrafiltro se, e só se,  $A$  for um conjunto com um único elemento. Os ultrafiltros principais são assim os da forma  $\mathcal{F}_{\{a\}}$  com  $a \in X$ .

**p) (Zorn e a existência de ultrafiltros não principais)** O que propomos nesta alínea pressupõe o conhecimento do teorema de Zorn da Teoria dos Conjuntos, que já foi utilizado para a demonstração do teorema de Tichonoff em 1.6.34, cujo enunciado foi referido nas observações que antecederam esse resultado.

Verificar que, se  $\mathcal{F}$  é um filtro próprio de  $X$ , então existe um ultrafiltro  $\mathcal{F}'$  que contém  $\mathcal{F}$ . **Sugestão:** Aplicar o teorema de Zorn à classe de todos os filtros próprios que contém  $\mathcal{F}$ , ordenada pela relação de inclusão  $\supset$ , reparando que, dada uma classe não vazia de alguns desses filtros próprios onde a inclusão constitua uma ordem total, a união dessa classe é ainda um filtro próprio, por não conter  $\emptyset$ .

No caso em que  $X$  é infinito, aplicar a conclusão anterior partindo do filtro de Fréchet de  $X$  para concluir a existência de um ultrafiltro contendo aquele, necessariamente não principal.

**q) (Compacidade e ultrafiltros)** Verificar que se  $\mathcal{F}$  é um ultrafiltro no espaço topológico  $X$  então os sublimites de  $\mathcal{F}$  coincidem com os respetivos limites. Concluir que um espaço topológico  $X$  é compacto se, e só se, todo o ultrafiltro de  $X$  tiver limite.

**r) (Limites, sublimites e ultrafiltros)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $a \in X$  e  $\mathcal{F}$  um filtro de  $X$ . Mostrar que  $\mathcal{F}$  tem sublimite  $a$  se, e só se, existe um ultrafiltro  $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$  com limite  $a$  e que  $\mathcal{F}$  tem limite  $a$  se, e só se, qualquer ultrafiltro  $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$  tem limite  $a$ . **Sugestão:** Se  $\mathcal{F}$  não tem limite  $a$  considerar  $V \in \mathcal{V}_a$  com  $V \notin \mathcal{F}$  e reparar que  $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_{X \setminus V}$  é então um filtro próprio que não tem  $a$  como sublimite.

**s) (Restrição de um ultrafiltro)** Sejam  $X$  um conjunto,  $\mathcal{F}$  um ultrafiltro de  $X$  e

$X' \subset X$ . Mostrar que se  $X' \notin \mathcal{F}$  então o filtro restrição  $\mathcal{F}/_{X'}$  (cf. a alínea h) acima) é o filtro impróprio de  $X'$  e que se  $X' \in \mathcal{F}$  então o filtro restrição  $\mathcal{F}/_{X'}$  é um ultrafiltro de  $X'$ .

**Sugestão:** Utilizar a caracterização alternativa dos ultrafiltros referida na alínea n) acima.

**t)** Sejam  $X$  e  $Y$  conjuntos,  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação e  $\mathcal{F}$  um ultrafiltro de  $X$ . Verificar que o filtro imagem direta  $f(\mathcal{F})$  (cf. a alínea j) acima) é um ultrafiltro de  $Y$ .

**Sugestão:** Utilizar a caracterização alternativa dos ultrafiltros referida na alínea n) acima; Se  $B \subset Y$  e  $B \notin f(\mathcal{F})$ , reparar que o conjunto  $A = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$  não pertence a  $\mathcal{F}$ .

**Ex 1.6.34 (Limite de uma aplicação segundo um filtro)** Sejam  $X$  um conjunto e  $\mathcal{F}$  um filtro próprio de  $X$ . Sejam  $Y$  um espaço topológico e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Diz-se que  $b \in Y$  é um *limite* da aplicação  $f$  segundo o filtro  $\mathcal{F}$  se o filtro próprio  $f(\mathcal{F})$  de  $Y$  (cf. a alínea j) do exercício 1.6.33) tiver limite  $b$ , isto é, se para cada vizinhança  $W$  de  $b$  em  $Y$  existir  $A \in \mathcal{F}$  tal que  $f(A) \subset W$ .

**a) (limite de aplicação num ponto como limite segundo um filtro)** Reparar que, se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos,  $X' \subset X$ ,  $x_0 \in X$  é aderente a  $X'$  e  $f: X' \rightarrow Y$  é uma aplicação, então  $f(x)$  tem um limite  $b \in Y$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se,  $b$  é um limite de  $f$  segundo o filtro  $\mathcal{V}_{x_0}/_{X'}$ , restrição a  $X'$  do filtro das vizinhanças de  $x_0$  em  $X$ .

**b) (Topologia associada a um filtro)** Sejam  $X$  um conjunto,  $\mathcal{F}$  um filtro próprio de  $X$  e  $*$  um elemento não pertencente a  $X$  e consideremos o conjunto  $\hat{X} = X \cup \{*\}$ . Verificar que se pode definir uma topologia em  $\hat{X}$  (que diremos ser a associada ao filtro  $\mathcal{F}$ ) pela condição de as vizinhanças de um ponto  $x \in X$  serem os subconjuntos de  $\hat{X}$  que contêm  $x$  e de as vizinhanças de  $*$  serem os conjuntos da forma  $A \cup \{*\}$  com  $A \in \mathcal{F}$ . Verificar que  $*$  é aderente a  $X$ , que a topologia induzida em  $X$  pela topologia de  $\hat{X}$  é a topologia discreta e que o filtro restrição a  $X$  do filtro das vizinhanças de  $*$  em  $\hat{X}$  é o filtro  $\mathcal{F}$ . Verificar ainda que a topologia de  $\hat{X}$  é de Hausdorff se, e só se, o filtro  $\mathcal{F}$  não estiver contido em nenhum filtro principal próprio.

**c) (Limite segundo um filtro como limite de uma aplicação num ponto)** Na sequência de b), consideremos um espaço topológico  $Y$  e uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$ . Verificar que  $b \in Y$  é limite de  $f$  segundo o filtro  $\mathcal{F}$  se, e só se,  $b$  for limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow *$ , quando se encara  $X$  como parte do espaço topológico  $\hat{X}$ . **Nota:** A importância desta conclusão está na possibilidade de aplicar aos limites de uma aplicação segundo um filtro propriedades já conhecidas para os limites de uma aplicação num ponto aderente ao domínio.

**Ex 1.6.35 (Aplicação a uma noção “estranha” de pseudolimite)** Seja  $I$  um conjunto infinito, sobre o qual consideramos a topologia discreta, e seja  $\mathcal{F}$  o respetivo filtro de Fréchet (cf. a alínea c) do exercício 1.6.33). Consideremos em  $\hat{I} = I \cup \{\infty\}$  a topologia do compactificado de Alexandroff de  $I$  (cf. 1.6.51).

**a)** Reparar que a topologia de  $\hat{I}$  coincide com a associada ao filtro  $\mathcal{F}$ , no sentido referido na alínea b) do exercício 1.6.34.

**b)** Mostrar que existe uma forma (não construtiva) de associar a cada família limitada de números reais  $(a_i)_{i \in I}$  um número real (que chamaremos *pseudolimite* da família) de modo que se verifiquem as seguintes propriedades: **b<sub>1</sub>)** O pseudolimite da família limitada  $(a_i)_{i \in I}$  é um dos seus sublimites quando  $i \rightarrow \infty$ , em particular se a família tem limite quando  $i \rightarrow \infty$  então o seu pseudolimite coincidem com o limite; **b<sub>2</sub>)** O pseudo limite duma soma é igual à soma dos pseudolimites; **b<sub>3</sub>)** O pseudolimite dum

produto é igual ao produto dos pseudolimites; **b<sub>4</sub>**) O pseudolimite da família dos valores absolutos é o valor absoluto do pseudolimite da família limitada de partido; **b<sub>5</sub>**) A propriedade análoga à precedente, que o leitor enunciará sem dificuldade, com a função “valor absoluto” substituída por uma função contínua cujo domínio seja  $\mathbb{R}$  ou, mais geralmente, um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}$ . **Sugestão:** Considerar um ultrafiltro  $\mathcal{G}$  de  $I$  tal que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  e reparar que, pela compacidade dos fechados e limitados de  $\mathbb{R}$ , qualquer família limitada  $(a_i)_{i \in I}$ , encarada como aplicação de domínio  $I$ , admite limite segundo o ultrafiltro  $\mathcal{G}$ , definindo esse limite como sendo o pseudolimite.

## §7. Compacidade e completude em espaços métricos.

Vamos estudar nesta secção outras propriedades dos espaços compactos que só fazem sentido, ou só são válidas, no contexto dos espaços métricos. Note-se que algumas das propriedades deste tipo, nomeadamente 1.6.14, 1.6.15, 1.6.27 e 1.6.28, já foram referidas na secção precedente. Examinaremos, para começar, a noção de espaço métrico completo que tem relações importantes com as propriedades de compacidade.

**1.7.1** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço métrico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Diz-se que  $f$  verifica a *condição de Cauchy* quando  $x \rightarrow x_0$  se qualquer que seja  $\delta > 0$  existe uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que, sempre que  $x, x' \in V \cap A$ ,

$$d(f(x), f(x')) < \delta. \quad 99$$

**1.7.2 (Caracterização pelos sistemas fundamentais de vizinhanças)** Nas condições anteriores, se  $\mathcal{B}_{x_0}$  for um sistema fundamental de vizinhanças de  $x_0$  em  $X$ , a aplicação  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, qualquer que seja  $\delta > 0$  existe  $V \in \mathcal{B}_{x_0}$  tal que, quaisquer que sejam  $x, x' \in V \cap A$ , venha  $d(f(x), f(x')) < \delta$ .

**Dem:**<sup>100</sup> Se a condição no enunciado for verdadeira então, uma vez que cada  $V \in \mathcal{B}_{x_0}$  é, em particular, uma vizinhança de  $x_0$ , concluímos que  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Reciprocamente, se  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$  então, dado  $\delta > 0$ , podemos começar por considerar uma vizinhança  $V'$  de  $x_0$  tal que para  $x, x' \in V' \cap A$  se tenha  $d(f(x), f(x')) < \delta$  e então podemos considerar  $V \in \mathcal{B}_{x_0}$  tal que  $V \subset V'$

<sup>99</sup>De forma pouco precisa mas sugestiva, se  $x$  e  $x'$  estão suficientemente próximos de  $x_0$  então  $f(x)$  e  $f(x')$  estão próximos um do outro.

<sup>100</sup>Esta demonstração é naturalmente previsível, sendo mais um exemplo de como propriedades definidas a partir de vizinhanças arbitrárias podem ser equivalentemente reformuladas a partir de sistemas fundamentais de vizinhanças arbitrários.

tendo-se evidentemente ainda  $d(f(x), f(x')) < \delta$  sempre que  $x, x' \in V \cap A$ , o que mostra que é válida a condição do enunciado.  $\square$

**1.7.3 (O caso particular das sucessões generalizadas)** Sejam  $Y$  um espaço métrico e consideremos uma  $\mathbb{N}$ -sucessão ou, mais geralmente, uma sucessão generalizada  $(y_j)_{j \in J}$ . Lembrando que uma tal sucessão não é mais do que uma aplicação de  $J$  para  $Y$ , onde  $J$  é um subconjunto do espaço topológico  $\bar{J} = J \cup \{+\infty\}$ , tendo  $+\infty$  como ponto aderente (cf. 1.2.61), faz sentido considerar as sucessões generalizadas que verificam a condição de Cauchy quando  $j \rightarrow +\infty$ , sucessões essas que serão chamadas simplesmente *sucessões generalizadas de Cauchy*.

As sucessões generalizadas de Cauchy  $(y_j)_{j \in J}$  podem ser caracterizadas pela condição de para cada  $\delta > 0$  existir um índice  $j_0$  tal que, quaisquer que sejam  $j, j' \succeq j_0$ , ter-se  $d(x_j, x_{j'}) < \delta$  (trata-se de um caso particular da condição referida em 1.7.2, onde se toma para sistema fundamental de vizinhanças de  $+\infty$  em  $\bar{J}$  o referido em 1.2.61).

**1.7.4 (Lipschitz-invariância da condição de Cauchy)** Seja  $Y$  um conjunto sobre o qual consideramos duas métricas Lipschitz-equivalentes  $d$  e  $d'$  (cf. 1.1.26). Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Tem-se então que  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ , quando se considera em  $Y$  a métrica  $d$  se, e só se, isso acontece quando se considera em  $Y$  a métrica  $d'$ .<sup>101</sup>

**Dem:** Sejam  $M > 0$  e  $M' > 0$  constantes tais que, quaisquer que sejam  $x, y \in X$ ,

$$d'(x, y) \leq M d(x, y), \quad d(x, y) \leq M' d'(x, y).$$

Suponhamos que  $f$  verifica a condição de Cauchy relativamente à métrica  $d$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que quaisquer que sejam  $x, x' \in V \cap A$  se tenha  $d(f(x), f(x')) < \frac{\delta}{M}$ . Quaisquer que sejam  $x, x' \in V \cap A$  tem-se então

$$d'(f(x), f(x')) \leq M d(f(x), f(x')) < M \frac{\delta}{M} = \delta,$$

o que mostra que  $f$  verifica a condição de Cauchy relativamente a  $d'$ . Do mesmo modo se verifica que se  $f$  verifica a condição de Cauchy relativamente a  $d'$  então  $f$  também verifica a condição de Cauchy relativamente a  $d$ .  $\square$

**1.7.5 (Limites e condição de Cauchy)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço métrico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação admitindo um limite  $b \in Y$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Então  $f$  verifica a condição de

<sup>101</sup>O exercício 1.7.2 adiante mostra que a conclusão deixa de ser verdadeira se pedirmos apenas que as métricas sejam topologicamente equivalentes.



Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ .<sup>102</sup>

**Dem:** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Considerando a vizinhança  $B_{\delta/2}(b)$  de  $b$  em  $Y$ , podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que sempre que  $x \in V \cap A$  se tenha  $f(x) \in B_{\delta/2}(b)$ . Dados  $x, x' \in V \cap A$  tem-se assim que  $f(x), f(x') \in B_{\delta/2}(b)$  e portanto

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), b) + d(b, f(x')) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

o que mostra que  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.7.6 (Condição de Cauchy e sublimites)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço métrico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$  e admitindo um sublimite  $b \in Y$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tem-se então mesmo o limite  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Dem:** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Tendo em conta a condição de Cauchy, podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que, quaisquer que sejam  $x, x' \in A \cap V$ , venha  $d(f(x), f(x')) < \frac{\delta}{2}$ . Tendo em conta a caracterização dos sublimites na alínea a) de 1.6.1, considerando a bola aberta  $B_{\delta/2}(b)$  como vizinhança de  $b$ , podemos considerar um elemento  $x_1 \in V \cap A$  tal que  $f(x_1) \in B_{\delta/2}(b)$ . Para cada  $x \in V \cap A$  vemos agora que

$$d(f(x), b) \leq d(f(x), f(x_1)) + d(f(x_1), b) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ou seja,  $f(x) \in B_\delta(b)$ . Tendo em conta o facto de as bolas abertas de centro  $b$  constituírem um sistema fundamental de vizinhanças de  $b$ , concluímos assim que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.7.7 (Espaços métricos completos)** Diz-se que um espaço métrico  $Y$  é *completo* se, quaisquer que sejam o espaço topológico  $X$ , o subconjunto  $A \subset X$ , o ponto  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e a aplicação  $f: A \rightarrow Y$  verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ , existir  $b \in Y$  tal que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .<sup>103</sup>

Repare-se que, tendo em conta 1.7.4, se o espaço métrico  $Y$  for completo, relativamente à sua métrica  $d$ , então continua completo se substituirmos a sua métrica  $d$  por uma métrica  $d'$  que lhe seja Lipschitz-equivalente.<sup>104</sup>

Uma vez que o limite de uma sucessão generalizada de elementos de um espaço métrico  $Y$  é um caso particular do limite de uma função num ponto aderente o domínio, podemos garantir que se  $Y$  é um espaço métrico completo então qualquer sucessão generalizada de Cauchy de elementos de  $Y$  tem algum elemento de  $Y$  como limite, em particular, qualquer  $\mathbb{N}$ -sucessão de Cauchy de elementos de  $Y$  tem algum elemento de  $Y$  como limite.

<sup>102</sup>Em linguagem mais sugestiva, a convergência implica a condição de Cauchy.

<sup>103</sup>Em linguagem mais sugestiva, se a condição de Cauchy implicar a convergência.

<sup>104</sup>Mas não necessariamente se substituirmos a métrica por uma que seja somente topologicamente equivalente (cf. o exercício 1.7.2 adiante).

Ao contrário do que seríamos talvez levados a pensar, a existência de limite para  $\mathbb{N}$ -sucessões de Cauchy arbitrárias já é suficiente, como veremos a seguir, para garantir que um espaço métrico é completo. É, aliás, através dessa propriedade que os espaços métricos completos são frequentemente definidos.

**1.7.8 (Caracterização sequencial da completude)** Seja  $Y$  um espaço métrico tal que qualquer  $\mathbb{N}$ -sucessão de Cauchy de elementos de  $Y$  seja convergente. O espaço métrico  $Y$  é então completo.

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Consideremos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , uma vizinhança  $V_n$  de  $x_0$  em  $X$  tal que, quaisquer que sejam  $x, x' \in V_n \cap A$ ,

$$(1) \quad d(f(x), f(x')) < \frac{1}{n}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o facto de  $x_0$  ser aderente a  $A$  e de  $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$  ser uma vizinhança de  $x_0$  permite-nos escolher um elemento

$$(2) \quad x_n \in (V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n) \cap A.$$

Verifiquemos agora que a  $\mathbb{N}$ -sucessão dos elementos  $f(x_n)$  é uma sucessão de Cauchy de elementos de  $Y$ . Ora, dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \delta$  e então, quaisquer que sejam  $n, n' \geq n_0$  o facto de  $x_n$  e  $x_{n'}$  pertencerem ambos a  $V_{n_0} \cap A$  implica que

$$d(f(x_n), f(x_{n'})) < \frac{1}{n_0} < \delta,$$

o que mostra que temos efetivamente uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de Cauchy de elementos de  $Y$ . A hipótese que estamos a fazer garante assim a existência de  $b \in Y$  tal que  $f(x_n) \rightarrow b$ . Vamos mostrar que se tem também  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ , o que mostrará que  $Y$  é efetivamente completo.

Seja então  $\delta > 0$  arbitrário. O facto de se ter  $f(x_n) \rightarrow b$  permite-nos considerar  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_1$  se tenha  $d(f(x_n), b) < \frac{\delta}{2}$ . Escolhamos  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_2} < \frac{\delta}{2}$  e seja  $n$  o maior dos números naturais  $n_1$  e  $n_2$ . Considerando a vizinhança  $V_n$  de  $x_0$  em  $X$ , vemos que, qualquer que seja  $x \in V_n \cap A$  tem-se, por (1) e (2),

$$d(f(x), f(x_n)) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_2} < \frac{\delta}{2}$$

e portanto, por ser também  $n \geq n_1$ ,

$$d(f(x), b) \leq d(f(x), f(x_n)) + d(f(x_n), b) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

o que mostra que se tem efetivamente  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.7.9 (Os compactos são completos)** Se  $Y$  é um espaço métrico compacto, então  $Y$  é completo.

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Tendo em conta a definição de espaço compacto em 1.6.17, a aplicação  $f$  admite algum sublimite  $b \in Y$  quando  $x \rightarrow x_0$  e decorre então de 1.7.6 que se tem mesmo  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

A propriedade precedente permite nalguns casos também provar que são completos certos espaços não compactos. Por exemplo:

**1.7.10 ( $\mathbb{R}^n$  é completo)** O espaço  $\mathbb{R}$ , com a sua métrica usual, é completo. Mais geralmente, para cada  $n \geq 1$ , o espaço  $\mathbb{R}^n$ , com a métrica do máximo  $d_\infty$  (cf. 1.1.8) é completo.

É claro que  $\mathbb{R}^n$  com a métrica euclidiana  $d_2$  também é completo uma vez que as métricas  $d_\infty$  e  $d_2$  são Lipschitz-equivalentes (cf. 1.1.27 e 1.7.7).

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Em particular, podemos garantir a existência de uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que, quaisquer que seja  $x, x' \in A \cap V$  se tenha  $d_\infty(f(x), f(x')) < 1$  e portanto, fixando um elemento  $x_1 \in A \cap V$ , para cada  $x \in A \cap V$ , a imagem  $f(x)$  pertence à bola fechada  $\overline{B}_1(f(x_1))$  que é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , por ser fechado e limitado (cf. 1.6.33) e portanto um espaço métrico completo para a métrica induzida pela de  $\mathbb{R}^n$ . Reparemos que se tem

$$A = (A \cap V) \cup (A \setminus V),$$

onde  $x_0$  não é aderente a  $A \setminus V$  (por a sua vizinhança  $V$  não ter pontos neste conjunto) e portanto  $x_0$  é aderente a  $A \cap V$ . Uma vez que a restrição de  $f$  a  $A \cap V$ , como aplicação  $A \cap V \rightarrow \overline{B}_1(f(x_1))$ , verifica ainda trivialmente a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ , podemos concluir a existência de  $b \in \overline{B}_1(f(x_1))$  tal que a restrição  $f|_{A \cap V}$  tenha limite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$  e daqui podemos concluir que  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  também tem limite  $b$  quando  $x \rightarrow x_0$  (cf. a alínea b) de 1.2.37).  $\square$

**1.7.11 (Completude da métrica da convergência uniforme)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio de índices e  $Y$  um espaço métrico completo e consideremos no espaço  $\mathbb{B}(I, Y)$  de todas as aplicações limitadas  $I \rightarrow Y$  a métrica  $d_\infty$  da convergência uniforme, definida em 1.1.20. Tem-se então que  $\mathbb{B}(I, Y)$  é um espaço métrico completo.

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e

$f: A \rightarrow \mathbb{B}(I, Y)$  verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Para cada  $i \in I$  consideremos a aplicação coordenada  $f_i: A \rightarrow Y$  definida por

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

(como noutras ocasiões, revela-se cómodo encarar os elementos de  $\mathbb{B}(I, Y)$  como famílias indexadas em  $I$ ). Comecemos por reparar que para cada  $i \in I$  a aplicação  $f_i: A \rightarrow Y$  também verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Ora, isso resulta de que, dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que sempre que  $x, x' \in V \cap A$ , se tenha  $d_\infty(f(x), f(x')) < \delta$  tendo-se então para  $x, x' \in V \cap A$

$$d(f_i(x), f_i(x')) \leq d_\infty(f(x), f(x')) < \delta.$$

O facto de  $Y$  ser completo permite-nos assim considerar, para cada  $i \in I$ , um elemento  $b_i \in Y$  tal que  $f_i(x) \rightarrow b_i$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Para terminar a demonstração resta-nos mostrar que  $(b_i)_{i \in I}$  é uma aplicação limitada  $I \rightarrow Y$ , isto é, um elemento de  $\mathbb{B}(I, Y)$  e que  $f(x) \rightarrow (b_i)_{i \in I}$  quando  $x \rightarrow x_0$ , factos esses cuja justificação será examinada simultaneamente. Seja então  $\delta > 0$  arbitrário. Comecemos por considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que, sempre que  $x, x' \in V \cap A$  se tenha  $d_\infty(f(x), f(x')) < \frac{\delta}{2}$ . Consideremos um elemento  $x_1 \in V \cap A$  arbitrário. Reparemos que, para cada  $x \in V \cap A$  vem, para cada  $i \in I$ ,

$$(1) \quad d(f_i(x), f_i(x_1)) \leq d_\infty(f(x), f(x_1)) < \frac{\delta}{2}$$

e portanto por a restrição de  $f_i$  a  $V \cap A$  ainda ter limite  $b_i$  quando  $x \rightarrow a$  (cf. 1.2.39), condição que, por 1.4.22, implica que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in V \cap A}} d(f_i(x), f_i(x_1)) = d(b_i, f_i(x_1)),$$

podemos concluir de (1), tendo em conta 1.2.53, que para cada  $i \in I$

$$(2) \quad d(b_i, f_i(x_1)) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Uma vez que  $(f_i(x_1))_{i \in I}$  é uma aplicação limitada, podemos escolher  $c \in Y$  e  $R \geq 0$  tais que  $d(f_i(x_1), c) \leq R$  para cada  $i \in I$  e então, para cada  $i \in I$ ,

$$d(b_i, c) \leq d(b_i, f_i(x_1)) + d(f_i(x_1), c) \leq \frac{\delta}{2} + M,$$

o que implica que se tem efetivamente  $(b_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}(I, Y)$ . Podemos agora deduzir de (2) que

$$d_\infty((b_i)_{i \in I}, f(x_1)) = d_\infty((b_i)_{i \in I}, (f_i(x_1))_{i \in I}) \leq \frac{\delta}{2} < \delta,$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade do elemento  $x_1 \in V \cap A$ , prova que se tem efetivamente  $f(x) \rightarrow (b_i)_{i \in I}$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.7.12 (Completude dum produto cartesiano)** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $Y_i$  um espaço métrico completo, com métrica  $d_i$ . Considerando então no produto cartesiano  $\prod_{i \in I} Y_i$  a métrica do máximo, definida por

$$d((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \max_{i \in I} d_i(x_i, y_i),$$

que sabemos definir a topologia produto (cf. 1.5.17), tem-se que  $\prod_{i \in I} Y_i$  é também um espaço métrico completo.<sup>105</sup>

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$  verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Para cada  $i \in I$  consideremos a aplicação coordenada  $f_i: A \rightarrow Y_i$  definida por

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

Começemos por reparar que para cada  $i \in I$  a aplicação  $f_i: A \rightarrow Y_i$  também verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Ora, isso resulta de que, dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que sempre que  $x, x' \in V \cap A$ , se tenha  $d(f(x), f(x')) < \delta$  tendo-se então para  $x, x' \in V \cap A$

$$d_i(f_i(x), f_i(x')) \leq d(f(x), f(x')) < \delta.$$

O facto de cada  $Y_i$  ser completo permite-nos assim considerar, para cada  $i \in I$ , um elemento  $b_i \in Y_i$  tal que  $f_i(x) \rightarrow b_i$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Pela caracterização da topologia produto tem-se então  $f(x) \rightarrow (b_i)_{i \in I}$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.7.13 (Subconjuntos completos)** Se  $Y$  é um espaço métrico, diz-se que  $B \subset Y$  é um subconjunto completo se for um espaço métrico completo quando munido da métrica induzida. Tem-se então:

**a)** Se  $B$  é um subconjunto completo de  $Y$  então  $B$  é fechado em  $Y$ .

**b)** Se  $Y$  é um espaço métrico completo e  $B \subset Y$  é um subconjunto fechado, então  $B$  é um subconjunto completo.<sup>106</sup>

**Dem:** **a)** Suponhamos que  $B$ , com a métrica induzida, é um espaço completo. Seja  $y_0 \in Y$  aderente a  $B$ . Podemos considerar a inclusão  $\iota: B \rightarrow Y$ , que tem

<sup>105</sup>Repare-se na existência de alguma analogia com a métrica  $d_\infty$  considerada em 1.7.11: No caso em que todos os espaços métricos  $Y_i$  são iguais a um espaço métrico  $Y$ , o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} Y_i$  é igual a  $Ap(I, Y) = \mathbb{B}(I, Y)$  e a métrica do máximo é a métrica

$d_\infty$ . Esta analogia acaba por ter tradução na semelhança das demonstrações.

<sup>106</sup>Comparar com a propriedade, de certa forma paralela, dos subconjuntos compactos de um espaço topológico examinada em 1.6.21.

limite  $y_0$  quando  $y \rightarrow y_0$  (cf. a alínea b) de 1.2.30) e portanto verifica a condição de Cauchy quando  $y \rightarrow y_0$ , o que é trivialmente equivalente a verificar essa condição de Cauchy quando o espaço métrico de chegada é  $B$ . Uma vez que  $B$  é completo podemos concluir a existência de  $y_1 \in B$  tal que  $\iota(y) \rightarrow y_1$  quando  $y \rightarrow y_0$  e, por ser também  $\iota(y) \rightarrow y_0$  quando  $y \rightarrow y_0$ , a unicidade do limite implica que  $y_1 = y_0$ , portanto  $y_0 \in B$ . Ficou assim provado que  $B$  é fechado em  $Y$ .

**b)** Suponhamos que  $Y$  é completo e que  $B \subset Y$  é fechado. Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow B$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Uma vez que  $f$  verifica trivialmente também a condição de Cauchy quando se considera  $Y$  como espaço de chegada, o facto de  $Y$  ser completo implica a existência de  $b \in Y$  tal que  $f(x) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tem-se então  $b$  aderente a  $B$  (cf. 1.2.40) e portanto  $b \in B$ , o que implica que  $f: A \rightarrow B$  tem limite em  $B$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Ficou assim provado que  $B$  é um espaço métrico completo.  $\square$

**1.7.14 (Corolário)** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto não vazio e  $Y$  um espaço métrico. Consideremos o conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  das aplicações contínuas  $f: X \rightarrow Y$ , que é um subconjunto do espaço métrico  $\mathbb{B}(X, Y)$  (cf. 1.1.20), com a métrica  $d_\infty$ , onde a topologia associada é a induzida pela da convergência uniforme (cf. 1.2.77). Quando  $Y$  é completo  $\mathcal{C}(X, Y)$  é um espaço métrico completo.

**Dem:** O facto de se ter  $\mathcal{C}(X, Y) \subset \mathbb{B}(X, Y)$  resulta de 1.6.24 e 1.6.27. Basta agora recordar que o espaço métrico  $\mathbb{B}(X, Y)$  é completo (cf. 1.7.11) e reparar que  $\mathcal{C}(X, Y)$  é fechado em  $\mathbb{B}(X, Y)$ , por ser fechado em  $Ap(X, Y)$ , com a topologia da convergência uniforme (cf. 1.4.32).  $\square$

O resultado que examinamos a seguir está na origem de muitas aplicações importantes dos espaços métricos completos, por exemplo em Análise Matemática. Será cómodo estabelecer antes um lema que teremos ocasião de voltar a aplicar mais adiante.

**1.7.15 (Lema)** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma  $\mathbb{N}$ -sucessão tal que, para certas constantes  $a > 0$  e  $0 \leq M < 1$ , tem-se

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a M^n$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Tem-se então, sempre que  $n, n' \geq n_0$ ,

$$d(x_n, x_{n'}) < \frac{aM^{n_0}}{1 - M},$$

em particular esta sucessão é uma sucessão de Cauchy.

**Dem:** Comecemos por mostrar que, sempre que  $n \in \mathbb{N}$  e  $p \geq 0$ , tem-se

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{aM^n}{1 - M}.$$

Esta desigualdade é trivial se  $p = 0$  e, se  $p = 1$ , resulta da hipótese do enunciado uma vez que  $\frac{1}{1-M} \leq 1$ . Se  $p \geq 2$  podemos utilizar a desigualdade triangular, eventualmente generalizada (cf. 1.1.2), para escrever

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq a(M^n + M^{n+1} + \cdots + M^{n+p-1}) = aM^n \frac{1 - M^p}{1 - M} \leq \frac{aM^n}{1 - M}. \end{aligned}$$

(lembrar a fórmula para a soma de  $p$  termos de uma progressão geométrica). A majoração para  $d(x_n, x_{n'})$  sempre que  $n, n' \geq n_0$  indicada no enunciado resulta da desigualdade que obtivemos visto que, por simetria, pode já supor-se que  $n \leq n'$ , e portanto  $n' = n + p$  com  $p \geq 0$ , donde

$$d(x_n, x_{n'}) = d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{aM^n}{1 - M} \leq \frac{aM^{n_0}}{1 - M}.$$

O facto de termos uma sucessão de Cauchy resulta agora de que, dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos escolher  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{aM^{n_0}}{1-M} < \delta$  (reparar que  $n \mapsto \frac{aM^n}{1-M}$  é uma sucessão de reais com limite 0) e então sempre que  $n, n' \geq n_0$  vem  $d(x_n, x_{n'}) < \delta$ .  $\square$

**1.7.16 (Teorema do ponto fixo para aplicações contratantes)** Sejam  $X$  um espaço métrico completo não vazio e  $f: X \rightarrow X$  uma aplicação *contratante*, isto é, uma aplicação admitindo uma constante de Lipschitz  $0 \leq M < 1$  (cf. 1.4.3). Existe então um único elemento  $\hat{x} \in X$  tal que  $f(\hat{x}) = \hat{x}$  (a um tal elemento dá-se o nome de *ponto fixo* de  $f$ ). Mais precisamente, se partirmos do elemento  $x_0 \in X$  arbitrário e definirmos recursivamente uma  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $X$  por  $x_1 = f(x_0)$  e  $x_{n+1} = f(x_n)$ , esta sucessão vai ter limite e esse limite é o ponto fixo.

**Dem:** Começemos por mostrar que não pode haver mais que um ponto fixo de  $f$ . Ora, se  $\hat{x}, \tilde{x}$  fossem pontos fixos distintos vinha

$$d(\hat{x}, \tilde{x}) = d(f(\hat{x}), f(\tilde{x})) \leq M d(\hat{x}, \tilde{x}),$$

donde, por ser  $d(\hat{x}, \tilde{x}) > 0$ , vinha  $M \geq 1$ , contra a hipótese de ser  $M < 1$ . Seja agora  $x_0 \in X$  arbitrário e definamos recursivamente a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  do modo referido no enunciado. Reparemos agora que para cada  $n \in \mathbb{N}$  tem-se

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) M^n.$$

Com efeito para  $n = 1$  isso resulta de se ter

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq M d(x_0, x_1)$$

e, supondo que o resultado vale para  $n = p$ , obtemos, para  $n = p + 1$ ,

$$\begin{aligned} d(x_{p+1}, x_{p+2}) &= d(f(x_p), f(x_{p+1})) \leq M d(x_p, x_{p+1}) \leq \\ &\leq M d(x_0, x_1) M^p = d(x_0, x_1) M^{p+1}. \end{aligned}$$

Podemos agora aplicar o lema 1.7.15 para garantir que esta  $\mathbb{N}$ -sucessão é de Cauchy e portanto, por  $X$  ser completo, que existe  $\hat{x} \in X$  tal que  $x_n \rightarrow \hat{x}$ . Uma vez que a aplicação  $f$  é contínua (cf. 1.4.3) e que  $n + 1 \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$  podemos aplicar o resultado sobre o limite da aplicação composta (cf. 1.2.41) para garantir que a sucessão que a  $n$  associa  $x_{n+1} = f(x_n)$  tem simultaneamente limite  $\hat{x}$  e limite  $f(\hat{x})$ , o que implica que se tem efetivamente  $f(\hat{x}) = \hat{x}$ .  $\square$

**1.7.17 (Versão paramétrica do teorema do ponto fixo)** Sejam  $Y$  um espaço topológico,  $X$  um espaço métrico completo não vazio e  $f: Y \times X \rightarrow X$  uma aplicação verificando as hipóteses:

1) Existe  $0 \leq M < 1$  que seja uma constante de Lipschitz, para cada  $y \in Y$ , da aplicação  $f_{(y)}: X \rightarrow X$  definida por  $f_{(y)}(x) = f(y, x)$ ;

2) Para cada  $x \in X$  é contínua a aplicação  $Y \rightarrow X$ ,  $y \mapsto f(y, x)$ .<sup>107</sup>

É então contínua a aplicação  $g: Y \rightarrow X$  que a cada  $y \in Y$  associa o único ponto fixo  $g(y)$  da aplicação contratante  $f_{(y)}: X \rightarrow X$ , isto é a definida pela condição de se ter

$$f(y, g(y)) = g(y)$$

para cada  $y \in Y$ .

**Dem:** Provemos a continuidade de  $g$  num ponto  $y_0 \in Y$ , para o que consideramos  $\delta > 0$  arbitrário. Tendo em conta a hipótese 2), consideremos uma vizinhança  $V$  de  $y_0$  em  $Y$  tal que se tenha

$$d(f(y, g(y_0)), d(y_0, g(y_0))) < \delta(1 - M)$$

sempre que  $y \in V$ . Para cada  $y \in V$  tem-se então

$$\begin{aligned} d(g(y), g(y_0)) &= d(f(y, g(y)), d(y_0, g(y_0))) \leq \\ &\leq d(f(y, g(y)), d(y, g(y_0))) + d(f(y, g(y_0)), d(y_0, g(y_0))) \leq \\ &< Md(g(y), g(y_0)) + \delta(1 - M), \end{aligned}$$

donde

$$(1 - M)d(g(y), g(y_0)) < \delta(1 - M)$$

e  $d(g(y), g(y_0)) < \delta$ . Ficou assim provada a continuidade de  $g$  em  $y_0$ .  $\square$

**1.7.18 (Propriedade do encaixe nos espaços métricos completos)<sup>108</sup>** Seja  $X$  um espaço métrico completo e sejam  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  subconjuntos fechados limitados não vazios de  $X$  tais que  $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$  e que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_{n+1} \subset K_n$ . Tem-se então  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ .<sup>109</sup>

<sup>107</sup>Condição verificada, em particular, se a aplicação  $f: Y \times X \rightarrow X$  for contínua.

<sup>108</sup>Comparar com 1.6.37.

<sup>109</sup>Aliás, esta intersecção é necessariamente, como se verifica facilmente, um conjunto unitário.



**Dem:** Escolhamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in K_n$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, existe  $n_0$  tal que  $\text{diam}(K_{n_0}) < \delta$  e então, para cada  $m, n \geq n_0$ , tem-se  $x_m \in K_m \subset K_{n_0}$  e  $x_n \in K_n \subset K_{n_0}$ , donde  $d(x_m, x_n) \leq \text{diam}(K_{n_0}) < \delta$ . Provámos assim que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de Cauchy, pelo que, por  $X$  ser completo, existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Vemos agora que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se, para todo o  $m \geq n$ ,  $x_m \in K_m \subset K_n$ , o que implica, por  $K_n$  ser fechado, que  $x \in K_n$ . Verificámos assim que  $x$  pertence à intersecção dos  $K_n$ , o que mostra que esta intersecção não é vazia.  $\square$

Em geral, se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, sabemos que uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é contínua se for contínua em todos os pontos  $x_0 \in X$ . No caso em que as topologias de  $X$  e de  $Y$  são as associadas a métricas definidas nestes conjuntos, a caracterização da continuidade num ponto em termos de sistemas fundamentais de vizinhanças, neste caso os constituídos pelas bolas abertas de centros  $x_0$  e  $f(x_0)$  (cf. 1.4.1), mostra-nos que a continuidade de  $f$  equivale a exigir que, para cada  $x_0 \in X$  e cada  $\delta > 0$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $d(x_0, x) < \varepsilon$  venha  $d(f(x_0), f(x)) < \delta$ . Nesta caracterização o real  $\varepsilon > 0$  dependerá, em geral, tanto de  $\delta$  como do ponto  $x_0$ . A noção que apresentamos em seguida corresponde à situação em que, para cada  $\delta > 0$  podemos arranjar  $\varepsilon > 0$  que sirva simultaneamente para todos os pontos  $x_0 \in X$  e é portanto mais forte que a noção simples de continuidade. Observe-se que não faz sentido enunciar essa noção no contexto geral dos espaços topológicos, a utilização das métricas tendo aqui um papel essencial.

**1.7.19 (Aplicações uniformemente contínuas)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Diz-se que a aplicação é *uniformemente contínua* se para cada  $\delta > 0$  existir  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $x_0, x \in X$  verificam  $d(x_0, x) < \varepsilon$  tem-se  $d(f(x_0), f(x)) < \delta$ .

Repare-se que, toda a aplicação uniformemente contínua é, em particular, uma aplicação contínua mas que a recíproca não é necessariamente válida (para sublinhar a diferença chamam-se por vezes *simplesmente contínuas* as aplicações contínuas, isto é aquelas para as quais apenas assumimos a continuidade em cada ponto do domínio).

Repare-se também que se  $X, Y$  e  $Z$  são espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  são aplicações uniformemente contínuas então  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é também uniformemente contínua.

**Dem:** Se  $\delta > 0$  podemos considerar  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $d(y_0, y) < \varepsilon$  venha  $d(g(y_0), g(y)) < \delta$  e, seguidamente,  $\varepsilon' > 0$  tal que sempre que  $d(x_0, x) < \varepsilon'$  venha  $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$  e então vem

$$d(g(f(x_0)), g(f(x))) < \delta$$

sempre que  $d(x_0, x) < \varepsilon'$ .  $\square$

**1.7.20 (Exemplo)** Consideremos a aplicação contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$ , onde no domínio e no codomínio consideramos a métrica usual

de  $\mathbb{R}$ . Esta aplicação não é uniformemente contínua.

**Dem:** Consideremos, por exemplo,  $\delta = 1$ . Qualquer que seja  $\varepsilon > 0$ , podemos considerar os elementos

$$x_0 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad x = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}$$

de  $\mathbb{R}$  para os quais vem

$$d(x_0, x) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e

$$d(f(x_0), f(x)) = \left| \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right| = 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} > 1. \quad \square$$

**1.7.21 (O exemplo das aplicações lipschitzianas)** Se  $X$  e  $Y$  são espaços métricos toda a aplicação lipschitziana  $f: X \rightarrow Y$  é uniformemente contínua.

**Dem:** Sendo  $M > 0$  uma constante de Lipschitz para  $f$ , constatamos que, dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos tomar  $\varepsilon = \frac{\delta}{M}$  tendo-se então, sempre que  $d(x_0, x) < \varepsilon$ ,

$$f(f(x_0), f(x)) \leq M d(x_0, x) < M\varepsilon = \delta. \quad \square$$

**1.7.22 (O exemplo das aplicações lineares)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados, sobre os quais se consideram as normas associadas. Se  $\lambda: E \rightarrow F$  é uma aplicação linear contínua no ponto  $0 \in E$  então  $\lambda$  é uniformemente contínua, em particular contínua em todos os pontos.

**Dem:** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Tendo em conta a continuidade de  $\lambda$  em  $0$ , podemos considerar  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $\|x\| = d(0, x) < \varepsilon$  venha  $\|\lambda(x)\| = d(\lambda(0), \lambda(x)) < \delta$ . Vemos agora que que, sempre que  $x_0, x \in E$  verificam  $d(x_0, x) < \varepsilon$  vem  $\|x - x_0\| < \varepsilon$  donde

$$d(\lambda(x_0), \lambda(x)) = \|\lambda(x) - \lambda(x_0)\| = \|\lambda(x - x_0)\| < \delta. \quad \square$$

**1.7.23 (Aplicações uniformemente contínuas e condição de Cauchy)** Sejam  $Y$  e  $Z$  espaços métricos e  $g: Y \rightarrow Z$  uma aplicação uniformemente contínua. Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$  (cf. 1.7.1). Tem-se então que  $g \circ f: A \rightarrow Z$  também verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ .

**Dem:** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Podemos então considerar  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $y, y' \in Y$  verificam  $d(y, y') < \varepsilon$  venha  $d(g(y), g(y')) < \delta$ . Existe então uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que, sempre que  $x, x' \in V \cap A$  venha  $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$ . Sempre que  $x, x' \in V \cap A$  tem-se então

$$d(g(f(x)), g(f(x'))) < \delta,$$

o que mostra que  $g \circ f: A \rightarrow Z$  verifica efetivamente a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**1.7.24 (Corolário)** Sejam  $Y$  e  $Z$  espaços métricos e  $g: Y \rightarrow Z$  uma aplicação contínua bijetiva tal que  $g^{-1}: Z \rightarrow Y$  seja uniformemente contínua. Se  $Y$  é completo, então  $Z$  é também completo.

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Z$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Tem-se então que  $g^{-1} \circ f: A \rightarrow Y$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$  pelo que, por  $Y$  ser completo, existe  $b \in Y$  tal que  $g^{-1}(f(x)) \rightarrow b$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Tendo em conta a continuidade de  $g$  tem-se então

$$f(x) = g(g^{-1}(f(x))) \rightarrow g(b)$$

quando  $x \rightarrow x_0$ , o que mostra que o espaço métrico  $Z$  é completo.  $\square$

Vamos agora verificar que quando o domínio é um espaço métrico compacto toda a função contínua é uniformemente contínua. De facto, será útil provarmos um resultado um pouco mais forte que faz intervir a noção de continuidade uniforme nos pontos de um dado subconjunto, que generaliza simultaneamente a continuidade uniforme e a continuidade simples.

**1.7.25** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Dado um subconjunto  $A \subset X$ , dizemos que  $f$  é *uniformemente contínua nos pontos de*  $A$  se para cada  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que quaisquer que sejam  $x_0 \in A$  e  $x \in X$  com  $d(x_0, x) < \varepsilon$  venha  $d(f(x_0), f(x)) < \delta$ .

É claro que a condição anterior implica, em particular, que  $f$  é contínua em todos os pontos do subconjunto  $A$  (mas não necessariamente nos restantes elementos de  $X$ ) e também implica que a restrição  $f|_A: A \rightarrow Y$  é uniformemente contínua (mas afirma mais do que isso, uma vez que na definição o ponto  $x_0$  pertence a  $A$  mas o ponto  $x$  já não tem que pertencer a  $A$ ).

Repare-se que dizer que  $f$  é uniformemente contínua é o mesmo que dizer que  $f$  é uniformemente contínua nos pontos de  $X$  e que dizer que  $f$  é simplesmente contínua é o mesmo que dizer que  $f$  é uniformemente contínua nos pontos de cada um dos subconjuntos unitários  $\{x_0\} \subset X$ .

**1.7.26 (Compacidade e continuidade uniforme)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos,  $A \subset X$  um subconjunto compacto e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua nos pontos de  $A$ . Então  $f$  é mesmo uniformemente contínua nos pontos de  $A$ .

Em particular, no caso em que  $X$  é compacto e  $f: X \rightarrow Y$  é simplesmente contínua então  $f$  é uniformemente contínua.

**Dem:** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Temos que mostrar a existência de  $\varepsilon > 0$  tal que

sempre que  $x_0 \in A$  e  $x \in X$  verificam  $d(x_0, x) < \varepsilon$  venha  $d(f(x_0), f(x)) < \delta$  e, para isso, podemos já afastar o caso trivial em que  $A = \emptyset$  e aquele em que  $d(f(x), f(x')) < \delta$  para quaisquer  $x, x' \in X$ , casos em que qualquer  $\varepsilon > 0$  verifica as condições pedidas. Notemos  $\Omega \subset X \times X$ , com  $\Omega \neq X \times X$  o conjunto

$$\Omega = \{(x, x') \in X \times X \mid d(f(x), f(x')) < \delta\}$$

e consideremos em  $X \times X$  a métrica do máximo (cf. 1.5.17) que define a respetiva topologia produto. Reparemos que, para cada  $x_0 \in A$  tem-se

$$(1) \quad d((x_0, x_0), (X \times X) \setminus \Omega) > 0.$$

Com efeito, pela continuidade de  $f$  no ponto  $x_0$ , podemos considerar  $\varepsilon' > 0$  tal que  $d(f(x_0), f(x)) < \frac{\delta}{2}$  sempre que  $d(x_0, x) < \varepsilon'$  e então, sempre que  $d((x_0, x_0), (x, x')) < \varepsilon'$ , ou seja  $d(x_0, x) < \varepsilon'$  e  $d(x_0, x') < \varepsilon'$ , vem

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), f(x')) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

isto é,  $(x, x') \in \Omega$ ; fica assim provado que  $d((x_0, x_0), (x, x')) \geq \varepsilon'$  para cada  $(x, x') \notin \Omega$  donde  $d((x_0, x_0), (X \times X) \setminus \Omega) \geq \varepsilon' > 0$  como anunciado. Tendo em conta 1.4.22 e 1.6.26 podemos agora tomar para  $\varepsilon > 0$  o mínimo sobre o compacto não vazio  $A$  da função contínua

$$A \rightarrow ]0, +\infty[, \quad x_0 \mapsto d((x_0, x_0), (X \times X) \setminus \Omega).$$

Com efeito, se  $x_0 \in A$ ,  $x \in X$  e  $d(x_0, x) < \varepsilon$ , vem

$$d((x_0, x_0), (x_0, x)) = d(x_0, x) < \varepsilon \leq d((x_0, x_0), (X \times X) \setminus \Omega),$$

donde  $(x_0, x) \notin (X \times X) \setminus \Omega$ , isto é,  $(x_0, x) \in \Omega$  e  $d(f(x_0), f(x)) < \delta$ .  $\square$

**1.7.27 (Prolongamento de aplicações uniformemente contínuas)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos, o segundo dos quais completo,  $A \subset X$  um subconjunto denso e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação uniformemente contínua. Existe então uma única aplicação contínua  $\bar{f}: X \rightarrow Y$  tal que  $\bar{f}|_A = f$  e esta aplicação é então mesmo uniformemente contínua.

Além disso, se  $f$  for uma aplicação isométrica o mesmo acontece ao prolongamento  $\bar{f}$  e se  $f$  admitir uma constante de Lipschitz  $M \geq 0$ , o prolongamento  $\bar{f}$  admite a mesma constante de Lipschitz.

**Dem:** Tendo em conta 1.4.30 e 1.4.31 a existência e unicidade de um tal prolongamento contínuo  $\bar{f}: X \rightarrow Y$  estará assegurado se mostrarmos que para cada  $x_0 \in X \setminus A$  existe o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow x_0$  e, para isso, tendo em conta o facto de  $Y$  ser completo, bastará mostrar que  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Ora, dado  $\delta > 0$ , podemos considerar  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $x, x' \in A$  verificam  $d(x, x') < \varepsilon$  tem-se  $d(f(x), f(x')) < \delta$  e daqui resulta que sempre que  $x, x' \in B_{\varepsilon/2}(x_0) \cap A$  tem-se

$$d(x, x') \leq d(x, x_0) + d(x_0, x') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e portanto  $d(f(x), f(x')) < \delta$ . Mostrámos assim que se verifica a condição de Cauchy referida. Resta-nos mostrar que o prolongamento contínuo  $\bar{f}: X \rightarrow Y$  é mesmo uniformemente contínuo.

Seja então  $\delta > 0$ . Consideremos  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $x, x' \in A$  verificam  $d(x, x') < \varepsilon$  venha  $d(f(x), f(x')) < \frac{\delta}{2}$ . Sejam agora  $y, y' \in X$  tais que  $d(y, y') < \frac{\varepsilon}{2}$ . Uma vez que o limite de uma aplicação num ponto é também sublimite desta nesse ponto, a caracterização dos sublimites na alínea a) de 1.6.1 garante-nos a existência de

$$\begin{aligned} x &\in A \cap B_{\varepsilon/4}(y) \text{ com } d(\bar{f}(y), f(x)) < \frac{\delta}{4}, \\ x' &\in A \cap B_{\varepsilon/4}(y') \text{ com } d(\bar{f}(y'), f(x')) < \frac{\delta}{4}, \end{aligned}$$

tendo-se então

$$d(x, x') \leq d(x, y) + d(y, y') + d(y', x') < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

donde  $d(f(x), f(x')) < \frac{\delta}{2}$  e

$$\begin{aligned} d(\bar{f}(y), \bar{f}(y')) &\leq d(\bar{f}(y), f(x)) + d(f(x), f(x')) + d(f(x'), \bar{f}(y')) < \\ &< \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \delta. \end{aligned}$$

Fica assim provada a continuidade uniforme de  $\bar{f}: X \rightarrow Y$ .

Reparemos agora que cada  $(y, y') \in X \times X$  é aderente a  $A \times A$  (cf. 1.5.23) e portanto, no caso em que  $M$  é constante de Lipschitz de  $f$ , isto é

$$d(f(x), f(x')) \leq M d(x, x')$$

para cada  $(x, x') \in A \times A$ , resulta de 1.2.53 que

$$\begin{aligned} d(f(y), f(y')) &= \lim_{(x, x') \rightarrow (y, y')} d(f(x), f(x')) \leq \\ &\leq \lim_{(x, x') \rightarrow (y, y')} M d(x, x') = M d(y, y'). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, no caso em que  $f$  é isométrica,

$$\begin{aligned} d(f(y), f(y')) &= \lim_{(x, x') \rightarrow (y, y')} d(f(x), f(x')) = \\ &= \lim_{(x, x') \rightarrow (y, y')} d(x, x') = d(y, y'). \end{aligned} \quad \square$$

Vamos agora examinar um método de obter espaços métricos completos a partir de outros que não o são necessariamente.

**1.7.28 (Completado dum espaço métrico)** Seja  $X$  um espaço métrico. Diz-se que um espaço métrico  $\widehat{X}$  é um *completado* de  $X$  definido pela aplicação  $f: X \rightarrow \widehat{X}$  se  $\widehat{X}$  é completo,  $f$  é uma aplicação isométrica (cf. 1.4.8) e  $f(X)$  é um subconjunto denso de  $\widehat{X}$ .

**1.7.29 (Propriedade fundamental do completado)** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $\widehat{X}$  um completado de  $X$  definido pela aplicação  $f: X \rightarrow \widehat{X}$ . Sejam  $Y$  um espaço métrico completo e  $g: X \rightarrow Y$  uma aplicação uniformemente contínua. Existe então uma, e uma só, aplicação contínua  $\widehat{g}: \widehat{X} \rightarrow Y$  tal que  $\widehat{g}(f(x)) = g(x)$  para cada  $x \in X$  e esta aplicação contínua é mesmo uniformemente contínua. Além disso, se  $g$  for uma aplicação isométrica então  $\widehat{g}$  é também uma aplicação isométrica.

**Dem:** Uma vez que  $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$  é uma isometria, em particular uniformemente contínua, podemos considerar a aplicação uniformemente contínua  $g \circ f^{-1}: f(X) \rightarrow Y$  existindo então, por 1.7.27, uma única aplicação contínua  $\widehat{g}: \widehat{X} \rightarrow Y$  cuja restrição a  $f(X)$  seja  $g \circ f^{-1}$ , aplicação essa que é mesmo uniformemente contínua e é isométrica no caso em que  $g$ , e portanto  $g \circ f^{-1}$ , é isométrica. Tudo o que temos agora que reparar é que a condição de  $\widehat{g}$  ter restrição  $g \circ f^{-1}$  a  $f(X)$  é equivalente à de se ter  $\widehat{g}(f(x)) = g(x)$  para cada  $x \in X$ .  $\square$

**1.7.30 (“Unicidade” do completado)** Sejam  $X$  um espaço métrico e  $\widehat{X}_1$  e  $\widehat{X}_2$  dois completados de  $X$  definidos pelas aplicações  $f_1: X \rightarrow \widehat{X}_1$  e  $f_2: X \rightarrow \widehat{X}_2$ , respetivamente. Tem-se então que a única aplicação contínua  $g: \widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}_2$  tal que  $g \circ f_1 = f_2$  é uma isometria de  $\widehat{X}_1$  sobre  $\widehat{X}_2$  tendo como inversa a única aplicação contínua  $h: \widehat{X}_2 \rightarrow \widehat{X}_1$  tal que  $h \circ f_2 = f_1$ .

**Dem:** A existência e unicidade de uma aplicação contínua  $g: \widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}_2$  tal que  $g \circ f_1 = f_2$  e o facto de  $g$  ser uma aplicação isométrica resulta de  $\widehat{X}_1$  ser um completado de  $X$  definido por  $f_1$  e de  $\widehat{X}_2$  ser completo, tendo em conta 1.7.29. O mesmo resultado e o facto de  $\widehat{X}_2$  ser também um completado de  $X$  definido por  $f_2$  e de  $\widehat{X}_1$  ser completo implica a existência e unicidade de uma aplicação contínua  $h: \widehat{X}_2 \rightarrow \widehat{X}_1$  tal que  $h \circ f_2 = f_1$  e o facto de  $h$  ser uma aplicação isométrica. Uma vez que  $h \circ g: \widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}_1$  é uma aplicação contínua  $\widehat{X}_1 \rightarrow \widehat{X}_1$  tal que

$$(h \circ g) \circ f_1 = h \circ (g \circ f_1) = h \circ f_2 = f_1 = Id_{\widehat{X}_1} \circ f_1$$

implica, pela parte de unicidade de 1.7.29, que  $h \circ g = Id_{\widehat{X}_1}$ . Do mesmo modo se verifica que  $g \circ h = Id_{\widehat{X}_2}$  o que mostra que  $g$  é bijetivo e tem  $h$  como aplicação inversa.  $\square$

**1.7.31 (Exemplos triviais de completado)** Sejam  $\widehat{X}$  um espaço métrico completo e  $X \subset \widehat{X}$  um subconjunto denso. Tem-se então que  $\widehat{X}$  é um completado de  $X$  definido pela inclusão  $\iota: X \rightarrow \widehat{X}$ . Em particular, se  $\widehat{X}$  é um

espaço métrico completo então  $\widehat{X}$  é um completado de si mesmo definido pela aplicação identidade  $Id: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$ .

**1.7.32 (Construção geral de um completado)** Seja  $X$  um espaço métrico não vazio.<sup>110</sup> Seja  $x_0 \in X$  um elemento fixado. Tem-se então:

**a)** Para cada  $x \in X$  tem lugar uma aplicação limitada  $f_x \in \mathbb{B}(X, \mathbb{R})$  definida por

$$f_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y),$$

para a qual se tem  $|f_x(y)| \leq d(x, x_0)$  para todo  $y \in X$ .

**b)** Considerando em  $\mathbb{B}(X, \mathbb{R})$  a métrica da convergência uniforme  $d_\infty$  (cf. 1.1.20), tem lugar uma aplicação isométrica  $\Phi: X \rightarrow \mathbb{B}(X, \mathbb{R})$  definida por  $\Phi(x) = f_x$ .

**c)** Sendo  $\widehat{X}$  a aderência de  $\Phi(X)$  em  $\mathbb{B}(X, \mathbb{R})$ , tem-se então que  $\Phi$  define  $\widehat{X}$  como um completado de  $X$ .

**Dem:** Tendo em conta 1.1.3, podemos escrever

$$|f_x(y)| = |d(x, y) - d(x_0, y)| \leq d(x, x_0),$$

o que mostra, em particular que a aplicação  $f_x: X \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada, por ter imagem contida na bola fechada de  $\mathbb{R}$  de centro 0 e raio  $d(x, x_0)$ . Sejam agora  $x, x' \in X$ . Para cada  $y \in X$ , tem-se mais uma vez por 1.1.3,

$$\begin{aligned} |f_x(y) - f_{x'}(y)| &= |(d(x, y) - d(x_0, y)) - (d(x', y) - d(x_0, y))| = \\ &= |d(x, y) - d(x', y)| \leq d(x, x') \end{aligned}$$

e, para  $y = x'$ , vem

$$\begin{aligned} |f_x(x') - f_{x'}(x')| &= |(d(x, x') - d(x_0, x')) - (d(x', x') - d(x_0, x'))| = \\ &= d(x, x') \end{aligned}$$

o que mostra que

$$d_\infty(f_x, f_{x'}) = \sup_{y \in X} |f_x(y) - f_{x'}(y)| = d(x, x').$$

Fica assim justificado o facto de a aplicação  $\Phi$  ser isométrica de  $X$  para  $\mathbb{B}(X, \mathbb{R})$ . Uma vez que o espaço métrico  $\mathbb{B}(X, \mathbb{R})$  é completo (cf. 1.7.11) e portanto o subconjunto fechado  $\widehat{X}$  de  $\mathbb{B}(X, \mathbb{R})$ , aderência de  $\Phi(X)$ , também é completo e uma vez que  $\Phi(X)$  é evidentemente denso na sua aderência  $\widehat{X}$ , concluímos que  $\widehat{X}$  é efetivamente um completado de  $X$  definido pela aplicação  $\Phi$ .  $\square$

Passamos agora ao estudo de outras noções e propriedades envolvendo a compacidade no contexto dos espaços métricos.

<sup>110</sup>O espaço métrico vazio é completo, e portanto um completado de si mesmo.

**1.7.33 (Número de Lebesgue numa cobertura aberta)** Sejam  $X$  um espaço métrico compacto e  $(U_j)_{j \in J}$  uma cobertura aberta de  $X$ , isto é, uma família de abertos de  $X$  cuja união é  $X$  (cf. 1.6.36). Existe então  $\delta > 0$  tal que qualquer conjunto limitado não vazio  $A \subset X$  com  $\text{diam}(A) \leq \delta$  está contido nalgum dos conjuntos  $U_j$ . A um número  $\delta > 0$  nestas condições dá-se o nome de *número de Lebesgue* da cobertura aberta.

**Dem:** Podemos afastar já o caso trivial em que  $X = \emptyset$ , caso em que basta tomar  $\delta > 0$  arbitrário. Para cada  $a \in X$  consideremos  $j_a \in J$  tal que  $a \in U_{j_a}$  e  $\delta_a > 0$  tal que  $B_{\delta_a}(a) \subset U_{j_a}$ . Uma vez que a união das bolas abertas  $B_{\delta_a/2}(a)$ , com  $a \in X$ , é igual a  $X$ , a propriedade das coberturas em 1.6.36 garante a existência de um número finito de pontos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de  $X$  tal que

$$X = B_{\delta_{a_1}/2}(a_1) \cup B_{\delta_{a_2}/2}(a_2) \cup \dots \cup B_{\delta_{a_n}/2}(a_n).$$

Seja  $\delta > 0$  o menor dos  $n$  números  $\delta_{a_1}/2, \delta_{a_2}/2, \dots, \delta_{a_n}/2$ . Seja então  $A \subset X$  um conjunto limitado não vazio com  $\text{diam}(A) \leq \delta$ . Podemos então escolher um elemento  $x_0 \in A$  fixado e considerar  $1 \leq k \leq n$  tal que  $x_0 \in B_{\delta_{a_k}/2}(a_k)$ . Tem-se então, para cada  $x \in A$ ,  $d(x_0, x) \leq \delta$  donde

$$d(a_k, x) \leq d(a_k, x_0) + d(x_0, x) < \delta_{a_k}/2 + \delta \leq \delta_{a_k},$$

o que mostra que  $x \in B_{\delta_{a_k}}(a_k) \subset U_{j_{a_k}}$ . Provámos assim que  $A \subset U_{j_{a_k}}$ .  $\square$

**1.7.34 (Conjuntos totalmente limitados)** Seja  $X$  um espaço métrico. Diz-se que um subconjunto  $A \subset X$  é *totalmente limitado* se, qualquer que seja  $r > 0$ ,  $A$  está contido nalguma união de um número finito de bolas abertas de raio  $r$  e centro em  $X$ , isto é, existem pontos  $a_1, a_2, \dots, a_k \in X$  (onde  $k \geq 0$ ) tais que

$$A \subset B_r(a_1) \cup B_r(a_2) \cup \dots \cup B_r(a_k).^{111}$$

Aos conjuntos totalmente limitados também se dá o nome de *precompactos*. Diz-se que o espaço métrico  $X$  é *totalmente limitado* se o for enquanto subconjunto de  $X$ .

**1.7.35** Seja  $X$  um espaço métrico. Tem-se então:

- Se  $A \subset X$  é um conjunto compacto, então  $A$  é um subconjunto totalmente limitado. Em particular, o conjunto vazio é totalmente limitado.
- Se  $A \subset X$  é um subconjunto totalmente limitado e  $A' \subset A$ , então  $A'$  é também um subconjunto totalmente limitado.
- Se  $A \subset X$  e  $A' \subset X$  são subconjuntos totalmente limitados então  $A \cup A'$  é também um subconjunto totalmente limitado. Em consequência toda a união finita de subconjuntos totalmente limitados é ainda totalmente limitado.

<sup>111</sup>O facto de permitirmos que se tenha  $k = 0$  destina-se a garantir que  $\emptyset$  é um subconjunto totalmente limitado, mesmo no caso em que  $X = \emptyset$ .



**d)** Se  $A \subset X$  é um subconjunto totalmente limitado então a sua aderência  $\text{ad}(A)$  é também um subconjunto totalmente limitado.

**Dem: a)** Dado  $r > 0$ , a classe das bolas abertas  $B_r(a)$ , com  $a \in X$ , constitui uma cobertura aberta de  $A$  e portanto a propriedade das coberturas em 1.6.36 garante a existência de um número finito destas, portanto as correspondentes a pontos  $a_1, \dots, a_k$ , tais que

$$A \subset B_r(a_1) \cup B_r(a_2) \cup \dots \cup B_r(a_k).$$

**b)** Temos uma consequência imediata de que, se o conjunto  $A$  está contido numa união

$$B_r(a_1) \cup B_r(a_2) \cup \dots \cup B_r(a_k),$$

o mesmo vai acontecer ao conjunto  $A'$ .

**c)** Dado  $r > 0$  arbitrário, podemos considerar pontos  $a_1, \dots, a_k$  e  $b_1, \dots, b_\ell$  de  $X$  tais que

$$A \subset B_r(a_1) \cup B_r(a_2) \cup \dots \cup B_r(a_k),$$

$$A' \subset B_r(b_1) \cup B_r(b_2) \cup \dots \cup B_r(b_\ell),$$

e então  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$  constituem um conjunto finito de pontos para os quais

$$A \cup A' \subset B_r(a_1) \cup \dots \cup B_r(a_k) \cup B_r(b_1) \cup \dots \cup B_r(b_\ell).$$

**d)** Seja  $r > 0$  arbitrário. Consideremos pontos  $a_1, \dots, a_k \in X$  tais que

$$A \subset B_{r/2}(a_1) \cup \dots \cup B_{r/2}(a_k).$$

Para cada  $1 \leq j \leq k$ , a bola fechada  $\overline{B}_{r/2}(a_j)$  é um conjunto fechado que contém  $B_{r/2}(a_j)$  e está contido em  $B_r(a_j)$  (cf. a alínea a) de 1.2.20) pelo que  $A$  está contido no conjunto fechado  $\overline{B}_{r/2}(a_1) \cup \dots \cup \overline{B}_{r/2}(a_k)$ , o que implica que

$$\text{ad}(A) \subset \overline{B}_{r/2}(a_1) \cup \dots \cup \overline{B}_{r/2}(a_k) \subset B_r(a_1) \cup \dots \cup B_r(a_k). \quad \square$$

**1.7.36 (Subconjuntos totalmente limitados e métricas induzidas)** Seja  $X$  um espaço métrico. Um subconjunto  $A \subset X$  é totalmente limitado se, e só se, quando munido da métrica induzida, for um espaço métrico totalmente limitado ou seja, se, e só se, qualquer que seja  $r > 0$   $A$  estiver contido numa união finita de bolas abertas de raio  $r$  com centro em  $A$ , isto é, existirem pontos  $a_1, \dots, a_k$  em  $A$  (e não só em  $X$  como na definição em 1.7.34) tais que

$$A \subset B_r(a_1) \cup \dots \cup B_r(a_k).$$

**Dem:** Começemos por reparar que, uma vez que para cada  $a \in A$  e  $r > 0$  a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$  do subespaço métrico  $A$  é igual a  $A \cap B_r(a)$ ,

dizer que  $A$  é um espaço métrico totalmente limitado equivale a dizer que, para cada  $r > 0$  existem pontos  $a_1, \dots, a_k$  em  $A$  tais que

$$A = (A \cap B_r(a_1)) \cup \dots \cup (A \cap B_r(a_k)),$$

condição que é equivalente a

$$A \subset B_r(a_1) \cup \dots \cup B_r(a_k).$$

Suponhamos agora que  $A$ , com a métrica induzida, é um espaço métrico totalmente limitado. Dado  $r > 0$ , podemos considerar pontos  $a_1, \dots, a_k$  em  $A$ , em particular em  $X$ , tais que

$$A \subset B_r(a_1) \cup \dots \cup B_r(a_k)$$

o que mostra que  $A$  é um subconjunto totalmente limitado de  $X$ .

Suponhamos, reciprocamente, que  $A$  é um subconjunto totalmente limitado de  $X$  e seja  $r > 0$  arbitrário. Consideremos pontos  $a_1, \dots, a_k \in X$  tais que

$$A \subset B_{r/2}(a_1) \cup \dots \cup B_{r/2}(a_k),$$

reparando que não podemos garantir agora que estes pontos pertençam a  $A$ . Podemos já supor que  $A \cap B_{r/2}(a_j) \neq \emptyset$  para cada  $j$ , dispensando os pontos  $a_j$  para os quais isso não aconteça, o que não prejudica a inclusão acima. Para cada  $1 \leq j \leq k$  escolhamos então um ponto  $b_j$  em  $A \cap B_{r/2}(a_j)$  e reparemos que se tem

$$B_{r/2}(a_j) \subset B_r(b_j),$$

visto que se  $x \in B_{r/2}(a_j)$  vem

$$d(x, b_j) \leq d(x, a_j) + d(a_j, b_j) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

portanto  $x \in B_r(b_j)$ . Deduzimos daqui que

$$A \subset B_r(b_1) \cup \dots \cup B_r(b_k),$$

o que mostra que  $A$ , com a métrica induzida, é um espaço métrico totalmente limitado.<sup>112</sup>  $\square$

**1.7.37 (Compactos e totalmente limitados)** Um espaço métrico  $X$  é compacto se, e só se, é totalmente limitado e completo.

**Dem:** Já sabemos que se o espaço métrico  $X$  é compacto então é totalmente limitado e completo (cf. a alínea a) de 1.7.35 e 1.7.9).

Para provar a recíproca, vamos verificar que se  $X$  é um espaço métrico

<sup>112</sup>O leitor poderá perguntar-se porque razão não se exigiu na definição de subconjunto totalmente limitado em 1.7.34 que os centros das bolas abertas pertencessem ao subconjunto, o que tornaria esta demonstração praticamente trivial. A explicação está em que a propriedade elementar referida na alínea b) de 1.7.35 ficaria então com uma demonstração menos simples.

totalmente limitado e não compacto então  $X$  não é completo e, para isso, vamos verificar a existência de uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de Cauchy de elementos de  $X$  que não tem limite. Dividimos essa verificação em várias alíneas:

**1)** Pela propriedade das coberturas em 1.6.36, o facto de  $X$  não ser compacto permite-nos considerar uma família  $(U_j)_{j \in J}$  de abertos de  $X$  de união  $X$  sem subcobertura finita, isto é, tal que qualquer união finita de tais abertos seja diferente de  $X$ .

**2)** Vamos construir recursivamente, para cada inteiro  $n \geq 0$ , um elemento  $x_n \in X$  de modo que: **a)** A bola aberta  $B_{1/2^n}(x_n)$  não esteja contida em nenhuma união finita de abertos  $U_j$ ; **b)** Para cada  $n \geq 0$ ,

$$x_{n+1} \in B_{1/2^n}(x_n).$$

Para construir  $x_0$  atendemos a que, por  $X$  ser totalmente limitado, podemos considerar um número finito de bolas abertas de centro em  $X$  e raio 1 cuja união seja  $X$  e tomamos para  $x_0$  o centro de uma dessas bolas abertas, escolhida de modo que  $B_1(x_0)$  não esteja contida em nenhuma união finita de abertos  $U_j$  (se cada uma dessas bolas abertas estivesse contida nalguma união finita de abertos  $U_j$  então  $X$ , que é uma união finita de tais bolas, seria uma união finita de abertos  $U_j$ , contrariando a hipótese em 1)). Suponhamos agora que já definimos os elementos  $x_j$  com  $1 \leq j \leq n$  verificando as condições a) e b). Uma vez que  $B_{1/2^n}(x_n)$  é um subconjunto totalmente limitado de  $X$  (cf. a alínea b) de 1.7.35) deduzimos de 1.7.36 e existência de um número finito de bolas abertas de raio  $1/2^{n+1}$  e de centro em  $B_{1/2^n}(x_n)$  cuja união contenha  $B_{1/2^n}(x_n)$ . Tomamos enfim para  $x_{n+1}$  o centro de uma dessas bolas abertas, escolhida de modo que  $B_{1/2^{n+1}}(x_{n+1})$  não esteja contido em nenhuma união finita de abertos  $U_j$  (se cada uma dessas bolas estivesse contida nalguma união finita de abertos  $U_j$  então  $B_{1/2^n}(x_n)$ , que está contido numa união finita de tais bolas, estaria contido numa união finita de abertos  $U_j$ , contrariando a hipótese em a) para o ponto  $x_n$ ). Fica assim terminada a construção recursiva dos elementos  $x_n$ .

**3)** Uma vez que  $d(x_n, x_{n+1}) < 1/2^n$ , o lema 1.7.15 garante que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de Cauchy. Vamos verificar agora que esta sucessão não tem limite o que terminará a prova de que o espaço métrico  $X$  não é completo. Seja então  $a \in X$  arbitrário. Seja  $j_0 \in J$  tal que  $a \in U_{j_0}$  e seja  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$B_{\frac{1}{2^{n_0}}}(a) \subset U_{j_0}.$$

Vamos mostrar que para cada  $n \geq n_0 + 1$  tem-se

$$x_n \notin B_{\frac{1}{2^{n_0+1}}}(a),$$

o que implicará que a sucessão não admite  $a$  como limite. Ora, se isso não acontecesse, vinha

$$B_{\frac{1}{2^n}}(x_n) \subset B_{\frac{1}{2^{n_0}}}(a) \subset U_{j_0},$$

visto que para cada  $x \in B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$  tinha-se

$$d(x, a) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n_0+1}} \leq \frac{1}{2^{n_0}},$$

e a inclusão referida era absurda visto que, pela condição a) da definição recursiva dos  $x_n$ , a bola  $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$  não pode estar contida em nenhuma união finita de conjuntos  $U_j$ .  $\square$

Vamos agora examinar algumas aplicações da caracterização anterior dos espaços métricos compactos.

**1.7.38 (Espaços topológicos sequencialmente compactos)** Diz-se que um espaço topológico  $X$  é *sequencialmente compacto* se qualquer  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $X$  tem algum sublimite estrito (cf. 1.6.2).

Note-se que não há, em geral, nenhuma relação de implicação entre a compacidade e a compacidade sequencial de um espaço topológico: Num espaço topológico compacto qualquer  $\mathbb{N}$ -sucessão tem certamente algum sublimite mas poderá não ter sublimite estrito (cf. o exercício 1.7.8 adiante) e, por outro lado, a compacidade sequencial implica que qualquer  $\mathbb{N}$ -sucessão tem sublimite mas não necessariamente que qualquer aplicação tenha sublimite num ponto aderente ao seu domínio (cf. o exercício 1.7.7 adiante). Vamos verificar que no quadro dos espaços métricos as duas noções já são equivalentes.

**1.7.39 (Compacidade e compacidade sequencial nos espaços métricos)** Um espaço métrico  $X$  é compacto se, e só se, é sequencialmente compacto.

**Dem:** Se o espaço métrico  $X$  é compacto então qualquer  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $X$  admite algum sublimite  $b \in X$  (os sublimites das  $\mathbb{N}$ -sucessões são os seus sublimites, enquanto aplicação de domínio  $\mathbb{N}$  quando  $n \rightarrow +\infty$ ) e, como verificámos em 1.6.15,  $b$  é então mesmo um sublimite estrito, o que mostra que  $X$  é sequencialmente compacto.

Suponhamos, reciprocamente, que o espaço métrico  $X$  é sequencialmente compacto. Vamos utilizar 1.7.37 para mostrar que  $X$  é compacto, isto é, vamos mostrar que  $X$  é completo e totalmente limitado.

Em primeiro lugar, se  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de Cauchy, ela vai admitir um sublimite estrito  $b \in X$ , que é, em particular um sublimite e portanto, tendo em conta 1.7.6, tem-se mesmo  $x_n \rightarrow b$ . Tendo em conta 1.7.8, concluímos que  $X$  é efetivamente completo.

Para verificarmos que  $X$  é totalmente limitado vamos raciocinar por absurdo, supondo que isso não acontecia. Seja então  $r > 0$  tal que  $X$  não seja união

finita de bolas abertas de raio  $r$ . Podemos então construir recursivamente uma  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tomando  $x_1 \in X$  arbitrário e, conhecidos  $x_1, \dots, x_n$ , escolhendo  $x_{n+1}$  pela condição de se ter

$$x_{n+1} \notin B_r(x_1) \cup B_r(x_2) \cup \dots \cup B_r(x_n).$$

Para esta  $\mathbb{N}$ -sucessão tem-se  $d(x_m, x_n) \geq r$  sempre que  $m \neq n$  pelo que não admite sublimite estrito, já que a sua restrição a qualquer parte infinita de  $\mathbb{N}$  não pode ter limite, por não verificar a condição de Cauchy quando  $n \rightarrow +\infty$ . Uma vez que estamos a supor  $X$  sequencialmente compacto, obtivemos assim a contradição pretendida.  $\square$

**1.7.40 (Separabilidade dos espaços métricos compactos)** Se  $X$  é um espaço métrico compacto (ou, mais geralmente, totalmente limitado) então  $X$  é de base contável, e portanto também separável.

**Dem:** Para cada natural  $n$ , consideremos um número finito de pontos  $a_{n,1}, \dots, a_{n,N_n}$  tais que  $X$  seja a união das bolas abertas  $B_{1/n}(a_{n,j})$  com  $1 \leq j \leq N_n$ . Vamos verificar que o conjunto contável de todas estas bolas abertas, para os diferentes  $n$  e  $j$ , constitui uma base de abertos de  $X$ , o que mostrará que  $X$  é de base contável, e portanto também separável (cf. 1.3.26). Ora, se  $U$  é um aberto de  $X$  e  $a \in U$ , podemos considerar  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(a) \subset U$  e, sendo então  $n$  tal que  $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$ , podemos considerar  $j$  tal que  $a \in B_{1/n}(a_{n,j})$ , tendo-se então

$$B_{1/n}(a_{n,j}) \subset B_\delta(a) \subset U$$

já que, se  $x \in B_{1/n}(a_{n,j})$  vem

$$d(a, x) \leq d(a, a_{n,j}) + d(a_{n,j}, x) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \delta. \quad \square$$

Vamos agora examinar o teorema de Ascoli que estabelece, em particular, a compacidade de certos subconjuntos dos espaços métricos funcionais  $\mathcal{C}(X, Y)$ , onde  $Y$  é um espaço métrico e  $X$  é um espaço topológico compacto e não vazio (cf. 1.7.14).

**1.7.41 (Conjuntos equicontínuos de aplicações)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $Y$  um espaço métrico. Diz-se que um conjunto de aplicações  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}p(X, Y)$  é *equicontínuo no ponto*  $x_0 \in X$  se para cada  $\delta > 0$  existir uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que para cada  $f \in \mathcal{A}$  e  $x \in V$  se tenha  $d(f(x), f(x_0)) < \delta$ . Diz-se que  $\mathcal{A}$  é *equicontínuo* se for equicontínuo em cada ponto  $x_0 \in X$ .

Se  $\mathcal{A}$  for equicontínuo em  $x_0$  então, evidentemente, cada  $f \in \mathcal{A}$  é contínua em  $x_0$ . Reciprocamente, se  $f$  é uma aplicação contínua em  $x_0$  então  $\{f\}$  é equicontínuo em  $x_0$ .

Repare-se ainda que se  $\mathcal{A} \subset Ap(X, Y)$  é equicontínuo em  $x_0$  e  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  então  $\mathcal{A}'$  é trivialmente ainda equicontínuo em  $x_0$ .

**1.7.42 (União de equicontínuos)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $Y$  um espaço métrico. Se  $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subset Ap(X, Y)$  são equicontínuos em  $x_0$  então  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  é equicontínuo em  $x_0$ .

Em consequência uma união finita de subconjuntos de  $Ap(X, Y)$  equicontínuos em  $x_0$  é ainda equicontínuo em  $x_0$ .

Em particular, e uma vez que o conjunto vazio de aplicações é trivialmente equicontínuo, podemos garantir que um conjunto finito de aplicações contínuas em  $x_0$  é equicontínuo em  $x_0$ .

**Dem:** Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  são equicontínuos em  $x_0$  então dado  $\delta > 0$  podemos considerar vizinhanças  $V$  e  $V'$  de  $x_0$  em  $X$  tais que para cada  $f \in \mathcal{A}$  e  $x \in V$  se tenha  $d(f(x), f(x_0)) < \delta$  e para cada  $x \in V'$  e  $f \in \mathcal{A}'$  se tenha  $d(f(x), f(x_0)) < \delta$ . Tem-se então que  $V \cap V'$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $X$  tal que para cada  $x \in V \cap V'$  e  $f \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  vem  $d(f(x), f(x_0)) < \delta$ , o que mostra que  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  é equicontínuo em  $x_0$ .  $\square$

**1.7.43 (Aderência de um equicontínuo para a topologia da convergência simples)** Sejam  $X$  um espaço topológico não vazio e  $Y$  um espaço métrico e consideremos em  $Ap(X, Y)$  a topologia da convergência simples (cf. 1.2.82). Se  $\mathcal{A} \subset Ap(X, Y)$  for um conjunto de aplicações equicontínuo num ponto  $x_0 \in X$ , então a sua aderência  $\text{ad}(\mathcal{A})$  é também um conjunto equicontínuo em  $x_0$ .<sup>113</sup>

**Dem:** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Consideremos uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que para cada  $g \in \mathcal{A}$  e cada  $x \in V$  se tenha  $d(g(x), g(x_0)) < \frac{\delta}{3}$ . Suponhamos agora que  $f \in \text{ad}(\mathcal{A})$  e que  $x \in V$ . Consideremos a vizinhança  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(f)$  (definição em 1.2.82, agora com notação funcional) onde  $\mathcal{U} = (U_{x'})_{x' \in X}$  é a família com  $U_{x_0} = B_{\delta/3}(f(x_0))$ ,  $U_x = B_{\delta/3}(f(x))$  e  $U_{x'} = X$  para cada  $x'$  diferente de  $x_0$  e de  $x$ . Escolhendo  $g \in \mathcal{A}$  na vizinhança  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(f)$  tem-se então

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(x_0)) + d(g(x_0), g(x)) < \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que  $\text{ad}(\mathcal{A})$  é também equicontínuo em  $x_0$ .  $\square$

**1.7.44 (Teorema de Ascoli)** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto e não vazio e  $Y$  um espaço métrico. Seja

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, Y) \subset Ap(X, Y)$$

um subconjunto equicontínuo. Tem-se então:

<sup>113</sup>É claro que, como a topologia da convergência uniforme de  $Ap(X, Y)$  é mais fina que a topologia da convergência simples (cf. 1.2.83), a aderência de  $\mathcal{A}$  para a topologia da convergência uniforme está contida na aderência de  $\mathcal{A}$  para a topologia da convergência simples e portanto também é um conjunto equicontínuo em  $x_0$ .

**a)** As topologias induzidas em  $\mathcal{A}$  pelas topologias da convergência simples e da convergência uniforme de  $Ap(X, Y)$  coincidem.

**b)** As aderências de  $\mathcal{A}$  em  $Ap(X, Y)$  para as topologias da convergência simples e da convergência uniforme coincidem, estão contidas em  $\mathcal{C}(X, Y)$  e, tal como  $\mathcal{A}$ , são equicontínuas (notaremos  $\text{ad}(\mathcal{A})$  essas aderências).

**c)** Se para cada  $x \in X$  o subconjunto  $\mathcal{A}(x) \subset Y$ , dos  $f(x)$  com  $f \in \mathcal{A}$ , estiver contido nalgum compacto  $K_x \subset Y$ , então  $\text{ad}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(X, Y)$  é compacto para a topologia induzida pela da convergência uniforme, que coincide com a definida pela da convergência simples (lembramos a propósito que, como se verificou em 1.7.14, essa topologia é a associada à métrica  $d_\infty$ ).<sup>114</sup>

**d)** Se  $(f_j)_{j \in J}$  for uma sucessão generalizada de elementos de  $\mathcal{A}$  e se, para cada  $x \in X$ ,  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  em  $Y$  então a aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é contínua e tem-se  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  para a topologia da convergência uniforme.<sup>115</sup>

**Dem:** **a)** Uma vez que a topologia da convergência uniforme de  $Ap(X, Y)$  é mais fina que a da convergência simples, isto é, a aplicação identidade é contínua da primeira para a segunda (cf. 1.2.83 e 1.4.11), concluímos que a aplicação identidade de  $\mathcal{A}$  é contínua da topologia da convergência uniforme para a da convergência simples. Para mostrar que estas topologias de  $\mathcal{A}$  coincidem bastará assim provar que a identidade de  $\mathcal{A}$  também é contínua da topologia da convergência simples para a da convergência uniforme. Sejam então  $f \in \mathcal{A}$  e  $\mathcal{V}$  uma vizinhança de  $f$  para a topologia induzida em  $\mathcal{A}$  pela da convergência uniforme. Existe assim  $\delta > 0$  tal que, para cada  $g \in \mathcal{A}$  com  $d(f(x), g(x)) < \delta$  para cada  $x \in X$ , tem-se  $g \in \mathcal{V}$ . Para cada  $x \in X$  consideremos uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  em  $X$  tal que para cada  $x' \in U_x$  e  $g \in \mathcal{A}$  se tenha  $d(g(x), g(x')) < \frac{\delta}{3}$ . Uma vez que os interiores dos  $U_x$  constituem uma cobertura aberta do compacto  $X$  a propriedade das coberturas (cf. 1.6.36) permite-nos considerar uma parte finita  $I$  de  $X$  tal que  $X$  seja a união dos  $U_x$  com  $x \in I$ . Vemos agora que para cada  $g \in \mathcal{A}$  tal que  $g(x) \in B_{\delta/3}(f(x))$  para cada  $x \in I$  (o conjunto de tais  $g$  constitui uma vizinhança de  $f$  em  $\mathcal{A}$  para a topologia induzida pela da convergência simples), podemos escolher para cada  $x' \in X$  um elemento  $x \in I$  tal que  $x' \in U_x$ , e vem

$$\begin{aligned} d(f(x'), g(x')) &\leq d(f(x'), f(x)) + d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(x')) < \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

donde  $g \in \mathcal{V}$ . Ficou assim provado que  $\mathcal{V}$  é efetivamente uma vizinhança de

<sup>114</sup>Para uma propriedade essencialmente recíproca desta ver o exercício 1.7.14, no fim desta secção.

<sup>115</sup>Este resultado pode ser trivialmente generalizado substituindo o limite de sucessões generalizadas pelo limite de aplicações definidas numa parte dum espaço topológico  $Z$  e com valores em  $\mathcal{C}(X, Y)$  mas escolhemos sublinhar este caso particular por ele aparecer habitualmente referido a propósito do teorema de Ascoli.

$f$  para a topologia induzida em  $\mathcal{A}$  pela da convergência simples.

**b)** Uma vez que a identidade de  $Ap(X, Y)$  é contínua da topologia da convergência uniforme para a topologia da convergência simples, a aderência de  $\mathcal{A}$  para a topologia da convergência uniforme está contida na aderência  $\text{ad}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  em  $Ap(X, Y)$  para a topologia da convergência simples, aderência essa que, como verificámos em 1.7.43, é um conjunto equicontínuo, em particular contido em  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Notamos enfim que que cada  $f \in \text{ad}(\mathcal{A})$  também é aderente a  $\mathcal{A}$  para a topologia da convergência uniforme uma vez que, pelo que verificámos em a), o facto de  $\text{ad}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(X, Y)$  também ser equicontínuo implica que em  $\text{ad}(\mathcal{A})$  coincidem a topologia da convergência uniforme e a da convergência simples.

**c)** Lembrando que a topologia da convergência simples de  $Ap(X, Y)$  coincide com a topologia produto (cf. a alínea c) das notas 1.5.14), o teorema de Tichonoff em 1.6.34 garante que é compacto, em particular fechado, em  $Ap(X, Y)$ , com a topologia da convergência simples, o conjunto  $\mathcal{K}$  dos  $f \in Ap(X, Y)$  tais que  $f(x) \in K_x$  para cada  $x \in X$ . Uma vez que, por hipótese,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$  concluímos que  $\text{ad}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}$  e portanto que  $\text{ad}(\mathcal{A})$  é compacto para a topologia da convergência simples, que coincide com a da convergência uniforme por  $\text{ad}(\mathcal{A})$  também ser equicontínuo.

**d)** A hipótese diz-nos que  $f_j \rightarrow f$  em  $Ap(X, Y)$  para a topologia da convergência simples, em particular  $f$  é aderente a  $\mathcal{A}$  para esta topologia e o que vimos em b) garante que  $f$  é contínua e, por  $\text{ad}(\mathcal{A})$  ser equicontínuo, resulta de a) que se tem também  $f_j \rightarrow f$  para a topologia da convergência uniforme.  $\square$

O teorema de Ascoli admite uma versão alternativa que é válida no caso em que o domínio  $X$  envolvido é localmente compacto, à custa de substituir no espaço de aplicações a topologia da convergência uniforme por outra que também é importante para várias aplicações. É essa topologia que passamos agora a definir, não fazendo de início nenhuma hipótese sobre o espaço topológico  $X$ .

**1.7.45 (Topologia da convergência uniforme nos compactos)** Sejam  $X$  um espaço topológico não vazio e  $Y$  um espaço métrico e consideremos o conjunto  $Ap(X, Y)$  das aplicações  $f: X \rightarrow Y$ . Para cada compacto não vazio  $K \subset X$  consideremos no espaço  $Ap(K, Y)$  das aplicações de  $K$  para  $Y$  a topologia da convergência uniforme. Notando  $\mathcal{K}$  o conjunto de tais compactos, tem então lugar uma aplicação injetiva de  $Ap(X, Y)$  para o produto cartesiano

$$\prod_{K \in \mathcal{K}} Ap(K, Y),$$

onde consideramos a topologia produto, que a cada  $f \in Ap(X, Y)$  associa a família das suas restrições  $(f|_K)_{K \in \mathcal{K}}$ , pelo que se pode definir uma topologia



de Hausdorff em  $Ap(X, Y)$ , a *topologia da convergência uniforme nos compactos*, pela condição de aquela aplicação injetiva ser um homeomorfismo sobre a imagem.

**Dem:** A única justificação a fazer é a da injetividade da aplicação de  $Ap(X, Y)$  para o produto cartesiano referido. Ora, se  $f \neq g$ , podemos considerar  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) \neq g(x_0)$  e então  $\{x_0\}$  é um subconjunto compacto de  $X$  tal que  $f_{/\{x_0\}} \neq g_{/\{x_0\}}$ .  $\square$

**1.7.46 (Propriedades fundamentais) a)** Nas condições de 1.7.45, sejam  $Z$  um espaço topológico,  $B \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $B$  e  $\Phi: B \rightarrow Ap(X, Y)$  uma aplicação. Para cada  $K \in \mathcal{K}$  seja  $\Phi_K: B \rightarrow Ap(K, Y)$  a aplicação definida por  $\Phi_K(z) = \Phi(z)_{/K}$ . Tem-se então que  $\Phi(z) \rightarrow f \in Ap(X, Y)$  quando  $z \rightarrow z_0$  se, e só se, para cada  $K \in \mathcal{K}$  for  $\Phi_K(z) \rightarrow f_{/K}$  quando  $z \rightarrow z_0$ .

**b)** Em particular, uma aplicação  $\Phi: Z \rightarrow Ap(X, Y)$  é contínua em  $z_0 \in Z$  se, e só se, cada  $\Phi_K: Z \rightarrow Ap(K, Y)$  for contínua em  $z_0$  para a topologia da convergência uniforme no espaço de chegada.

**c)** Em particular, tendo em conta a continuidade da identidade de  $Ap(X, Y)$ , concluímos a continuidade, para cada  $K \in \mathcal{K}$ , da aplicação de  $Ap(X, Y)$ , com a topologia da convergência uniforme nos compactos, para  $Ap(K, Y)$ , com a topologia da convergência uniforme, que a  $f$  associa  $f_{/K}$ .

**Dem:** O facto de termos um homeomorfismo de  $Ap(X, Y)$  sobre uma parte do produto cartesiano  $\prod_{K \in \mathcal{K}} Ap(K, Y)$  implica trivialmente que uma aplicação

com valores em  $Ap(X, Y)$  tem um dado limite  $f$  se, e só se, a sua composta com aquele homeomorfismo tiver limite  $(f_{/K})_{K \in \mathcal{K}}$  para a topologia produto de  $\prod_{K \in \mathcal{K}} Ap(K, Y)$ . A conclusão de a) resulta assim da caracterização dos

limites de aplicações com valores num produto cartesiano em 1.5.13. As conclusões de b) e de c) são consequências diretas da de a).  $\square$

**1.7.47 (Comparação das topologias)** Nas condições de 1.7.45, a topologia da convergência uniforme de  $Ap(X, Y)$  é mais fina que a topologia da convergência uniforme nos compactos e esta é mais fina que a topologia da convergência simples.

**Dem:** Para verificar que a identidade de  $Ap(X, Y)$  é contínua da topologia da convergência uniforme para a da convergência uniforme nos compactos podemos utilizar a alínea b) de 1.7.46, tendo em conta o facto de, como verificado em 1.4.33, ser contínua para cada  $K \in \mathcal{K}$  a aplicação de  $Ap(X, Y)$  para  $Ap(K, Y)$  que a  $f$  associa  $f_{/K}$ , onde em ambos os espaços se considera a topologia da convergência uniforme. Para mostrar que a identidade de  $Ap(X, Y)$  é contínua da topologia da convergência uniforme nos compactos para a da convergência simples começamos por notar que, uma vez que esta última é a topologia produto, ficamos reduzidos, pela alínea a) de 1.5.15 a mostrar a continuidade, para cada  $x_0 \in X$ , da aplicação de  $Ap(X, Y)$  para  $Y$  que a  $f$  associa  $f(x_0)$  e isso resulta de aplicar a alínea c) de 1.7.46 ao

compacto  $\{x_0\}$  e ter em conta a continuidade da aplicação de  $Ap(\{x_0\}, Y)$  para  $Y$  que associa a cada elemento de  $Ap(\{x_0\}, Y)$  o seu valor em  $x_0$ .  $\square$

**1.7.48 (Continuidade das aplicações de restrição)** Nas condições de 1.7.45, se  $\hat{X} \subset X$  for um subespaço topológico obtemos uma aplicação contínua de  $Ap(X, Y)$  para  $Ap(\hat{X}, Y)$  que a cada  $f$  associa a sua restrição  $f|_{\hat{X}}$ .

**Dem:** Tendo em conta a alínea b) de 1.7.46, para provar a continuidade desta aplicação basta mostrar que para cada compacto  $K \subset \hat{X}$  é contínua a aplicação de  $Ap(X, Y)$  para  $Ap(K, Y)$  que a cada  $f$  associa  $(f|_{\hat{X}})|_K = f|_K$  e isso é uma consequência da alínea c) do mesmo resultado.  $\square$

**1.7.49 (Caracterização das vizinhanças em  $Ap(X, Y)$ )** Nas condições de 1.7.45, um subconjunto  $\mathcal{U} \subset Ap(X, Y)$  é uma vizinhança de  $f_0 \in Ap(X, Y)$  se, e só se, existe  $K \in \mathcal{K}$  e  $r > 0$  tais que

$$\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_{K,r}(f_0) = \{f \in Ap(X, Y) \mid \forall_{x \in K} d(f(x), f_0(x)) < r\}.$$

**Dem:** Dados  $K \in \mathcal{K}$  e  $r > 0$ , o conjunto dos  $g \in Ap(K, Y)$  tais que  $d(g(x), f_0(x)) < r$  para cada  $x \in K$  é uma vizinhança de  $f_0|_K$  para a topologia da convergência uniforme pelo que  $\mathcal{U}_{K,r}(f_0)$ , que é a imagem recíproca deste conjunto pela aplicação contínua na alínea c) de 1.7.46, é uma vizinhança de  $f_0$  para a topologia de  $Ap(X, Y)$  o mesmo acontecendo portanto a qualquer conjunto  $\mathcal{U}$  que contenha  $\mathcal{U}_{K,r}(f_0)$ .

Suponhamos, reciprocamente, que  $\mathcal{U} \subset Ap(X, Y)$  é uma vizinhança de  $f_0 \in Ap(X, Y)$ . Tendo em conta o homeomorfismo de  $Ap(X, Y)$  para  $\prod_{K \in \mathcal{K}} Ap(K, Y)$  utilizado na definição da topologia em 1.7.45 e a

caracterização das vizinhanças para a topologia induzida, vai existir uma vizinhança  $\hat{\mathcal{U}}$  de  $(f_0|_K)_{K \in \mathcal{K}}$  na topologia produto tal que para cada  $f \in Ap(X, Y)$  se tenha  $f \in \mathcal{U}$  se, e só se  $(f|_K)_{K \in \mathcal{K}} \in \hat{\mathcal{U}}$  e daqui decorre, lembrando a caracterização das vizinhanças para a topologia produto em 1.5.13, que existem  $n \geq 1$ ,  $K_1, \dots, K_n$  em  $\mathcal{K}$  e  $r_1, \dots, r_n > 0$  tal que  $\mathcal{U}$  contenha o conjunto dos  $f \in Ap(X, Y)$  tais que para cada  $1 \leq j \leq n$  e cada  $x \in K_j$  se tenha  $d(f(x), f_0(x)) < r_j$ . Sendo agora  $K$  a união dos  $K_j$  que pertence a  $\mathcal{K}$  e  $r > 0$  o menor dos  $r_j$ , vemos agora que  $\mathcal{U}$  contém a vizinhança  $\mathcal{U}_{K,r}(f_0)$  de  $f_0$ .  $\square$

**1.7.50 (O caso em que  $X$  é compacto)** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto e não vazio e  $Y$  um espaço métrico. Tem-se então que a topologia da convergência uniforme nos compactos de  $Ap(X, Y)$  coincide com a topologia da convergência uniforme.

**Dem:** A aplicação identidade de  $Ap(X, Y)$  é contínua da topologia da convergência uniforme nos compactos para a da convergência uniforme tendo em conta a alínea c) de 1.7.46, uma vez que  $X$  é um dos subconjuntos compactos de  $X$ . Para mostrar que essa identidade também é contínua da topologia da convergência uniforme de  $Ap(X, Y)$  para a da convergência

uniforme nos compactos basta, pela alínea b) de 1.7.46, mostrar que para cada  $K \in \mathcal{K}$  é contínua a aplicação de  $Ap(X, Y)$  para  $Ap(K, Y)$  que a  $f$  associa  $f|_K$  e isso resulta da alínea a) de 1.4.33. O facto de a aplicação identidade ser contínua da cada uma das duas topologias para a outra implica que estas coincidem.  $\square$

Para as propriedades da topologia da convergência uniforme nos compactos que examinamos a seguir já será necessária a hipótese de  $X$  ser localmente compacto (de facto, seria suficiente, como se verificará pelas demonstrações, exigir que cada ponto de  $X$  tenha pelo menos uma vizinhança compacta<sup>116</sup>).

**1.7.51 ( $\mathcal{C}(X, Y)$  é fechado em  $Ap(X, Y)$  — comparar com 1.4.32)** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto e não vazio e  $Y$  um espaço métrico. Tem-se então:

**a)** Dado  $x_0 \in X$ , o subconjunto  $\mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  de  $Ap(X, Y)$ , constituído pelas aplicações  $f: X \rightarrow Y$  que são contínuas em  $x_0$ , é fechado em  $Ap(X, Y)$  com a topologia da convergência uniforme nos compactos.

**b)** Em consequência, o subconjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  de  $Ap(X, Y)$ , constituído pelas aplicações que são contínuas, é fechado em  $Ap(X, Y)$  com a topologia da convergência uniforme nos compactos.

**Dem:** **a)** Seja  $K$  uma vizinhança compacta de  $x_0$ . Tem-se então que  $f \in \mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  é contínua em  $x_0$  se, e só se  $f|_K: K \rightarrow Y$  for contínua em  $x_0$ , por outras palavras,  $\mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  é a imagem recíproca de  $\mathcal{C}_{x_0}(K, Y)$  pela aplicação contínua de  $Ap(X, Y)$ , com a topologia da convergência uniforme nos compactos, para  $Ap(K, Y)$ , com a topologia da convergência uniforme, que a  $f$  associa  $f|_K$  (cf. a alínea c) de 1.7.46). Uma vez que, pela alínea a) de 1.4.32,  $\mathcal{C}_{x_0}(K, Y)$  é fechado em  $Ap(K, Y)$ , podemos assim concluir que  $\mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  é fechado em  $Ap(X, Y)$ .

**b)** Temos uma consequência de a) uma vez que o conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  não é mais do que a interseção, para  $x_0 \in X$ , dos conjuntos  $\mathcal{C}_{x_0}(X, Y)$  e uma interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.  $\square$

**1.7.52 (Continuidade da aplicação de avaliação)** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto e não vazio e  $Y$  um espaço métrico e consideremos no espaço  $\mathcal{C}(X, Y)$ , das aplicações contínuas de  $X$  para  $Y$ , a topologia induzida pela da convergência uniforme nos compactos. É então contínua a aplicação de avaliação

$$\xi: \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y, \quad \xi(f, x) = f(x).$$

**Dem:** Provemos a continuidade de  $\xi$  num ponto  $(f_0, x_0) \in \mathcal{C}(X, Y) \times X$ , para o que consideramos  $\delta > 0$  arbitrário. Tendo em conta a continuidade de

<sup>116</sup>Esta observação é importante de modo a podermos incluir os espaços compactos, que só podemos garantir serem localmente compactos quando forem de Hausdorff.

$f_0$  no ponto  $x_0$  e o facto de  $X$  ser localmente compacto, seja  $K$  uma vizinhança compacta de  $x_0$  e  $V$  uma vizinhança de  $x_0$  tal que para cada  $x \in V$  se tenha

$$d(f_0(x), f_0(x_0)) < \frac{\delta}{2}.$$

Considerando a vizinhança  $\mathcal{U}_{K, \delta/2}(f_0)$  de  $f_0$  em  $Ap(K, Y)$  definida em 1.7.49 e a vizinhança  $V \cap K$  de  $x_0$ , vemos agora que para cada  $f \in \mathcal{U}_{K, \delta/2}(f_0) \cap \mathcal{C}(X, Y)$  e  $x \in V \cap K$  tem-se

$$d(f(x), f_0(x_0)) \leq d(f(x), f_0(x)) + d(f_0(x), f_0(x_0)) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

o que prova a continuidade pretendida.  $\square$

**1.7.53 (Aplicações contínuas com valores em  $\mathcal{C}(X, Y)$ )** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto e não vazio e  $Y$  um espaço métrico e consideremos em  $\mathcal{C}(X, Y)$  a topologia induzida pela da convergência uniforme nos compactos. Se  $Z$  é um espaço topológico, uma aplicação  $\varphi: Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$  é contínua num ponto  $z_0 \in Z$  se, e só se, para cada  $a \in X$  for contínua em  $(z_0, a)$  a aplicação  $\hat{\varphi}: Z \times X \rightarrow Y$  definida por

$$\hat{\varphi}(z, x) = \varphi(z)(x).$$

**Dem:** Supondo que  $\varphi$  é contínua em  $z_0$ , a continuidade da correspondente aplicação  $\hat{\varphi}$  em  $(z_0, a)$  resulta de se tratar da composta da aplicação de  $Z \times X$  para  $\mathcal{C}(X, Y) \times X$  que a  $(z, x)$  associa  $(\varphi(z), x)$ , que é contínua em  $(z_0, a)$  com a aplicação de avaliação  $\xi: \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$  em 1.7.52.

Suponhamos, reciprocamente, que a aplicação  $\hat{\varphi}: Z \times X \rightarrow Y$  é contínua em cada  $(z_0, a)$  e provemos a continuidade da aplicação  $\varphi$  em  $z_0$ . Seja  $\mathcal{U}$  uma vizinhança arbitrária de  $\varphi(z_0)$  em  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Tendo em conta a caracterização das vizinhanças em 1.7.49, consideremos um compacto não vazio  $K \subset X$  e  $r > 0$  tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\supset \mathcal{U}_{K, r}(\varphi(z_0)) \cap \mathcal{C}(X, Y) = \\ &= \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid \forall_{x \in K} d(f(x), \varphi(z_0)(x)) < r\}. \end{aligned}$$

Para cada  $a \in K$ , a continuidade de  $\hat{\varphi}$  em  $(z_0, a)$  permite-nos considerar vizinhanças  $V_a$  de  $z_0$  em  $Z$  e  $U_a$  de  $a$  em  $X$  tais que para cada  $z \in V_a$  e  $x \in U_a$  se tenha

$$d(\hat{\varphi}(z, x), \hat{\varphi}(z_0, a)) < \frac{r}{2},$$

em particular também para cada  $x \in U_a$

$$d(\hat{\varphi}(z_0, x), \hat{\varphi}(z_0, a)) < \frac{r}{2},$$

o que implica que para cada  $z \in V_a$  e  $x \in U_a$  vem

$$\begin{aligned} d(\varphi(z)(x), \varphi(z_0)(x)) &\leq d(\widehat{\varphi}(z, x), \widehat{\varphi}(z_0, a)) + d(\widehat{\varphi}(z_0, a), \widehat{\varphi}(z_0, x)) < \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Uma vez que o compacto  $K$  está contido na união dos abertos  $\text{int}(U_a)$  com  $a \in K$ , a propriedade das coberturas em 1.6.36 permite-nos escolher pontos  $a_1, \dots, a_n$  em  $K$  tais que  $K \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$ . Considerando agora a vizinhança  $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$  de  $z_0$  vemos que para cada  $z \in V$  e  $x \in K$  existe  $1 \leq j \leq n$  tal que  $x \in U_{a_j}$  e  $z \in V_{a_j}$  e portanto, como verificado atrás,

$$d(\varphi(z)(x), \varphi(z_0)(x)) < r,$$

ou seja  $\varphi(z) \in \mathcal{U}_{K,r}(\varphi(z_0)) \subset \mathcal{U}$ . □

Examinamos em seguida uma situação em que a topologia da convergência uniforme nos compactos do espaço  $\mathcal{C}(X, Y)$  é metrizável.

**1.7.54 (Metrizabilidade)** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto, não vazio e de base contável e  $Y$  um espaço métrico. Consideremos, tendo em conta 1.6.48, uma sucessão  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de abertos não vazios de  $X$  e uma sucessão  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de compactos de  $X$  tais que  $U_n \subset K_n$ ,  $\bigcup U_n = X$ ,  $U_n \subset U_{n+1}$  e  $K_n \subset K_{n+1}$ . Podemos então considerar uma aplicação de  $Ap(X, Y)$  para  $\prod_{n \in \mathbb{N}} Ap(K_n, Y)$ , onde consideramos a topologia produto das topologias da convergência uniforme, que a  $f$  associa a família  $(f|_{K_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , a qual é um homeomorfismo de  $Ap(X, Y)$  sobre a sua imagem. Em consequência a topologia da convergência uniforme nos compactos de  $Ap(X, Y)$  é metrizável.

**Dem:** A continuidade da aplicação de  $Ap(X, Y)$  para  $\prod_{n \in \mathbb{N}} Ap(K_n, Y)$  referida no enunciado resulta de que, pela alínea c) de 1.7.46, é contínua para cada  $n$  a aplicação de  $Ap(X, Y)$  para  $Ap(K_n, Y)$  que a  $f$  associa  $f|_{K_n}$ . Para mostrar que temos um homeomorfismo sobre a imagem resta-nos mostrar que é contínua a aplicação inversa, da imagem referida para  $Ap(X, Y)$  e, tendo em conta a alínea b) de 1.7.46 basta mostrar, para isso, que para cada  $K \in \mathcal{K}$  é contínua a aplicação da imagem referida para  $Ap(K, Y)$  que a cada família  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , correspondente a  $f \in Ap(X, Y)$  associa  $f|_K$ . Ora, isso resulta de que, pela propriedade das coberturas em 1.6.36,  $K$  está contido numa união finita de abertos  $U_n$  e portanto, por termos uma sucessão crescente, num certo  $U_{n_0} \subset K_{n_0}$  e então a inversa referida associa a cada  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a restrição  $f_{n_0}|_K$  sendo assim contínua enquanto composta da projecção que a  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associa  $f_{n_0}$  com a aplicação de  $Ap(K_{n_0}, Y)$  para  $Ap(K, Y)$  que a  $g$  associa  $g|_K$  (cf. a alínea a) de 1.4.33). Reparámos agora que, uma vez que a topologia de cada  $Ap(K_n, Y)$  é metrizável (cf. 1.2.79),

resulta de 1.5.19 que a topologia produto de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} Ap(K_n, Y)$  é metrizável e portanto a topologia de  $Ap(X, Y)$ , sendo homeomorfa à de um subespaço de  $\prod_{n \in \mathbb{N}} Ap(K_n, Y)$ , é também metrizável.  $\square$

**1.7.55 (Teorema de Ascoli no contexto localmente compacto)** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto e não vazio e  $Y$  um espaço métrico. Seja

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, Y) \subset Ap(X, Y)$$

um subconjunto equicontínuo. Tem-se então:

**a)** As topologias induzidas em  $\mathcal{A}$  pelas topologias da convergência simples e da convergência uniforme nos compactos de  $Ap(X, Y)$  coincidem.

**b)** As aderências de  $\mathcal{A}$  em  $Ap(X, Y)$  para as topologias da convergência simples e da convergência uniforme nos compactos coincidem, estão contidas em  $\mathcal{C}(X, Y)$  e, tal como  $\mathcal{A}$ , são equicontínuas (notaremos  $\text{ad}(\mathcal{A})$  essas aderências).

**c)** Se para cada  $x \in X$  o subconjunto  $\mathcal{A}(x) \subset Y$ , dos  $f(x)$  com  $f \in \mathcal{A}$ , estiver contido nalgum compacto  $K_x \subset Y$ , então  $\text{ad}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(X, Y)$  é compacto para a topologia induzida pela da convergência uniforme nos compactos, que coincide com a induzida pela da convergência simples (lembramos a propósito que, como se verificou em 1.7.54, essa topologia é metrizável no caso em que  $X$  é de base contável).

**d)** Se  $(f_j)_{j \in J}$  for uma sucessão generalizada de elementos de  $\mathcal{A}$  e se, para cada  $x \in X$ ,  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  em  $Y$  então a aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é contínua e tem-se  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  para a topologia da convergência uniforme nos compactos.

**Dem:** **a)** Começamos por fazer a observação trivial que para cada compacto não vazio  $K \subset X$  o subconjunto  $\mathcal{A}_{/K}$  de  $\mathcal{C}(K, Y)$ , constituído pelas restrições  $f_{/K}$  com  $f \in \mathcal{A}$  é também equicontínuo. Com efeito, dados  $\delta > 0$  e  $x_0 \in K$ , podemos coinsiderar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que para cada  $x \in V$  e  $f \in \mathcal{A}$  vem  $d(f(x), f(x_0)) < \delta$  e então podemos considerar a vizinhança  $V \cap K$  de  $x_0$  em  $K$  para a qual se tem  $d(g(x), g(x_0)) < \delta$  para cada  $x \in V$  e  $g \in \mathcal{A}_{/K}$ . Reparamos agora que decorre de 1.7.47 que a topologia induzida em  $\mathcal{A}$  pela da convergência uniforme nos compacto é mais fina que a induzida pela da convergência simples pelo que para mostrar que as duas coincidem basta mostrar que a identidade de  $\mathcal{A}$  é também contínua da segunda para a primeira. Ora, tendo em conta a alínea b) de 1.7.46, ficamos reduzidos a mostrar que para cada compacto  $K \subset X$  vem contínua a aplicação de  $\mathcal{A}$  para  $Ap(K, Y)$ , com a topologia da convergência uniforme que a  $f$  associa  $f_{/K}$ . Ora isso resulta de que pela alínea b) de 1.4.33 ela é contínua quando se considera no espaço de chegada a topologia da convergência simples e de que, a aplicação toma valores no subconjunto equicontínuo  $\mathcal{A}_{/K}$  de  $\mathcal{C}(K, Y)$  onde, pelo teorema de Ascoli em 1.7.44,

coincidem as topologias induzidas pela da convergência uniforme e pela da convergência simples.

**b)** Uma vez que a identidade de  $Ap(X, Y)$  é contínua da topologia da convergência uniforme nos compactos para a topologia da convergência simples, a aderência de  $\mathcal{A}$  para a topologia da convergência uniforme nos compactos está contida na aderência  $\text{ad}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  em  $Ap(X, Y)$  para a topologia da convergência simples, aderência essa que, como verificámos em 1.7.43, é um conjunto equicontínuo, em particular contido em  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Notamos enfim que cada  $f \in \text{ad}(\mathcal{A})$  também é aderente a  $\mathcal{A}$  para a topologia da convergência uniforme nos compactos uma vez que, pelo que verificámos em a), o facto de  $\text{ad}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(X, Y)$  também ser equicontínuo implica que em  $\text{ad}(\mathcal{A})$  coincidem a topologia da convergência uniforme e a da convergência simples.

**c)** Lembrando que a topologia da convergência simples de  $Ap(X, Y)$  coincide com a topologia produto (cf. a alínea c) das notas 1.5.14), o teorema de Tichonoff em 1.6.34 garante que é compacto, em particular fechado, em  $Ap(X, Y)$ , com a topologia da convergência simples, o conjunto  $\mathcal{K}$  dos  $f \in Ap(X, Y)$  tais que  $f(x) \in K_x$  para cada  $x \in X$ . Uma vez que, por hipótese,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$  concluímos que  $\text{ad}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{K}$  e portanto que  $\text{ad}(\mathcal{A})$  é compacto para a topologia da convergência simples, que coincide com a da convergência uniforme nos compactos por  $\text{ad}(\mathcal{A})$  também ser equicontínuo.

**d)** A hipótese diz-nos que  $f_j \rightarrow f$  em  $Ap(X, Y)$  para a topologia da convergência simples, em particular  $f$  é aderente a  $\mathcal{A}$  para esta topologia e o que vimos em b) garante que  $f$  é contínua e, por  $\text{ad}(\mathcal{A})$  ser equicontínuo, resulta de a) que se tem também  $f_j \rightarrow f$  para a topologia da convergência uniforme nos compactos.  $\square$

## Exercícios

**Ex 1.7.1** Seja  $Y$  um conjunto sobre o qual consideramos a métrica discreta  $d$  (cf. 1.1.10).

**a)** Verificar que, se  $X$  é um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  é aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  é uma aplicação, então  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, existir uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que a restrição de  $f$  a  $V \cap A$  seja constante.

**b)** Deduzir de a) que  $Y$  é um espaço métrico completo.

**Ex 1.7.2** Seja  $Y$  o conjunto dos números reais da forma  $\frac{1}{n}$  com  $n \in \mathbb{N}$  e consideremos em  $Y$  a métrica  $d$  induzida pela métrica usual de  $\mathbb{R}$  e a métrica discreta  $d'$ .

**a)** Verificar que as métricas  $d$  e  $d'$  são topologicamente equivalentes, ambas definindo a topologia discreta da  $Y$ .

**b)** Verificar que a sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $Y$  definida por  $x_n = \frac{1}{n}$  é uma sucessão de Cauchy relativamente à métrica  $d$  mas não é uma sucessão de Cauchy

relativamente à métrica  $d'$ .<sup>117</sup>

c) Verificar que  $Y$  com a métrica  $d'$  é um espaço métrico completo mas que  $Y$  com a métrica  $d$  já não é um espaço métrico completo, por a sucessão de Cauchy  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não ter nenhum elemento de  $Y$  como limite.

**Ex 1.7.3** Generalizar a demonstração de 1.7.10 de modo a mostrar que, se  $Y$  é um espaço métrico tal que todas as bolas fechadas  $\overline{B}_r(y_0)$  são compactas, então  $X$  é um espaço métrico completo.

**Ex 1.7.4 (Noções que se tornam topológicas num contexto de compacidade)** Seja  $Y$  um espaço topológico metrizável compacto e notemos  $\Delta_Y \subset Y \times Y$  o subconjunto diagonal, constituído pelos pares  $(y, y)$  com  $y \in Y$  (cf. 1.5.4). Seja  $d$  uma métrica sobre  $Y$  que defina a respetiva topologia.

a) Mostrar que se  $\delta > 0$  então o conjunto

$$W_\delta = \{(y, y') \mid d(y, y') < \delta\}$$

é um aberto de  $Y \times Y$  (naturalmente para a topologia produto) tal que  $\Delta_Y \subset W_\delta$ .

b) Mostrar que, se  $W$  é um aberto de  $Y \times Y$  tal que  $\Delta_Y \subset W$ , então existe  $\delta > 0$  tal que, nas notações de a),  $W_\delta \subset W$ . **Sugestão:** Afastando o caso trivial em que  $W = Y \times Y$ , considerar a métrica do máximo  $d$  em  $Y \times Y$ , que define a topologia produto (cf. 1.5.17), e tomar para  $\delta$  o mínimo da função contínua  $Y \rightarrow ]0, +\infty[$  que a  $y$  associa a distância  $d((y, y), (Y \times Y) \setminus W)$  (distância de um ponto a um fechado não vazio).

c) Sejam  $I$  um conjunto não vazio e consideremos em  $Ap(I, Y)$  a topologia da convergência uniforme (cf. 1.2.76). Mostrar que um conjunto  $\Omega \subset Ap(I, Y)$  é uma vizinhança de um elemento  $(a_i)_{i \in I}$  se, e só se, para algum aberto  $W$  de  $Y \times Y$  contendo  $\Delta_Y$ , o conjunto  $\Omega$  contém

$$\mathcal{B}_W'' = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall_i (a_i, x_i) \in W\}.$$

Reparar que esta conclusão mostra que, quando  $Y$  é compacto, a topologia da convergência uniforme de  $Ap(I, Y)$  não se altera quando se substitui a métrica  $d$  por outra topologicamente equivalente (trata-se de uma noção topológica relativamente a  $Y$ ), ao contrário do que sucede quando  $Y$  não é compacto (cf. o exercício 1.2.22).

d) Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação. Mostrar que  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, qualquer que seja o aberto  $W$  de  $Y \times Y$  contendo  $\Delta_Y$ , existir uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que quaisquer que sejam  $x, x' \in V \cap A$  venha  $(f(x), f(x')) \in W$ .

Reparar que esta conclusão mostra que, quando  $Y$  é compacto, a condição de Cauchy para aplicações com valores em  $Y$  é a mesma quando se substitui a métrica  $d$  por outra topologicamente equivalente (trata-se de uma noção topológica relativamente a  $Y$ ), ao contrário do que sucede quando  $Y$  não é compacto (cf. o exercício 1.7.2).<sup>118</sup>

e) Sejam  $Y$  um espaço métrico compacto,  $X$  um espaço métrico,  $A \subset X$  e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Mostrar que  $f$  é uniformemente contínua nos pontos de  $A$  se, e só se, qualquer que seja o aberto  $W$  de  $Y \times Y$  contendo  $\Delta_Y$ , existir  $\varepsilon > 0$  tal que quaisquer

<sup>117</sup>Podemos assim concluir que a condição de Cauchy não é uma noção topológica no que respeita ao espaço de chegada.

<sup>118</sup>Esta conclusão já tinha sido obtida indiretamente ao mostrarmos que num espaço métrico compacto a condição de Cauchy é equivalente à existência de limite (cf. 1.7.5 e 1.7.9)



que sejam  $x_0 \in A$  e  $x \in X$  com  $d(x_0, x) < \varepsilon$  venha  $(f(x_0), f(x)) \in W$ .

Reparar que esta conclusão mostra que, quando  $Y$  é compacto, a continuidade uniforme de funções com valores em  $Y$  não se altera quando se substitui a métrica  $d$  por outra topologicamente equivalente (trata-se de uma noção topológica relativamente a  $Y$ ).

**Ex 1.7.5** Seja  $X$  um conjunto sobre o qual consideramos duas métricas  $d$  e  $d'$  Lipschitz-equivalentes (cf. 1.1.26). Mostrar que um subconjunto  $A \subset X$  é totalmente limitado relativamente à métrica  $d$  se, e só se, for totalmente limitado relativamente à métrica  $d'$ .

**Ex 1.7.6 (Outras caracterizações dos espaços métricos compactos)** Seja  $X$  um espaço métrico.

**a)** Mostrar que  $X$  é compacto se, e só se, qualquer subconjunto discreto e fechado é finito. **Sugestão:** Se  $X$  é compacto, utilizar a propriedade das coberturas para mostrar que um subconjunto discreto e fechado (portanto compacto) tem que ser finito. Se  $X$  não é compacto, considerar uma  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $X$  sem sublimite estrito (e portanto sem sublimite) e verificar que o conjunto  $A$  dos termos desta sucessão tem que ser infinito, fechado e discreto.

**b)** Concluir de a) que  $X$  é compacto se, e só se, qualquer subconjunto infinito  $A \subset X$  tem ponto de acumulação (cf. o exercício 1.3.15). Se tiver resolvido a alínea e) do exercício referido constatará que temos uma mera reformulação da alínea a).

**Ex 1.7.7 (Exemplo de espaço topológico sequencialmente compacto e não compacto)**

Seja  $\mathcal{J} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  o conjunto de todas as partes de  $\mathbb{N}$ , que sabemos não ser contável.<sup>119</sup> Consideremos em  $\{0, 1\}$  a topologia discreta e no conjunto  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$ , de todas as aplicações  $f: \mathcal{J} \rightarrow \{0, 1\}$ , a topologia da convergência simples, que sabemos ser de Hausdorff. Para cada subconjunto contável  $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$  notemos  $Ap_{\mathcal{K}}(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  o subconjunto de  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  constituído pelas aplicações  $f: \mathcal{J} \rightarrow \{0, 1\}$  tais que  $f(A) = 0$  para cada  $A \notin \mathcal{K}$ . Notemos enfim  $Ap_0(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  a união de todos os subconjuntos  $Ap_{\mathcal{K}}(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  com  $\mathcal{K}$  parte contável de  $\mathcal{J}$ , conjunto onde consideramos a topologia induzida pela de  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$ .

**a)** Verificar que, para cada parte contável  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{J}$ ,  $Ap_{\mathcal{K}}(\mathcal{J}, \{0, 1\})$ , com a topologia induzida pela de  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$ , é compacto e metrizável, e portanto também sequencialmente compacto. **Sugestão:** Afastado o caso trivial em que  $\mathcal{K} = \emptyset$ , reparar que  $Ap_{\mathcal{K}}(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  é homeomorfo a  $Ap(\mathcal{K}, \{0, 1\})$  e ter então em conta o corolário do teorema de Tichonoff em 1.6.35 e a conclusão de 1.5.19.

**b)** Verificar que  $Ap_0(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  é um subconjunto denso de  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  que não contém a aplicação constante de valor 1 e concluir daqui que  $Ap_0(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  não é compacto.

**c)** Mostrar que  $Ap_0(\mathcal{J}, \{0, 1\})$ , apesar de não ser compacto, é sequencialmente compacto. **Sugestão:** Reparar que, para cada  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos  $f_n$  de  $Ap_0(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  existe uma parte contável  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{J}$  tal que todos os  $f_n$  pertençam a  $Ap_{\mathcal{K}}(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  e ter em conta a conclusão de a).

**Ex 1.7.8 (Exemplo de espaço topológico compacto e não sequencialmente compacto)**

Como no exercício precedente, seja  $\mathcal{J} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  o conjunto de todas as partes de  $\mathbb{N}$ , que sabemos não ser contável e consideremos em  $\{0, 1\}$  a topologia discreta e no conjunto  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$ , de todas as aplicações  $f: \mathcal{J} \rightarrow \{0, 1\}$ , a topologia da

<sup>119</sup>O que faremos neste exercício poderia ser trivialmente adaptado se, em vez de  $\mathcal{J} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , tomássemos para  $\mathcal{J}$  qualquer conjunto não contável, por exemplo  $\mathcal{J} = \mathbb{R}$ .

convergência simples, que sabemos ser de Hausdorff.<sup>120</sup>

a) Reparar que, pelo corolário do teorema de Tichonoff em 1.6.35,  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  é um espaço topológico compacto.

b) Seja, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  a aplicação definida por

$$f_n(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in A \\ 0, & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

Verificar que a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não admite nenhum sublímite estrito e concluir que  $Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  não é sequencialmente compacto. **Sugestão:** Suponhamos que  $B \subset \mathbb{N}$  era um subconjunto infinito (isto é, com  $+\infty$  aderente a  $B$ ) tal que fosse  $f_n \rightarrow f \in Ap(\mathcal{J}, \{0, 1\})$  quando  $n \rightarrow +\infty$  com  $n \in B$ . Escrevendo  $B = B' \cup B''$  com  $B'$  e  $B''$  conjuntos infinitos disjuntos teria que se ter  $f_n(B') \rightarrow f(B')$  quando  $n \rightarrow +\infty$  com  $n \in B$ . Verificar que isso é absurdo por ser  $f_n(B') = 1$  para  $n \in B'$  e  $f_n(B') = 0$  para  $n \in B''$ , condição que implica a não existência de limite quando  $n \rightarrow +\infty$  com  $n \in B$ .

**Ex 1.7.9 (Versão disfarçada dos dois exemplos precedentes)** Considerar no conjunto  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ , de todas as partes de  $\mathbb{R}$ , a topologia referida no exercício 1.6.18, nomeadamente aquela para a qual a bijeção de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  sobre  $Ap(\mathbb{R}, \{0, 1\})$ , que a cada conjunto associa a sua função indicatriz, é um homeomorfismo, com a topologia da convergência simples no espaço de chegada. Considerar o subconjunto  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  constituído pelas partes contáveis de  $\mathbb{R}$

a) Verificar que  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  é um espaço topológico compacto mas não sequencialmente compacto.

b) Verificar que  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$  é sequencialmente compacto mas não compacto.

**Sugestão:** Considerar os homeomorfismos  $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow Ap(\mathbb{R}, \{0, 1\})$ , atrás referido, e  $Ap(\mathbb{R}, \{0, 1\}) \rightarrow Ap(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \{0, 1\})$ , associado a uma bijeção de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  sobre  $\mathbb{R}$ , cuja existência deverá conhecer, e verificar qual a imagem de  $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$  pela composta destes homeomorfismos.

**Ex 1.7.10 (Conjuntos relativamente compactos)** Se  $X$  é um espaço topológico, um conjunto  $A \subset X$  diz-se *relativamente compacto* se existir um conjunto compacto  $B \subset X$  tal que  $A \subset B$ .

a) Supondo que  $X$  é um espaço de Hausdorff, mostrar que um conjunto  $A \subset X$  é relativamente compacto se, e só se, a aderência  $ad(A)$  for um subconjunto compacto de  $X$ .

b) Supondo que  $X$  é um espaço métrico completo, mostrar que um subconjunto  $A \subset X$  é relativamente compacto se, e só se, for totalmente limitado.

**Ex 1.7.11** Diz-se que um espaço topológico  $X$  é  $\sigma$ -compacto se  $X$  for a união de uma família contável de subconjuntos compactos.

a) Verificar que se  $X$  é um espaço métrico  $\sigma$ -compacto então  $X$  é separável.

**Sugestão:** Ter em conta 1.7.40 e a aínca b) de 1.3.28.

b) Verificar que se  $X$  é um espaço métrico separável e localmente compacto então  $X$  é  $\sigma$ -compacto. **Sugestão:** Considerando uma base contável de abertos de  $X$  (cf. 1.3.27), verificar que o subconjunto desta formado pelos abertos da base com aderência compacta ainda é uma base de abertos de  $X$  e que, em particular,  $X$  é a união dessas aderências compactas.

<sup>120</sup>Este exercício tem relação com o que foi feito atrás nos exercícios 1.2.26 e 1.6.17 mas é independente da resolução destes.

**Ex 1.7.12 (Completude, limitação total e filtros)** Este exercício pressupõe o conhecimento das noções de filtro e ultrafiltro estudadas no exercício 1.6.33. Seja  $Y$  um espaço métrico.

**a)** Diz-se que um filtro  $\mathcal{G}$  em  $Y$  é um *filtro de Cauchy* se qualquer que seja  $\delta > 0$  existe  $A \in \mathcal{G}$  tal que  $d(y, y') < \delta$  sempre que  $y, y' \in A$ . Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $X'$  e  $f: X' \rightarrow Y$  uma aplicação e consideremos o filtro associado  $f(\mathcal{V}_{x_0/X'})$  em  $Y$  (cf. a alínea j) do exercício 1.6.33).

Verificar que a aplicação  $f$  verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, o filtro  $f(\mathcal{V}_{x_0/X'})$  for de Cauchy.

**b)** Verificar que se um filtro  $\mathcal{G}$  em  $Y$  tiver limite  $b \in Y$  então é um filtro de Cauchy.

**c)** Verificar que se  $\mathcal{G}$  é um filtro de Cauchy em  $Y$  e  $b \in Y$  é sublimite de  $\mathcal{G}$  então  $b$  é limite de  $\mathcal{G}$ .

**d)** Verificar que o espaço métrico  $Y$  é completo se, e só se, qualquer filtro próprio de Cauchy  $\mathcal{G}$  em  $Y$  admitir um limite  $b \in Y$ . <sup>121</sup> **Sugestão:** Para uma das implicações ter em conta a conclusão de a) e a da alínea j) do exercício 1.6.33. Para a outra reparar que se  $\mathcal{G}$  é um filtro próprio de Cauchy de  $Y$  podemos encarar  $\mathcal{G}$  como um conjunto dirigido pondo  $A \succeq A' \Leftrightarrow A \subset A'$  e considerar uma sucessão generalizada  $(y_A)_{A \in \mathcal{G}}$  de elementos de  $Y$  tal que  $y_A \in A$  para cada  $A \in \mathcal{G}$  tendo-se então que esta sucessão generalizada é de Cauchy e que um limite desta é sublimite, e portanto também limite, do filtro  $\mathcal{G}$ .

**e)** Mostrar que  $Y$  é totalmente limitado se, e só se, todo o ultrafiltro  $\mathcal{G}$  de  $Y$  for um filtro de Cauchy. **Sugestão:** Supondo que  $Y$  é totalmente limitado e que  $\mathcal{G}$  é ultrafiltro, utilizar a última propriedade referida na alínea n) do exercício 1.6.33 para garantir, dado  $\delta > 0$ , a existência de uma bola aberta de raio  $\delta/2$  pertencente a  $\mathcal{G}$ . Supondo que  $Y$  não é totalmente limitado considerar  $r > 0$  tal que  $Y$  não seja união de um número finito de bolas abertas de raio  $r$ , considerar o filtro próprio  $\mathcal{G}$  constituído pelos  $A \subset Y$  tais que  $Y \setminus A$  esteja contido numa união finita de bolas abertas de raio  $r$  e, sendo  $\mathcal{H}$  um ultrafiltro contendo este mostrar que ele não pode ser de Cauchy por não poder conter nenhuma bola de raio  $r$ .

**f)** Mostrar que a conclusão de e) permite obter uma prova alternativa muito simples do facto de todo o espaço métrico totalmente limitado e completo ser compacto (cf. 1.7.37).

**Ex 1.7.13 a)** Sejam  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial, isto é, com mais que um elemento, e  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação derivável em todos os pontos e tal que a função derivada  $f': J \rightarrow \mathbb{R}$  seja limitada. Mostrar que  $f$  é Lipschitziana, em particular uniformemente contínua. **Sugestão:** Utilizar o teorema de Lagrange do valor intermédio.

**b)** Mostrar que é uniformemente contínua a aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x}.$$

**Sugestão:** Verificar que ela tem restrições uniformemente contínuas a cada um dos intervalos  $]-\infty, -2[$ ,  $]2, +\infty[$  e  $[-3, 3]$ , nos dois primeiros casos, tendo em conta a).

**Ex 1.7.14 (Um recíproco parcial do teorema de Ascoli)** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto e não vazio e  $Y$  um espaço métrico. Mostrar que se  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(X, Y)$  é compacto para a topologia da convergência uniforme então  $\mathcal{B}$  é equicontínuo e para cada  $x \in X$  o conjunto  $\mathcal{B}(x) \subset Y$ , dos  $f(x)$  com  $f \in \mathcal{B}$ , é compacto.

<sup>121</sup>O filtro impróprio, trivialmente um filtro de Cauchy, admite qualquer ponto de  $Y$  como limite mas no caso em que  $Y = \emptyset$  não admite limite.

**Sugestão:** Para a segunda conclusão atender que  $\mathcal{B}$  também é compacto para a topologia da convergência simples e ter em conta a continuidade das “projeções” de  $Ap(X, Y)$  para  $Y$ ,  $f \mapsto f(x)$ . Para a primeira conclusão, dados  $x_0 \in X$  e  $\delta > 0$ , considerar  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{B}$  tais que

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{\delta/3}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\delta/3}(f_n)$$

(bolas para a métrica  $d_\infty$ ) e ter em conta a continuidade dos  $f_j$  em  $x_0$  e as desigualdades

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_j(x)) + d(f_j(x), f_j(x_0)) + d(f_j(x_0), f(x_0)).$$

**Ex 1.7.15 (A topologia da convergência uniforme nos compactos e a compacta-aberta)** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto não vazio e  $Y$  um espaço métrico e consideremos em  $\mathcal{C}(X, Y)$  a topologia da convergência uniforme nos compactos definida em 1.7.45. Verificar que esta topologia coincide com a topologia compacta-aberta definida no exercício 1.6.32 e reparar que este facto implica em particular que, quando  $X$  é localmente compacto, a topologia da convergência uniforme nos compactos não se altera quando se substitui a métrica de  $Y$  por outra que defina a mesma topologia (facto que não decorre diretamente da definição). **Sugestão:** Utilizar 1.7.53 e a alínea d) do exercício 1.6.32 para verificar que a identidade de  $\mathcal{C}(X, Y)$  é contínua de cada uma das duas topologias para a outra.

## §8. Espaços topológicos conexos.

**1.8.1** Se  $X$  é um espaço topológico, diz-se que dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$  são *mutuamente separados*<sup>122</sup> se nenhum ponto de  $A$  é aderente a  $B$  e nenhum ponto de  $B$  é aderente a  $A$ .

Repare-se que, na definição anterior, não exigimos que  $A$  e  $B$  não tenham pontos aderentes comuns. Assim, por exemplo, relativamente ao espaço topológico  $\mathbb{R}$ , são mutuamente separados os conjuntos  $]0, 1[$  e  $]1, 2[$  assim como os conjuntos  $]0, 1[$  e  $[2, 5[$ , mas já não o são os conjuntos  $]0, 1[$  e  $[1, 2[$ . O resultado que enunciámos em seguida é uma propriedade trivial dos conjuntos mutuamente separados que será aplicada várias vezes.

**1.8.2** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $X$  mutuamente separados. Se  $A' \subset A$  e  $B' \subset B$ , então os conjuntos  $A'$  e  $B'$  são também mutuamente separados.

**Dem:** Um ponto aderente a  $A'$  é também aderente a  $A$  pelo que não pertence a  $B$ , e portanto também não pertence a  $B'$ . Analogamente, qualquer ponto aderente a  $B'$  não pertence a  $A'$ .  $\square$

<sup>122</sup>Reparar que esta definição não tem nada a ver com a de espaço topológico separado (de Hausdorff).

**1.8.3** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X' \subset X$  um subespaço topológico e  $A, B$  dois subconjuntos de  $X'$ . Tem-se então que  $A$  e  $B$  são mutuamente separados, como subconjuntos de  $X'$  se, e só se, o são como subconjuntos de  $X$ .

**Dem:** Basta atender a que um ponto de  $X'$  é aderente a um subconjunto de  $X'$  relativamente a  $X'$  se, e só se, o é relativamente a  $X$ .  $\square$

**1.8.4** Seja  $X$  um espaço topológico. Tem-se então:

a) Se  $A \subset X$ , os conjuntos  $A$  e  $\emptyset$  são mutuamente separados;

b) Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos mutuamente separados de  $X$ , então  $A \cap B = \emptyset$ .

**Dem:** A primeira afirmação resulta de que não existem elementos do conjunto vazio nem pontos aderentes a este conjunto. A segunda é uma consequência de que um ponto dum conjunto é sempre aderente a esse conjunto.  $\square$

**1.8.5** Se  $X$  é um espaço topológico, diz-se que um subconjunto  $A \subset X$  é *conexo* se não existirem subconjuntos não vazios  $A'$  e  $A''$  de  $X$ , mutuamente separados e tais que  $A = A' \cup A''$ . Diz-se que  $X$  é um espaço topológico *conexo* se  $X$  é um subconjunto conexo de  $X$ .

Repare-se que, tendo em conta 1.8.3, um subconjunto  $A$  de  $X$  é conexo se, e só se, é um espaço topológico conexo, quando se considera nele a topologia induzida.

**1.8.6** Seja  $X$  um espaço topológico. São então equivalentes as seguintes condições:

a)  $X$  é um espaço topológico conexo:

b) Não existem subconjuntos fechados não vazios  $A$  e  $B$  de  $X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = X$ ;

c) Não existem subconjuntos abertos não vazios  $A$  e  $B$  de  $X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = X$ ;

d) Não existe nenhum subconjunto simultaneamente aberto e fechado em  $X$ , para além dos conjuntos  $\emptyset$  e  $X$ .

**Dem:** a)  $\Rightarrow$  b): Suponhamos que  $A$  e  $B$  são subconjuntos fechados não vazios de  $X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = X$ . Tem-se então que cada ponto de  $A$  não pertence a  $B$ , e portanto não é aderente a  $B$ , e que cada ponto de  $B$  não pertence a  $A$ , e portanto não é aderente a  $A$ , por outras palavras, que  $A$  e  $B$  são mutuamente separados e portanto que  $X$  não é conexo.

b)  $\Rightarrow$  c): Suponhamos que  $A$  e  $B$  são subconjuntos abertos não vazios de  $X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = X$ . Tem-se então  $B = X \setminus A$  e  $A = X \setminus B$ , pelo que  $A$  e  $B$  são também fechados,

c)  $\Rightarrow$  d): Suponhamos que  $A$  é um subconjunto simultaneamente aberto e fechado em  $X$ , distinto de  $\emptyset$  e de  $X$ . O conjunto  $B = X \setminus A$  é então também aberto e não vazio e vem  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = X$ .

d)  $\Rightarrow$  a): Suponhamos que  $X$  não é conexo. Existem então subconjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , mutuamente separados e tais que  $X = A \cup B$ . Se  $x$  é aderente a  $A$ , vem  $x \notin B$ , donde  $x \in A$ , o que mostra que o conjunto  $A$  é fechado. Do

mesmo modo,  $B$  é fechado e o facto de se ter  $A \cap B = \emptyset$  implica que  $A = X \setminus B$ , portanto que  $A$ , além de ser fechado e diferente de  $\emptyset$ , é também aberto e diferente de  $X$ .  $\square$

**1.8.7** Como exemplos triviais de conjuntos conexos, temos, para qualquer espaço topológico  $X$ , o conjunto vazio  $\emptyset$  e qualquer conjunto com um único elemento.

**Dem:** Em ambos os casos o conjunto em questão não é união de dois subconjuntos disjuntos não vazios.  $\square$

Normalmente será muito fácil exibir exemplos de conjuntos que não sejam conexos: Basta considerar dois subconjuntos mutuamente separados e não vazios e tomar a respectiva união. Já é mais difícil, pelo menos com os instrumentos de que dispomos neste momento, exibir exemplos não triviais de conjuntos conexos. Os primeiros exemplos que vamos encontrar, e que estarão na base da construção de muitos outros, são os intervalos de  $\mathbb{R}$  e, mais geralmente, de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Lembremos que os *intervalos* são os conjuntos de um dos tipos  $[a, b]$ ,  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  e  $]a, b[$ , com  $a \leq b$ , em que as extremidades  $a$  e  $b$  podem ser finitas ou infinitas (em particular, fazendo  $a = b$ , vemos que o conjunto vazio e o conjunto unitário  $\{a\}$  são intervalos).

**1.8.8** Um subconjunto  $J$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  é um intervalo se, e só se, quaisquer que sejam  $a, b \in J$ , com  $a < b$ , tem-se  $[a, b] \subset J$ .

**Dem:** É evidente que todo o intervalo  $J$  verifica a propriedade do enunciado. Suponhamos, reciprocamente, que  $J$  é um subconjunto de  $\overline{\mathbb{R}}$  que verifica a propriedade do enunciado e verifiquemos que  $J$  é um intervalo, para o que podemos já supor que  $J$  não é vazio. Notemos então  $m$  e  $M$  o ínfimo e o supremo de  $J$ , que podem ser finitos ou infinitos. Tem-se, evidentemente  $m \leq M$  e  $J \subset [m, M]$ . Por outro lado, tem-se  $]m, M[ \subset J$  visto que, se  $x \in ]m, M[$ , o facto de  $M$  ser o supremo de  $J$  implica a existência de  $z \in J$ , com  $z > x$ , e o facto de  $m$  ser o ínfimo de  $J$  implica a existência de  $y \in J$ , com  $y < x$ , tendo-se então  $x \in [y, z] \subset J$ . O facto de se ter  $]m, M[ \subset J \subset [m, M]$  implica que  $J$  é um dos conjuntos  $[m, M]$ ,  $[m, M[$ ,  $]m, M]$  e  $]m, M[$ .  $\square$

**1.8.9** Um subconjunto  $J$  de  $\overline{\mathbb{R}}$  é conexo se, e só se, é um intervalo.

**Dem:** Suponhamos que  $J$  não é um intervalo. Pelo resultado precedente, podemos considerar  $x < y$  em  $J$  tais que  $[x, y] \not\subset J$ , pelo que vai existir  $c \in ]x, y[$ , com  $c \notin J$ . Uma vez que  $[-\infty, c[$  e  $]c, +\infty]$  são abertos de  $\overline{\mathbb{R}}$ , vemos que  $J \cap [-\infty, c[$  e  $J \cap ]c, +\infty]$  vão ser abertos, disjuntos e não vazios, de  $J$ , com união  $J$ , o que mostra que  $J$  não é conexo.

Suponhamos, reciprocamente, que  $J$  é um intervalo e que  $J$  não é conexo e tentemos chegar a um absurdo. Podemos então considerar uma decomposição  $J = J' \cup J''$ , com os conjuntos  $J'$  e  $J''$  mutuamente separados e não vazios e fixar elementos  $a \in J'$  e  $b \in J''$ , podendo já supor-se que  $a < b$ , sem o que

se trocava os papéis de  $J'$  e  $J''$ . O facto de  $J$  ser um intervalo implica que  $[a, b] \subset J$ . Seja  $c \in [a, b] \subset J$  o supremo de  $J' \cap [a, b]$ , conjunto que é não vazio, por conter  $a$ , e admite  $b$  como majorante. Tendo em conta 1.2.13,  $c$  é aderente a  $J' \cap [a, b]$ , e portanto também a  $J'$  pelo que, por termos conjuntos mutuamente separados,  $c \notin J''$ , o que implica que  $c \in J'$ , em particular  $c < b$ . Mais uma vez por os conjuntos serem mutuamente separados,  $c$  não é aderente a  $J''$ . Mas isso implica a existência de uma vizinhança de  $c$  em  $\overline{\mathbb{R}}$  que não tem pontos em  $J''$ , vizinhança essa que, quer no caso em que  $c \in \mathbb{R}$  como naquele em que  $c = -\infty$  (o facto de ser  $c < b$  implica que  $c$  não é  $+\infty$ ), contém um intervalo do tipo  $[c, d[$  com  $d > c$ . Ora, isso é um absurdo, uma vez que, considerando um número real  $x$  maior que  $c$  e menor que o mínimo entre  $b$  e  $d$ , viria  $x \notin J''$ , portanto  $x \in J' \cap [a, b]$ , contrariando o facto de  $c$  ser um majorante de  $J' \cap [a, b]$ .  $\square$

Vamos agora estudar algumas propriedades que nos permitem concluir que certos espaços são conexos, quando sabemos que outros o são:

**1.8.10** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua e sobrejectiva. Se  $X$  é conexo, tem-se então que  $Y$  é também conexo.

**Dem:** Suponhamos que  $Y$  não é conexo. Existem então conjuntos abertos disjuntos e não vazios  $A$  e  $B$  de  $Y$ , tais que  $Y = A \cup B$ . Tem-se então que

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\} \quad \text{e} \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

são subconjuntos abertos disjuntos de  $X$ , com união  $X$ , e são não vazios, por  $f$  ser sobrejectiva. Concluimos assim que  $X$  não é conexo.  $\square$

**1.8.11 (Corolário)** Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos e se  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua, então, para cada subconjunto conexo  $A$  de  $X$ ,  $f(A)$  é um subconjunto conexo de  $Y$ .

**Dem:** Basta atender a que a restrição de  $f$  vai ser uma aplicação contínua e sobrejectiva de  $A$  sobre  $f(A)$ .  $\square$

**1.8.12 (Teorema de Bolzano)** Sejam  $X$  um espaço topológico conexo e  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma aplicação contínua. Quaisquer que sejam  $a, b \in f(X)$ , com  $a < b$ , tem-se então  $[a, b] \subset f(X)$ .<sup>123</sup>

**Dem:** Pelo resultado anterior,  $f(X)$  é um subconjunto conexo de  $\overline{\mathbb{R}}$  e portanto, como vimos em 1.8.9, um intervalo.  $\square$

**1.8.13** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $(A_i)_{i \in I}$  uma família, finita ou infinita, de subconjuntos conexos de  $X$  tal que exista  $i_0 \in I$  tal que, para todo o  $i \in I$ ,

<sup>123</sup>Este resultado também costuma ser enunciado na seguinte forma: Toda a função contínua, cujo domínio é conexo, não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios. O leitor já encontrou decerto um enunciado deste tipo, pelo menos para funções cujo domínio é um intervalo de  $\mathbb{R}$ , conjunto que já sabemos ser conexo.

$A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ . Tem-se então que o conjunto  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  é também conexo.

**Dem:** Suponhamos que  $A = A' \cup A''$ , com  $A'$  e  $A''$  mutuamente separados. Lembrando 1.8.2, vinha então  $A_{i_0} = (A_{i_0} \cap A') \cup (A_{i_0} \cap A'')$ , união de dois subconjuntos mutuamente separados, pelo que um deles teria que ser vazio, para fixar ideias  $A_{i_0} \cap A' = \emptyset$ , e portanto  $A_{i_0} \cap A'' = A_{i_0}$ , ou seja,  $A_{i_0} \subset A''$ . Para cada  $i \in I$ , tem-se então que  $A_i = (A_i \cap A') \cup (A_i \cap A'')$ , união de dois subconjuntos mutuamente separados, pelo que um deles teria que ser vazio; uma vez que  $A_i \cap A''$  não é vazio, por conter  $A_i \cap A_{i_0}$ , segue-se que  $A_i \cap A' = \emptyset$ , donde, como antes,  $A_i \cap A'' = A_i$ , isto é,  $A_i \subset A''$ . Uma vez que todos os  $A_i$  estão contidos em  $A''$ , segue-se que  $A = \bigcup A_i \subset A''$ , ou seja  $A = A''$ , o que implica que  $A' = \emptyset$ .  $\square$

**1.8.14** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$  um conjunto conexo denso, isto é, tal que  $\text{ad}(A) = X$ . Tem-se então que  $X$  é conexo.

**Dem:** Suponhamos que  $U$  é um conjunto não vazio, simultaneamente aberto e fechado em  $X$ . Sendo  $x \in U$ , o facto de  $U$  ser uma vizinhança de  $x$  e de se ter  $x \in \text{ad}(A)$  implica que  $A \cap U \neq \emptyset$ . Uma vez que  $A$  é conexo e que  $A \cap U$  é simultaneamente aberto e fechado em  $A$ , segue-se que  $A \cap U = A$ , ou seja que  $A \subset U$ . Resulta daqui que

$$X = \text{ad}(A) \subset \text{ad}(U) = U,$$

ou seja,  $U = X$ .  $\square$

**1.8.15 (Corolário)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$  um subconjunto conexo. Se  $B \subset X$  é tal que  $A \subset B \subset \text{ad}(A)$ , tem-se então que  $B$  é também conexo.

**Dem:** Basta atender a que, tendo em conta 1.2.21,  $A$  é denso em  $B$ , relativamente à topologia induzida de  $B$ .  $\square$

**1.8.16** Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos conexos, então  $X \times Y$  é um espaço topológico conexo.

**Dem:** Podemos já supor que  $X$  e  $Y$  são não vazios, visto que o conjunto vazio é conexo. Seja  $x_0 \in X$  um elemento fixado. Tem-se então que o subconjunto  $\{x_0\} \times Y$  de  $X \times Y$  é conexo, por ser a imagem da aplicação contínua de  $Y$  em  $X \times Y$ , que a  $y$  associa  $(x_0, y)$ . Pela mesma razão, para cada  $y \in Y$ , o subconjunto  $X \times \{y\}$  de  $X \times Y$  é conexo. O resultado é agora uma consequência de 1.8.13, visto que  $X \times Y$  vai ser a união dos conjuntos conexos  $\{x_0\} \times Y$  e  $X \times \{y\}$ , com  $y \in Y$ , em que o primeiro tem intersecção não vazia com cada um dos últimos.  $\square$

**1.8.17 (Produto finito de conexos)** Seja  $I \neq \emptyset$  um conjunto finito de índices e seja, para cada  $i \in I$ ,  $X_i$  um espaço topológico conexo. Tem-se então que o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$ , com a topologia produto (cf. 1.5.13), é também um

espaço topológico conexo.

**Dem:** Vamos provar o resultado, com o auxílio de 1.8.16, por indução no número de elementos do conjunto  $I$ . Se  $I = \{i_0\}$  tem 1 elemento a conclusão



resulta de que, por 1.5.28, o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} X_i$  é homeomorfo a  $X_{i_0}$ .

Supondo o resultado verdadeiro quando  $I$  tem  $p$  elementos a constatação de que ele é também verdadeiro quando  $I$  tem  $p + 1$  elementos resulta de que, escolhendo então  $i_0 \in I$ , podemos considerar o conjunto  $I \setminus \{i_0\}$  com  $p$  elementos e então, pela hipótese de indução, o produto cartesiano  $\prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i$  é

conexo e portanto, tendo em conta o lema referido,  $\prod_{i \in I} X_i$  é conexo por ser homeomorfo a  $(\prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} X_i) \times X_{i_0}$  (cf. 1.5.29).  $\square$

**1.8.18** Seja  $X$  um espaço topológico. Tem então lugar uma relação de equivalência  $\sim$  sobre  $X$ , definida pela condição de se ter  $x \sim y$  se, e só se, existe uma parte conexa  $A$  de  $X$ , tal que  $x \in A$  e  $y \in A$ . Quando  $x \sim y$  diz-se que  $x$  e  $y$  são *conexas em  $X$* .

**Dem:** O facto de se ter  $x \sim x$  vem de que  $\{x\}$  é um conjunto conexo. É imediato que, se  $x \sim y$ , então também  $y \sim x$ . Por fim, se  $x \sim y$  e  $y \sim z$ , vão existir subconjuntos conexos  $A$  e  $B$  de  $X$ , tais que  $x, y \in A$  e  $y, z \in B$ ; o facto de se ter  $A \cap B \neq \emptyset$  implica então que  $A \cup B$  é conexo pelo que, uma vez que  $x, z \in A \cup B$ , sai  $x \sim z$ .  $\square$

**1.8.19** Nas condições anteriores, chamam-se *componentes conexas* do espaço topológico  $X$  às classes de equivalência para a relação  $\sim$ .

**1.8.20** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  uma das suas componentes conexas. Tem-se então que  $A$  é um subconjunto conexo e fechado de  $X$  e que, qualquer que seja o conjunto conexo  $B$  de  $X$ , tal que  $A \cap B \neq \emptyset$ , vem  $B \subset A$ .<sup>124</sup>

**Dem:** Começemos por supor que  $B$  é um subconjunto conexo de  $X$  tal que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Fixando  $x \in A \cap B$ , vemos que, para cada  $y \in B$ , vai-se ter  $x \sim y$ , donde  $y \in A$ , o que mostra que  $B \subset A$ . Seja agora  $a \in A$  fixado. Para cada  $x \in A$ , o facto de se ter  $a \sim x$  implica a existência de um subconjunto conexo  $B_x$  de  $X$ , contendo  $a$  e  $x$ ; em particular, tem-se  $A \cap B_x \neq \emptyset$ , pelo que, pelo que vimos atrás,  $B_x \subset A$ ; concluímos agora que  $A$  vai ser a união dos subconjuntos conexos  $B_x$ , com intersecção não vazia, pelo que, por 1.8.13,  $A$  é conexo. Por fim, tendo em conta 1.8.15,  $\text{ad}(A)$  vai ser um subconjunto conexo de  $X$  com intersecção não vazia com  $A$  donde, pelo que vimos no início, tem-se  $\text{ad}(A) \subset A$ , e portanto  $A$  é um conjunto fechado.  $\square$

**1.8.21 (Corolário)** Um espaço topológico não vazio  $X$  é conexo se, e só se, tem uma única componente conexa.

**Dem:** Se  $X$  é conexo, então, quaisquer que sejam  $x, y \in X$ , tem-se  $x \sim y$ , o

<sup>124</sup>Poderíamos dizer que as componentes conexas são conjuntos conexófagos: “Comem” todos os conjuntos conexos que “tocam” nelas.

que mostra que existe uma única componente conexa. Se existe uma única componente conexa, ela é igual a  $X$ , pelo que  $X$  é conexo.  $\square$

**1.8.22** Diz-se que um espaço topológico  $X$  é *localmente conexo* se cada ponto  $x_0 \in X$  admite um sistema fundamental de vizinhanças constituído por conjuntos conexos ou, o que é o mesmo, se para cada  $x_0 \in X$  a classe das vizinhanças conexas de  $x_0$  for um sistema fundamental de vizinhanças desse ponto.

**1.8.23** Se  $X$  é um espaço topológico localmente conexo e se  $X' \subset X$  é um subconjunto aberto, então  $X'$ , com a topologia induzida, é também localmente conexo.

**Dem:** Dado  $a \in X'$ , seja  $\mathcal{B}_a$  um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  em  $X$ , constituído por conjuntos conexos. O conjunto  $\widehat{\mathcal{B}}_a$ , dos  $V \in \mathcal{B}_a$  tais que  $V \subset X'$  é ainda um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  em  $X$ , como se reconhece se se reparar que, para cada vizinhança  $W$  de  $a$  em  $X$ ,  $W \cap X'$  é também vizinhança de  $a$ ; resulta daqui que  $\widehat{\mathcal{B}}_a$ , que é também igual ao conjunto das intersecções dos conjuntos de  $\widehat{\mathcal{B}}_a$  com  $X'$ , é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$  em  $X'$ , constituído por conjuntos conexos.  $\square$

**1.8.24** Sejam  $J$  um conjunto **finito** não vazio de índices e, para cada  $j \in J$ ,  $X_j$  um espaço topológico localmente conexo. Tem-se então que  $\prod_{j \in J} X_j$ , com a topologia produto, é também localmente conexo.

**Dem:** Dado  $(a_j)_{j \in J}$  em  $\prod_{j \in J} X_j$  começamos por reparar que, sendo, para cada  $j \in J$ ,  $W_j$  uma vizinhança conexa de  $a_j$ , o produto cartesiano  $\prod_{j \in J} W_j$  é uma vizinhança conexa de  $(a_j)_{j \in J}$  (cf. a alínea b) da nota 1.5.14 e 1.8.17). O facto de as vizinhanças conexas deste tipo constituírem um sistema fundamental de vizinhanças resulta de que se  $\Omega$  é uma vizinhança de  $(a_j)_{j \in J}$  podemos considerar para cada  $j$  uma vizinhança  $V_j$  de  $a_j$  com  $\prod_{j \in J} V_j \subset \Omega$  e, sendo então para cada  $j$ ,  $W_j$  uma vizinhança conexa de  $a_j$  contida em  $V_j$ , a correspondente vizinhança  $\prod_{j \in J} W_j$  está contida em  $\prod_{j \in J} V_j$ , e portanto em  $\Omega$ .  $\square$

**1.8.25** O espaço  $\mathbb{R}^n$ , com a sua topologia canónica, é conexo e localmente conexo.

**Dem:** Já sabemos que  $\mathbb{R}$  é conexo, por ser um intervalo de  $\overline{\mathbb{R}}$ , e  $\mathbb{R}$  vai ser localmente conexo, uma vez que cada ponto  $a \in \mathbb{R}$  admite um sistema fundamental de vizinhanças constituído pelas bolas  $B_r(a) = ]a - r, a + r[$ , que são conjuntos conexos. Basta agora atender a que  $\mathbb{R}^n$  é o produto de  $n$  factores iguais a  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**1.8.26** Se  $X$  é um espaço topológico localmente conexo, então cada componente conexa  $A$  de  $X$  é um conjunto aberto.

**Dem:** Se  $a \in A$ , podemos considerar uma vizinhança conexa  $V$  de  $a$ , tendo-se então  $V \cap A \neq \emptyset$ , portanto, por 1.8.20,  $V \subset A$ .  $\square$

O próximo resultado é muitas vezes útil para determinar as componentes conexas de um espaço topológico. É claro que, *a posteriori*, vemos que as respectivas hipóteses só são possíveis no caso em que as componentes conexas são conjuntos abertos.

**1.8.27** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $(X_j)_{j \in J}$  uma família de subconjuntos abertos, conexos, não vazios, disjuntos dois a dois e de união  $X$ . Tem-se então que os  $X_j$  são precisamente as componentes conexas de  $X$ .

**Dem:** Dado  $x \in X$ , existe um único  $j_0$  tal que  $x \in X_{j_0}$  e o resultado ficará provado se verificarmos que  $X_{j_0}$  coincide com a componente conexa  $A$  do elemento  $x$ . O facto de  $X_{j_0}$  ser conexo e com  $x \in X_{j_0} \cap A$  implica, por 1.8.20, que  $X_{j_0} \subset A$ . Reparamos agora que o conexo  $A$  fica união dos conjuntos  $A \cap X_{j_0} = X_{j_0}$  e  $A \cap \bigcup_{j \neq j_0} X_j$ , que são abertos em  $A$  e disjuntos pelo

que, por o primeiro ser não vazio e  $A$  ser conexo, tem que ser  $A \cap \bigcup_{j \neq j_0} X_j = \emptyset$ , donde  $X_{j_0} = A$ , como queríamos.  $\square$

Apresentamos a seguir uma noção, de certo modo, aparentada com a de espaço conexo e que constitui, muitas vezes, um método prático para identificar espaços conexos.

**1.8.28** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $x, y \in X$ . Diz-se que  $x$  e  $y$  são *conexos por arcos em  $X$*  se existe uma aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$  (um *arco* de  $x$  para  $y$ ). Diz-se que um espaço topológico  $X$  é *conexo por arcos* se, quaisquer que sejam  $x, y \in X$ ,  $x$  e  $y$  são conexos por arcos em  $X$ . Diz-se que um subconjunto  $A \subset X$  dum espaço topológico  $X$  é *conexo por arcos* se, com a topologia induzida, for um espaço topológico conexo por arcos.

**1.8.29** Analogamente ao que acontecia em 1.8.10, sendo  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $g: X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua e sobrejetiva então se  $X$  é conexo por arcos também  $Y$  é conexo por arcos. Em consequência, se  $g: X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua entre espaços topológicos e  $A \subset X$  é um subconjunto conexo por arcos, também  $g(A)$  é um subconjunto conexo por arcos de  $Y$ .

**Dem:** Dados  $y, y' \in Y$ , tem-se  $y = g(x)$  e  $y' = g(x')$  com  $x, x' \in X$  e então, considerando uma aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow X$  uma aplicação contínua com  $f(0) = x$  e  $f(1) = x'$ , temos uma aplicação contínua  $g \circ f: [0, 1] \rightarrow Y$  com  $g \circ f(0) = y$  e  $g \circ f(1) = y'$ .  $\square$

**1.8.30** Se  $X$  é um espaço topológico, a relação  $\approx$  sobre  $X$ , definida por  $x \approx y$ , se, e só se,  $x$  e  $y$  são conexos por arcos em  $X$ , é uma relação de equivalência. Às classes de equivalência para esta relação dá-se o nome de *componentes conexas por arcos* de  $X$ . A definição precedente pode ser expressa dizendo que  $X$  é conexo por arcos se, e só se, é vazio ou constituído por uma única componente conexa por arcos.

**Dem:** O facto de se ter  $x \approx x$  resulta de se considerar a aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow X$  de valor constante  $x$ . Se  $x \approx y$ , podemos considerar uma aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow X$  com  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$  e, considerando a aplicação contínua  $g: [0, 1] \rightarrow X$ , definida por  $g(t) = f(1 - t)$ , vemos que  $y \approx x$ . Se  $x \approx y$  e  $y \approx z$ , existem aplicações contínuas  $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ , tais que  $f(0) = x$   $f(1) = g(0) = y$  e  $g(1) = z$  e, considerando então a aplicação contínua  $h: [0, 1] \rightarrow X$ , definida por

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1), & \text{se } t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

concluimos que  $x \approx z$ . □

**1.8.31** Se  $A$  é uma componente conexa por arcos de  $X$ , então  $A$  é um conjunto conexo por arcos.

**Dem:** Sejam  $x, y \in A$ . Uma vez que  $x \approx y$ , existe uma aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$ . O resultado ficará provado se mostrarmos que  $f([0, 1]) \subset A$ . Ora, fixado  $t \in [0, 1]$ , podemos considerar uma aplicação contínua  $g: [0, 1] \rightarrow X$ , definida por  $g(s) = f(st)$ , para a qual se tem  $g(0) = f(0) = x$  e  $g(1) = f(t)$ , o que mostra que  $x \approx f(t)$ , donde  $f(t) \in A$ , como queríamos. □

**1.8.32** Se  $X$  é um espaço topológico e se  $x$  e  $y$  são conexos por arcos em  $X$ , então  $x$  e  $y$  são também conexos em  $X$ .

Em consequência, cada componente conexa de  $X$  é uma união de componentes conexas por arcos de  $X$ , em particular, todo o espaço topológico conexo por arcos é também conexo.

**Dem:** Se  $x$  e  $y$  são conexos por arcos em  $X$ , podemos considerar uma aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$ , pelo que, uma vez que  $[0, 1]$  é um espaço topológico conexo,  $f([0, 1])$  vai ser um subconjunto conexo de  $X$ , contendo  $x$  e  $y$ , o que mostra que  $x$  e  $y$  são conexos em  $X$ . A propriedade anterior implica que cada componente conexa de  $X$  é a união das componentes conexas por arcos dos seus elementos, em particular, se  $X$  é conexo por arcos,  $X$  não tem mais que uma componente conexa, sendo portanto conexo. □

**1.8.33** Diz-se que um espaço topológico  $X$  é *localmente conexo por arcos* se, para cada  $x_0 \in X$ , existe um sistema fundamental de vizinhanças  $\mathcal{B}_{x_0}$  de  $x_0$ , constituído por conjuntos conexos por arcos ou, o que é o mesmo, se para cada  $x_0 \in X$  a classe das vizinhanças conexas por arcos de  $x_0$  é um sistema fundamental de vizinhanças desse ponto.

É claro que  $X$  é então também localmente conexo.

Com demonstração decalcada pela de 1.8.23, pode-se verificar que, se  $X$  é localmente conexo por arcos e  $X' \subset X$  é um subconjunto aberto, então  $X'$ , com a topologia induzida, é também localmente conexo por arcos.

**1.8.34** Seja  $X$  um espaço topológico localmente conexo por arcos. Tem-se então que coincidem as componentes conexas por arcos e as componentes conexas de  $X$ , em particular  $X$  é conexo se, e só se, é conexo por arcos.

**Dem:** Sejam  $(X_j)_{j \in J}$  as componentes conexas por arcos de  $X$ , que são conjuntos conexos por arcos, logo, por 1.8.32, conexos, disjuntos dois a dois, não vazios e de união  $X$ . Tendo em conta 1.8.27, se verificarmos que os  $X_j$  são conjuntos abertos em  $X$ , eles são também as componentes conexas de  $X$ . Ora, se  $x \in X_j$ , podemos considerar uma vizinhança conexa por arcos  $V$  de  $x$ , tendo-se que, para cada  $y \in V$ ,  $x$  e  $y$  são conexos por arcos em  $V$ , e portanto em  $X$ , o que implica que  $y \in X_j$ , donde  $V \subset X_j$ . Ficou assim provado que  $X_j$  é efectivamente um conjunto aberto em  $X$ .  $\square$

**1.8.35 (Algumas observações sobre Álgebra Linear — conjuntos estrelados e conjuntos convexos)** Seja  $E$  um espaço vetorial:

**a)** Dados  $x, y \in E$ , define-se o *segmento* de extremidades  $x$  e  $y$  como sendo o conjunto, que notaremos  $[[x, y]]$ , dos vetores da forma

$$(1) \quad (1 - t)x + ty = x + t(y - x),$$

com  $t$  no intervalo  $[0, 1]$ , condição que pode ser reformulada trivialmente, de forma mais simétrica, referindo que se trata dos vetores da forma

$$(2) \quad s_1x + s_2y,$$

com  $s_1 \geq 0$ ,  $s_2 \geq 0$  e  $s_1 + s_2 = 1$ .

Repare-se que, dando a  $t$  os valores 0 e 1, vemos que  $x$  e  $y$  pertencem a  $[[x, y]]$  e que, usando por exemplo a segunda caracterização, concluimos que  $[[x, y]] = [[y, x]]$ . É também evidente que  $[[x, x]] = \{x\}$ . Repare-se que, em particular, o segmento  $[[0, y]]$  é simplesmente o conjunto dos  $ty$  com  $t \in [0, 1]$ .

**b)** No caso particular em que  $E = \mathbb{R}$ , tem-se, para  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $[[a, b]] = [a, b]$ , se  $a \leq b$ , e  $[[a, b]] = [b, a]$ , se  $a \geq b$ .

**Subdem:** Supondo já que  $a < b$ , tem-se, para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $t \geq 0$  e  $1 - t \geq 0$ , donde

$$a = (1 - t)a + ta \leq (1 - t)a + tb \leq (1 - t)b + tb = b,$$

e, se  $c \in [a, b]$ , vem  $c = (1 - t)a + ta$ , com  $t = \frac{c-a}{b-a} \in [0, 1]$ .  $\square$

**c)** Se  $A$  é um subconjunto de  $E$  e se  $x_0 \in A$ , diz-se que  $A$  é *estrelado relativamente a  $x_0$*  se, para cada  $x \in A$ ,  $[[x_0, x]] \subset A$ . Diz-se que um conjunto  $A \subset E$  é *convexo* se  $A$  é estrelado relativamente a cada um dos seus elementos, isto é, se se tem  $[[x, y]] \subset A$ , quaisquer que sejam  $x, y \in A$ .

**d)** O que vimos em 1.8.8 mostra-nos que os subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}$  são

precisamente os intervalos.

e) Dados  $x, y \in E$ , o segmento  $[[x, y]]$  é um conjunto convexo. Em particular  $\{x\} = [[x, x]]$  é convexo.

**Subdem:** Dados  $z, w \in [[x, y]]$  e  $u \in [0, 1]$ , vem

$$z = (1 - s)x + sy, \quad w = (1 - t)x + ty,$$

com  $s, t \in [0, 1]$ , e então

$$(1 - u)z + uw = (1 - v)x + vy,$$

com  $v = (1 - u)s + ut \in [[s, t]] \subset [0, 1]$ . □

f) Se  $E$  e  $F$  são espaços vectoriais e  $\lambda: E \rightarrow F$  é uma aplicação linear então, para  $x, y \in E$  tem-se trivialmente  $\lambda([[x, y]]) = [[\lambda(x), \lambda(y)]]$  o que implica que se  $A \subset E$  é convexo também  $\lambda(A) \subset F$  é convexo e que se  $B \subset F$  é convexo também a imagem recíproca  $\lambda^{-1}(B) \subset E$  é convexa.

g) A propriedade de  $[[x, y]]$  expressa em e) implica que este conjunto é convexo, contém  $x$  e  $y$  e está contido em qualquer convexo de  $E$  que contenha  $x$  e  $y$ , razão porque também se diz que  $[[x, y]]$  é o *envólucro convexo* de  $\{x, y\}$ . Estas observações admitem a seguinte generalização:

Sejam  $n \geq 1$  e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vetores de  $E$ . Notamos então  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  o conjunto dos vetores de  $E$  da forma

$$(3) \quad s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_nx_n$$

com cada  $s_j \geq 0$  e  $\sum s_j = 1$ , conjunto que é um convexo contendo cada  $x_j$  e contido em qualquer convexo de  $E$  que contenha todos os  $x_j$ , motivo porque se dá a este conjunto o nome de *envólucro convexo* de  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Tem-se, para  $n = 1$ ,  $[[x_1]] = \{x_1\}$  e, para  $n \geq 2$ ,

$$(4) \quad [[x_1, \dots, x_n]] = \bigcup_{y \in [[x_2, \dots, x_n]]} [[x_1, y]].$$

**Subdem:** O facto de se ter  $x_{j_0} \in [[x_1, \dots, x_n]]$  resulta de considerar na soma (3)  $s_{j_0} = 1$  e  $s_j = 0$  para cada  $j \neq j_0$ . O facto de  $[[x_1, \dots, x_n]]$  ser convexo resulta de que, sendo  $y, z$  neste conjunto e  $u \in [0, 1]$ , podemos escrever

$$x = s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_nx_n, \quad y = t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n$$

e então

$$(1 - u)x + uy = ((1 - u)s_1 + ut_1)x_1 + \dots + ((1 - u)s_n + ut_n)x_n,$$

com  $(1 - u)s_j + ut_j \geq 0$  e

$$\sum_j (1 - u)s_j + ut_j = (1 - u)\left(\sum_j s_j\right) + u\left(\sum_j t_j\right) = (1 - u) + u = 1.$$

Para justificarmos (4) começamos por notar que se

$$y = s_2x_2 + \cdots + s_nx_n \in [[x_2, \dots, x_n]]$$

e  $z = (1 - u)x_1 + uy \in [[x_1, y]]$  então

$$z = (1 - u)x_1 + us_2x_2 + \cdots + us_nx_n,$$

com

$$(1 - u) + us_2 + \cdots + us_n = (1 - u) + u(s_2 + \cdots + s_n) = 1,$$

peço que  $z \in [[x_1, \dots, x_n]]$ ; reciprocamente, se  $z \in [[x_1, \dots, x_n]]$  vem

$$z = s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n$$

e então se  $s_1 = 1$  tem-se  $z = x_1 \in [[x_1, x_2]]$ , com  $x_2 \in [[x_2, \dots, x_n]]$ , e se  $s_1 \neq 1$  o facto de se ter  $s_2 + \cdots + s_n = 1 - s_1$ , donde

$$\frac{s_2}{1 - s_1} + \cdots + \frac{s_n}{1 - s_1} = 1,$$

implica que

$$y = \frac{s_2}{1 - s_1}x_2 + \cdots + \frac{s_n}{1 - s_1}x_n \in [[x_2, \dots, x_n]],$$

vindo então

$$z = s_1x_1 + (1 - s_1)y \in [[x_1, y]].$$

Uma vez provado (4), vemos facilmente, por indução em  $n$ , que qualquer convexo que contenha  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  contém  $[[x_1, \dots, x_n]]$ , facto trivial para  $n = 1$  e que já conhecemos para  $n = 2$ , visto que, pela hipótese de indução ele contém  $[[x_2, \dots, x_n]]$  e portanto contém também para cada  $y$  em  $[[x_2, \dots, x_n]]$  o conjunto  $[[x_1, y]]$ .  $\square$

**1.8.36** Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo ou um conjunto estrelado, relativamente a um dos seus elementos, então  $A$  é um conjunto conexo por arcos, em particular conexo<sup>125</sup>.

**Dem:** Comecemos por supor que  $A$  é convexo. Dados  $x, y \in A$ , podemos considerar a aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow A$ , definida por

$$f(t) = (1 - t)x + ty,$$

para a qual se tem  $f(0) = x$  e  $f(1) = y$  (a continuidade de  $f$  resulta da continuidade de cada uma das suas componentes, como aplicação de  $A$  em  $\mathbb{R}$ ). Vemos assim que  $A$  é conexo por arcos, e portanto conexo. Supondo agora que  $A$  é estrelado, relativamente ao ponto  $x_0 \in A$ , vemos que, para cada  $x \in A$ ,  $x_0$  e  $x$  são conexos por arcos em  $A$ , por pertencerem ao

<sup>125</sup>Esta propriedade é válida, mais geralmente, quando, em vez de  $\mathbb{R}^n$ , consideramos um espaço vectorial normado arbitrário. Os espaços vectoriais normados serão estudados mais adiante, em 2.1.

conjunto convexo, em particular conexo por arcos,  $[[x_0, x]]$ , contido em  $A$ ; por transitividade, concluímos que dois pontos quaisquer de  $A$  são conexos por arcos em  $A$ , pelo que  $A$ , tendo uma única componente conexa por arcos, vai ser conexo por arcos, em particular conexo.  $\square$

**1.8.37 (Corolário)** Os espaços  $\mathbb{R}^n$ , com a topologia usual, são localmente conexos por arcos.

**Dem:** Basta atender a que, considerando em  $\mathbb{R}^n$ , por exemplo, a métrica  $d_\infty$ , que define a sua topologia canónica, cada ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  tem um sistema fundamental de vizinhanças constituído pelas bolas abertas  $B_r(x)$ , com  $r > 0$ , que se verifica facilmente serem conjuntos estrelados relativamente a  $x$ ,<sup>126</sup> logo conexos por arcos.  $\square$

## Exercícios

**Ex 1.8.1** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A \subset X$ . Mostrar que, se  $B$  é uma parte conexa de  $X$  que intersesta os conjuntos  $\text{int}(A)$  e  $\text{ext}(A)$ , então  $B$  também intersesta  $\text{fr}(A)$ .

**Ex 1.8.2** Mostrar que a topologia caótica de um conjunto arbitrário é sempre conexa e que a sua topologia discreta é conexa se, e só se, o conjunto tem no máximo um elemento.

**Ex 1.8.3** Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico e se  $A$  e  $B$  são dois subconjuntos conexos que não são mutuamente separados, então  $A \cup B$  é também conexo.

**Ex 1.8.4** Se  $X$  é um espaço topológico e  $Y$  é um conjunto, diz-se que uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é *localmente constante* se, para cada  $a \in X$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que a restrição de  $f$  ao conjunto  $V$  seja uma aplicação constante.

**a)** Mostrar que uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é localmente constante se, e só se, ela é contínua, quando se considera em  $Y$  a topologia discreta.

**b)** Mostrar que, se o espaço topológico  $X$  é conexo, então toda a aplicação localmente constante  $f: X \rightarrow Y$  é mesmo constante.

**Ex 1.8.5** Seja  $X$  um espaço métrico conexo com pelo menos dois elementos e seja  $J \subset [0, +\infty[$  o conjunto dos números reais  $d(x, y)$  com  $x, y \in X$ . Mostrar que se  $X$  não é limitado então  $J = [0, +\infty[$  e que se  $X$  é limitado então  $J$  é um dos intervalos

$$[0, \text{diam}(X)[, \quad [0, \text{diam}(X)].$$

Deduzir, em particular, que  $X$  não pode ser finito nem numerável.

**Ex 1.8.6** Mostrar que, se um espaço topológico  $X$  tem apenas um número finito de componentes conexas, então cada uma destas é um conjunto aberto.

**Sugestão:** Mostrar que o respectivo complementar é fechado.

<sup>126</sup>Aliás, são mesmo convexos, embora não precisemos de tanto. Quem não quiser fazer a verificação neste momento, poderá esperar sobre o resultado mais geral apresentado adiante em 2.1.28.



**Ex 1.8.7** Se  $X$  é um espaço topológico com a topologia discreta, mostrar que as componentes conexas de  $X$  são os subconjuntos unitários (a um espaço topológico em que esta última condição é verificada dá-se o nome de espaço *totalmente desconexo*).

**Ex 1.8.8** Considerando no conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais a topologia induzida pela topologia usual de  $\mathbb{R}$ , mostrar que, apesar de a topologia de  $\mathbb{Q}$  não ser a topologia discreta,  $\mathbb{Q}$  é totalmente desconexo, isto é, as componentes conexas de  $\mathbb{Q}$  são os subconjuntos unitários (em particular, temos um exemplo em que as componentes conexas não são conjuntos abertos).

**Ex 1.8.9** Consideremos em  $\mathbb{R}$  a topologia inferior, estudada no exercício 1.2.6.

**a)** Verificar que qualquer conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  é conexo. **Sugestão:** Verificar que dois subconjuntos não vazios  $A_1$  e  $A_2$  de  $\mathbb{R}$  nunca são mutuamente separados, reparando que se  $a_1 \in A_1$  e  $a_2 \in A_2$  então ou  $a_1$  é aderente a  $A_2$  ou  $a_2$  é aderente a  $A_1$ .

**b)** Deduzir de a) que, se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação contínua, quando se considera a topologia inferior no domínio e a topologia canónica no espaço de chegada, então  $f$  é necessariamente constante. **Sugestão:** Sendo  $a \neq b$  em  $\mathbb{R}$ , o que poderá dizer sobre o subconjunto  $\{f(a), f(b)\}$  de  $\mathbb{R}$ ?

**Ex 1.8.10** Considerar em  $\mathbb{R}$  a topologia direita, estudada no exercício 1.2.8.

**a)** Verificar que os únicos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que são conexos são o conjunto vazio  $\emptyset$  e os conjuntos com um único elemento. **Sugestão:** Se  $a < b$  pertencem a  $A$  verificar que são mutuamente separados e não vazios os subconjuntos

$$A_1 = \{x \in A \mid x < b\}, \quad A_2 = \{x \in A \mid x \geq b\}.$$

**b)** Deduzir de a) que, se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação contínua, quando se considera a topologia canónica no domínio e a topologia direita no espaço de chegada, então  $f$  é necessariamente constante.

**Ex 1.8.11** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua e sobrejectiva. Mostrar que o número de componentes conexas de  $X$  é maior ou igual ao número de componentes conexas de  $Y$ . Deduzir, em particular, que dois espaços topológicos homeomorfos têm o mesmo número de componentes conexas.

**Ex 1.8.12** Mostrar que um espaço topológico  $X$  é localmente conexo se, e só se, para cada aberto  $U$  de  $X$ , as componentes conexas de  $U$  são conjuntos abertos.

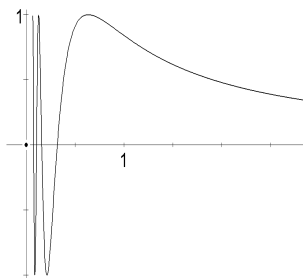
**Ex 1.8.13** Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico compacto e localmente conexo, então  $X$  tem apenas um número finito de componentes conexas.

**Ex 1.8.14** Mostrar que se  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$ , então  $U$  é união de uma família finita ou numerável de intervalos abertos, disjuntos dois a dois.

**Sugestão:** Pensar nas componentes conexas de  $U$ .

**Ex 1.8.15** No exercício 1.4.27 juntaram-se as letras e os algarismos em grupos constituídos por figuras homeomorfas. Escolher uma figura de cada um desses grupos e provar que essas figuras não são homeomorfas, arranjando propriedades topológicas que as distingam. **Sugestão:** Estudar o número de componentes conexas que se obtêm quando se retira um ponto a cada uma das figuras.

**Ex 1.8.16** Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  a união do conjunto  $\{(0, 0)\}$  com o conjunto dos pares  $(x, y)$  tais que  $x > 0$  e  $y = \text{sen}(\frac{1}{x})$ .



Mostrar que  $A$  é um conjunto conexo, mas não é conexo por arcos.

**Ex 1.8.17** Mostrar que  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  não é conexo mas que, para cada  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é conexo. **Sugestão:** Notando  $e_1, e_2, \dots, e_n$  a base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , seja  $A$  (resp.  $B$ ) o conjunto dos vetores  $te_1$  com  $t \geq 0$  (resp. com  $t \leq 0$ ). Mostrar que  $\mathbb{R}^n \setminus A$  é estrelado relativamente a  $-e_1$  e que  $\mathbb{R}^n \setminus B$  é estrelado relativamente a  $e_1$  e reparar que  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é a união dos conjuntos  $\mathbb{R}^n \setminus A$  e  $\mathbb{R}^n \setminus B$ , os quais têm intersecção não vazia.

**Ex 1.8.18** Considerar em  $\mathbb{R}^n$  a norma euclidiana, definida por

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = d((x_1, x_2, \dots, x_n), 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

e seja  $S$  a *hipersuperfície esférica*, definida por

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = 1\}.$$

Mostrar que, se  $n \geq 2$ , então  $S$  é um conjunto conexo. **Sugestão:** Construir uma aplicação contínua e sobrejectiva de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  sobre  $S$ .

**Ex 1.8.19** Nas notações do exercício anterior, mostrar que, para cada  $n \geq 2$  e  $r > 0$ , é conexo o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \geq r\}.$$

Deduzir que, se  $n \geq 2$  e se  $B \subset \mathbb{R}^n$  é um subconjunto limitado, para a métrica euclidiana, então  $\mathbb{R}^n \setminus B$  tem uma única componente conexa ilimitada.

**Sugestão:** Construir uma aplicação contínua e sobrejectiva de  $[r, +\infty[ \times S$  sobre  $A$ .

**Ex 1.8.20 a)** Sejam  $n \geq 2$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ . Sendo  $B_r(x_0)$  a bola aberta de centro  $x_0$  e raio  $r$ , para a norma euclidiana, mostrar que  $B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$  é um conjunto conexo.

**b)** Sejam  $n \geq 2$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo e  $I \subset U$  um conjunto finito. Mostrar que  $U \setminus I$  é também um aberto conexo. **Sugestão:** Por indução, basta considerar o caso em que  $I$  é um conjunto unitário,  $I = \{x_0\}$ . Nesse caso, utilizar a conclusão de a) e o facto de  $U$  ser também conexo por arcos.

## §9. Teoremas de Urysohn e Tietze. Partições da unidade.

**1.9.1** Diz-se que um espaço topológico  $X$  é *normal* se, quaisquer que sejam os conjuntos fechados  $A$  e  $B$  de  $X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$ , existem conjuntos abertos  $U$  e  $V$  de  $X$ , tais que  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .

**1.9.2** Se  $X$  é um espaço métrico, então  $X$  é um espaço normal.

**Dem:** Sejam  $A$  e  $B$  fechados em  $X$  e tais que  $A \cap B = \emptyset$ . Podemos já supor que  $A$  e  $B$  são não vazios, sem o que tomávamos um dos abertos  $U$  e  $V$  igual a  $\emptyset$  e o outro igual a  $X$ . Tendo em conta 1.4.22, podemos considerar as aplicações contínuas  $d_A: X \rightarrow [0, +\infty[$  e  $d_B: X \rightarrow [0, +\infty[$ , para as quais se tem  $d_A(x) = 0$  se, e só se,  $x \in A$ , e  $d_B(x) = 0$  se, e só se,  $x \in B$ . Sendo agora

$$U = \{x \in X \mid d_A(x) < d_B(x)\} = \{x \in X \mid d_A(x) - d_B(x) \in ]-\infty, 0[ \},$$
$$V = \{x \in X \mid d_A(x) > d_B(x)\} = \{x \in X \mid d_A(x) - d_B(x) \in ]0, +\infty[ \},$$

vemos que  $U$  e  $V$  são abertos,  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

**1.9.3** Se  $X$  é um espaço topológico compacto e de Hausdorff então  $X$  é um espaço normal.

**Dem:** Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos fechados de  $X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A$  e  $B$  vão ser compactos pelo que, por 1.6.39, existem abertos  $U$  e  $V$  de  $X$ , com  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

**1.9.4 (Caracterização alternativa dos espaços normais)** Um espaço topológico  $X$  é normal se, e só se, quaisquer que sejam o subconjunto fechado  $C$  e o subconjunto aberto  $W$  com  $C \subset W$ , existe um aberto  $U$  com

$$C \subset U, \quad \text{ad}(U) \subset W. \quad 127$$

**Dem:** Começemos por supor que  $X$  é normal. Sejam  $C$  fechado e  $W$  aberto com  $C \subset W$ . Então  $X \setminus W$  é um fechado com  $C \cap (X \setminus W) = \emptyset$  pelo que podemos considerar abertos  $U$  e  $V$  com  $C \subset U$ ,  $X \setminus W \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ , tendo-se então que  $X \setminus V$  é um fechado com  $U \subset X \setminus V \subset W$  pelo que

$$\text{ad}(U) \subset \text{ad}(X \setminus V) = X \setminus V \subset W.$$

Suponhamos, reciprocamente, que a condição do enunciado é verificada. Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos fechados tais que  $A \cap B = \emptyset$ . Tem-se então que  $X \setminus B$  é um aberto com  $A \subset X \setminus B$  pelo que podemos considerar um aberto  $U$  com  $A \subset U$  e  $\text{ad}(U) \subset X \setminus B$ . Tem-se então que  $X \setminus \text{ad}(U)$  é um

---

<sup>127</sup>Poder-se-ia traduzir esta propriedade dizendo que qualquer conjunto fechado tem um sistema fundamental de vizinhanças fechadas.

aberto com  $B \subset X \setminus \text{ad}(U)$  e  $U \cap (X \setminus \text{ad}(U)) = \emptyset$ , o que mostra que  $X$  é normal.  $\square$

**1.9.5 (Corolário)** Se  $X$  é um espaço topológico normal e de Hausdorff, então  $X$  é regular (cf. 1.4.30).

**Dem:** Verificaremos que o conjunto de todas as vizinhanças fechadas de um ponto  $a \in X$  é um sistema fundamental de vizinhanças de  $a$ . Ora, se  $W$  é uma vizinhança de  $a$ , o conjunto fechado  $\{a\}$  está contido no aberto  $\text{int}(W)$  pelo que, por 1.9.4, podemos considerar um aberto  $U$  de  $X$  com  $\{a\} \subset U$  e  $\text{ad}(U) \subset \text{int}(W)$ , tendo-se então que  $\text{ad}(U)$  é uma vizinhança fechada de  $a$  contida em  $W$ .  $\square$

**1.9.6 (Teorema de Urysohn)** Sejam  $X$  um espaço topológico normal e  $A$  e  $B$  subconjuntos fechados de  $X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$ . Existe então uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 1$  para cada  $x \in A$  e  $f(x) = 0$  para cada  $x \in B$ .

**Dem:**<sup>128</sup> Vamos dividir a demonstração em várias partes:

a) No que se segue, as letras  $r$  e  $s$  designarão sempre números racionais do intervalo  $[0, 1]$ . Vamos começar por verificar que é possível escolher, para cada  $s$ , um conjunto aberto  $U_s$  de  $X$ , com

$$(1) \quad A \subset U_s \quad \text{e} \quad \text{ad}(U_s) \subset X \setminus B,$$

de modo que se verifique a seguinte condição:

$$(2) \quad r < s \Rightarrow \text{ad}(U_s) \subset U_r.$$

Para isso, e atendendo a que o conjunto dos racionais do intervalo  $[0, 1]$  é numerável, começamos por considerar uma bijecção  $\xi$  de  $\mathbb{N}$  sobre o conjunto daqueles racionais, tal que  $\xi(1) = 0$  e  $\xi(2) = 1$ . Tendo em conta 1.9.4, e uma vez que  $X \setminus B$  é um aberto contendo  $A$ , consideramos em seguida um aberto  $U_0$  de  $X$  tal que

$$A \subset U_0 \quad \text{e} \quad \text{ad}(U_0) \subset X \setminus B.$$

Aplicando de novo 1.9.4, consideramos agora um aberto  $U_1$  de  $X$  tal que

$$A \subset U_1 \quad \text{e} \quad \text{ad}(U_1) \subset U_0,$$

em particular, também

$$\text{ad}(U_1) \subset \text{ad}(U_0) \subset X \setminus B.$$

Depois de definidos os abertos  $U_0 = U_{\xi(1)}$  e  $U_1 = U_{\xi(2)}$ , que verificam as condições (1) e (2), vamos definir recursivamente os restantes abertos  $U_{\xi(n)}$ . Supomos portanto que  $n \geq 3$  e que estão definidos os  $U_{\xi(j)}$ , com  $j < n$ , de modo a que as condições (1) e (2) estejam verificadas. Sejam então  $r$  o maior

<sup>128</sup>A demonstração que vamos apresentar é uma adaptação trivial de uma demonstração que encontramos no livro de Rudin [15].

dos  $\xi(j)$ , com  $j < n$  e  $\xi(j) < \xi(n)$ , e  $s$  o menor dos  $\xi(j)$ , com  $j < n$  e  $\xi(j) > \xi(n)$ . Tem-se portanto  $r < \xi(n) < s$ , donde  $\text{ad}(U_s) \subset U_r$ , pelo que, mais uma vez por 1.9.4, podemos considerar um aberto  $U_{\xi(n)}$  com

$$\text{ad}(U_s) \subset U_{\xi(n)} \quad \text{e} \quad \text{ad}(U_{\xi(n)}) \subset U_r,$$

em particular, também

$$\text{ad}(U_{\xi(n)}) \subset \text{ad}(U_r) \subset X \setminus B$$

assim como, para cada  $j < n$ , se  $\xi(j) < \xi(n)$  então  $\xi(j) \leq r$  donde

$$\text{ad}(U_{\xi(n)}) \subset U_r \subset U_{\xi(j)}$$

e se  $\xi(j) > \xi(n)$  então  $\xi(j) \geq s$  donde  $U_{\xi(j)} \subset U_s$  e

$$\text{ad}(U_{\xi(j)}) \subset \text{ad}(U_s) \subset U_{\xi(n)}.$$

Ficou assim terminada a construção recursiva dos conjuntos  $U_s$ , verificando as condições (1) e (2).

**b)** Uma vez definidos os abertos  $U_s$ , vamos definir uma aplicação  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , pondo

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin U_0 \\ \sup\{s \mid x \in U_s\}, & \text{se } x \in U_0. \end{cases}$$

Reparemos que se tem

$$(4) \quad x \notin U_r \Rightarrow f(x) \leq r, \quad x \in \text{ad}(U_r) \Rightarrow f(x) \geq r.$$

Com efeito, a primeira implicação é uma consequência da definição de supremo, se repararmos que se  $x \notin U_r$  então também  $x \notin U_s$ , para cada  $s > r$ , e a segunda implicação resulta de que, se fosse  $f(x) < r$ , podíamos escolher  $s$  com  $f(x) < s < r$ , tendo-se então, por ser  $\text{ad}(U_r) \subset U_s \subset U_0$ ,  $x \notin U_s$  e  $x \notin \text{ad}(U_r)$ .

**c)** Se  $x \in A$ , tem-se  $x \in U_1$ , donde  $f(x) = 1$ . Se  $x \in B$ , tem-se  $x \notin \text{ad}(U_0)$ , donde  $x \notin U_0$ , pelo que  $f(x) = 0$ . Resta-nos verificar a continuidade de  $f$  num ponto  $x_0 \in X$  arbitrário, para o que separamos os seguintes três casos:

**c1)** Suponhamos que  $f(x_0) = 0$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos fixar  $s$  tal que  $0 < s < \delta$ , tendo-se então que  $X \setminus \text{ad}(U_s)$  é um aberto, com  $x_0 \in X \setminus \text{ad}(U_s)$ , tal que, para cada  $x \in X \setminus \text{ad}(U_s)$ , sai  $x \notin U_s$ , donde  $f(x) \leq s < \delta$ , portanto

$$f(x) \in ]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[.$$

**c2)** Suponhamos que  $f(x_0) = 1$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos fixar  $r$  tal que  $1 - \delta < r < 1$ , tendo-se então que  $U_r$  é um aberto, com  $x_0 \in U_r$ , tal que, se  $x \in U_r \subset \text{ad}(U_r)$ , sai  $f(x) \geq r > 1 - \delta$ , donde

$$f(x) \in ]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[.$$

**c3)** Suponhamos que  $f(x_0) \in ]-1, 1[$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos fixar  $r$  e  $s$ , tais que  $f(x_0) - \delta < r < f(x_0) < s < f(x_0) + \delta$ ; tem-se então que  $U_r \cap (X \setminus \text{ad}(U_s))$  é um aberto de  $X$ , contendo  $x_0$  e tal que, para cada  $x \in U_r \cap (X \setminus \text{ad}(U_s))$ , vem  $x \in \text{ad}(U_r)$ , donde  $f(x) \geq r > f(x_0) - \delta$ , e  $x \notin U_s$ , donde  $f(x) \leq s < f(x_0) + \delta$ , isto é,

$$f(x) \in ]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[. \quad \square$$

**1.9.7 (Aplicação a um teorema de metrizabilidade)** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff, localmente compacto e de base contável. Tem-se então que  $X$  é metrizável.

**Dem:** Começemos por mostrar que a conclusão é válida no caso particular em que o espaço de Hausdorff de base contável  $X$  é mesmo compacto. Seja  $\mathcal{U}$  uma base contável de abertos de  $X$ . Para cada par de conjuntos  $U, V \in \mathcal{U}$  tais que  $\text{ad}(U) \cap \text{ad}(V) = \emptyset$ , o facto de  $X$  ser normal, por 1.9.3, permite-nos aplicar o teorema de Urysohn 1.9.6 para garantir a existência de uma aplicação contínua  $f_{U,V}: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 1$  para cada  $x \in \text{ad}(U)$  e  $f(x) = 0$  para cada  $x \in \text{ad}(V)$ . Vamos verificar que a família contável das aplicações contínuas  $f_{U,V}: X \rightarrow [0, 1]$  separa os pontos de  $X$ , no sentido referido em 1.6.30, o que, tendo em conta esse resultado, provará que  $X$  é efetivamente metrizável. Sejam então  $x \neq x'$  em  $X$ . Uma vez que, como vimos em 1.6.43,  $X$  é regular, podemos considerar vizinhanças fechadas  $A$  de  $x$  e  $B$  de  $x'$  tais que  $A \cap B = \emptyset$ . Sendo então  $U, V \in \mathcal{U}$  tais que  $x \in U \subset A$  e  $x' \in V \subset B$  o facto de se ter  $\text{ad}(U) \subset A$  e  $\text{ad}(V) \subset B$  implica que  $\text{ad}(U) \cap \text{ad}(V) = \emptyset$  e então, considerando a correspondente aplicação  $f_{U,V}$ , vem

$$f_{U,V}(x) = 1 \neq 0 = f_{U,V}(x'),$$

como queríamos.

Mostremos por fim que o resultado é ainda válido sem a hipótese suplementar de  $X$  ser compacto. Consideremos um compactificado de Alexandroff  $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$  de  $X$ , que sabemos ser um espaço de Hausdorff compacto do qual  $X$  é um subespaço topológico aberto (cf. 1.6.49) e que, como verificámos em 1.6.53, é também de base contável. O que vimos no caso particular já tratado mostra que  $\widehat{X}$  é metrizável e daqui decorre trivialmente que o seus subespaço topológico  $X$  é também metrizável.  $\square$

Embora, em geral, um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto não tenha que ser normal (na ausência da hipótese de existência de base contável), podemos enunciar uma versão ligeiramente mais fraca do teorema de Urysohn, que resulta de aplicar, analogamente ao que fizemos na prova precedente, a versão original ao compactificado de Alexandroff. Essa versão será aplicada em seguida à construção de “partições da unidade” de um compacto num espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff, um instrumento que é útil em muitas situações.

**1.9.8 (Teorema de Urysohn em localmente compactos)** Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff, localmente compacto e sejam  $A \subset X$  um subconjunto compacto e  $B \subset X$  um subconjunto fechado, tais que  $A \cap B = \emptyset$ . Existe então uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , tal que  $f(x) = 1$ , para cada  $x \in A$ , e  $f(x) = 0$ , para cada  $x \in B$ .

**Dem:** Seja  $\hat{X}$  o compactificado de Alexandroff de  $X$  que, por ser um espaço topológico compacto de Hausdorff, é normal. O conjunto  $A$ , sendo compacto é também fechado em  $\hat{X}$ . Seja  $\hat{B}$  a aderência de  $B$  em  $\hat{X}$ , que é um subconjunto fechado de  $\hat{X}$ . Por  $B$  ser fechado em  $X$ ,  $\hat{B} \subset B \cup \{\infty\}$  e portanto tem-se ainda  $A \cap \hat{B} = \emptyset$ . Podemos assim aplicar a versão do teorema de Urysohn em 1.9.6 para garantir a existência de uma aplicação contínua  $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\hat{f}(x) = 1$ , para cada  $x \in A$ , e  $\hat{f}(x) = 0$ , para cada  $x \in \hat{B}$  e a restrição  $f: X \rightarrow [0, 1]$  de  $\hat{f}$  verifica então as condições pedidas.  $\square$

**1.9.9 (Partição finita da unidade de um compacto)** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff,  $A \subset X$  um conjunto compacto e  $(U_i)_{i \in I}$  um cobertura aberta finita de  $A$ , isto é, uma família finita de abertos de  $X$ , tal que  $A \subset \bigcup U_i$ . Existe então uma família  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de aplicações contínuas  $\varphi_i: X \rightarrow [0, 1]$ , verificando as condições seguintes:

a) Para cada  $i \in I$ , existe um subconjunto compacto  $B_i$  de  $U_i$ , tal que  $\varphi_i(x) = 0$ , para cada  $x \in X \setminus B_i$ ;<sup>129</sup>

b) Para cada  $x \in X$ ,  $\sum \varphi_i(x) \leq 1$  e, para cada  $x \in A$ ,  $\sum \varphi_i(x) = 1$ .

A uma família de aplicações  $\varphi_i$ , verificando as condições anteriores, dá-se o nome de *partição da unidade* do compacto  $A$  subordinada à cobertura aberta dos  $U_i$ .

**Dem:** Vamos começar por provar a existência, para cada  $i \in I$ , de um compacto  $A_i \subset U_i$ , tal que  $A \subset \bigcup A_i$ . Para isso, escolhemos, para cada  $x \in A$ , um índice  $i_x \in I$  tal que  $x \in U_{i_x}$  e uma vizinhança compacta  $B_x$  de  $x$ , tal que  $B_x \subset U_{i_x}$ ; uma vez que a família dos abertos  $\text{int}(B_x)$  constitui uma cobertura aberta de  $A$ , podemos, pela compacidade de  $A$ , tomar uma parte finita  $K$  de  $A$  tal que  $A \subset \bigcup_{x \in K} \text{int}(B_x)$  e definir, para cada  $i \in I$ , o compacto

$A_i$  como sendo a união finita dos  $B_x$ , com  $x \in K$  e  $i_x = i$ .

Uma vez construídos os compactos  $A_i$ , utilizamos 1.6.54 para provar a existência de abertos  $V_i$  e de compactos  $B_i$ , com

$$A_i \subset V_i \subset B_i \subset U_i,$$

e consideramos, tendo em conta 1.9.8, aplicado ao compacto  $A_i$  e ao fechado  $X \setminus V_i$  com intersecção vazia, uma aplicação contínua  $\psi_i: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\psi_i(x) = 1$ , para cada  $x \in A_i$ , e  $\psi_i(x) = 0$ , para cada  $x \in X \setminus V_i$ , em particular, para cada  $x \in X \setminus B_i$ . Seja  $\psi: X \rightarrow [0, +\infty[$  a aplicação contínua definida por  $\psi(x) = \sum \psi_i(x)$ . O facto de se ter  $A \subset \bigcup A_i$  implica que se tem

<sup>129</sup>Costuma-se traduzir este facto dizendo-se que  $\varphi_i$  tem suporte compacto contido em  $U_i$

$\psi(x) > 0$ , para cada  $x \in A$ , o que nos permite considerar o aberto  $V$  de  $X$ , contendo  $A$ , constituído pelos pontos  $x \in X$  tais que  $\psi(x) > 0$ . Aplicando, mais uma vez, 1.9.8 ao compacto  $A$  e ao fechado  $X \setminus V$ , com intersecção vazia, podemos considerar uma aplicação contínua  $\theta: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\theta(x) = 1$ , para cada  $x \in A$ , e  $\theta(x) = 0$ , para cada  $x \notin V$ , o que implica que a aplicação contínua de  $X$  em  $[0, +\infty[$ , que a  $x$  associa  $\psi(x) + (1 - \theta(x))$  é estritamente positiva em todos os pontos. É agora imediato que podemos definir aplicações contínuas  $\varphi_i: X \rightarrow [0, 1]$ , por

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi(x) + (1 - \theta(x))},$$

e que estas aplicações vão verificar as condições a) e b) do enunciado.  $\square$

Voltando aos espaços topológicos normais, vamos agora provar o teorema de Tietze-Urysohn sobre a possibilidade de prolongar aplicações contínuas com valores reais definidas num subconjunto fechado. Será cómodo começar por estabelecer um lema em que o espaço de chegada  $\mathbb{R}$  é substituído pelo intervalo  $[-1, 1]$ . O facto de este ser efetivamente um lema resulta de ele poder ser recuperado a partir do teorema (cf. o corolário 1.9.12 adiante).

**1.9.10 (Lema de Tietze-Urysohn)** Sejam  $X$  um espaço topológico normal,  $A \subset X$  um subconjunto fechado e  $f: A \rightarrow [-1, 1]$  uma aplicação contínua. Existe então uma aplicação contínua  $\hat{f}: X \rightarrow [-1, 1]$  que prolonga  $f$ , isto é, tal que  $\hat{f}(x) = f(x)$  para cada  $x \in A$ .

**Dem:**<sup>130</sup> Vamos dividir a demonstração em várias partes, afastando desde já o caso trivial em que  $A = X$ , em particular aquele em que  $X = \emptyset$ :

**a)** Começemos por provar que, qualquer que seja a aplicação contínua  $g: A \rightarrow [-1, 1]$ , existe uma aplicação contínua  $\tilde{g}: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ , tal que, para cada  $x \in A$ ,  $|\tilde{g}(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}$ .

**Subdem:** Consideremos os subconjuntos fechados  $A_1$  e  $A_2$  de  $A$ , e portanto de  $X$ , definidos por

$$A_1 = \{x \in A \mid g(x) \leq -\frac{1}{3}\}, \quad A_2 = \{x \in A \mid g(x) \geq \frac{1}{3}\}.$$

Pelo teorema de Urysohn, vai existir uma aplicação contínua  $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $\varphi(x) = 0$ , para cada  $x \in A_1$ , e  $\varphi(x) = 1$ , para cada  $x \in A_2$ , e podemos então definir a aplicação contínua  $\tilde{g}: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ , por

$$\tilde{g}(x) = -\frac{1}{3}(1 - \varphi(x)) + \frac{1}{3}\varphi(x)$$

(uma média ponderada entre  $-\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{3}$ ), aplicação que vai verificar  $\tilde{g}(x) = -\frac{1}{3}$ ,

<sup>130</sup>A demonstração que vamos apresentar é a que se encontra no livro de Bourbaki [3].



para cada  $x \in A_1$ , e  $\tilde{g}(x) = \frac{1}{3}$ , para cada  $x \in A_2$ , e portanto  $|\tilde{g}(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}$ , para cada  $x \in A$ .

**b)** Vamos agora construir recursivamente, para cada  $n \geq 0$ , uma aplicação contínua  $f_n: X \rightarrow [-1, 1]$ , de modo que:

**b1)** Para cada  $x \in X$ ,  $|f_n(x)| \leq 1 - (\frac{2}{3})^n$ ;

**b2)** Para cada  $x \in A$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ ;

**b3)** Para cada  $x \in X$ ,  $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3} \times (\frac{2}{3})^n$ .

Para isso, começamos por tomar  $f_0(x) = 0$ , para cada  $x \in X$ , que verifica trivialmente b1) e b2). Supomos, em seguida, que estão definidas as aplicações contínuas  $f_j: X \rightarrow [-1, 1]$ , para cada  $j \leq n$ , verificando as condições b1), b2) e b3). Podemos aplicar o que vimos em a) à aplicação  $g: A \rightarrow [-1, 1]$ , definida por

$$g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (f(x) - f_n(x)),$$

considerando uma aplicação contínua  $\tilde{g}: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ , tal que, para cada  $x \in A$ ,  $|\tilde{g}(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}$ . Definimos então a aplicação contínua  $f_{n+1}: X \rightarrow [-1, 1]$ , pondo

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \left(\frac{2}{3}\right)^n \tilde{g}(x);$$

com efeito, tem-se então

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left(\frac{2}{3}\right)^n |\tilde{g}(x)| \leq \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

donde

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x)| &\leq |f_{n+1}(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

e, para cada  $x \in A$ ,

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f(x)| &= |f_{n+1}(x) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| = \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n |\tilde{g}(x) - g(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

**c)** Para cada  $x \in A$ , a desigualdade b2) vai implicar, por ser  $(\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$ , que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . Por outro lado se  $x \in X$  a desigualdade em b3) implica que, para a métrica da convergência uniforme  $d_\infty$  de  $\mathbb{B}(X, [-1, 1])$ , tem-se

$$d_\infty(f_{n+1}, f_n) \leq \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

condição que, tendo em conta o lema 1.7.15, implica que a sucessão das aplicações limitadas  $f_n$  é uma sucessão de Cauchy, portanto convergente

para um certo  $\widehat{f} \in \mathbb{B}(X, [-1, 1])$ , uma vez que este espaço é completo (cf. 1.7.11). Tendo em conta 1.4.32 e 1.2.77, a aplicação  $\widehat{f}: X \rightarrow [-1, 1]$  é contínua e o facto de a topologia da convergência uniforme ser mais fina que a da convergência simples implica que para cada  $x \in X$  tem-se  $f_n(x) \rightarrow \widehat{f}(x)$  e portanto, se  $x \in A$ , por ser também  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , tem-se  $\widehat{f}(x) = f(x)$ .  $\square$

**1.9.11 (Teorema de Tietze-Urysohn)** Sejam  $X$  um espaço topológico normal,  $A \subset X$  um subconjunto fechado e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua. Existe então uma aplicação contínua  $\widehat{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$  que prolonga  $f$ , isto é, tal que  $\widehat{f}(x) = f(x)$ , para cada  $x \in A$ .

**Dem:** Consideremos o homeomorfismo  $\varphi_0: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  restrição do homeomorfismo  $\varphi: [-1, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definido em 1.4.44. Podemos considerar a aplicação contínua  $g = \varphi_0^{-1} \circ f: A \rightarrow ]-1, 1[$ , a qual é, em particular, uma aplicação contínua de  $A$  em  $]-1, 1[$ . Pelo lema de Tietze-Urysohn em 1.9.10, existe uma aplicação contínua  $\widehat{g}: X \rightarrow ]-1, 1[$ , tal que, para cada  $x \in A$ ,  $\widehat{g}(x) = g(x)$ . O problema está em que a imagem de  $\widehat{g}$  não tem que estar contida em  $]-1, 1[$ . Consideremos então o subconjunto fechado  $B$  de  $X$ ,  $B = \{x \in X \mid |\widehat{g}(x)| = 1\}$ . Uma vez que  $A \cap B = \emptyset$ , podemos aplicar o teorema de Urysohn (1.9.6) para garantir a existência de uma aplicação contínua  $\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ , tal que  $\alpha(x) = 1$ , para cada  $x \in A$ , e  $\alpha(x) = 0$ , para cada  $x \in B$ . Podemos então considerar uma nova aplicação contínua  $\tilde{g}: X \rightarrow ]-1, 1[$ , definida por  $\tilde{g}(x) = \alpha(x)\widehat{g}(x)$ , aplicação para a qual se tem ainda  $\tilde{g}(x) = g(x)$ , para cada  $x \in A$ , e definir uma aplicação contínua  $\widehat{f} = \varphi \circ \tilde{g}: X \rightarrow \mathbb{R}$ , para a qual se vai ter, para cada  $x \in A$ ,

$$\widehat{f}(x) = \varphi(\tilde{g}(x)) = \varphi(g(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(f(x))) = f(x). \quad \square$$

**1.9.12 (Corolário)** Sejam  $X$  um espaço topológico normal,  $A \subset X$  um subconjunto fechado,  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$  e  $f: A \rightarrow [a, b]$  uma aplicação contínua. Existe então uma aplicação contínua  $\widehat{f}: X \rightarrow [a, b]$  que prolonga  $f$ , isto é, tal que  $\widehat{f}(x) = f(x)$  para cada  $x \in A$ .

**Dem:** Pelo teorema de Tietze-Urysohn, podemos considerar uma aplicação contínua  $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{f}(x) = f(x)$  para cada  $x \in A$ . Basta então considerar a aplicação contínua  $\widehat{f}: X \rightarrow [a, b]$  definida por

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & \text{se } \tilde{f}(x) \in [a, b] \\ a, & \text{se } \tilde{f}(x) \leq a \\ b, & \text{se } \tilde{f}(x) \geq b \end{cases}$$

(quando  $\tilde{f}(x) = a$  ou  $\tilde{f}(x) = b$  as definições aplicáveis dão o mesmo resultado), aplicação cuja continuidade é assegurada a partir da continuidade das suas restrições aos subconjuntos fechado de  $X$  com união  $X$

$$\{x \in X \mid \tilde{f}(x) \in [a, b]\}, \quad \{x \in X \mid \tilde{f}(x) \leq a\}, \quad \{x \in X \mid \tilde{f}(x) \geq b\}$$

(cf. 1.4.28).

□

## Exercícios

**Ex 1.9.1** Seja  $X$  um espaço topológico, no qual seja válido o teorema de Urysohn, isto é, tal que, quaisquer que sejam os fechados  $A$  e  $B$  de  $X$ , com  $A \cap B = \emptyset$ , existe uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , tal que  $f(x) = 1$ , para cada  $x \in A$ , e  $f(x) = 0$ , para cada  $x \in B$ . Mostrar que  $X$  é então um espaço topológico normal.

**Ex 1.9.2** Verificar que, no caso em que  $X$  é um espaço métrico, é possível apresentar uma demonstração muito mais simples de 1.9.6.

**Sugestão:** Dados os conjuntos fechados  $A$  e  $B$ , com  $A \cap B = \emptyset$ , considerar as aplicações contínuas que a  $x$  associam  $d(x, A)$  e  $d(x, B)$ .

**Ex 1.9.3 (Recíproca do teorema de Weierstrass)** Seja  $X$  um espaço métrico não compacto. Mostrar que existe uma função contínua  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  que não seja majorada.

**Sugestão:** Pela alínea a) do exercício 1.7.6, podemos considerar um subconjunto infinito  $A \subset X$  que seja fechado e com a topologia discreta como topologia induzida. Sendo  $f_0: A \rightarrow \mathbb{N}$  uma aplicação sobrejectiva,  $f_0$  é uma função contínua e admite portanto um prolongamento contínuo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Ex 1.9.4 (Versão de Tietze-Urysohn para espaços topológicos localmente compactos e de Hausdorff)** Sejam  $X$  um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff,  $A \subset X$  um conjunto compacto e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua. Mostrar que existe uma aplicação contínua  $\hat{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\hat{f}(x) = f(x)$ , para cada  $x \in A$  (o facto de  $X$  não ter que ser um espaço normal é “compensado” pelo facto de o conjunto  $A$  ser compacto, e não apenas fechado).

**Sugestão:** Aplicar o teorema de Tietze-Urysohn ao compactificado de Alexandroff  $\hat{X}$  de  $X$ .

**Ex 1.9.5** Vamos dizer que um espaço topológico  $Y$  é um “contradomínio admissível” para o teorema de Tietze-Urysohn se, quaisquer que sejam o espaço topológico normal  $X$ , o subconjunto fechado  $A \subset X$  e a aplicação contínua  $f: A \rightarrow Y$ , existe uma aplicação contínua  $\hat{f}: X \rightarrow Y$  tal que  $\hat{f}(x) = f(x)$ , para cada  $x \in A$  (o teorema de Tietze-Urysohn traduz o facto de  $\mathbb{R}$  ser um contradomínio admissível<sup>131</sup>).

**a)** Mostrar que, se  $Y$  é um contradomínio admissível e se  $Z$  é um espaço topológico homeomorfo a  $Y$ , então  $Z$  é também um contradomínio admissível.

**b)** Se  $Y$  é um espaço topológico, diz-se que um subconjunto  $B \subset Y$  é um *retracto* de  $Y$  se existe uma aplicação contínua  $\pi: Y \rightarrow B$ , tal que  $\pi(y) = y$ , para cada  $y \in B$  (diz-se então que uma tal aplicação  $\pi$  é uma *retração* de  $Y$  sobre  $B$ ). Mostrar que, se  $Y$  é um contradomínio admissível e se  $B$  é um retracto de  $Y$ , então  $B$  é também um contradomínio admissível.

**c)** Mostrar que, se  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  são contradomínios admissíveis, então também

<sup>131</sup>O lema que o precede traduz o facto de  $[-1, 1]$  também ser um contradomínio admissível, mas isso vai resultar da conclusão da alínea c) adiante.

$Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$  é um contradomínio admissível.

**d)** Relembrando os exercícios 1.4.23 e 1.4.24, mostrar que qualquer intervalo não vazio de  $\mathbb{R}$  é um contradomínio admissível.

**Sugestão:** Reparar que  $]0, 1[$  é um retracto de  $] -1, 1[$ .

**e)** Verificar que, se  $Y$  é um contradomínio admissível, então  $Y$  é conexo por arcos, em particular conexo.

**f)** Considerando em  $\mathbb{R}^n$  a norma euclidiana, definida por

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = d((x_1, x_2, \dots, x_n), 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

mostrar que, para cada  $r > 0$ , o conjunto

$$\overline{B}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$$

é um retracto de  $\mathbb{R}^n$ , e portanto um contradomínio admissível. Utilizar uma técnica semelhante à usada na demonstração de 1.9.11 para concluir que, para cada  $r > 0$ , o conjunto

$$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$$

é também um contradomínio admissível.

**Ex 1.9.6** Verificar que o teorema de Urysohn, enunciado em 1.9.6, seria uma consequência simples do corolário do teorema de Tietze-Urysohn, em 1.9.12, se a demonstração do lema 1.9.10 não tivesse utilizado aquele.

**Ex 1.9.7** Seja  $X$  um espaço topológico. Diz-se que uma família  $(A_i)_{i \in I}$  de subconjuntos de  $X$  é *localmente finita* se, para cada  $a \in X$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  e uma parte finita  $K$  de  $I$ , tais que  $V \cap A_i = \emptyset$ , para cada  $i \notin K$ .<sup>132</sup>

**a)** Mostrar que uma família  $(A_i)_{i \in I}$  é localmente finita se, e só se, a família  $(\text{ad}(A_i))_{i \in I}$  é localmente finita.

**b)** Mostrar que, se  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família localmente finita de subconjuntos fechados de  $X$ , então a união  $A = \bigcup A_i$  é também um conjunto fechado.

**c)** Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico compacto e se  $(A_i)_{i \in I}$  é uma família localmente finita de subconjuntos não vazios de  $X$ , então o conjunto dos índices  $I$  é finito.

**Ex 1.9.8** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $(X_i)_{i \in I}$  uma família localmente finita de subconjuntos fechados de  $X$ , tal que  $X = \bigcup X_i$ . Mostrar que, se  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação tal que, para cada  $i \in I$ , a restrição  $f|_{X_i}: X_i \rightarrow Y$  seja contínua, então a aplicação  $f$  é contínua.

**Sugestão:** Utilizar a alínea b) do exercício anterior, assim como a caracterização das aplicações contínuas através das imagens recíprocas dos fechados (cf. 1.4.25).

**Ex 1.9.9** Seja  $X$  um espaço topológico. Se  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação, chama-se *suporte* de  $f$  a aderência do conjunto dos pontos  $x \in X$  tais que  $f(x) \neq 0$ . Se  $(f_i)_{i \in I}$  é uma família de aplicações,  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ , diz-se que esta família é *localmente finita* se, para cada  $a \in X$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  e uma parte finita  $K$  de  $I$  tais que, para cada  $i \notin K$ , a restrição de  $f_i$  a  $V$  seja identicamente nula.

**a)** Mostrar que uma família de aplicações  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente finita se, e só se, a família dos respectivos suportes é uma família localmente finita de subconjuntos de  $X$ .

**b)** Mostrar que, se  $(f_i)_{i \in I}$  é uma família localmente finita de aplicações contínuas  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ , então pode-se definir naturalmente uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , por  $f(x) = \sum f_i(x)$  (reparar que se pode definir trivialmente a soma de uma família arbitrária de números reais, desde que exista apenas um número finito destes que não

<sup>132</sup>Por outras palavras,  $V$  intersecta  $A_i$  apenas para um número finito de valores de  $i$ .

sejam nulos).

**Sugestão:** Utilizar 1.4.17.

c) Mostrar que, se  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação e se  $U$  é uma parte de  $X$ , então as afirmações seguintes são equivalentes:

c1) A aplicação  $f$  tem suporte contido em  $U$ ;

c2) Existe uma parte fechada  $A$  de  $X$ , com  $A \subset U$ , tal que, para cada  $x \notin A$ ,  $f(x) = 0$ .

d) No caso em que  $X$  é de Hausdorff, mostrar que, dadas uma aplicação  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e uma parte  $U$  de  $X$ , as afirmações seguintes são equivalentes:

d1) A aplicação  $f$  tem suporte compacto contido em  $U$ ;

d2) Existe uma parte compacta  $A$  de  $X$ , com  $A \subset U$ , tal que, para cada  $x \notin A$ ,  $f(x) = 0$ .

**Ex 1.9.10** Diz-se que um espaço topológico  $X$  é *paracompacto* se  $X$  é de Hausdorff e se, para cada cobertura aberta de  $X$ , existe uma cobertura aberta localmente finita mais fina, isto é, se, qualquer que seja a família  $(U_i)_{i \in I}$  de abertos de  $X$ , de união  $X$ , existe uma família localmente finita  $(V_j)_{j \in J}$  de abertos de  $X$ , ainda com união  $X$  e tal que, para cada  $j \in J$ , existe  $i \in I$  tal que  $V_j \subset U_i$ .

a) Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico paracompacto, então  $X$  é regular (cf. 1.4.30).

**Sugestão:** Sejam  $a \in X$  e  $U$  um aberto de  $X$ , com  $a \in U$ . Tendo em conta o facto de  $X$  ser de Hausdorff, considerar, para cada  $x \in X \setminus U$ , um aberto  $U_x$ , contendo  $x$  e tal que  $a \notin \text{ad}(U_x)$ . Considerar uma cobertura aberta localmente finita  $(V_j)_{j \in J}$  de  $X$ , mais fina que a cobertura aberta constituída pelos  $U_x$  e por  $U$ , considerar o conjunto  $I$  dos  $j \in J$  tais que  $V_j \not\subset U$  e verificar que a união  $V$  dos  $V_j$ , com  $j \in I$ , é um aberto contendo  $X \setminus U$  e contido no fechado  $A$ , união dos  $\text{ad}(V_j)$ , com  $j \in I$ , fechado esse que não contém  $a$ . Concluir que  $X \setminus V$  é uma vizinhança fechada de  $a$ , contida em  $U$ .

b) Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico paracompacto, então  $X$  é normal.

**Sugestão:** Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fechados de  $X$ , tais que  $A \cap B = \emptyset$ . Tendo em conta a), considerar, para cada  $x \in A$ , uma vizinhança fechada  $V_x$  de  $x$ , contida em  $X \setminus B$ . Considerar uma cobertura aberta localmente finita  $(W_j)_{j \in J}$  de  $X$ , mais fina que a cobertura aberta de  $X$  constituída pelos  $U_x = \text{int}(V_x)$  e por  $X \setminus A$ , considerar o conjunto  $I$  dos  $j \in J$  tais que  $W_j \not\subset X \setminus A$  e verificar que a união  $W$  dos  $W_j$ , com  $j \in I$ , é um aberto contendo  $A$  e contido no fechado  $\hat{W}$ , união dos  $\text{ad}(W_j)$ , com  $j \in I$ , fechado esse que está contido em  $X \setminus B$ , o que mostra que  $W$  não intersecciona o aberto  $X \setminus \hat{W}$ , que contém  $B$ .

c) Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico paracompacto e se  $(U_i)_{i \in I}$  é uma família de abertos de  $X$ , de união  $X$ , então existe uma família localmente finita  $(V_i)_{i \in I}$  de abertos de  $X$ , de união  $X$ , tal que, para cada  $i \in I$ ,  $\text{ad}(V_i) \subset U_i$ .<sup>133</sup>

**Sugestão:** Tendo em conta a), considerar, para cada  $x \in X$ , uma vizinhança fechada  $A_x$  de  $x$ , que esteja contida nalgum dos  $U_i$ . Considerar uma cobertura aberta localmente finita  $(W_j)_{j \in J}$  de  $X$  mais fina que a cobertura aberta constituída pelos  $\text{int}(A_x)$ , escolher, para cada  $j \in J$ , um índice  $\alpha(j) \in I$  tal que  $\text{ad}(W_j) \subset U_{\alpha(j)}$  e definir, para cada  $i \in I$ ,  $V_i$  como sendo a união dos  $W_j$  tais que  $\alpha(j) = i$ , união essa

<sup>133</sup>Reparar que esta condição é muito mais forte, e mais maneável, do que a que aparece na definição de espaço paracompacto: Por um lado o conjunto dos índices das duas coberturas é o mesmo e, por outro, tem-se  $\text{ad}(V_i) \subset U_i$  e não apenas  $V_i \subset U_i$ .

que está contida no conjunto fechado união dos  $\text{ad}(W_j)$  tais que  $\alpha(j) = i$ , fechado esse que está contido em  $U_i$ .

**Ex 1.9.11** Mostrar que, se  $X$  é um espaço topológico compacto e de Hausdorff, então  $X$  é paracompacto.

**Ex 1.9.12** Seja  $X$  um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff e de base contável (cf. 1.3.24).

**a)** Mostrar que existe uma sucessão  $(A_n)_{n \geq 1}$  de compactos de  $X$ , tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subset \text{int}(A_{n+1})$ , e que  $\bigcup A_n = X$ .

**Sugestão:** Partindo de uma base finita ou numerável  $\mathcal{C}$  de abertos de  $X$ , verificar que a parte  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}$ , constituída pelos  $U \in \mathcal{C}$  tais que  $\text{ad}(U)$  seja compacto, é ainda uma base de abertos. Concluir a existência de uma sucessão de abertos de  $X$ ,  $(U_n)_{n \geq 1}$ , com  $\text{ad}(U_n)$  compacto, tal que o conjunto dos  $U_n$  constitua uma base de abertos. Definir recursivamente os compactos  $A_n$ , com  $U_n \subset A_n$  e  $A_n \subset \text{int}(A_{n+1})$ , do seguinte modo: Tomar  $A_1 = \text{ad}(U_1)$ ; supondo construídos os  $A_p$ , com  $p \leq n$ , verificando as condições anteriores, considerar  $N \geq n + 1$  tal que o compacto  $A_n$  esteja contido na união dos  $U_k$  com  $k \leq N$  e definir o compacto  $A_{n+1}$  como a união dos  $\text{ad}(U_k)$ , com  $k \leq N$ .

**b)** Mostrar que  $X$  é paracompacto.<sup>134</sup>

**Sugestão:** Considerar uma sucessão  $(A_n)_{n \geq 1}$  de compactos de  $X$ , de união  $X$ , tal que  $A_n \subset \text{int}(A_{n+1})$  e prolongar a definição dos  $A_n$ , pondo  $A_{-1} = A_0 = \emptyset$ . Definir, para cada  $n \geq 1$ , o compacto  $B_n = A_n \setminus \text{int}(A_{n-1})$  e o aberto  $U_n = \text{int}(A_{n+1}) \setminus A_{n-2}$ , reparando que se tem  $B_n \subset U_n$  e que a união dos  $B_n$  é  $X$ . Dada uma cobertura aberta  $(V_j)_{j \in J}$  de  $X$ , considerar, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , uma parte finita  $J_n$  de  $J$  tal que a união dos abertos  $U_n \cap V_j$ , com  $j \in J_n$ , contenha  $B_n$ ; verificar então que a família dos abertos  $U_n \cap V_j$ , com  $n \in \mathbb{N}$  e  $j \in J_n$ , é uma cobertura aberta de  $X$  localmente finita e mais fina que a cobertura original (reparar que, para cada  $a \in X$ , existe  $k$  tal que  $A_k$  é vizinhança de  $a$  e tem-se  $U_n \cap A_k = \emptyset$  sempre que  $n \geq k + 2$ ).

**Ex 1.9.13 ( Partições da unidade dum espaço paracompacto)** Seja  $X$  um espaço topológico paracompacto e seja  $(U_j)_{j \in J}$  uma família de abertos de  $X$  de união  $X$ . Mostrar que existe então uma família localmente finita  $(f_j)_{j \in J}$  de aplicações contínuas  $f_j: X \rightarrow [0, 1]$ , verificando as condições seguintes:

**a)** Cada aplicação  $f_j$  tem suporte contido em  $U_j$ ;

**b)** Para cada  $x \in X$ ,  $\sum f_j(x) = 1$ .

**Sugestão:** Pela alínea c) do exercício 1.9.10, pode-se considerar duas coberturas abertas localmente finitas  $(V_j)_{j \in J}$  e  $(W_j)_{j \in J}$ , tais que  $\text{ad}(V_j) \subset U_j$  e  $\text{ad}(W_j) \subset V_j$ . Tendo em conta o facto de, pela alínea b) do mesmo exercício,  $X$  ser normal, pode-se considerar, para cada  $j$ , uma aplicação contínua  $g_j: X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $g_j(x) = 1$ , para cada  $x \in \text{ad}(W_j)$ , e  $g_j(x) = 0$ , para cada  $x \in X \setminus V_j$ . Considerar então a aplicação contínua  $g: X \rightarrow ]0, +\infty[$ , definida por  $g(x) = \sum g_j(x)$  e definir  $f_j(x) = g_j(x)/g(x)$ .

No próximo exercício utilizaremos o teorema da boa ordenação, um teorema da Teoria dos Conjuntos que afirma que todo o conjunto admite um boa ordem, isto é, uma ordem total com a propriedade de qualquer

<sup>134</sup>Embora nem todo o espaço localmente compacto e de Hausdorff seja normal, podemos concluir, tendo em conta a alínea b) do exercício precedente, que todo o espaço localmente compacto, de Hausdorff e separável já é normal.

subconjunto não vazio ter mínimo. Um exemplo de uma boa ordem é a ordem usual  $<$  em  $\mathbb{N}$  (mas não em  $\mathbb{Z}$ ).

**Ex 1.9.14 (Para quem conheça o teorema da boa ordenação)** Mostrar que, se  $X$  é um espaço métrico, então  $X$  é paracompacto<sup>135</sup>.

**Sugestão:** a) Considerar uma cobertura aberta  $(U_j)_{j \in J}$  de  $X$ . Pelo teorema da boa ordenação, considerar um boa ordem sobre o conjunto  $J$  dos índices.

b) Definir, recursivamente, para cada inteiro  $n \geq 1$  e cada  $j \in J$ , um aberto  $V_{j,n}$  de  $X$  como sendo a união de todas as bolas abertas da forma  $B_{1/2^n}(a)$  tais que

b1)  $j$  é o menor dos índices tais que  $a \in U_j$ ;

b2)  $a \notin V_{j',m}$  para cada  $m < n$ ;

b3)  $B_{3/2^n}(a) \subset U_j$ .

c) Verificar que a união de todos os abertos  $V_{j,n}$  é igual a  $X$ , reparando que, se  $x \in X$ , e se  $j$  é o menor dos índices tais que  $x \in U_j$ , podemos fixar  $n$  tal que  $B_{3/2^n}(x) \subset U_j$  e então, ou  $x \in B_{1/2^n}(x) \subset V_{j,n}$ , ou  $x \in V_{j',m}$ , para algum  $j'$  e  $m < n$ .

d) Reparar que se tem  $V_{j,n} \subset U_j$  e que, portanto, a cobertura aberta constituída pelos  $V_{j,n}$  é mais fina que a cobertura aberta original.

e) Verificar que, se  $j' \neq j''$ , se  $x \in V_{j',N}$  e se  $y \in V_{j'',N}$ , então  $d(x, y) > 1/2^N$ . Com efeito, se isso não acontecesse, então  $x \in B_{1/2^N}(a)$  e  $y \in B_{1/2^N}(b)$ , com estas bolas verificando, em particular, as condições b1) e b3), donde  $d(b, a) < 3/2^N$ ,  $b \in U_{j'}$ ,  $a \in U_{j''}$ ,  $j'' \leq j'$  e  $j' \leq j''$ .

f) Dado  $a \in X$ , fixar  $j \in J$  e  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $a \in V_{j,n}$  e fixar  $m \geq n$  tal que  $B_{1/2^m}(a) \subset V_{j,n}$ .

f1) Se  $N \geq m + 1$  e  $x \in B_{1/2^{m+1}}(a)$ , não pode ser  $x \in V_{j',N}$ , para nenhum  $j'$ , sem o que  $x \in B_{1/2^N}(b)$ , com esta bola verificando, em particular, a condição b2), donde

$$b \in B_{1/2^N}(x) \subset B_{1/2^{m+1}}(x) \subset B_{1/2^m}(a) \subset V_{j,n},$$

o que contrariava b2), por ser  $n \leq m < N$ .

f2) Se  $N < m + 1$ , não pode haver, pelo que se viu em e), mais do que um índice  $j'$  tal que  $B_{1/2^{m+1}}(a) \cap V_{j',N} \neq \emptyset$ .

O que se viu em f1) e f2) mostra que a vizinhança  $B_{1/2^{m+1}}(a)$  de  $a$  intersecta, no máximo,  $m$  dos conjuntos  $V_{j',N}$  e portanto que a cobertura aberta constituída por estes conjuntos é localmente finita.

<sup>135</sup>A demonstração que sugerimos em seguida é devida a M. E. Rudin (A new proof that metric spaces are paracompact, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20, 1969, 603) e é muito mais simples que as demonstrações conhecidas anteriormente.

## §10. Espaços de Baire.

**1.10.1** Diz-se que um espaço topológico  $X$  é um *espaço de Baire* se, qualquer que seja a família  $(C_j)_{j \in J}$  finita ou numerável<sup>136</sup> de subconjuntos fechados  $C_j$ , com  $\text{int}(C_j) = \emptyset$ , a união  $\bigcup_{j \in J} C_j$  tem também interior vazio.<sup>137</sup>

A definição anterior poderá parecer um pouco “caída do céu”, pelo menos enquanto não exibirmos exemplos suficientemente importantes de espaços de Baire. Vamos encontrar em seguida dois desses exemplos, cada um dos quais com importância para as aplicações.

**1.10.2 (Primeiro teorema de Baire)** Se  $X$  é um espaço topológico localmente compacto e de Hausdorff, então  $X$  é um espaço de Baire.

**Dem:** Por mudança do conjunto de índices, e acrescentando, se necessário, conjuntos vazios, basta mostrarmos que, dada uma família  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de conjuntos fechados de interior vazio, o conjunto  $C$ , união dos  $C_n$ , tem interior vazio. Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia, isto é, que  $\text{int}(C) \neq \emptyset$ .

Podemos considerar um compacto  $K_0 \subset C$  de interior não vazio, nomeadamente uma vizinhança compacta de um ponto interior a  $C$  (atendemos a que  $X$  tem um sistema fundamental de vizinhanças compactas). Vamos agora construir recursivamente compactos  $K_n$  de interior não vazios tais que  $K_n \subset K_{n-1}$  e  $K_n \subset X \setminus C_n$  ( $n \geq 1$ ). Para isso basta, supondo construído  $K_{n-1}$ , compacto de interior não vazio, atendermos a que  $\text{int}(K_{n-1})$  não está contido em  $C_n$ , por este ter interior vazio, e portanto  $\text{int}(K_{n-1}) \cap (X \setminus C_n)$  é um aberto não vazio, pelo que basta tomar para  $K_n$  uma vizinhança compacta de um ponto deste aberto, que esteja contida nele. Por 1.6.37, aplicado ao espaço compacto  $K_0$ , tem-se

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset,$$

o que é absurdo, uma vez que um elemento  $x$  desta intersecção pertenceria a  $K_0$ , e portanto a  $C$  e, por pertencer a todos os  $K_n \subset X \setminus C_n$ , não pertencia a nenhum  $C_n$ .  $\square$

**1.10.3 (Segundo teorema de Baire)** Se  $X$  é um espaço métrico completo então  $X$  é um espaço de Baire.

<sup>136</sup>A família ser finita ou numerável significa que o conjunto dos índices  $J$  é finito ou numerável.

<sup>137</sup>Note-se que, em geral, a união referida não terá que ser fechada.



**Dem:** Por mudança do conjunto de índices, e acrescentando, se necessário, conjuntos vazios, basta mostrarmos que, dada uma família  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de conjuntos fechados de interior vazio, o conjunto  $C$ , união dos  $C_n$ , tem interior vazio. Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia, isto é, que  $\text{int}(C) \neq \emptyset$ . Consideremos uma bola fechada  $K_0$  de raio  $r_0 > 0$  de centro num ponto de  $\text{int}(C)$ , contida em  $C$ , a qual tem, em particular, interior não vazio. Vamos agora construir recursivamente fechados limitados  $K_n$  de interior não vazio tais que  $K_n \subset K_{n-1}$ ,  $K_n \subset X \setminus C_n$ ,  $\text{diam}(K_n) \leq \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ), em particular  $\text{diam}(K_n) \rightarrow 0$ . Para isso basta, supondo construído  $K_{n-1}$ , fechado de interior não vazio, atendermos a que  $\text{int}(K_{n-1})$  não está contido em  $C_n$ , por este ter interior vazio, e portanto  $\text{int}(K_{n-1}) \cap (X \setminus C_n)$  é um aberto não vazio, pelo que basta tomar para  $K_n$  uma bola fechada de centro num ponto deste aberto, que esteja contida nele e tenha raio  $0 < r_n \leq \frac{1}{2n}$  (cf. 1.1.22). Por 1.7.18, tem-se  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ , o que é absurdo,

uma vez que um elemento  $x$  desta intersecção pertenceria a  $K_0$ , e portanto a  $C$  e, por pertencer a todos os  $K_n \subset X \setminus C_n$ , não pertencia a nenhum  $C_n$ .  $\square$

**1.10.4 (Exemplo)** O conjunto  $\mathbb{Q}$ , dos números racionais, com a topologia induzida pela de  $\mathbb{R}$ , não é um espaço de Baire.

**Dem:** Uma vez que  $\mathbb{Q}$  é numerável, vemos que  $\mathbb{Q}$  é a união da família numerável dos conjuntos unitários  $\{x\}$ , com  $x \in \mathbb{Q}$ , o quais são fechados e de interior vazio, relativamente a  $\mathbb{Q}$ . No entanto,  $\mathbb{Q}$  não tem interior vazio, relativamente a  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

**1.10.5 (Caracterização alternativa)** Um espaço topológico  $X$  é um espaço de Baire se, e só se, qualquer que seja a família finita ou numerável  $(U_j)_{j \in J}$ , de subconjuntos abertos densos  $U_j$ , a intersecção  $\bigcap_{j \in J} U_j$  é também densa.<sup>138</sup>

**Dem:** Trata-se de uma consequência da definição 1.10.1, por dualidade, se repararmos que  $U_j$  é um aberto denso se, e só se  $X \setminus U_j$  é um fechado de interior vazio e que o facto de  $\bigcap_{j \in J} U_j$  ser denso é equivalente a

$$X \setminus \bigcap_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} (X \setminus U_j)$$

ter interior vazio.  $\square$

Há uma reformulação importante da definição de espaço de Baire em 1.10.1, que utiliza a noção de conjunto magro, uma noção com propriedades semelhantes à da de conjunto de medida nula, no contexto da Teoria da Medida.

<sup>138</sup>Em geral, essa intersecção não terá que ser, naturalmente, aberta.

**1.10.6** Seja  $X$  um espaço topológico. Diz-se que um conjunto  $A \subset X$  é *magro*<sup>139</sup> se existir uma família finita ou numerável de conjuntos fechados de interior vazio  $(C_j)_{j \in J}$  tal que  $A \subset \bigcup_{j \in J} C_j$ . Analogamente ao que já

referimos atrás, por mudança do conjunto de índices e por adjunção, se necessário, de conjuntos vazios, pode sempre supor-se que o conjunto de índices  $J$  é  $\mathbb{N}$ .

**1.10.7 (Propriedades dos conjuntos magros)** Seja  $X$  um espaço topológico..

Tem-se então:

a) o conjunto vazio  $\emptyset$  é magro.

b) Se  $A \subset X$  é magro e  $A' \subset A$ , então  $A'$  é magro.

c) Se  $(A_j)_{j \in J}$  é uma família finita ou numerável de conjuntos magros, então a união  $\bigcup_{j \in J} A_j$  é um conjunto magro.

**Dem:** A alínea a) resulta de  $\emptyset$  ser um conjunto fechado de interior vazio. A alínea b) é trivial. Quanto a c), se os  $A_j$  são magros, podemos, para cada  $j \in J$ , considerar conjuntos fechados de interior vazio  $C_{j,n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tais que  $A_j \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{j,n}$  e então

$$\bigcup_{j \in J} A_j \subset \bigcup_{(j,n) \in J \times \mathbb{N}} C_{j,n},$$

o que, por  $J \times \mathbb{N}$  ser finito ou numerável, implica que  $\bigcup_{j \in J} A_j$  é magro.  $\square$

**1.10.8 (Reformulação de 1.10.1)** Um espaço topológico  $X$  é um espaço de Baire se, e só se, todo o conjunto magro  $A \subset X$  tem interior vazio.

Em particular, se  $X$  é um espaço de Baire não vazio, o próprio  $X$  não é magro.<sup>140</sup>

**Dem:** Se todo o conjunto magro tem interior vazio, em particular as uniões finitas ou numeráveis de conjuntos fechados de interior vazio têm interior vazio, pelo que  $X$  é um espaço de Baire. Reciprocamente, se  $X$  é um espaço de Baire, todo o conjunto magro está contido numa união finita ou numerável de fechados de interior vazio, que tem interior vazio, pelo que o conjunto magro também tem interior vazio.  $\square$

**1.10.9 (Conjuntos magros num subespaço topológico)** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $Y \subset X$  um subespaço topológico. Tem-se então:

a) Se  $A \subset Y$  é magro no espaço topológico  $Y$ , então  $A$  é também magro no espaço topológico  $X$ .

<sup>139</sup>Intuitivamente, “pequeno”

<sup>140</sup>Esta propriedade, válida nos espaços de Baire não vazios, é o elo que nos faltava para a analogia entre conjuntos magros e conjuntos de medida nula. Pode parecer estranho mas muitas vezes, para provar que um certo conjunto não é o espaço todo (ou, por passagem ao complementar, que um certo conjunto não é vazio), prova-se que esse conjunto é magro.

**b)** No caso em que  $Y$  é aberto em  $X$ , um subconjunto  $A \subset Y$  é magro em  $Y$  se, e só se, é magro em  $X$ .

**Dem: a)** Consideremos uma família finita ou numerável de conjuntos  $B_j$ , fechados em  $Y$  e com  $\text{int}_Y(B_j) = \emptyset$ , tais que  $A \subset \bigcup B_j$ . Tem-se então também  $A \subset \bigcup \text{ad}_X(B_j)$ , com os conjuntos  $\text{ad}_X(B_j)$  fechados em  $X$ , pelo que, se verificarmos que  $\text{int}_X(\text{ad}_X(B_j)) = \emptyset$ , ficará provado que  $A$  é também magro em  $X$ . Suponhamos, por absurdo, que existia  $x_0 \in \text{int}_X(\text{ad}_X(B_j))$ , e portanto que existia um aberto  $U$  de  $X$ , com  $x_0 \in U$  e  $U \subset \text{ad}_X(B_j)$ . Tinha-se, em particular,  $x_0 \in \text{ad}_X(B_j)$ , pelo que  $U \cap B_j \neq \emptyset$ , donde também  $U \cap Y \neq \emptyset$ . Vinha então

$$U \cap Y \subset \text{ad}_X(B_j) \cap Y = \text{ad}_Y(B_j) = B_j$$

o que, por  $U \cap Y$  ser um aberto não vazio de  $Y$ , contradizia o facto de se ter  $\text{int}_Y(B_j) = \emptyset$ .

**b)** Suponhamos que  $A$  é magro em  $X$ . Existe então uma família finita ou numerável de conjuntos  $A_j$ , fechados em  $X$  e com  $\text{int}_X(A_j) = \emptyset$ , tal que  $A \subset \bigcup A_j$ . Tem-se então  $A \subset \bigcup (A_j \cap Y)$ , onde os  $A_j \cap Y$  são fechados em  $Y$  e, tendo em conta 1.3.15,

$$\text{int}_Y(A_j \cap Y) = \text{int}_X(A_j \cap Y) \subset \text{int}_X(A_j) = \emptyset,$$

o que mostra que  $A$  é magro em  $Y$ . Reciprocamente, se  $A$  é magro em  $Y$ , já verificámos em a) que  $A$  também é magro em  $X$ .  $\square$

**1.10.10 (Corolário)** Se  $X$  é um espaço de Baire e  $Y \subset X$  é aberto, então  $Y$ , com a topologia induzida, é também um espaço de Baire.

**Dem:** Se  $A \subset Y$  é magro para a topologia de  $Y$ , então  $A$  é também magro para a topologia de  $X$ , logo de interior vazio relativamente a  $X$ , e portanto também de interior vazio relativamente a  $Y$  (cf. 1.3.15).  $\square$

## Exercícios

**Ex 1.10.1** Se  $X$  é um espaço topológico, diz-se que um subconjunto  $A \subset X$  é  $\sigma$ -fechado se existir uma família finita ou numerável de conjuntos fechados  $A_j \subset X$  tal que  $A = \bigcup A_j$ .

**a)** Reparar que todo o conjunto fechado é também  $\sigma$ -fechado e mostrar que, no caso em que  $X$  é um espaço métrico, todo o conjunto aberto  $U$  é  $\sigma$ -fechado.

**Sugestão:** Afastando já o caso trivial em que  $U = X$ , considerar os conjuntos

$$A_n = \{x \in X \mid d(x, X \setminus U) \geq \frac{1}{n}\}.$$

**b)** Verificar que, se  $X$  é um espaço de Baire e  $A \subset X$  é  $\sigma$ -fechado, então  $A$  é magro se, e só se,  $\text{int}(A) = \emptyset$ .

**Ex 1.10.2 (Oscilação de uma função num ponto)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $Y$  um espaço métrico,  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Para cada  $x_0 \in X$  e cada vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$ , definimos  $o_V(f)$  como sendo o diâmetro  $\text{diam}(f(V))$ , no caso em que  $f(V)$  é limitado, e  $+\infty$ , caso contrário e definimos a *oscilação* de  $f$  no ponto  $x_0$  como sendo o ínfimo  $o_{x_0}(f)$  dos  $o_V(f)$ , com  $V$  vizinhança de  $x_0$ . Tem-se assim  $o_{x_0}(f) < +\infty$  se, e só se a aplicação  $f$  é *localmente limitada* em  $x_0$ , no sentido de existir uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que  $f(V)$  seja um conjunto limitado.

a) Verificar que  $f$  é contínua em  $x_0$  se, e só se,  $o_{x_0}(f) = 0$ .

b) Verificar que, para cada  $\delta > 0$ , o conjunto  $U_\delta = \{x \in X \mid o_x(f) < \delta\}$  é aberto e deduzir que o conjunto dos pontos  $x \in X$  onde  $f$  não é contínua é sempre  $\sigma$ -fechado.

**Ex 1.10.3** Considerando o espaço topológico  $\mathbb{R}$ , que, por 1.10.2 ou 1.10.3, é um espaço de Baire, utilizar 1.10.7 para mostrar que o subconjunto  $\mathbb{I}$ , dos números irracionais, não é magro, apesar de ter interior vazio. Deduzir daqui que o conjunto  $\mathbb{I}$  não é  $\sigma$ -fechado.

**Ex 1.10.4** Lembrar que  $\mathbb{R}^n$ , com a sua topologia canónica, é um espaço localmente compacto e de Hausdorff, e portanto um espaço de Baire (cf. 1.6.47).

a) Verificar que qualquer subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$  de dimensão inferior a  $n$  é um subconjunto fechado de interior vazio.<sup>141</sup>

b) Deduzir de a) que  $\mathbb{R}^n$  não pode ser união finita ou numerável de subespaços afins de dimensão inferior a  $n$ .

**Ex 1.10.5 (Propriedade de limitação uniforme)** Sejam  $X$  um espaço topológico de Baire não vazio,  $Y$  um espaço métrico e  $(f_j)_{j \in J}$  uma família de funções contínuas  $f_j: X \rightarrow Y$ . Suponhamos que, para cada  $x \in X$ , o conjunto dos  $f_j(x)$ , com  $j \in J$ , é limitado. Mostrar que existe um aberto não vazio  $U \subset X$  e  $R \geq 0$  tais que, para todo o  $x \in U$  e  $j, k \in J$ ,  $d(f_j(x), f_k(x)) \leq R$ .

**Sugestão:** Para cada  $N \in \mathbb{N}$ , reparar que o conjunto

$$A_N = \{x \in X \mid \forall_{j,k \in J} d(f_j(x), f_k(x)) \leq N\}$$

é fechado e que a união destes conjuntos é  $X$ .

**Ex 1.10.6** Sejam  $X$  um espaço topológico de Baire não vazio,  $Y$  um espaço métrico e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Suponhamos que, para cada  $x \in X$ , a sucessão dos elementos  $f_n(x)$  de  $Y$  tem limite  $f(x) \in Y$ . Mostrar que, para cada  $\delta > 0$ , existe uma ordem  $n_0$  e um aberto não vazio  $U \subset X$  tais que, para todo o  $x \in U$  e  $n \geq n_0$ ,  $d(f_n(x), f(x)) < \delta$ .

**Sugestão (cf. Rudin [15]):** Para cada  $n_0$  reparar que o conjunto

$$A_{n_0} = \left\{ x \in X \mid \forall_{m,n \geq n_0} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \frac{\delta}{2} \right\}$$

é fechado e que a união destes conjuntos é  $X$ .

<sup>141</sup>Para um resultado do mesmo tipo, num contexto mais geral, ver 2.1.65 adiante.

## §11. Topologias quociente.

**1.11.1** Dados dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  e uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$ , vamos dizer que esta aplicação é *finalizante* se se verificar uma das seguintes três propriedades, que provaremos ser equivalentes:

**a)** Um subconjunto  $V \subset Y$  é aberto em  $Y$  se, e só se, o conjunto  $f^{-1}(V) \subset X$  for aberto em  $X$ ;

**b)** Um subconjunto  $W \subset Y$  é fechado em  $Y$  se, e só se, o conjunto  $f^{-1}(W) \subset X$  for fechado em  $X$ ;

**c)** Quaisquer que sejam o espaço topológico  $Z$  e a aplicação  $g: Y \rightarrow Z$ , a aplicação  $g$  é contínua se, e só se,  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é contínua.

Uma aplicação finalizante é sempre contínua. Além disso, se  $X$  é um espaço topológico,  $Y$  um conjunto e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação, existe sobre  $Y$  uma, e uma só, topologia (a que daremos o nome de *topologia final*, ou *topologia quociente* determinada por  $f$ ), para a qual a aplicação  $f$  fica finalizante.

**Dem:** A equivalência entre a) e b) é uma consequência imediata da fórmula  $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ , tendo em conta as relações entre os abertos e os fechados de um espaço topológico (cf. 1.3.7). Qualquer das condições a) e b) implica a continuidade de  $f$  (cf. 1.4.24 e 1.4.25) e a condição c) também implica essa continuidade, visto que a aplicação  $I_Y: Y \rightarrow Y$  é contínua. Supondo que se verifica a), para provarmos c) ficamos reduzidos a mostrar que, se  $g \circ f$  é contínua, então  $g$  é contínua e isso resulta de que, para cada aberto  $W$  de  $Z$ ,  $g^{-1}(W)$  é aberto em  $Y$ , por  $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$  ser aberto em  $X$ . É evidente que, dados o espaço topológico  $X$ , o conjunto  $Y$  e a aplicação  $f: X \rightarrow Y$ , existe um única topologia sobre  $Y$  para a qual se verifica a), uma vez que a classe dos conjuntos  $V \subset Y$  tais que  $f^{-1}(V)$  é aberto em  $X$ , verifica as propriedades dos abertos de um espaço topológico (cf. 1.3.18). Para vermos que c) implica a), notamos  $Y'$  o conjunto  $Y$  com a topologia para a qual a) se verifica, topologia que verifica portanto também a condição c) e, quando escrevemos simplesmente  $Y$ , subentendemos que tem a topologia original. Aplicando duas vezes a condição de c), concluímos, de  $f$  ser contínua de  $X$  para  $Y$  e para  $Y'$ , que a aplicação  $I_Y$  vai ser contínua de  $Y$  para  $Y'$  e de  $Y'$  para  $Y$ , o que implica, por 1.4.24, que as duas topologias têm os mesmos abertos, isto é,  $Y = Y'$ .  $\square$

**1.11.2** Repare-se que, se  $f: X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua, para verificar que ela é finalizante, basta verificar qualquer das seguintes versões parciais de a), b) e c), uma vez que as recíprocas estão asseguradas pela continuidade de  $f$ :

**a')** Qualquer  $V \subset Y$  tal que  $f^{-1}(V)$  seja aberto em  $X$ , é aberto em  $Y$ ;

**b')** Qualquer  $W \subset Y$  tal que  $f^{-1}(W)$  seja fechado em  $X$ , é fechado em  $Y$ ;

**c')** Se  $Z$  é um espaço topológico e  $g: Y \rightarrow Z$  é uma aplicação tal que  $g \circ f: X \rightarrow Z$  seja contínua, então  $g: Y \rightarrow Z$  é contínua.

Note-se que a importância das aplicações finalizantes é principalmente a propriedade enunciada em c') no resultado precedente: Podemos deduzir a continuidade de uma aplicação de domínio  $Y$  da continuidade da sua composta com a aplicação finalizante, composta essa que é frequentemente mais simples de estudar. É cómodo poder garantir, nalguns casos, que a restrição de uma aplicação finalizante é ainda finalizante. Nesta direcção, o que conseguimos afirmar é o próximo resultado.

**1.11.3** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação finalizante. Seja  $Y' \subset Y$  um subconjunto aberto ou fechado e notemos  $X' = f^{-1}(Y')$ . Tem-se então que a restrição  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y'$  é também finalizante.<sup>142</sup>

**Dem:** Uma vez que  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y'$  é contínua, por ser a restrição de uma aplicação contínua, para garantirmos que esta aplicação é finalizante basta verificarmos uma das condições a') ou b') de 1.11.2. No caso em que  $Y'$  é aberto em  $Y$ , também  $X'$  é aberto em  $X$  e vemos que, se  $V \subset Y'$  é tal que  $f|_{X'}^{-1}(V) = f^{-1}(V)$  seja aberto em  $X'$ , este conjunto também é aberto em  $X$ , e portanto  $V$  é aberto em  $Y$ , donde também aberto em  $Y'$ , pelo que a') é verificado. Analogamente, no caso em que  $Y'$  é fechado em  $Y$ , também  $X'$  é fechado em  $X$  e vemos que, se  $V \subset Y'$  é tal que  $f|_{X'}^{-1}(V) = f^{-1}(V)$  seja fechado em  $X'$ , este conjunto também é fechado em  $X$ , e portanto  $V$  é fechado em  $Y$ , donde também fechado em  $Y'$ , pelo que b') é verificado.  $\square$

Enunciamos a seguir algumas condições suficientes para que uma aplicação seja finalizante, depois de introduzir as noções topológicas de aplicação aberta e de aplicação fechada, já referidas no exercício 1.5.13.

**1.11.4** Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, diz-se que uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é *aberta* se, para cada aberto  $U$  em  $X$ ,  $f(U)$  é aberto em  $Y$  e que  $f: X \rightarrow Y$  é *fechada* se, para cada  $W$  fechado em  $X$ ,  $f(W)$  é fechado em  $Y$ .<sup>143</sup>

**1.11.5 (Exemplos de aplicações abertas e de aplicações fechadas)** a) Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, então as projecções  $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ , definidas por  $\pi_1(x, y) = x$  e  $\pi_2(x, y) = y$ , são aplicações abertas.<sup>144</sup>

b) Sejam  $X$  um espaço topológico compacto,  $Y$  um espaço topológico de Hausdorff e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Então  $f$  é uma aplicação fechada.

<sup>142</sup>No exercício 1.11.5 adiante, concluímos que não podemos enunciar este resultado sem alguma restrição sobre o subconjunto  $Y' \subset Y$ .

<sup>143</sup>Repare-se que as aplicações contínuas não têm que ser abertas nem fechadas e que nem as aplicações abertas nem as fechadas têm que ser contínuas.

<sup>144</sup>Um resultado análogo, com a possibilidade de mais factores, já foi proposto no exercício 1.5.13, onde se dá também um exemplo em que a primeira projecção não é uma aplicação fechada.

c) Se  $f: X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo, então  $f$ , além de contínua, é simultaneamente aberta e fechada.

**Dem: a)** Seja  $W$  aberto em  $X \times Y$ . Para cada  $x_0 \in \pi_1(W)$ , existe  $y_0 \in Y$  tal que  $(x_0, y_0) \in W$  e podemos então considerar, pela caracterização das vizinhanças para a topologia produto, abertos  $U$  de  $X$  e  $V$  de  $Y$ , com  $x_0 \in U$  e  $y_0 \in V$ , tais que  $U \times V \subset W$ , tendo-se então  $U \subset \pi_1(W)$ , o que mostra que  $x_0$  é interior a  $\pi_1(W)$ , e portanto que  $\pi_1(W)$  é um conjunto aberto. A prova de que a segunda projecção é também aberta é totalmente análoga.

**b)** Se  $A$  é fechado em  $X$ , então o facto de  $X$  ser compacto implica que  $A$  é compacto; da continuidade de  $f$  deduzimos então que  $f(A)$  é compacto donde, por  $Y$  ser de Hausdorff,  $f(A)$  é fechado em  $Y$ .

**c)** Temos uma consequência da continuidade de  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , tendo em conta 1.4.24 e 1.4.25.  $\square$

**1.11.6 (Condições suficientes para uma aplicação ser finalizante)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua e sobrejectiva, que seja aberta ou fechada. Tem-se então que  $f$  é finalizante. Em particular, se  $f: X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo, então  $f$  é finalizante.

**Dem:** Suponhamos que  $f$  é uma aplicação aberta. Se  $V \subset Y$  é tal que  $f^{-1}(V)$  é aberto em  $X$ , então, por  $f$  ser sobrejectiva,  $V = f(f^{-1}(V))$  é aberto em  $Y$ . Ficou assim provado que  $f$  é finalizante, pela caracterização a') em 1.11.2. Suponhamos que  $f$  é uma aplicação fechada. Se  $W \subset Y$  é tal que  $f^{-1}(W)$  é fechado em  $X$ , então, por  $f$  ser sobrejectiva,  $W = f(f^{-1}(W))$  é fechado em  $Y$ . Ficou assim provado que  $f$  é finalizante, pela caracterização b') em 1.11.2.  $\square$

**1.11.7** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  duas aplicações finalizantes. Tem-se então que  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é finalizante.

**Dem:** Uma vez que  $g \circ f$  é contínua, vamos utilizar a caracterização das aplicações finalizantes na alínea c') de 1.11.2. Ora, se  $W$  é um espaço topológico e  $h: Z \rightarrow W$  é uma aplicação tal que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$$

seja contínua, deduzimos sucessivamente que  $h \circ g: Y \rightarrow W$  é contínua e que  $h: Z \rightarrow W$  é contínua.  $\square$

Em geral, as aplicações finalizantes não têm que ser abertas nem fechadas. No entanto, aquelas que são contínuas abertas e sobrejectivas são especialmente importantes, em particular pelo resultado seguinte, que não é válido para aplicações finalizantes arbitrárias (cf. o exercício 1.11.6 adiante).

**1.11.8** Sejam  $X, Y, \widehat{X}, \widehat{Y}$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  e  $\widehat{f}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$  aplicações contínuas, abertas e sobrejectivas. Então a aplicação

$$f \times \hat{f}: X \times \hat{X} \rightarrow Y \times \hat{Y},$$

que a  $(x, \hat{x})$  associa  $(f(x), \hat{f}(\hat{x}))$ , é também contínua, aberta e sobrejectiva, em particular finalizante.

**Dem:** O facto de  $f \times \hat{f}$  ser sobrejectiva é imediato e a continuidade resulta da continuidade de  $f$  e de  $\hat{f}$  usando, os resultados bem conhecidos sobre a topologia produto. Resta-nos ver que  $f \times \hat{f}$  é uma aplicação aberta. Seja então  $C$  aberto em  $X \times \hat{X}$  e provemos que  $f \times \hat{f}(C)$  é aberto em  $Y \times \hat{Y}$ . Ora, dado  $(z_0, w_0) \in f \times \hat{f}(C)$ , tem-se, para um certo  $(x_0, y_0) \in C$ ,

$$(z_0, w_0) = f \times \hat{f}(x_0, y_0) = (f(x_0), \hat{f}(y_0))$$

e, considerando abertos  $U$  de  $X$  e  $\hat{U}$  de  $\hat{X}$  tais que  $(x_0, y_0) \in U \times \hat{U} \subset C$ , tem-se que  $f(U) \times \hat{f}(\hat{U}) = f \times \hat{f}(U \times \hat{U})$  é um aberto de  $Y \times \hat{Y}$ , contendo  $(z_0, w_0)$  e contido em  $f \times \hat{f}(C)$ , o que mostra que  $(z_0, w_0)$  é interior a  $f \times \hat{f}(C)$ .  $\square$

Do mesmo modo que uma aplicação contínua é uma aplicação que é contínua em todos os pontos do domínio, é possível enunciar uma definição de aplicação aberta num ponto, de modo que as aplicações abertas sejam aquelas que são abertas em todos os pontos do domínio.

**1.11.9** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Diz-se que  $f$  é aberta num ponto  $x_0 \in X$  se, para cada vizinhança  $V$  de  $x_0$ ,  $f(V)$  é uma vizinhança de  $f(x_0)$ .

**1.11.10** Se  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos, uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  é aberta se, e só se, é aberta em todos os pontos de  $X$ .

**Dem:** Suponhamos que  $f$  é aberta em todos os pontos de  $X$ . Se  $U$  é um aberto de  $X$ , então, para cada  $y \in f(U)$ , tem-se  $y = f(x)$ , para um certo  $x \in U$ , e então o facto de  $U$  ser uma vizinhança de  $x$  implica que  $f(U)$  é uma vizinhança  $y = f(x)$ , o que mostra que  $f(U)$  é efectivamente um aberto de  $Y$ . Concluimos assim que  $f$  é uma aplicação aberta. Suponhamos, reciprocamente, que a aplicação  $f$  é aberta. Dados  $x_0 \in X$  e  $V$  vizinhança de  $x_0$ , tem-se  $x_0 \in \text{int}(V)$  que é um aberto, pelo que  $f(x_0) \in f(\text{int}(V)) \subset f(V)$ , com  $f(\text{int}(V))$  aberto em  $Y$ , o que mostra que  $f(V)$  é uma vizinhança de  $f(x_0)$ , e portanto que a aplicação  $f$  é aberta no ponto  $x_0$ .  $\square$

**1.11.11** Sejam  $X, Y, Z$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  duas aplicações. Se  $f$  é aberta em  $x_0 \in X$  e  $g$  é aberta em  $f(x_0)$ , então  $g \circ f: X \rightarrow Z$  é aberta em  $x_0$ .

**Dem:** Se  $V$  é uma vizinhança de  $x_0$ , concluímos sucessivamente que  $f(V)$  é vizinhança de  $f(x_0)$  em  $Y$ , e portanto que  $g \circ f(V) = g(f(V))$  é vizinhança de  $g(f(x_0)) = g \circ f(x_0)$  em  $Z$ .  $\square$



**1.11.12** Sejam  $X$  um espaço topológico e  $X' \subset X$ . Tem-se então que a inclusão  $\iota: X' \rightarrow X$  é uma aplicação aberta num ponto  $x_0 \in X'$  se, e só se,  $X'$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $X$ . Em particular, a inclusão é uma aplicação aberta se, e só se  $X'$  é um subconjunto aberto de  $X$ .

**Dem:** Se a inclusão é aberta em  $x_0$ , o facto de  $X'$  ser vizinhança de  $x_0$  em  $X'$  implica que  $X' = \iota(X')$  é vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , Reciprocamente, se  $X'$  é vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , então, tendo em conta 1.2.22, para cada  $V$  vizinhança de  $x_0$  em  $X'$ ,  $V = \iota(V)$  também é vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , ou seja,  $\iota: X' \rightarrow X$  é uma aplicação aberta em  $x_0$ .  $\square$

**1.11.13** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $X' \subset X$ ,  $x_0 \in X'$  e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Tem-se então:

**a)** Se  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$  é aberta no ponto  $x_0$ , também  $f: X \rightarrow Y$  é aberta em  $x_0$ .

**b)** Se  $f: X \rightarrow Y$  é aberta em  $x_0$  e  $X'$  é vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , então  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$  é aberta em  $x_0$ .

**Dem:** A alínea a) resulta de que, se  $V$  é vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , então  $V \cap X'$  é vizinhança de  $x_0$  em  $X'$ , pelo que, por ser  $f(V) \supset f(V \cap X')$ , com  $f(V \cap X')$  vizinhança de  $f(x_0)$  em  $Y$ ,  $f(V)$  é também vizinhança de  $f(x_0)$  em  $Y$ . A alínea b) resulta de 1.11.11 e 1.11.12, uma vez que  $f|_{X'}$  é a composta de  $f$  com a inclusão  $\iota: X' \rightarrow X$ .  $\square$

**1.11.14** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $Y' \subset Y$  e  $f: X \rightarrow Y'$  uma aplicação. Tem-se então:

**a)** Se  $f: X \rightarrow Y$  é aberta no ponto  $x_0 \in X$ , também  $f: X \rightarrow Y'$  é aberta em  $x_0$ .

**b)** Se  $f: X \rightarrow Y'$  é aberta em  $x_0$  e  $Y'$  é vizinhança de  $f(x_0)$  em  $Y$ , então  $f: X \rightarrow Y$  é aberta em  $x_0$ .

**Dem:** A alínea a) resulta de que, se  $V$  é vizinhança de  $x_0$  em  $X$ , então  $f(V)$  é vizinhança de  $f(x_0)$  em  $Y$  e portanto, por estar contido em  $Y'$ , também vizinhança de  $f(x_0)$  em  $Y'$ . A alínea b) resulta de 1.11.11 e 1.11.12, uma vez que a aplicação  $f: X \rightarrow Y$  pode ser olhada como a composta da aplicação  $f: X \rightarrow Y'$  com a inclusão  $\iota: Y' \rightarrow Y$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex 1.11.1** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua tal que, para cada  $y_0 \in Y$ , exista um aberto  $V$  de  $Y$ , com  $y_0 \in V$ , e uma aplicação contínua  $\sigma: V \rightarrow X$ , tal que  $f \circ \sigma = I_V$  (uma *secção local* de  $f$ ). Verificar que  $f$  é finalizante.

**Ex 1.11.2** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua aberta e sobrejectiva. Verificar que o espaço topológico  $Y$  é de Hausdorff se, e só se, o conjunto

$$G = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$$

é fechado em  $X \times X$ . **Sugestão:** Ter em conta 1.11.8 e a caracterização dos espaços de Hausdorff em 1.5.4.

**Ex 1.11.3** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação bijectiva. Mostrar que  $f$  é finalizante se, e só se,  $f$  é um homeomorfismo.

**Ex 1.11.4 (O espaço projectivo)** Seja  $n \geq 1$  e consideremos em  $\mathbb{R}^n$  a sua topologia usual. Consideremos em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  a relação, que se verifica facilmente ser de equivalência, definida por  $x \sim y$  se, e só se, existe  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $x = ty$ . Ao conjunto das classes de equivalência para esta relação, que notaremos  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ , dá-se o nome de *espaço projectivo* (de dimensão  $n - 1$ ) e notaremos  $[x]$  a classe de equivalência do elemento  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Chamamos *topologia canónica* de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$  a topologia final determinada pela aplicação sobrejectiva  $\rho: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ , onde  $\rho(x) = [x]$ .

a) Verificar que a aplicação  $\rho: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$  é uma aplicação aberta.

b) Verificar que  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ , com a sua topologia canónica, é um espaço topológico de Hausdorff. **Sugestão:** Ter em conta o exercício 1.11.2 assim como o facto de, considerando em  $\mathbb{R}^n$  o produto interno usual, ter-se  $x \sim y$  se, e só se

$$\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \text{ }^{145}$$

c) Sendo  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ , lembrar que  $S$  é compacto e deduzir que a aplicação sobrejectiva  $\rho|_S: S \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$  é também finalizante.

d) Concluir de c) que  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$  é um espaço topológico compacto.

e) Para cada  $1 \leq j \leq n$ , seja  $\pi_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a projecção canónica no factor  $j$ , e notemos

$$U_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \pi_j(x) \neq 0\}$$

e  $U_j = \rho(U_j)$ . Verificar que tem lugar uma bijecção  $\varphi_j: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U_j$ , definida por

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_{n-1}) = \rho(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, \dots, x_{n-1}),$$

e que esta bijecção é mesmo um homeomorfismo. **Sugestão:** Para mostrar a continuidade de  $\varphi_j^{-1}$ , aplicar 1.11.3 para concluir que  $\rho|_{U_j}: U_j \rightarrow U_j$  é finalizante.

**Ex 1.11.5 (Contra-exemplo)** Consideremos no conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais a relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

e notemos também  $\sim$  a relação de equivalência em  $\mathbb{R}$  cujas classes de equivalência são as classes de equivalência para a relação anterior em  $\mathbb{Q}$  e os conjunto unitários  $\{z\}$ , com  $z$  no conjunto  $\mathbb{I}$  dos números irracionais. Notemos  $\mathbb{R}'$  o conjunto das classes de equivalência  $[x]$  dos elementos  $x \in \mathbb{R}$ , para a relação considerada e  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$  a aplicação sobrejectiva definida por  $\rho(x) = [x]$ . Consideremos em  $\mathbb{R}'$  a topologia final determinada pela aplicação  $\rho$  e pela topologia usual de  $\mathbb{R}$ .

Verificar que, sendo  $\mathbb{I}' = \rho(\mathbb{I}) \subset \mathbb{R}'$  o conjunto das classes de equivalência  $[z]$ , com  $z \in \mathbb{I}$ , para o qual se tem  $\rho^{-1}(\mathbb{I}') = \mathbb{I}$  e considerando em  $\mathbb{I}$  e em  $\mathbb{I}'$  as topologias induzidas pelas de  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}'$ , a restrição  $\rho|_{\mathbb{I}'}: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}'$  não é finalizante.

**Sugestão:** Sendo  $A$  o conjunto dos irracionais do intervalo  $[0, 1]$ , que é fechado em  $\mathbb{I}$ , e  $A' = \rho(A)$ , mostrar que  $A'$  é fechado em  $\mathbb{I}'$ , para a topologia final determinada por

<sup>145</sup>Se ainda não conhece este resultado (desigualdade de Schwarz), ele será estudado adiante, num quadro mais geral, em 2.5.7. Alternativamente, poderá também mostrar, o que é elementar, a equivalência entre  $x \sim y$  e a igualdade  $\langle y, y \rangle x = \langle x, y \rangle y$ .

$\rho_{\mathbb{I}}: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}'$ , mas  $A'$  não é fechado em  $\mathbb{I}'$ , para a topologia induzida pela de  $\mathbb{R}'$ . Para isso, mostrar que, se fosse  $A' = \mathbb{I}' \cap B'$ , com  $B'$  fechado em  $\mathbb{R}'$ , o conjunto  $B = \rho^{-1}(B')$  seria fechado em  $\mathbb{R}$  e conteria  $A$ , pelo que conteria também os racionais do intervalo  $[0, 1]$ , portanto todos os racionais, portanto seria igual a  $\mathbb{R}$ .

**Ex 1.11.6 (Contra-exemplo, Bourbaki, [3])** Consideremos no conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais a topologia induzida pela topologia usual dos reais. Consideremos em  $\mathbb{Q}$  a relação de equivalência que tem o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos inteiros como uma das classes de equivalência e cujas restantes classes de equivalência são conjuntos unitários. Notemos  $X$  o conjunto quociente de  $\mathbb{Q}$  por esta relação de equivalência e  $\pi: \mathbb{Q} \rightarrow X$  a aplicação sobrejectiva que aplica cada elemento na sua classe de equivalência. Consideremos em  $X$  a topologia final determinada por  $\pi$ .

Notemos  $*$  a classe de equivalência dos números inteiros.

**a)** Verificar que a restrição de  $\pi$  a  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  é um homeomorfismo de  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  sobre  $X \setminus \{*\}$ .

**b)** Verificar que  $X$  é um espaço topológico de Hausdorff.

**c)** Verificar que a aplicação contínua e sobrejectiva  $\pi: \mathbb{Q} \rightarrow X$  é uma aplicação fechada e não é uma aplicação aberta.

**d) (Construção auxiliar)** Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , verificar que tem lugar uma aplicação contínua  $f_n: \mathbb{Q} \rightarrow ]0, \frac{1}{2}]$  definida por

$$f_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } y < \frac{\sqrt{2}}{|n|+1} \\ y - \frac{\sqrt{2}}{|n|+1}, & \text{se } \frac{\sqrt{2}}{|n|+1} < y < \frac{\sqrt{2}}{|n|+1} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{se } y > \frac{\sqrt{2}}{|n|+1} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

(reparar que é essencial que o domínio de  $f_n$  seja  $\mathbb{Q}$ , e não  $\mathbb{R}$ , para evitar a descontinuidade em  $\frac{\sqrt{2}}{|n|+1}$ ). Concluir que se podem considerar abertos  $C_n$  de  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  definidos por

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid |x - n| < f_n(y)\},$$

e reparar que estes abertos verificam

$$\{n\} \times \mathbb{Q} \subset C_n \subset ]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[ \times \mathbb{Q},$$

em particular são disjuntos dois a dois, e que não existem  $\delta > 0$  e  $\varepsilon > \frac{\sqrt{2}}{|n|+1}$  tais que  $]n - \delta, n + \delta[ \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset C_n$ .

**e)** Considerando em  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  e em  $X \times \mathbb{Q}$  as topologias produto, verificar que a aplicação  $\pi \times Id_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow X \times \mathbb{Q}$  não é finalizante, apesar de ser o produto de duas aplicações finalizantes. Deduzir, em particular que ela não é fechada, apesar de ser o produto de aplicações fechadas.

**Sugestão:** Considerar o subconjunto aberto  $C \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , união dos conjuntos  $C_n$  referidos na alínea precedente, verificar que, com  $C' = \pi \times Id_{\mathbb{Q}}(C)$ , tem-se  $C = (\pi \times Id_{\mathbb{Q}})^{-1}(C')$  e concluir que  $C'$  é aberto em  $X \times \mathbb{Q}$ , para a topologia final, apesar de não ser aberto para a topologia produto (o ponto  $(*, 0) \in C'$  não é interior a  $C'$ ).

**Ex 1.11.7 (Propriedade finalizante das aplicações abertas num ponto)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação. Mostrar que, se  $f$  é aberta no ponto

$x_0 \in X$ , então, dados um espaço topológico  $Z$  e uma aplicação  $g: Y \rightarrow Z$  tal que  $g \circ f: X \rightarrow Z$  seja contínua em  $x_0$ , a aplicação  $g$  é contínua em  $f(x_0)$ .<sup>146</sup>

Reencontrar, a partir daqui, o facto de toda a aplicação contínua, aberta e sobrejectiva ser finalizante.

---

<sup>146</sup>Para uma propriedade de tipo semelhante, noutro contexto, ver o exercício 1.6.16.

# CAPÍTULO 2

## Espaços de Banach e espaços de Hilbert

### §1. Espaços vetoriais normados.

Os espaços vetoriais normados foram examinados de forma superficial na secção 1.1, essencialmente como método de obter certos exemplos importantes de espaço métrico. Vamos a partir de agora estudá-los de forma mais aprofundada sendo importante abandonar a limitação de considerar apenas  $\mathbb{R}$  como corpo dos escalares, caso em que falamos de espaços vetoriais reais, passando a admitir que este possa também ser o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos, caso em que os classificamos como espaços vetoriais complexos. Quando nos referirmos a situações em que o corpo dos escalares possa ser indiferentemente  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  utilizaremos daqui em diante o símbolo  $\mathbb{K}$  para designar o corpo dos escalares. Quando nos referirmos a situações em que intervêm vários espaços vetoriais estará subentendido, salvo situações em que explicitaremos o contrário, que em todos consideramos o mesmo corpo dos escalares.

**2.1.1 (Espaços vetoriais reais e espaços vetoriais complexos)** Se  $E$  é um espaço vetorial complexo, então  $E$  é também naturalmente um espaço vetorial real, uma vez que se sabemos multiplicar números complexos por vetores sabemos, em particular, multiplicar números reais por vetores. Devemos, no entanto, ter algum cuidado com as noções de base e de dimensão nos dois contextos:

Se  $(x_j)_{j \in J}$  é uma base de  $E$  enquanto espaço vetorial complexo então aquela família não será, em geral, uma base de  $E$  enquanto espaço vetorial real; no entanto, verifica-se facilmente que a família constituída pelos  $x_j$  e pelos  $ix_j$  já é uma base de  $E$  enquanto espaço vetorial real. Em particular, constatamos que se  $E$  tem dimensão finita  $n$  enquanto espaço vetorial complexo então  $E$  tem dimensão  $2n$  enquanto espaço vetorial real e que se  $E$  tiver dimensão infinita enquanto espaço vetorial complexo então  $E$  tem também dimensão infinita enquanto espaço vetorial real.

**2.1.2 (Exemplos) a)** Generalizando o que referimos em 1.1.7 no caso em que  $\mathbb{R}$  é o corpo dos escalares considerado e utilizando agora a notação funcional, podemos notar, se  $X$  é um conjunto arbitrário não vazio,  $Ap(X, \mathbb{K})$  o conjunto de todas as aplicações  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  que vai ser um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  desde que se defina, como é habitual, a soma  $f + g$  de duas aplicações  $f$  e  $g$  e o produto  $af$  de um escalar  $a \in \mathbb{K}$  por uma aplicação  $f$

pelas identidades

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (af)(x) &= af(x).\end{aligned}$$

Este espaço vetorial tem dimensão finita  $n \geq 1$  se o conjunto  $X$  for finito com  $n$  elementos e tem dimensão infinita se o conjunto  $X$  é infinito.<sup>147</sup>

Note-se que, no caso em que  $X = \{1, \dots, n\}$ ,  $Ap(X, \mathbb{K})$  é o mesmo que  $\mathbb{K}^n$ , espaço dos  $(z_1, \dots, z_n)$  com  $z_j \in \mathbb{K}$  para  $1 \leq j \leq n$ .

**b)** O conjunto  $\ell_{\mathbb{K}}$  de todas as sucessões  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\mathbb{K}$  é um espaço vetorial de dimensão infinita. Aliás trata-se de um caso particular do exemplo referido em a), na medida em que uma sucessão não é mais do que uma aplicação de domínio  $\mathbb{N}$ , para além do facto de se usar, na maioria dos casos, uma notação de “família”. Por vezes, em vez de  $\ell_{\mathbb{K}}$ , usaremos a notação  $\ell$ , se for claro a partir do contexto se se está a trabalhar com o corpo  $\mathbb{R}$  dos reais ou com o corpo  $\mathbb{C}$  dos complexos.

**c)** O espaço  $\text{Pol}(\mathbb{K})$  de todas as aplicações polinomiais  $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  (com coeficientes em  $\mathbb{K}$ ) é um subespaço vetorial de dimensão infinita de  $Ap(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ . De facto as aplicações  $f_n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , definidas por  $f_n(x) = x^n$  constituem uma base deste espaço vetorial.

**2.1.3** Seja  $E$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Generalizando trivialmente a definição dada em 1.1.5 no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , chama-se *norma* sobre  $E$  a uma aplicação  $E \rightarrow [0, +\infty[$ , notada frequentemente  $x \mapsto \|x\|$ , que verifique as seguintes propriedades:

- a)**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , quaisquer que sejam  $x, y \in E$  (subaditividade);
- b)**  $\|ax\| = |a|\|x\|$ , quaisquer que sejam  $x \in E$  e  $a \in \mathbb{K}$ ;
- c)**  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Chama-se *espaço vetorial normado* (real ou complexo) a um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  (igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) no qual se fixou uma norma.

Se  $E$  é um espaço vetorial complexo então uma norma de  $E$ , enquanto espaço vetorial complexo, é também uma norma de  $E$  quando considerado como espaço vetorial real, visto que se a propriedade b) é verificada para todo o escalar complexo ela é verificada, em particular, para todo o escalar real. Esta observação trivial permite aplicar aos espaços vetoriais normados complexos algumas propriedades estabelecidas anteriormente no contexto dos espaços vetoriais reais, como, por exemplo, considerar a *métrica associada* a uma norma, definida por

$$d(x, y) = \|y - x\|,$$

a métrica que se considera implicitamente sempre que se considera um

<sup>147</sup>A explicação das afirmações feitas sobre a dimensão de  $Ap(X, \mathbb{K})$  não é aqui explicitada por ser de carácter elementar e mais natural num curso de Álgebra Linear. Trata-se essencialmente de uma explicação do mesmo tipo da que é dada para justificar que  $\mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ ) é um espaço vetorial de dimensão  $n$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$  e propomo-la como exercício adiante (cf. o exercício 2.1.1).

espaço vetorial normado (cf. 1.1.6). Já uma norma de  $E$  enquanto espaço vetorial real pode ser ou não uma norma de  $E$  como espaço vetorial complexo.

Quando for conveniente sublinhar se consideramos uma norma de um espaço vetorial complexo  $E$  no contexto complexo ou no real falamos de *norma complexa* e de *norma real*, respetivamente.

Naturalmente, quando nos referirmos à topologia de um espaço vetorial normado estaremos a pensar na topologia correspondente à métrica associada.

**2.1.4** Repare-se que  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , enquanto espaço vetorial real pelo que podemos considerar em  $\mathbb{C}$  a norma real  $\|\cdot\|_2$  (cf. 1.1.7) e a métrica associada  $d_2$ , definidas respetivamente por

$$\begin{aligned}\|a + bi\|_2 &= \|(a, b)\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi| \\ d_2(z, z') &= \|z - z'\|_2 = |z - z'|,\end{aligned}$$

(onde  $a, b$  designam números reais e  $|z|$  designa o valor absoluto usual de um número complexo). São estas a norma e a distância que consideramos implicitamente em  $\mathbb{C}$  e, por esse motivo, empregamos usualmente a notação  $d(z, z')$  como sinónimo de  $d_2(z, z')$ . Observe-se ainda que, quando identificamos do modo usual o real  $a$  ao complexo  $(a, 0)$  coincidem o valor absoluto de  $a$  enquanto real e enquanto complexo e a distância usual de  $a, b \in \mathbb{R}$  enquanto reais e enquanto complexos. Recorde-se ainda que o valor absoluto de um número complexo, para além de constituir uma norma de  $\mathbb{C}$  enquanto espaço vetorial real, goza ainda da propriedade bem conhecida

$$|z \times z'| = |z| |z'|,$$

propriedade que implica que  $\mathbb{C}$  é mesmo um espaço vetorial complexo.

Repare-se que  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial complexo de dimensão 1 admitindo o complexo 1 como uma base e  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial real de dimensão 2 admitindo os complexos 1 e  $i$  como base (de facto, a base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ).

**2.1.5 (Continuidade da norma)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado então é contínua a aplicação de  $E$  para  $\mathbb{R}$  definida por  $x \mapsto \|x\|$ .

**Dem:** Trata-se de uma consequência de 1.4.22 uma vez que se tem

$$\|x\| = d(x, 0). \quad \square$$

A propriedade que estabelecemos em seguida será muitas vezes cómoda quando queremos mostrar que uma certa aplicação é uma norma sobre um espaço vetorial. Ela mostra que para garantir que temos uma norma basta estabelecer um conjunto aparentemente mais fraco de condições que o referido na definição em 2.1.3.

**2.1.6 (Caracterização alternativa das normas)** Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $x \mapsto \|x\|$  uma aplicação  $E \rightarrow [0, +\infty[$  verificando as condições:

**a)**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , quaisquer que sejam  $x, y \in E$  (subaditividade);

**b')**  $\|ax\| \leq |a|\|x\|$ , quaisquer que sejam  $x \in E$  e  $a \in \mathbb{K}$ ;<sup>148</sup>

**c')**  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ .<sup>149</sup>

Esta aplicação é então uma norma.

**Dem:** A implicação recíproca em c'), isto é o facto de se ter  $\|0\| = 0$  resulta e aplicar b') com  $a = 0$  e  $x \in E$  arbitrário (por exemplo  $x = 0 \dots$ ). Vem, com efeito,

$$\|0\| = \|0x\| \leq |0|\|x\| = 0,$$

portanto  $\|0\| = 0$ . Resta-nos mostrar o que falta a b') para provar a propriedade b), isto é que se tem também  $|a|\|x\| \leq \|ax\|$  para  $x \in E$  e  $a \in \mathbb{K}$ . Ora, esta desigualdade é trivial no caso em que  $a = 0$  e, caso contrário, podemos aplicar b') com o vetor  $ax$  e o escalar  $\frac{1}{a}$  para obter

$$\|x\| = \left\| \frac{1}{a} ax \right\| \leq \left| \frac{1}{a} \right| \|ax\|$$

donde

$$|a|\|x\| \leq |a| \left| \frac{1}{a} \right| \|ax\| = \|ax\|. \quad \square$$

**2.1.7** Repare-se que,  $x \mapsto \|x\|$  é uma norma no espaço vetorial  $E$  e se  $F \subset E$  é um subespaço vetorial, então a restrição da norma a  $F$  é uma norma no espaço vetorial  $F$ , a que damos o nome de *norma induzida*. Usaremos normalmente a convenção de representar com o mesmo símbolo uma norma sobre  $E$  e a sua restrição ao subespaço vetorial  $F$ . É claro que a métrica sobre  $F$  associada à norma induzida pela de  $E$  é a métrica induzida pela métrica de  $E$  associada à sua norma (cf. 1.1.9).

As bolas abertas e fechadas num espaço vetorial normado gozam de propriedades de invariância por translação e homotetia que teremos ocasião de utilizar.

**2.1.8 (Translações e homotetias)** Se  $E$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Para cada  $x_0 \in E$  podemos considerar a *translação* associada  $\tau_{x_0}: E \rightarrow E$ , definida por  $\tau_{x_0}(x) = x_0 + x$ , a qual vai ser uma aplicação bijetiva com inversa  $\tau_{-x_0}: E \rightarrow E$ . e para cada  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  podemos considerar a *homotetia* associada  $\rho_a: E \rightarrow E$ , definida por  $\rho_a(x) = ax$ , a

<sup>148</sup>A diferença relativamente à correspondente condição na definição é que exigimos apenas a desigualdade em vez da igualdade.

<sup>149</sup>A diferença relativamente à correspondente condição na definição é que exigimos apenas a implicação em vez da equivalência.



qual vai ser uma aplicação bijetiva com inversa  $\rho_{1/a}: E \rightarrow E$ . Estas bijeções transformam de modo natural as bolas abertas e as bolas fechadas:

**a)** Se  $x_1 \in E$  e  $r > 0$  então

$$\tau_{x_0}(B_r(x_1)) = B_r(x_0 + x_1), \quad \tau_{x_0}(\overline{B}_r(x_1)) = \overline{B}_r(x_0 + x_1);$$

**b)** Se  $x_1 \in E$  e  $r > 0$  então

$$\rho_a(B_r(x_1)) = B_{|a|r}(ax_1), \quad \rho_a(\overline{B}_r(x_1)) = \overline{B}_{|a|r}(ax_1).$$

**Dem:** Uma vez que temos bijeções basta repararmos, no caso de a), que

$$\begin{aligned} \tau_{x_0}(x) \in B_r(x_0 + x_1) &\Leftrightarrow \|(x_0 + x) - (x_0 + x_1)\| < r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|x - x_1\| < r \Leftrightarrow x \in B_r(x_1), \\ \tau_{x_0}(x) \in \overline{B}_r(x_0 + x_1) &\Leftrightarrow \|(x_0 + x) - (x_0 + x_1)\| \leq r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|x - x_1\| \leq r \Leftrightarrow x \in \overline{B}_r(x_1) \end{aligned}$$

e, no caso de b), que

$$\begin{aligned} \rho_a(x) \in B_{|a|r}(ax_1) &\Leftrightarrow \|ax - ax_1\| < |a|r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |a|\|x - x_1\| < |a|r \Leftrightarrow \|x - x_1\| < r \Leftrightarrow x \in B_r(x_1), \\ \rho_a(x) \in \overline{B}_{|a|r}(ax_1) &\Leftrightarrow \|ax - ax_1\| \leq |a|r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |a|\|x - x_1\| \leq |a|r \Leftrightarrow \|x - x_1\| \leq r \Leftrightarrow x \in \overline{B}_r(x_1). \quad \square \end{aligned}$$

Generalizando trivialmente o estabelecido em 1.1.21 no quadro dos espaços vetoriais normados reais, referimos agora um exemplo importante de espaço vetorial normado.

**2.1.9 (A norma  $\|\cdot\|_\infty$  em  $\mathbb{B}(I, E)$ )** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Tem-se então que o conjunto  $\mathbb{B}(I, E)$  de todas as aplicações limitadas  $I \rightarrow E$  é um subespaço vetorial do espaço vetorial  $Ap(I, E)$  sobre  $\mathbb{K}$ , de todas as aplicações  $I \rightarrow E$  (as quais notaremos neste momento como famílias indexadas em  $I$ <sup>150</sup>), e fica definida uma norma  $\|\cdot\|_\infty$  naquele espaço vetorial por

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty = \sup_{i \in I} \|x_i\|,$$

norma essa cuja métrica associada é a métrica  $d_\infty$  definida em 1.1.20 a partir da métrica de  $E$  associada à norma considerada e portanto cuja topologia associada é a induzida pela topologia da convergência uniforme de  $Ap(I, E)$  (cf. 1.2.77).

**Dem:** O caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  já foi estabelecido em 1.1.21. No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  o resultado referido mostra que  $\mathbb{B}(I, E)$  é um subespaço vetorial real

<sup>150</sup>Embora seja mais frequente utilizar-se alternativamente uma notação de função.

e que  $\| \cdot \|_\infty$  está bem definida e é uma norma real pelo que tudo o que resta mostrar é que se trata mesmo de um subespaço vetorial complexo e que a norma real é mesmo uma norma complexa. Ora, lembrando 2.1.6, isso resulta de que, se  $a \in \mathbb{C}$  e  $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}(I, E)$  tem-se, para cada  $i \in I$ ,

$$\|ax_i\| = |a| \|x_i\| \leq |a| \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty$$

o que implica que  $(ax_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}(I, E)$  e que

$$\|(ax_i)_{i \in I}\| \leq |a| \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty. \quad \square$$

**2.1.10** No contexto anterior usa-se também a notação  $\ell_E^\infty(I)$  como alternativa a  $\mathbb{B}(I, E)$ ,

$$\ell_E^\infty(I) = \mathbb{B}(I, E), \quad {}^{151}$$

escrevendo-se com frequência apenas  $\ell_E^\infty$  quando  $I = \mathbb{N}$ , isto é quando estamos em presença de sucessões, e omitindo por vezes a referência a  $E$  quando  $E = \mathbb{K}$  e for claro no contexto qual o corpo considerado.

**2.1.11** Repare-se que no caso em que o conjunto dos índices  $I$  é finito e não vazio tem-se

$$\ell_E^\infty(I) = \mathbb{B}(I, E) = Ap(I, E)$$

e pode-se escrever mesmo

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty = \max_{i \in I} \|x_i\|,$$

o que leva a referir a norma  $\| \cdot \|_\infty$  como a *norma do máximo*. Neste caso, uma vez que a métrica associada à norma  $\| \cdot \|_\infty$  é a métrica  $d_\infty$  definida em 1.1.20, resulta de 1.2.77 que a topologia associada em  $Ap(I, E)$  é a da convergência uniforme, que sabemos coincidir com a da convergência simples (cf. 1.2.83), isto é com a topologia produto (cf. a alínea c) de 1.5.14).

Particularizando ainda mais, e tomando  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $E$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , obtemos a norma do máximo em  $\mathbb{R}^n$  e em  $\mathbb{C}^n$ ,

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Quando  $E$  é um espaço vetorial normado e  $I$  é um conjunto finito e não vazio, a topologia da convergência simples de  $Ap(I, E)$  coincide com a topologia produto da família indexada em  $I$  com todos os factores iguais a  $E$  (cf. a alínea c) de 1.5.14). A norma  $\| \cdot \|_\infty$  admite uma generalização trivial ao caso em que temos o produto de uma família finita de espaços vetoriais normados com os factores não necessariamente coincidentes.

<sup>151</sup>No contexto da notação  $\ell_E^\infty(I)$  as aplicações são, na maioria das situações, encaradas como famílias.

**2.1.12** Sejam  $I$  um conjunto finito e não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $E_i$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ , com a norma notada  $\| \cdot \|_i$ . Pode então definir-se no produto cartesiano  $\prod_{i \in I} E_i$  uma norma (a que se dá ainda o nome de *norma do máximo*) definida por

$$\|(x_i)_{i \in I}\| = \max_{i \in I} \|x_i\|_i,$$

norma essa cuja métrica associada é a considerada em 1.5.17. A topologia associada a esta norma é assim a topologia produto.

Note-se que, no caso particular em que  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  temos, com uma mera mudança de notação, a topologia produto de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  associada à norma deste espaço vetorial definida por

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2, \dots, \|x_n\|_n\}.$$

**Dem:** Para verificarmos que temos efetivamente uma norma no produto cartesiano será cómodo utilizar a caracterização destas referida em 2.1.6. Dados  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} E_i$  e  $a \in \mathbb{K}$ , tem-se, para cada  $j \in I$ ,

$$\|x_j\|_j \leq \|(x_i)_{i \in I}\|, \quad \|y_j\|_j \leq \|(y_i)_{i \in I}\|,$$

donde

$$\begin{aligned} \|x_j + y_j\|_j &\leq \|x_j\|_j + \|y_j\|_j \leq \|(x_i)_{i \in I}\| + \|(y_i)_{i \in I}\|, \\ \|ax_j\|_j &= |a| \|x_j\|_j \leq |a| \|(x_i)_{i \in I}\|, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I}\| &= \max_{j \in I} \|x_j + y_j\|_j \leq \|(x_i)_{i \in I}\| + \|(y_i)_{i \in I}\|, \\ \|a(x_i)_{i \in I}\| &= \max_{j \in I} \|ax_j\|_j \leq |a| \|(x_i)_{i \in I}\|. \end{aligned}$$

Verificámos assim as alíneas a) e b') no resultado referido e a conclusão de c') resulta de que, se  $\|(x_i)_{i \in I}\| = 0$  tem que ser  $\|x_j\|_j = 0$  para cada  $j$ , donde também  $x_j = 0$  para cada  $j$ . É claro que a métrica associada a esta norma é a considerada em 1.5.17 e este resultado garante assim que a topologia associada é a topologia produto.  $\square$

**2.1.13 (A norma  $\| \cdot \|_1$  em  $\ell_E^1(I)$ )** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Tem-se então que o conjunto  $\ell_E^1(I)$ , de todas as aplicações  $(x_i)_{i \in I}$  de  $I$  para  $E$  tais que

$$\sum_{i \in I} \|x_i\| < +\infty$$

(cf. 1.2.70) é um subespaço vetorial do espaço vetorial  $Ap(I, E)$  sobre  $\mathbb{K}$ , de todas as aplicações  $I \rightarrow E$  (as quais notamos neste momento como famílias indexadas em  $I$ ), e fica definida uma norma  $\| \cdot \|_1$  naquele espaço vetorial por

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_1 = \sum_{i \in I} \|x_i\|.$$

Analogamente ao referido em 2.1.11, escreve-se simplesmente  $\ell_E^1$  no caso em que o conjunto dos índices  $I$  é  $\mathbb{N}$ , isto é quando estamos em presença de sucessões, e é comum omitir a referência a  $E$  quando  $E = \mathbb{K}$  e for claro do contexto qual o corpo  $\mathbb{K}$  que se está a considerar.

**Dem:** É evidente que a família identicamente nula de vetores de  $E$  pertence a  $\ell_E^1(I)$  e tem norma igual a 0. Suponhamos que  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_i)_{i \in I}$  pertencem a  $\ell_E^1(I)$  e que  $a \in \mathbb{K}$ . Tendo em conta 1.2.68, o facto de se ter

$$\|x_i + y_i\| \leq \|x_i\| + \|y_i\|,$$

com

$$\sum_{i \in I} (\|x_i\| + \|y_i\|) = \sum_{i \in I} \|x_i\| + \sum_{i \in I} \|y_i\| < +\infty,$$

implica que  $\sum_{i \in I} \|x_i + y_i\| < +\infty$ , isto é que  $(x_i + y_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^1(I)$ , e que

$$\|(x_i + y_i)_{i \in I}\|_1 \leq \sum_{i \in I} \|x_i\| + \sum_{i \in I} \|y_i\| = \|(x_i)_{i \in I}\|_1 + \|(y_i)_{i \in I}\|_1$$

e o facto de se ter  $\|ax_i\| = |a|\|x_i\|$  e

$$\sum_{i \in I} |a|\|x_i\| = |a| \sum_{i \in I} \|x_i\| < +\infty$$

implica que  $(ax_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^1(I)$  e que

$$\|(ax_i)_{i \in I}\|_1 = |a| \|(x_i)_{i \in I}\|_1.$$

Por fim, tendo em conta a caracterização das somas de reais positivos em 1.2.70, vemos que se  $\|(x_i)_{i \in I}\|_1 = 0$  cada  $\|x_i\|$ , sendo uma das somas finitas cujo supremo é aquela norma, tem que ser 0 e portanto  $x_i = 0$  para cada  $i$ .  $\square$

**2.1.14** No caso particular do resultado precedente em que o conjunto dos índices  $I$  é finito tem-se

$$\ell_E^1(I) = Ap(I, E).$$

Particularizando ainda mais, e tomando  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $E$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , obtemos a *norma da soma* em  $\mathbb{R}^n$  e em  $\mathbb{C}^n$ ,

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

já referida, no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , no exercício 1.1.1.

No contexto geral dos espaços métricos distinguimos as métricas topologicamente equivalentes, métricas que definem a mesma topologia, daquelas que verificam uma condição mais forte, referida como Lipschitz-equivalência (cf. 1.1.26), estas últimas gozando de várias propriedades que as primeiras não verificam necessariamente (cf., por exemplo, 1.1.35, 1.2.80 ou 1.7.4). Vamos agora verificar que, no caso das métricas que são associadas a normas dum espaço vetorial, não há distinção entre a equivalência topológica e a Lipschitz-equivalência. Esse facto vai resultar trivialmente do resultado seguinte.

**2.1.15 (Condição de continuidade das aplicações lineares)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear. São então equivalentes as seguintes propriedades:

a) A aplicação  $\lambda$  é contínua;

b) A aplicação  $\lambda$  é contínua no elemento  $0 \in E$ ;

c) Existe uma constante real  $M \geq 0$ , tal que, qualquer que seja  $x \in E$ ,  $\|\lambda(x)\| \leq M\|x\|$ ;

d) A aplicação  $\lambda$  é lipschitziana (cf. 1.4.3).

**Dem:** É evidente que a condição a) implica a condição b) e já verificámos em 1.4.3 que a condição d) implica a condição a).

Supondo que se verifica a condição c), vemos que, para cada  $x, y \in E$  tem-se

$$\begin{aligned} d(\lambda(x), \lambda(y)) &= \|\lambda(y) - \lambda(x)\| = \|\lambda(y - x)\| \leq \\ &\leq M \|y - x\| = M d(x, y) \end{aligned}$$

e temos a condição d).

Suponhamos, por fim, que a condição b) é verificada e provemos a condição c). Considerando os sistemas fundamentais de vizinhanças constituídos pelas bolas fechadas, podemos então considerar  $\varepsilon > 0$  tal que, sempre que  $\|x\| = d(x, 0) \leq \varepsilon$ , venha  $\|\lambda(x)\| = d(\lambda(x), \lambda(0)) \leq 1$ . Mostremos que, qualquer que seja  $x \in E$ ,  $\|\lambda(x)\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$ , o que provará c). Com efeito, a desigualdade anterior é trivial no caso em que  $x = 0$  e, quando  $x \neq 0$ , vemos que o vetor  $\frac{\varepsilon x}{\|x\|}$  tem norma  $\varepsilon$ , pelo que  $\|\lambda(\frac{\varepsilon x}{\|x\|})\| \leq 1$  e

$$\|\lambda(x)\| = \left\| \frac{\|x\|}{\varepsilon} \lambda\left(\frac{\varepsilon x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{\|x\|}{\varepsilon} \|\lambda(\frac{\varepsilon x}{\|x\|})\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|x\|. \quad \square$$

**2.1.16 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre o qual consideramos duas normas que notaremos  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|'$ .<sup>152</sup> Dizemos que a primeira norma é *mais fina* que a segunda se a topologia associada à primeira for mais fina que a topologia associada à segunda (cf. 1.2.4) e que as duas normas são *equivalentes* se cada uma delas for mais fina que a outra, isto é, se as

<sup>152</sup>Quando daí não resultar risco de confusão costuma-se utilizar a notação  $\|\cdot\|$  para as normas dos diferentes espaços vetoriais. Já quando queremos comparar normas distintas num mesmo espaço vetorial torna-se necessário utilizar notações distintas para estas.

topologias associadas coincidem (as métricas correspondentes são topologicamente equivalentes). Tem-se então:

**a)** A norma  $\|\cdot\|$  é mais fina que a norma  $\|\cdot\|'$  se, e só se, existe  $M \geq 0$  tal que

$$\|x\|' \leq M\|x\|$$

para cada  $x \in E$ .

**b)** As normas são equivalentes se, e só se, existem constantes  $M \geq 0$  e  $M' \geq 0$  tais que, para cada  $x \in E$ ,

$$\|x\|' \leq M\|x\|, \quad \|x\| \leq M'\|x\|',$$

e, nesse caso, as métricas associadas são mesmo Lipschitz-equivalentes.

**Dem:** Temos uma consequência do resultado precedente, da caracterização das topologias mais finas em 1.4.11 e da observação em 1.4.4.  $\square$

Como primeiros exemplos de aplicação de 2.1.15 e do respetivo corolário, temos:

**2.1.17** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e  $E$  um espaço vetorial normado. Tem-se então que as normas  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_1$ , no espaço vetorial  $Ap(I, E)$  de todas as aplicações de  $I$  para  $E$  (cf. 2.1.11 e 2.1.13), são equivalentes.

Em particular, no caso em que  $E = \mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) e  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , constatamos que são equivalentes a norma do máximo  $\|\cdot\|_\infty$  e a norma da soma  $\|\cdot\|_1$  em  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ .

**Dem:** Seja  $n \geq 1$  o número de elementos do conjunto finito  $I$ . Sendo  $(x_i)_{i \in I}$  arbitrário em  $Ap(I, E)$ , tem-se para cada  $j \in I$

$$\|x_j\| \leq \sum_{i \in I} \|x_i\| = \|(x_i)_{i \in I}\|_1,$$

donde

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty = \max_{j \in I} \|x_j\| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_1$$

e, por outro lado, para cada  $j \in I$ ,

$$\|x_j\| \leq \max_{i \in I} \|x_i\| = \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty,$$

donde

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_1 = \sum_{j \in I} \|x_j\| \leq n \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty. \quad \square$$

**2.1.18 (Continuidade da soma)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. É então contínua a aplicação  $\sigma: E \times E \rightarrow E$  definida por  $\sigma(y, z) = y + z$ .

**Dem:** Começemos por reparar que esta aplicação é linear, uma vez que

$$\begin{aligned}\sigma(y + y', z + z') &= y + y' + z + z' = \sigma(y, z) + \sigma(y', z'), \\ \sigma(ay, az) &= ay + az = a(y + z) = a\sigma(y, z).\end{aligned}$$

Considerando em  $E \times E$  a norma do máximo, que sabemos definir a topologia produto (cf. 2.1.12), o facto de se ter  $\|y\| \leq \|(y, z)\|$  e  $\|z\| \leq \|(y, z)\|$  implica que

$$\|\sigma(y, z)\| = \|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| \leq 2\|(y, z)\|$$

pelo que a continuidade da aplicação linear resulta de 2.1.15, com  $M = 2$ .  $\square$

**2.1.19 (Corolário)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado e  $x_0 \in E$  então a translação  $\tau_{x_0}: E \rightarrow E$  (cf. 2.1.8) é um homeomorfismo.

**Dem:** A continuidade de  $\tau_{x_0}: E \rightarrow E$  resulta de 2.1.18 uma vez que  $\tau_{x_0}(x) = x_0 + x$ . O facto de ser mesmo um homeomorfismo resulta de se tratar de uma bijeção cuja inversa  $\tau_{-x_0}$  é contínua por ser também uma translação.  $\square$

**2.1.20 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $X$  um espaço topológico e  $x_0 \in X$ . Tem-se então:

**a)** Sendo  $A \subset X$ , com  $x_0$  aderente a  $A$ , e  $f, g: A \rightarrow E$  duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y \in E, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} z \in E,$$

então

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y + z.$$

**b)** Em particular, se  $f, g: X \rightarrow E$  são duas aplicações contínuas no ponto  $x_0$  então é também contínua no ponto  $x_0$  a aplicação  $f + g: X \rightarrow E$ , que a  $x \in X$  associa  $f(x) + g(x)$ .<sup>153</sup>

**Dem:** A conclusão de a) resulta da continuidade da aplicação  $\sigma: E \times E \rightarrow E$  em 2.1.18 uma vez que, pela propriedade da topologia produto em 1.5.1, tem-se

$$(f(x), g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} (y, z) \in E \times E.$$

A conclusão de b) resulta da de a), tendo em conta a caracterização da continuidade de uma aplicação num ponto em termos de limites (cf. 1.4.1).  $\square$

---

<sup>153</sup>Repare-se que, relativamente ao que fizémos atrás no caso particular em que  $E$  é  $\mathbb{R}$  em 1.2.50, 1.4.21 e 1.5.6, estamos agora seguir um caminho inverso: Naquele caso particular a continuidade do análogo da aplicação  $\sigma$  apareceu a partir dos resultados sobre o limite de uma soma de aplicações e sobre a continuidade de uma soma de aplicações.

O resultado apresentado em 2.1.15 admite um complemento importante envolvendo as aplicações bilineares. Recordemos que, se  $F, G, H$  são espaços vetoriais, diz-se que uma aplicação  $\lambda: F \times G \rightarrow H$  é *bilinear* se é linear separadamente em cada variável, isto é, se: a) Para cada  $z \in G$ , é linear a aplicação  $F \rightarrow H$  que a  $y$  associa  $\lambda(y, z)$ ; b) Para cada  $y \in F$  é linear a aplicação  $G \rightarrow H$  que a  $z$  associa  $\lambda(y, z)$ . Repare-se que, lembrando uma propriedade bem conhecida das aplicações lineares, uma aplicação bilinear  $\lambda$  verifica necessariamente  $\lambda(0, z) = 0 = \lambda(y, 0)$ , quaisquer que sejam  $y \in F$  e  $z \in G$ .

**2.1.21 (Condição de continuidade das aplicações bilineares)** Sejam  $F, G, H$  espaços vetoriais normados e

$$\lambda: F \times G \rightarrow H$$

uma aplicação bilinear. São então equivalentes as propriedades seguintes:

**a)** A aplicação  $\lambda$  é contínua;<sup>154</sup>

**b)** A aplicação  $\lambda$  é contínua no ponto  $(0, 0) \in F \times G$ ;

**c)** Existe uma constante real  $M \geq 0$ , tal que, quaisquer que sejam  $y \in F$  e  $z \in G$ ,

$$\|\lambda(y, z)\| \leq M\|y\|\|z\|.$$

**Dem:** É evidente que a) implica b). Suponhamos que se verifica b). Considerando os sistemas fundamentais de vizinhanças constituídos pelas bolas fechadas, podemos então considerar  $\varepsilon > 0$  e  $\varepsilon' > 0$  tais que, sempre que  $y \in F$  e  $z \in G$  verificam  $\|y\| = d(0, y) \leq \varepsilon$  e  $\|z\| = d(0, z) \leq \varepsilon'$ , se tenha

$$\|\lambda(y, z)\| = d(0, \lambda(y, z)) \leq 1.$$

Podemos deduzir daqui que, qualquer que seja  $(y, z) \in F \times G$ , tem-se

$$\|\lambda(y, z)\| \leq \frac{1}{\varepsilon\varepsilon'}\|y\|\|z\|,$$

o que provará c). Com efeito, a desigualdade anterior é trivial se  $y = 0$  ou  $z = 0$  e, caso contrário, tem-se  $\|\frac{\varepsilon y}{\|y\|}\| = \varepsilon$  e  $\|\frac{\varepsilon' z}{\|z\|}\| = \varepsilon'$ , donde

$$\|\lambda\left(\frac{\varepsilon y}{\|y\|}, \frac{\varepsilon' z}{\|z\|}\right)\| \leq 1$$

e portanto

<sup>154</sup>Consideramos naturalmente em  $F \times G$  a topologia produto, pelo que não é necessário considerar nenhuma norma em  $F \times G$ . Aliás, na definição de aplicação bilinear a estrutura de espaço vetorial de  $F \times G$  é irrelevante.



$$\begin{aligned}\|\lambda(y, z)\| &= \left\| \frac{\|y\|}{\varepsilon} \frac{\|z\|}{\varepsilon'} \lambda\left(\frac{\varepsilon y}{\|y\|}, y \frac{\varepsilon' z}{\|z\|}\right) \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon \varepsilon'} \|y\| \|z\|.\end{aligned}$$

Suponhamos, por fim, que se verifica c), podendo evidentemente supor-se já que se tem  $M > 0$ , visto que aumentando o valor de  $M$  a desigualdade em c) continua a verificar-se. Vamos demonstrar que  $\lambda$  é contínua num elemento  $(y_0, z_0) \in F \times G$  arbitrário. Para isso, dado  $\delta > 0$  arbitrário, vamos tentar encontrar  $\varepsilon > 0$  tal que, sempre que  $\|y - y_0\| < \varepsilon$  e  $\|z - z_0\| < \varepsilon$ , se tenha

$$(1) \quad \|\lambda(y, z) - \lambda(y_0, z_0)\| < \delta.$$

Para provar isso a ideia é decompor a diferença anterior como soma de duas parcelas, em cada uma das quais intervindo uma diferença de dois termos que se distinguem apenas por um dos argumentos de  $\lambda$ . Com efeito, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|\lambda(y, z) - \lambda(y_0, z_0)\| &= \|\lambda(y, z) - \lambda(y_0, z) + \lambda(y_0, z) - \lambda(y_0, z_0)\| \leq \\ &\leq \|\lambda(y, z) - \lambda(y_0, z)\| + \|\lambda(y_0, z) - \lambda(y_0, z_0)\|\end{aligned}$$

e portanto, para verificar (1), basta verificar que se tem

$$(2) \quad \begin{aligned}\|\lambda(y, z) - \lambda(y_0, z)\| &< \frac{\delta}{2} \\ \|\lambda(y_0, z) - \lambda(y_0, z_0)\| &< \frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Seja então  $r$  o maior dos números positivos  $\|y_0\| + 1$  e  $\|z_0\| + 1$  e seja  $\varepsilon$  o menor dos números positivos  $1$  e  $\frac{\delta}{2Mr}$ .

Supondo que  $(y, z) \in F \times G$  é tal que  $\|y - y_0\| < \varepsilon$  e  $\|z - z_0\| < \varepsilon$ , tem-se, em particular,  $\|z - z_0\| < 1$ , donde

$$\|z\| = \|z - z_0 + z_0\| \leq \|z - z_0\| + \|z_0\| < \|z_0\| + 1 \leq r$$

e evidentemente também  $\|y_0\| < \|y_0\| + 1 \leq r$ , e podemos portanto concluir que

$$\begin{aligned}\|\lambda(y, z) - \lambda(y_0, z)\| &= \|\lambda(y - y_0, z)\| \leq M\|y - y_0\|\|z\| < M\varepsilon r \leq \frac{\delta}{2}, \\ \|\lambda(y_0, z) - \lambda(y_0, z_0)\| &= \|\lambda(y_0, z - z_0)\| \leq M\|y_0\|\|z - z_0\| < Mr\varepsilon \leq \frac{\delta}{2},\end{aligned}$$

pelo que as desigualdades (2) ficaram provadas, como pretendido.  $\square$

O resultado precedente vai servir, em particular, para estabelecer a continuidade da multiplicação num espaço vetorial normado  $E$ , uma aplicação  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  que é bilinear, ao contrário do que sucedia com a soma, que era uma aplicação linear  $E \times E \rightarrow E$ .

**2.1.22 (Continuidade da multiplicação)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Tem então lugar uma aplicação bilinear contínua  $\lambda: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  definida por  $\lambda(t, y) = ty$ .

**Dem:** Começemos por notar que a aplicação  $\lambda$  é bilinear, como consequência das propriedades de espaço vetorial, nomeadamente:

$$\begin{aligned}\lambda(t + t', y) &= (t + t')y = ty + t'y = \lambda(t, y) + \lambda(t', y), \\ \lambda(ct, y) &= (ct)y = c(ty) = c\lambda(ty), \\ \lambda(t, y + y') &= t(y + y') = ty + ty' = \lambda(t, y) + \lambda(t, y'), \\ \lambda(t, cy) &= t(cy) = (tc)y = (ta)y = c(ty) = c\lambda(t, y). \quad 155\end{aligned}$$

O facto de a aplicação bilinear  $\lambda$  ser contínua resulta agora de 2.1.21, com  $M = 1$ , visto que se tem

$$\|\lambda(t, y)\| = \|ty\| = |t|\|y\|. \quad \square$$

**2.1.23 (Corolário)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado e  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  então a homotetia  $\rho_a: E \rightarrow E$  (cf. 2.1.8) é um homeomorfismo.

**Dem:** A continuidade de  $\rho_a: E \rightarrow E$  resulta de 2.1.22 uma vez que  $\rho_a(y) = ay$ . O facto de ser mesmo um homeomorfismo resulta de se tratar de uma bijeção cuja inversa  $\rho_{1/a}$  é contínua por ser também uma homotetia.  $\square$

**2.1.24 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $X$  um espaço topológico e  $x_0 \in X$ . Tem-se então:

a) Sendo  $A \subset X$ , com  $x_0$  aderente a  $A$ , e  $\alpha: A \rightarrow \mathbb{K}$  e  $f: A \rightarrow E$  duas aplicações tais que

$$\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c \in \mathbb{K}, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y \in E,$$

então

$$\alpha(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} cy.$$

b) Em particular, se  $\alpha: X \rightarrow \mathbb{K}$  e  $f: X \rightarrow E$  são duas aplicações contínuas no ponto  $x_0$  então é também contínua no ponto  $x_0$  a aplicação  $\alpha f: X \rightarrow E$ , que a  $x \in X$  associa  $\alpha(x)f(x)$ .

**Dem:** A conclusão de a) resulta da continuidade da multiplicação  $\lambda: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  em 2.1.22 uma vez que, pela propriedade da topologia produto em 1.5.1, tem-se

---

<sup>155</sup>Doravante, quando afirmarmos que um certa aplicação é linear ou bilinear, abster-nos-emos frequentemente de explicitar a justificação desse facto, tendo em conta que essa justificação, tal como a que acabamos de apresentar, será óbvia. De qualquer modo, será conveniente que o leitor verifique por si as justificações omitidas, nem que seja “de cabeça”, verificação que será naturalmente especialmente importante no caso em que seja da sua iniciativa a afirmação da linearidade ou bilinearidade de alguma aplicação. Ver o exercício 2.1.4 para um exemplo do perigo de não fazer verificações.

$$(\alpha(x), f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} (c, y) \in \mathbb{K} \times E.$$

A conclusão de b) resulta da de a), tendo em conta a caracterização da continuidade de uma aplicação num ponto em termos de limites (cf. 1.4.1).  $\square$

**2.1.25 (Nota sobre as propriedades algébricas dos limites e da continuidade no contexto de  $\mathbb{C}$ )** Os resultados sobre os limites de somas e produtos de funções com valores em  $\mathbb{R}$  estabelecidos nas alíneas a) e c) de 1.2.50, assim como as consequências envolvendo a continuidade num ponto da soma e do produto de funções contínuas nesse ponto, estendem-se naturalmente às funções com valores em  $\mathbb{C}$ , sendo nesse contexto casos particulares de 2.1.20 e 2.1.3 quando se encara  $\mathbb{C}$  como espaço vetorial normado complexo com o valor absoluto como norma. Do mesmo modo, o resultado sobre o limite do valor absoluto de uma função com valores em  $\mathbb{R}$  referido na alínea b) de 1.2.50, assim como o correspondente resultado envolvendo a continuidade num ponto do valor absoluto de uma função contínua nesse ponto, vale igualmente para funções com valores em  $\mathbb{C}$ , como consequência de o valor absoluto, tal como uma norma em geral, ser uma aplicação contínua. Já em relação à generalização do referido na alínea b) de 1.2.51 para o contexto de  $\mathbb{C}$ , temos algo simples mas que não decorre do que foi estabelecido até agora. Mais precisamente:

Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g: A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c \neq 0.$$

Tem-se então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{b}{c}.$$

Consequentemente, se  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g: X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  são duas aplicações contínuas num ponto  $x_0 \in X$  então é também contínua em  $x_0$  a aplicação  $X \rightarrow \mathbb{C}$  que a  $x$  associa  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Dem:** Tendo em conta a propriedade do limite dum produto referida no início e a fórmula

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$$

ficamos reduzidos a mostrar que se tem

$$\frac{1}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{c}.$$

Ora, lembrando a identificação  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , tem-se  $c = (c_1, c_2)$  e

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x)),$$

com

$$g_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_1, \quad g_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_2$$

em  $\mathbb{R}$  donde, pelas propriedades algébricas dos limites no contexto de  $\mathbb{R}$  e lembrando que o inverso de um complexo é igual ao seu conjugado dividido pelo quadrado da norma, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= \left( \frac{g_1(x)}{g_1(x)^2 + g_2(x)^2}, \frac{-g_2(x)}{g_1(x)^2 + g_2(x)^2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \left( \frac{c_1}{c_1^2 + c_2^2}, \frac{-c_2}{c_1^2 + c_2^2} \right) = \frac{1}{c}. \end{aligned} \quad \square$$

Vamos examinar agora algumas propriedades dos espaços vetoriais normados cujas demonstrações utilizam os resultados 2.1.20 e 2.1.3. A primeira descreve um exemplo de espaço vetorial normado de utilização frequente, subespaço do examinado em 2.1.9, para o qual é mais natural utilizar as “notações de aplicação” em vez das “notações de família”.

**2.1.26 (A norma  $\| \cdot \|_\infty$  no espaço  $\mathcal{C}(X, E)$  das aplicações contínuas)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $X$  um espaço topológico compacto e não vazio. Tem-se então que o conjunto  $\mathcal{C}(X, E)$  de todas as aplicações contínuas  $X \rightarrow E$  é um subespaço vetorial fechado do espaço vetorial normado  $\mathbb{B}(X, E)$ , com a norma  $\| \cdot \|_\infty$ , a topologia associada a esta norma sendo a induzida pela topologia da convergência uniforme de  $Ap(X, E)$ .

**Dem:** O facto de se ter  $\mathcal{C}(X, E) \subset \mathbb{B}(X, E)$  resulta de 1.6.24 e 1.6.27 e o facto de ser fechado em  $\mathbb{B}(X, E)$  resulta de ser fechado em  $Ap(X, E)$  com a topologia da convergência uniforme (cf. 1.4.32), que sabemos induzir em  $\mathbb{B}(X, E)$  a topologia associada à norma  $\| \cdot \|_\infty$ . O facto de  $\mathcal{C}(X, E)$  ser um subespaço vetorial de  $\mathbb{B}(X, E)$  decorre de 2.1.20 e 2.1.3 e do facto de a aplicação identicamente nula ser contínua.  $\square$

**2.1.27 (A aderência dum subespaço vetorial)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $F \subset E$  um subespaço vetorial. Tem-se então que a sua aderência  $ad(F)$  é também um subespaço vetorial.

**Dem:** O facto de ser  $0 \in F$  implica que também  $0 \in ad(F)$ . Uma vez que  $ad(F)$  é um subconjunto fechado de  $E$ , a continuidade da soma  $\sigma: E \times E \rightarrow E$  e da multiplicação  $\lambda: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  (cf. 2.1.18 e 2.1.22) garante que são fechados em  $E \times E$  o conjunto  $C$  dos pares  $(y, z)$  tais que  $y + z \in ad(F)$  e em  $\mathbb{K} \times E$  o conjunto  $D$  dos pares  $(a, y)$  tais que  $ay \in ad(F)$ . Uma vez que  $C$  contém  $F \times F$ , concluímos que  $C$  contém também a sua aderência em  $E \times E$ , que é igual a  $ad(F) \times ad(F)$  (cf. 1.5.23), o que mostra que sempre que  $y, z \in ad(F)$  tem-se  $(y, z) \in C$ , isto é

$y + z \in \text{ad}(F)$ . Do mesmo modo, uma vez que  $D$  contém  $\mathbb{K} \times F$ , concluímos que  $D$  contém também a sua aderência em  $\mathbb{K} \times E$ , que é igual a  $\mathbb{K} \times \text{ad}(F)$ , o que mostra que sempre que  $a \in \mathbb{K}$  e  $y \in \text{ad}(F)$  tem-se  $(a, y) \in D$ , isto é  $ay \in \text{ad}(F)$ .  $\square$

**2.1.28 (Convexidade em espaços vetoriais normados)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Tem-se então:

**a)** Se  $A \subset E$  é um conjunto convexo, ou um conjunto estrelado relativamente a um dos seus pontos  $x_0$  (cf. 1.8.35), então  $A$  é um conjunto conexo por arcos, e portanto conexo. Em particular,  $E$  é conexo por arcos e portanto conexo.

**b)** Se  $x_0 \in E$  e  $r > 0$  então a bola aberta  $B_r(x_0)$  e a bola fechada  $\overline{B}_r(x_0)$  são conjuntos convexos.

**c)** O espaço topológico  $E$  é localmente conexo por arcos, em particular localmente conexo.

**Dem:** **a)** Suponhamos que  $A$  é estrelado relativamente a um dos seus pontos  $x_0$ . Qualquer que seja  $x \in A$ , podemos então considerar a aplicação contínua  $f: [0, 1] \rightarrow A \subset E$  definida por  $f(t) = (1-t)x_0 + tx$  (a soma e o produto de aplicações contínuas são contínuas), que verifica  $f(0) = x_0$  e  $f(1) = x$ , o que mostra que  $x_0$  e  $x$  são conexos por arcos em  $A$ ; por transitividade, concluímos que dois pontos quaisquer de  $A$  são conexos por arcos em  $A$ , pelo que  $A$ , tendo uma única componente conexa por arcos, vai ser conexo por arcos. O caso em que  $A$  é convexo reduz-se ao anterior, visto que, afastado já o caso trivial em que  $A = \emptyset$ ,  $A$  é estrelado relativamente a qualquer ponto que se escolha.

**b)** Se  $y, z \in \overline{B}_r(x_0)$ , tem-se, para cada  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \|(1-t)y + tz - x_0\| &= \|(1-t)(y - x_0) + t(z - x_0)\| \leq \\ &\leq (1-t)\|y - x_0\| + t\|z - x_0\| \leq (1-t)r + tr = r, \end{aligned}$$

donde  $(1-t)y + tz \in \overline{B}_r(x_0)$ , o que mostra que a bola fechada é convexa. O facto de a bola aberta  $B_r(x_0)$  ser convexa decorre trivialmente visto que, se  $x$  e  $y$  pertencem à bola aberta então ambos pertencem à bola fechada  $\overline{B}_s(x_0)$ , onde  $s < r$  é o maior dos três números  $\|y - x_0\|$ ,  $\|z - x_0\|$  e  $\frac{r}{2}$ <sup>156</sup>, e então o segmento de extremidades  $y$  e  $z$  está contido em  $\overline{B}_s(x_0)$ , e consequentemente também em  $B_r(x_0)$ .

**c)** Temos uma consequência de a classe das bolas abertas de centro  $x_0$  e raios  $r > 0$  constituir um sistema fundamental de vizinhanças conexas por arcos de  $x_0$ .  $\square$

**2.1.29** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $F \subset E$ , com  $F \neq E$ , um subespaço vetorial. Tem-se então  $\text{int}(F) = \emptyset$ .

**Dem:** Suponhamos que existia  $x_0$  interior a  $F$ . Seja  $w \in E$  arbitrário. Uma vez que a sucessão de vetores  $x_0 + \frac{1}{n}w$  tem limite  $x_0$ , vai existir uma ordem

<sup>156</sup>Este último introduzido apenas para impedir que  $s$  pudesse ser 0 o que, não sendo grave, quebraria a convenção de só considerarmos bolas de raios estritamente positivos.

$n_0$  tal que, para cada  $n \geq n_0$ ,  $x_0 + \frac{1}{n}w$  pertence à vizinhança  $F$  de  $x_0$  e daqui deduzimos que

$$w = n\left(x_0 + \frac{1}{n}w - x_0\right) \in F.$$

Concluimos assim que  $E = F$ , contra a hipótese.  $\square$

**2.1.30 (O espaço das aplicações lineares contínuas)** Se  $E$  e  $F$  são dois espaços vetoriais notamos  $L(E; F)$  o conjunto de todas as aplicações lineares  $\lambda: E \rightarrow F$  que se constata imediatamente ser um subespaço vetorial do espaço vetorial  $Ap(E, F)$  de todas as aplicações de  $E$  em  $F$ .

Sejam agora  $E$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados. Vamos notar  $\mathcal{L}(E; F)$  o conjunto das aplicações lineares contínuas  $\lambda: E \rightarrow F$ , que é, naturalmente, um subespaço vetorial de  $L(E; F)$ . Para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; F)$ , sabemos que existe  $M \geq 0$  tal que  $\|\lambda(x)\| \leq M\|x\|$ , para todo o  $x \in E$ , e vai existir um número  $M \geq 0$  mínimo nessas condições, número esse que será notado  $\|\lambda\|$ . No caso em que  $E \neq \{0\}$ ,  $\|\lambda\|$  pode ser também caracterizado como o supremo dos quocientes  $\frac{\|\lambda(x)\|}{\|x\|}$  com  $x \neq 0$ , ou ainda como o supremo dos  $\|\lambda(x)\|$  com  $\|x\| = 1$ . Fica-se assim com uma norma  $\|\cdot\|$  sobre o espaço vetorial  $\mathcal{L}(E; F)$ .

Repare-se que, por definição, vai-se ter  $\|\lambda(x)\| \leq \|\lambda\|\|x\|$ , para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $x \in E$ .

No caso em que  $F$  é o corpo  $\mathbb{K}$  dos escalares, diz-se que  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é o *dual topológico* de  $E$ .<sup>157</sup>

**Dem:** Se o espaço vetorial  $E$  tiver 0 como único elemento, é trivial que 0 é o menor dos números  $M \geq 0$  nas condições do enunciado. Se isso não acontecer, e uma vez que a desigualdade  $\|\lambda(0)\| \leq M\|0\|$  é verificada para todo o  $M \geq 0$ , para verificarmos a existência de  $M \geq 0$  mínimo nas condições do enunciado ficamos reduzidos a mostrar que existe  $M \geq 0$  mínimo tal que se tenha  $\frac{\|\lambda(x)\|}{\|x\|} \leq M$ , para todo o  $x \neq 0$ , e, por definição de supremo, esse mínimo existe e é igual ao supremo daqueles quocientes. Ainda neste caso, o facto de o supremo dos quocientes  $\frac{\|\lambda(x)\|}{\|x\|}$  com  $x \neq 0$  coincidir com o supremo dos  $\|\lambda(x)\|$  com  $\|x\| = 1$  resulta de se ter para cada  $x \neq 0$

$$\frac{\|\lambda(x)\|}{\|x\|} = \left\| \lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|, \quad \text{com} \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Resta-nos verificar que obtivemos uma norma em  $\mathcal{L}(E; F)$ . Sejam então  $\lambda, \mu \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $a \in \mathbb{K}$ . Para cada  $x \in E$ , tem-se  $\|\lambda(x)\| \leq \|\lambda\|\|x\|$  e  $\|\mu(x)\| \leq \|\mu\|\|x\|$ , pelo que

<sup>157</sup>O *dual algébrico* de  $E$  é o espaço vetorial  $L(E; \mathbb{K})$  de todas as aplicações lineares  $E \rightarrow \mathbb{K}$ , contínuas ou não.

$$\begin{aligned} \|(\lambda + \mu)(x)\| &= \|\lambda(x) + \mu(x)\| \leq \|\lambda(x)\| + \|\mu(x)\| \leq \\ &\leq (\|\lambda\| + \|\mu\|)\|x\|, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que  $\|\lambda + \mu\| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$ . Do mesmo modo, vemos que, para cada  $x \in E$ ,

$$\|(a\lambda)(x)\| = \|a\lambda(x)\| = |a|\|\lambda(x)\| \leq |a|\|\lambda\|\|x\|.$$

de onde se conclui que  $\|a\lambda\| \leq |a|\|\lambda\|$ . Tendo em conta 2.1.6, resta-nos ver que, se  $\|\lambda\| = 0$ , então  $\lambda = 0$ . Ora, nestas condições, tem-se, para cada  $x \in E$ ,  $\|\lambda(x)\| \leq \|\lambda\|\|x\| = 0$ , portanto  $\lambda(x) = 0$ , o que mostra que  $\lambda$  é realmente a aplicação linear nula.  $\square$

**2.1.31 (Uma multiplicação alternativa no contexto precedente)** Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados. O facto de  $\mathcal{L}(E; F)$  ser um espaço vetorial normado permite aplicar neste contexto propriedades gerais destes últimos, como, por exemplo 2.1.18 e 2.1.22 que garantem a continuidade da soma e da multiplicação pelos escalares como aplicações

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E; F) \times \mathcal{L}(E; F) &\rightarrow \mathcal{L}(E; F) \\ \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E; F) &\rightarrow \mathcal{L}(E; F), \end{aligned}$$

assim como os respetivos corolários 2.1.20 e 2.1.24. É por vezes importante utilizar uma propriedade do mesmo tipo da segunda que referimos mas com os papéis de  $F$  e dos escalares trocados, assim como o correspondente corolário, nomeadamente:

**a)** Tem lugar uma aplicação bilinear contínua

$$\rho: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \times F \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$$

definida por  $\rho(\lambda, z) = \lambda z$ , onde

$$(\lambda z)(y) = \lambda(y)z,$$

a qual verifica, mais precisamente,  $\|\lambda z\| \leq \|\lambda\|\|z\|$ .

**b)** Em consequência, sendo  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $g: A \rightarrow F$  duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K}), \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} z \in F,$$

então

$$f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda z,$$

onde

$$(f(x)g(x))(y) = f(x)(y)g(x), \quad (\lambda z)(y) = \lambda(y)z.$$

**c)** Em particular, se  $X$  é um espaço topológico e  $f: X \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $g: X \rightarrow F$  duas aplicações contínuas num ponto  $x_0 \in X$ , então é também

contínua em  $x_0$  a aplicação  $X \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  que a  $x$  associa  $f(x)g(x)$ .

**Dem:** Sendo  $\lambda \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $z \in F$ , a aplicação  $\lambda z: E \rightarrow F$  que a  $y$  associa  $\lambda(y)z$  é linear e tem-se

$$\|(\lambda z)(y)\| = \|\lambda(y)z\| = |\lambda(y)|\|z\| \leq \|\lambda\|\|y\|\|z\|,$$

pelo que ela é contínua e com  $\|\lambda z\| \leq \|\lambda\|\|z\|$ . Uma vez que a aplicação que a  $(\lambda, z)$  associa  $\lambda z$  é bilinear, esta última desigualdade mostra que ela é contínua. As conclusões de b) e c) decorrem de a) pelo método já utilizado anteriormente de compor a aplicação bilinear com a aplicação com valores em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \times F$  que tem  $f$  e  $g$  como coordenadas.  $\square$

**2.1.32 (Notas  $\mathbb{R}$ - $\mathbb{C}$ ) a)** Como dissémos anteriormente, quando nos referimos a vários espaços vetoriais num mesmo enunciado, está implícito que são todos espaços vetoriais reais ou todos espaços vetoriais complexos. É claro que, quando temos alguns espaços vetoriais reais e outros complexos, podemos sempre “esquecer” a estrutura complexa destes últimos, de modo a considerar todos como espaços vetoriais reais. O resultado precedente é um exemplo de uma situação em que também pode ser útil trabalhar, de modo essencial, com espaços vetoriais sobre corpos distintos. Com efeito, é imediato constatar que, no caso em que  $E$  é um espaço vetorial normado real e  $F$  é um espaço vetorial normado complexo, o espaço  $\mathcal{L}(E; F)$  das aplicações lineares reais de  $E$  em  $F$  é mesmo um espaço vetorial normado complexo.

**b)** Quando  $E$  e  $F$  são ambos espaços vetoriais normados complexos é por vezes útil considerá-los também como espaços vetoriais normados reais. Nesses casos a notação  $\mathcal{L}(E; F)$  pode ter dois significados distintos pelo que será cómodo utilizar as notações  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  e  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  para clarificar se estamos a considerar a linearidade no sentido complexo ou no sentido real respetivamente. É claro que  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  é um subespaço vetorial complexo e que a norma do primeiro espaço é a induzida pela norma do segundo. Uma observação útil é que se  $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  então tem-se  $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  se, e só se,  $\lambda(ix) = i\lambda(x)$  para cada  $x \in E$ . Com efeito, tem-se então, para  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda((a + bi)x) &= \lambda(ax + b(ix)) = a\lambda(x) + b\lambda(ix) = \\ &= a\lambda(x) + bi\lambda(x) = (a + bi)\lambda(x). \end{aligned}$$

**2.1.33 (O exemplo das aplicações lineares isométricas)** Se  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais normados uma aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow F$  é isométrica (cf. 1.4.8) se, e só se, verifica  $\|\lambda(x)\| = \|x\|$  para cada  $x \in E$ . Uma tal aplicação linear é então contínua e com  $\|\lambda\| \leq 1$ .<sup>158</sup> Tal como já acontecia com as aplicações isométricas no contexto mais geral dos espaços métricos, toda a aplicação linear isométrica é injetiva.

**Dem:** Se a aplicação linear  $\lambda$  é isométrica vem

<sup>158</sup>De facto, afastado o caso em que  $E = \{0\}$ , caso em que  $\lambda = 0$  e  $\|\lambda\| = 0$ , é imediato que uma aplicação linear isométrica  $\lambda$  verifica necessariamente  $\|\lambda\| = 1$ .



$$\|\lambda(x)\| = \|\lambda(x) - \lambda(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|.$$

Reciprocamente, se for  $\|\lambda(x)\| = \|x\|$  para cada  $x \in E$ , vem, para cada  $x, x'$  em  $E$ ,

$$\|\lambda(x) - \lambda(x')\| = \|\lambda(x - x')\| = \|x - x'\|,$$

o que mostra que  $\lambda$  é uma aplicação isométrica.  $\square$

**2.1.34 (A aplicação bilinear de avaliação)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e consideremos no espaço das aplicações lineares contínuas  $\mathcal{L}(E, F)$  a correspondente norma (cf. 2.1.30). Tem então lugar uma aplicação bilinear contínua  $\Phi: \mathcal{L}(E; F) \times E \rightarrow F$ , a que se dá o nome de *aplicação de avaliação*, definida por  $\Phi(\lambda, x) = \lambda(x)$ .<sup>159</sup>

**Dem:** O facto de a aplicação  $\Phi$  ser bilinear é de verificação simples. A continuidade desta aplicação bilinear resulta de aplicar 2.1.21, com  $M = 1$ , uma vez que, como referido em 2.1.30, tem-se

$$\|\Phi(\lambda, x)\| = \|\lambda(x)\| \leq \|\lambda\| \|x\|. \quad \square$$

**2.1.35 (Exemplos de aplicação) a)** Se  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais normados complexos, já referimos na alínea b) de 2.1.32 que  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$ . De facto, podemos mesmo afirmar que se trata de um subespaço vetorial fechado.

**b)** Se  $E$  e  $F$  são subespaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  e  $F' \subset F$  é um subespaço vetorial fechado, então o subespaço vetorial  $\mathcal{L}(E; F') \subset \mathcal{L}(E; F)$  é também fechado.

**Dem: a)** Basta atender a que  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  é a interseção, para  $c \in \mathbb{C}$  e  $x \in E$ , dos subespaços vetoriais fechados

$$\mathcal{L}_{c,x}(E; F) = \{\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F) \mid \lambda(cx) - c\lambda(x) = 0\},$$

uma vez que a continuidade da aplicação linear  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F) \rightarrow F$  definida por  $\lambda \mapsto \lambda(cx) - c\lambda(x)$  resulta de 2.1.34 e 2.1.22.

**b)** Basta atender a que  $\mathcal{L}(E; F')$  é a interseção, para  $x \in E$ , dos subespaços vetoriais fechados

$$\mathcal{L}_x(E; F') = \{\lambda \in \mathcal{L}(E; F) \mid \lambda(x) \in F'\},$$

onde tivémos em conta a continuidade das aplicações  $\mathcal{L}(E; F) \rightarrow F$ ,  $\lambda \mapsto \lambda(x)$  que resulta de 2.1.34.  $\square$

**2.1.36 (A aplicação bilinear de composição)** Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços vetoriais normados. Tem então lugar uma aplicação bilinear contínua

$$\Psi: \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; G),$$

<sup>159</sup>Comparar com o exercício 1.5.12.

definida por  $\Psi(\mu, \lambda) = \mu \circ \lambda$  (a *aplicação de composição*), para a qual

$$\|\Psi(\mu, \lambda)\| = \|\mu \circ \lambda\| \leq \|\mu\| \|\lambda\|.$$

**Dem:** É fácil verificar que  $\Psi$  é efetivamente bilinear e a sua continuidade resulta do facto de se ter  $\|\mu \circ \lambda\| \leq \|\mu\| \|\lambda\|$ , uma vez que, para cada  $x \in E$ ,

$$\|\mu \circ \lambda(x)\| = \|\mu(\lambda(x))\| \leq \|\mu\| \|\lambda(x)\| \leq \|\mu\| \|\lambda\| \|x\|. \quad \square$$

A noção de aplicação bilinear, que relembrámos atrás, admite um generalização natural, a de aplicação multilinear, em que, em vez de dois fatores, podemos ter um número finito de fatores. Dados espaços vetoriais  $F_1, \dots, F_n$  e  $G$ , uma aplicação  $\lambda: F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow G$  é dita *multilinear* (ou *n-linear*) se quando fixamos o valor de  $n-1$  das variáveis a aplicação ficar linear na variável restante; Mais precisamente, para cada  $1 \leq j \leq n$  e, para cada escolha de  $y_{i0} \in F_i$  para cada  $i \neq j$ , deve ficar linear a aplicação

$$F_j \rightarrow G, \quad y_j \mapsto \lambda(y_{10}, \dots, y_{j-10}, y_j, y_{j+10}, \dots, y_{n0}).$$

Observe-se que o caso em que  $n = 2$  corresponde às aplicações bilineares encontradas atrás e que o caso  $n = 1$  corresponde às aplicações lineares. Tal como nesses casos particulares, o facto de a imagem de 0 por uma aplicação linear ser sempre 0 implica que, se  $\lambda: F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow G$  é multilinear então  $\lambda(y_1, \dots, y_n) = 0$  sempre que  $y_j = 0$  para algum  $j$ .

O próximo resultado é uma generalização de 2.1.30 para o contexto das aplicações multilineares

**2.1.37** Sejam  $F_1, \dots, F_n, G$  espaços vetoriais normados. Notamos então  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$  o conjunto das aplicações multilineares contínuas  $\lambda: F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow G$ , conjunto que se constata imediatamente ser um subespaço vetorial do espaço de todas as aplicações de  $F_1 \times \dots \times F_n$  em  $G$ . No caso particular em que todos os espaços vetoriais normados  $F_j$  são iguais a um mesmo espaço  $F$ , usamos também a notação  $\mathcal{L}^n(F; G)$  em vez de  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$ .<sup>160</sup>

Tem-se então:

**a)** Para cada aplicação multilinear  $\lambda: F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow G$  contínua em  $(0, \dots, 0)$ , em particular para cada aplicação multilinear contínua, existe  $M \geq 0$  tal que, quaisquer que sejam os vetores  $y_j \in F_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,

<sup>160</sup>É por vezes cómodo definir  $\mathcal{L}^n(F; G)$  também para  $n = 0$ . Toma-se então, por convenção,  $\mathcal{L}^0(F; G) = \mathcal{L}(\ ; G)$  como sinónimo de  $G$ . Esta convenção é especialmente compreendida por quem tenha alguma sofisticação lógica, na medida em que  $F^0$  é naturalmente encarado como um conjunto com um único elemento  $*$  e todas as aplicações de  $\{*\}$  em  $G$  são multilineares, pelo que tudo o que há a fazer é identificar cada uma dessas aplicações com a imagem de  $*$  por ela.

$$\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| \leq M \|y_1\| \cdots \|y_n\|. \quad 161$$

**b)** Para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$ , de entre as constantes  $M \geq 0$  nas condições de a) existe uma mínima, que será notada  $\|\lambda\|$  e que é 0 no caso em que algum dos espaços  $F_j$  é  $\{0\}$  e, caso contrário, também pode ser caracterizado por

$$\|\lambda\| = \sup \left\{ \frac{\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\|}{\|y_1\| \cdots \|y_n\|} \right\}_{y_j \in F_j \setminus \{0\}}.$$

**c)** A aplicação  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$  que a  $\lambda$  associa  $\|\lambda\|$  é uma norma neste espaço, tendo-se, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$  em  $F_1 \times \cdots \times F_n$ ,

$$\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| \leq \|\lambda\| \|y_1\| \cdots \|y_n\|.$$

**Dem: a)** Como no caso bilinear, utilizando os sistemas fundamentais de vizinhanças constituídos pelas bolas fechadas, a continuidade de  $\lambda$  em  $(0, \dots, 0)$  permite-nos considerar números estritamente positivos  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  tais que sempre que para cada  $1 \leq j \leq n$  o vetor  $y_j \in E_j$  verifica

$$\|y_j\| = d(0, y_j) \leq \varepsilon_j$$

venha

$$\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| = d(\lambda(0, \dots, 0), \lambda(y_1, \dots, y_n)) \leq 1.$$

Podemos então deduzir que a desigualdade em a) se verifica com  $M = \frac{1}{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$  visto que ela é verificada, com qualquer  $M \geq 0$ , no caso em que algum dos  $y_j$  é 0 e, caso contrário, uma vez que cada  $\frac{\varepsilon_j y_j}{\|y_j\|}$  tem norma  $\varepsilon_j$ , vem

$$\|\lambda\left(\frac{\varepsilon_1 y_1}{\|y_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n y_n}{\|y_n\|}\right)\| \leq 1,$$

donde

$$\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| = \frac{\|y_1\|}{\varepsilon_1} \cdots \frac{\|y_n\|}{\varepsilon_n} \|\lambda\left(\frac{\varepsilon_1 y_1}{\|y_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon_n y_n}{\|y_n\|}\right)\| \leq M \|y_1\| \cdots \|y_n\|.$$

**b)** No caso em que algum dos  $F_j$  é  $\{0\}$  toda a aplicação multilinear é identicamente 0 e portanto a desigualdade em a) é verificada com  $M = \{0\}$ , que não pode deixar de ser o menor dos  $M \geq 0$  nessas condições. Supondo que todos os  $F_j$  são diferentes de  $\{0\}$ , uma vez que a desigualdade em a) é

<sup>161</sup>Trata-se de uma generalização de parte das conclusões de 2.1.15, no caso linear, e de 2.1.21, no caso bilinear. Veremos adiante, em 2.1.39, que, reciprocamente, tal como nos resultados referidos, a existência de uma constante  $M$  nestas condições implica a continuidade da aplicação multilinear, em particular, a continuidade duma aplicação multilinear em  $(0, \dots, 0)$  implica a sua continuidade em todos os pontos do domínio.

verificada para qualquer  $M \geq 0$  se algum dos  $y_j$  é 0, concluímos que, para um dado  $M \geq 0$ , a sua verificação com  $(y_1, \dots, y_n)$  arbitrários é equivalente à sua verificação para  $y_j \in E_j \setminus \{0\}$  arbitrários, ou seja, ao facto de se ter

$$\frac{\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\|}{\|y_1\| \cdots \|y_n\|} \leq M$$

para  $y_j \in E_j \setminus \{0\}$  arbitrários. A existência de um  $M \geq 0$  mínimo nestas condições fica então garantida como sendo o supremo do conjunto majorado não vazio dos quocientes no primeiro membro.

c) A desigualdade  $\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| \leq \|\lambda\| \|y_1\| \cdots \|y_n\|$  resulta do facto de  $\|\lambda\|$  ser um dos  $M \geq 0$  que verifica a desigualdade em a). Sejam agora  $\lambda$  e  $\mu$  em  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$  e  $c \in \mathbb{K}$ . Quaisquer que sejam os vetores  $y_j \in F_j$  vem então

$$\begin{aligned} \|(\lambda + \mu)(y_1, \dots, y_n)\| &= \|\lambda(y_1, \dots, y_n) + \mu(y_1, \dots, y_n)\| \leq \\ &\leq \|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| + \|\mu(y_1, \dots, y_n)\| \leq \\ &\leq \|\lambda\| \|y_1\| \cdots \|y_n\| + \|\mu\| \|y_1\| \cdots \|y_n\| \leq \\ &= (\|\lambda\| + \|\mu\|) \|y_1\| \cdots \|y_n\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|(c\lambda)(y_1, \dots, y_n)\| &= \|c\lambda(y_1, \dots, y_n)\| = |c| \|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| \leq \\ &\leq |c| \|\lambda\| \|y_1\| \cdots \|y_n\| \end{aligned}$$

o que implica respetivamente que  $\|\lambda + \mu\| \leq \|\lambda\| + \|\mu\|$  e  $\|c\lambda\| \leq |c| \|\lambda\|$ . Por outro lado, se  $\|\lambda\| = 0$  tem-se, quaisquer que sejam  $y_j \in F_j$ ,

$$\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| \leq \|\lambda\| \|y_1\| \cdots \|y_n\| = 0$$

donde  $\lambda(y_1, \dots, y_n) = 0$ , o que mostra que  $\lambda = 0$ . Tendo em conta 2.1.6, concluímos que temos efetivamente uma norma no espaço vetorial  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$ .  $\square$

**2.1.38 (Nota  $\mathbb{R}$ - $\mathbb{C}$ )** Tal como em 2.1.32, o resultado precedente é um daqueles em que pode ser útil considerar espaços vetoriais normados sobre corpos distintos: Nas condições anteriores, se  $F_1, \dots, F_n$  forem espaços vetoriais normados reais e  $G$  for um espaço vetorial normado complexo, então o espaço  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$  das aplicações multilineares (naturalmente no sentido real que é o único que faz sentido) é mesmo um espaço vetorial complexo, como resulta da demonstração feita anteriormente.

**2.1.39 (Condição de continuidade das aplicações multilineares)** Sejam  $F_1, \dots, F_n, G$  espaços vetoriais normados e  $\lambda: F_1 \times \cdots \times F_n \rightarrow G$  uma aplicação multilinear tal que, para uma certa constante  $M \geq 0$ , se tenha

$$\|\lambda(y_1, \dots, y_n)\| \leq M \|y_1\| \cdots \|y_n\|$$

quaisquer que sejam os  $y_j \in F_j$ . Tem-se então que a aplicação multilinear  $\lambda$  é

contínua e, naturalmente, verifica  $\|\lambda\| \leq M$ .<sup>162</sup>

**Dem:** Vamos fazer a demonstração por indução em  $n$ , começando por lembrar que os casos  $n = 1$  e  $n = 2$  já foram estabelecidos em 2.1.15 e 2.1.21 respetivamente. Suponhamos então que o resultado é verdadeiro para um certo  $n \geq 2$  e verifiquemo-lo no caso em que temos uma aplicação multilinear  $\lambda: F_1 \times \cdots \times F_n \times F_{n+1} \rightarrow G$  verificando

$$\|\lambda(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})\| \leq M\|y_1\| \cdots \|y_n\| \|y_{n+1}\|$$

quaisquer que sejam os  $y_j \in F_j$ . Para cada  $y_1 \in F_1, \dots, y_n \in F_n$ , podemos então considerar uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \lambda_{y_1, \dots, y_n}: F_{n+1} &\rightarrow G, \\ \lambda_{y_1, \dots, y_n}(y_{n+1}) &= \lambda(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) \end{aligned}$$

a qual, por 2.1.15, é contínua e com  $\|\lambda_{y_1, \dots, y_n}\| \leq M\|y_1\| \cdots \|y_n\|$ . Podemos agora definir uma aplicação multilinear  $\hat{\lambda}: F_1 \times \cdots \times F_n \rightarrow \mathcal{L}(F_{n+1}; G)$  por  $\hat{\lambda}(y_1, \dots, y_n) = \lambda_{y_1, \dots, y_n}$ , a qual verifica

$$\|\hat{\lambda}(y_1, \dots, y_n)\| \leq M\|y_1\| \cdots \|y_n\|$$

e portanto, tendo em conta a hipótese de indução, é contínua. Lembrando a continuidade da aplicação bilinear de avaliação  $\Phi: \mathcal{L}(F_{n+1}; G) \times F_{n+1} \rightarrow G$  (cf. 2.1.34), da igualdade

$$\lambda(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = \hat{\lambda}(y_1, \dots, y_n)(y_{n+1}) = \Phi(\hat{\lambda}(y_1, \dots, y_n), y_{n+1})$$

deduzimos que a aplicação multilinear  $\lambda: F_1 \times \cdots \times F_n \times F_{n+1} \rightarrow G$  é efetivamente contínua.  $\square$

**2.1.40** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados. Diz-se que um isomorfismo  $\lambda: E \rightarrow F$  é um *isomorfismo topológico* se  $\lambda$  é um homeomorfismo, isto é, se, tanto  $\lambda$  como o isomorfismo inverso  $\lambda^{-1}$ , são aplicações lineares contínuas. Um isomorfismo  $\lambda: E \rightarrow F$  é um isomorfismo topológico se, e só se, existirem constantes  $r > 0$  e  $R > 0$ , tais que, para cada  $x \in E$ ,

$$r\|x\| \leq \|\lambda(x)\| \leq R\|x\|.$$

**Dem:** Tendo em conta a caracterização das aplicações lineares contínuas na alínea c) de 2.1.15 e reparando que se a desigualdade referida nessa alínea é verificada para um dado valor de  $M$  é-o também para os valores de  $M$  maiores (podendo, em particular, considerar-se apenas valores de  $M$  estritamente positivos), tudo o que temos que notar é que a condição  $r\|x\| \leq \|\lambda(x)\|$  para todo o  $x$  é equivalente a

<sup>162</sup>Lembrar que já verificámos em 2.1.37 que quando a aplicação multilinear  $\lambda$  é contínua (mesmo que *a priori* só em  $(0, \dots, 0)$ ) existe uma constante  $M$  nestas condições.

$$\|\lambda^{-1}(\lambda(x))\| \leq \frac{1}{r} \|\lambda(x)\|,$$

para todo o  $x$  ou seja, a  $\|\lambda^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{r} \|y\|$  para todo o  $y$ . □

**2.1.41** Como caso particular dos isomorfismos topológicos, temos as *isometrias lineares* que são os isomorfismos  $\lambda: E \rightarrow F$  que são aplicações lineares isométricas, isto é, para os quais se tem  $\|\lambda(x)\| = \|x\|$ , qualquer que seja  $x \in E$ , e portanto  $\|\lambda\| \leq 1$  (cf. 2.1.33). Se  $\lambda: E \rightarrow F$  é uma isometria linear, o isomorfismo inverso  $\lambda^{-1}: F \rightarrow E$  é também uma isometria linear (cf. 1.4.8). Um isomorfismo topológico é uma isometria linear se, e só se,  $\|\lambda\| \leq 1$  e  $\|\lambda^{-1}\| \leq 1$ .

**Dem:** Se  $\lambda$  é uma isometria linear, já verificámos em 2.1.33 que  $\|\lambda\| \leq 1$  e, como  $\lambda^{-1}: F \rightarrow E$  também é uma isometria linear, vem também  $\|\lambda^{-1}\| \leq 1$ . Suponhamos, reciprocamente, que  $\lambda: E \rightarrow F$  é um isomorfismo topológico com  $\|\lambda\| \leq 1$  e  $\|\lambda^{-1}\| \leq 1$ . Para cada  $x \in E$  tem-se então

$$\begin{aligned} \|\lambda(x)\| &\leq \|\lambda\| \|x\| \leq \|x\|, \\ \|x\| &= \|\lambda^{-1}(\lambda(x))\| \leq \|\lambda^{-1}\| \|\lambda(x)\| \leq \|\lambda(x)\| \end{aligned}$$

donde  $\|\lambda(x)\| = \|x\|$  e temos uma isometria linear. □

Os dois isomorfismos topológicos que examinamos em seguida vão ser utilizados quando estudarmos o Cálculo Diferencial mais adiante.

**2.1.42** Suponhamos que  $F$  é um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Existe então uma isometria linear

$$\Upsilon: \mathcal{L}(\mathbb{K}; F) \rightarrow F, \quad \Upsilon(\lambda) = \lambda(1),$$

isometria cuja inversa  $\Upsilon^{-1}: F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$  está definida por

$$\Upsilon^{-1}(y)(s) = sy.$$

Mais geralmente, tem lugar, para cada inteiro  $n \geq 1$ , uma isometria linear

$$\Upsilon: \mathcal{L}^n(\mathbb{K}; F) \rightarrow F, \quad \Upsilon(\lambda) = \lambda(1, \dots, 1),$$

cujas inversas estão definidas por

$$\Upsilon^{-1}(y)(s_1, \dots, s_n) = s_1 \cdots s_n y.$$

**Dem:** Se  $\lambda \in \mathcal{L}^n(\mathbb{K}; F)$  tem-se

$$\|\Upsilon(\lambda)\| = \|\lambda(1, \dots, 1)\| \leq \|\lambda\| |1| \cdots |1| = \|\lambda\|$$

o que mostra que a aplicação linear  $\Upsilon: \mathcal{L}^n(\mathbb{K}; F) \rightarrow F$  é contínua e com  $\|\Upsilon\| \leq 1$ . Se  $y \in F$ , a aplicação  $\lambda_y: \mathbb{K}^n \rightarrow F$  definida por

$$\lambda_y(s_1, \dots, s_n) = s_1 \cdots s_n y$$

é multilinear e verifica

$$\|\lambda_y(s_1, \dots, s_n)\| = \|s_1 \cdots s_n y\| = |s_1 \cdots s_n| \|y\| = |s_1| \cdots |s_n| \|y\|,$$

o que implica que ela é contínua e com  $\|\lambda_y\| \leq \|y\|$ . Além disso, tem-se

$$\Upsilon(\lambda_y) = \lambda_y(1, \dots, 1) = y,$$

o que implica, em particular, que  $\Upsilon$  é sobrejetiva e, por outro lado, se  $\lambda \in \mathcal{L}^n(\mathbb{K}; F)$  verificar  $\Upsilon(\lambda) = y$ , tem-se

$$\lambda(s_1, \dots, s_n) = \lambda(s_1 1, \dots, s_n 1) = s_1 \cdots s_n \lambda(1, \dots, 1) = s_1 \cdots s_n y,$$

ou seja  $\lambda = \lambda_y$ , o que mostra que  $\Upsilon$  é injetiva, e portanto um isomorfismo. Vemos, por fim, que

$$\|\Upsilon^{-1}(y)\| = \|\lambda_y\| \leq \|y\|,$$

o que mostra que a aplicação linear  $\Upsilon^{-1}: F \rightarrow \mathcal{L}^n(\mathbb{K}; F)$  é também contínua e com  $\|\Upsilon^{-1}\| \leq 1$ .  $\square$

**2.1.43** Sejam  $E, E'$  e  $F$  espaços vetoriais normados. Existe então uma isometria linear

$$\Upsilon_1: \mathcal{L}(E, E'; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E'; F)), \quad \Upsilon_1(\lambda)(x)(x') = \lambda(x, x'),$$

o isomorfismo inverso estando evidentemente definido por

$$\Upsilon_1^{-1}(\mu)(x, x') = \mu(x)(x').$$

Mais geralmente, dados espaços vetoriais normados  $E_1, \dots, E_n, F$ , vai existir, para cada  $1 \leq j \leq n-1$ , uma isometria linear

$$\begin{aligned} \Upsilon_j: \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) &\rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_j; \mathcal{L}(E_{j+1}, \dots, E_n; F)), \\ \Upsilon_j(\lambda)(x_1, \dots, x_j)(x_{j+1}, \dots, x_n) &= \lambda(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \quad 163$$

cuja inversa

$$\Upsilon_j^{-1}: \mathcal{L}(E_1, \dots, E_j; \mathcal{L}(E_{j+1}, \dots, E_n; F)) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$$

está naturalmente definida por

$$\Upsilon_j^{-1}(\mu)(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = \mu(x_1, \dots, x_j)(x_{j+1}, \dots, x_n).$$

**Dem:** Dados  $\lambda \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ ,  $x_1 \in E_1, \dots, x_j \in E_j$ , obtemos uma aplicação multilinear  $\lambda_{x_1, \dots, x_j}: E_{j+1} \times \cdots \times E_n \rightarrow F$  definida por

---

<sup>163</sup>Quem tiver em conta o que se disse na nota 160, pode considerar que os isomorfismos  $\Upsilon_j$  estão também definidos para  $j=0$  e  $j=n$ , sendo para estes valores de  $j$  simplesmente a identidade.

$$\lambda_{x_1, \dots, x_j}(x_{j+1}, \dots, x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

para a qual se tem

$$\begin{aligned} \|\lambda_{x_1, \dots, x_j}(x_{j+1}, \dots, x_n)\| &= \|\lambda(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\| \leq \\ &\leq \|\lambda\| \|x_1\| \cdots \|x_n\|, \end{aligned}$$

pelo que constatamos que esta aplicação multilinear é contínua e com

$$\|\lambda_{x_1, \dots, x_j}\| \leq \|\lambda\| \|x_1\| \cdots \|x_j\|.$$

Resulta daqui que se obtém uma aplicação multilinear contínua

$$\widehat{\lambda}: E_1 \times \cdots \times E_j \rightarrow \mathcal{L}(E_{j+1}, \dots, E_n; F)$$

definida por  $\widehat{\lambda}(x_1, \dots, x_j) = \lambda_{x_1, \dots, x_j}$ , com  $\|\widehat{\lambda}\| \leq \|\lambda\|$  e daqui resulta que é contínua a aplicação linear

$$\Upsilon_j: \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_j; \mathcal{L}(E_{j+1}, \dots, E_n; F))$$

definida por  $\Upsilon_j(\lambda) = \widehat{\lambda}$  e com  $\|\Upsilon_j\| \leq 1$ . É trivial constatar que esta aplicação linear  $\Upsilon_j$  é precisamente a definida no enunciado.

Dado  $\mu \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_j; \mathcal{L}(E_{j+1}, \dots, E_n; F))$ , podemos considerar uma aplicação multilinear  $\tilde{\mu}: E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$  definida por

$$\tilde{\mu}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = \mu(x_1, \dots, x_j)(x_{j+1}, \dots, x_n),$$

para a qual se tem

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mu}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\| &= \|\mu(x_1, \dots, x_j)(x_{j+1}, \dots, x_n)\| \leq \\ &\leq \|\mu(x_1, \dots, x_j)\| \|x_{j+1}\| \cdots \|x_n\| \leq \\ &\leq \|\mu\| \|x_1\| \cdots \|x_j\| \|x_{j+1}\| \cdots \|x_n\| \end{aligned}$$

pelo que esta aplicação multilinear é contínua e com  $\|\tilde{\mu}\| \leq \|\mu\|$ . Podemos assim considerar uma aplicação linear contínua

$$\widehat{\Upsilon}_j: \mathcal{L}(E_1, \dots, E_j; \mathcal{L}(E_{j+1}, \dots, E_n; F)) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$$

definida por  $\widehat{\Upsilon}_j(\mu) = \tilde{\mu}$ , para a qual  $\|\widehat{\Upsilon}_j\| \leq 1$ . O facto de se ter trivialmente  $\widehat{\Upsilon}_j(\Upsilon_j(\lambda)) = \lambda$  e  $\Upsilon_j(\widehat{\Upsilon}_j(\mu)) = \mu$ , mostra que  $\Upsilon_j$  é um isomorfismo com  $\Upsilon_j^{-1} = \widehat{\Upsilon}_j$  e portanto  $\Upsilon_j$  é efetivamente uma isometria linear com inverso  $\Upsilon_j^{-1}$  definido pela fórmula no enunciado.  $\square$

**2.1.44 (Functorialidade)** Sejam os espaços vectoriais normados  $E_1, \dots, E_n, F, E'_1, \dots, E'_n, F'$  e as aplicações lineares contínuas  $\mu: F \rightarrow F'$  e, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,  $\lambda_j: E'_j \rightarrow E_j$ . Tem então lugar uma aplicação linear contínua

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu): \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathcal{L}(E'_1, \dots, E'_n; F'),$$



definida por

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu)(\xi) = \mu \circ \xi \circ (\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n),$$

cujas norma é menor ou igual a  $\|\mu\| \|\xi\| \|\lambda_1\| \dots \|\lambda_n\|$ .

No caso em todos os  $\lambda_j: E'_j \rightarrow E_j$  são iguais a um mesmo  $\lambda: E' \rightarrow E$ , a aplicação linear  $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu): \mathcal{L}^n(E; F) \rightarrow \mathcal{L}^n(E'; F')$  também será notada  $\mathcal{L}^n(\lambda; \mu)$ .

Note-se que no caso dos “escalares mistos” em que os  $\lambda_j: E'_j \rightarrow E_j$  são aplicações lineares contínuas entre espaços vetoriais normados reais e  $\mu: F \rightarrow F'$  é uma aplicação linear contínua complexa entre espaços vetoriais normados complexos,  $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu)$  é mesmo uma aplicação linear complexa.

**Dem:** É imediato constatar que se  $\xi \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$  então

$$\mu \circ \xi \circ (\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n): E'_1 \times \dots \times E'_n \rightarrow F'$$

é multilinear e a sua continuidade resulta de se ter, quaisquer que sejam  $x'_1 \in E'_1, \dots, x'_n \in E'_n$ ,

$$\begin{aligned} \|\mu \circ \xi \circ (\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n)(x'_1, \dots, x'_n)\| &= \\ &= \|\mu(\xi(\lambda_1(x'_1), \dots, \lambda_n(x'_n)))\| \leq \\ &\leq \|\mu\| \|\xi(\lambda_1(x'_1), \dots, \lambda_n(x'_n))\| \leq \\ &\leq \|\mu\| \|\xi\| \|\lambda_1(x'_1)\| \dots \|\lambda_n(x'_n)\| \leq \\ &\leq \|\mu\| \|\xi\| \|\lambda_1\| \dots \|\lambda_n\| \|x'_1\| \dots \|x'_n\|, \end{aligned}$$

desigualdade que implica também que

$$\|\mu \circ \xi \circ (\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n)\| \leq \|\mu\| \|\xi\| \|\lambda_1\| \dots \|\lambda_n\|.$$

Esta última desigualdade mostra que a aplicação

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu): \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathcal{L}(E'_1, \dots, E'_n; F')$$

definida no enunciado, que se constata imediatamente ser linear, é contínua e com norma menor ou igual a  $\|\mu\| \|\lambda_1\| \dots \|\lambda_n\|$ .  $\square$

**2.1.45 (Corolário)** Nas hipóteses de 2.1.44, se  $\mu: F \rightarrow F'$  for um isomorfismo topológico (respetivamente uma isometria linear) e cada  $\lambda_j: E'_j \rightarrow E_j$  for um isomorfismo topológico (respetivamente uma isometria linear) então a aplicação linear contínua

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu): \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathcal{L}(E'_1, \dots, E'_n; F')$$

é um isomorfismo topológico (respetivamente uma isometria linear), tendo como isomorfismo inverso

$$\mathcal{L}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}; \mu^{-1}): \mathcal{L}(E'_1, \dots, E'_n; F') \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F).$$

**Dem:** O facto de  $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu)$  ser um isomorfismo topológico resulta de

que se verifica facilmente que ele admite  $\mathcal{L}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}; \mu^{-1})$  como inverso bilateral. O facto de termos uma isometria linear, no caso em que  $\mu$  e os  $\lambda_j$  são isometrias lineares resulta da caracterização das isometrias lineares em 2.1.41.  $\square$

**2.1.46 (Corolário)** Dados espaços vectoriais  $E_1, \dots, E_n$  e  $F$  e dadas duas normas equivalentes  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|'$  sobre  $F$  e, para cada  $1 \leq j \leq n$ , duas normas equivalentes  $\|\cdot\|_j$  e  $\|\cdot\|'_j$  sobre  $E_j$ , então ficam equivalentes as normas sobre  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$  que se obtêm, por um lado, a partir das normas “sem linhas” e, por outro lado, a partir das normas “com linhas”.

**Dem:** Basta atender a que duas normas sobre um mesmo espaço vectorial são equivalentes se, e só se, a aplicação linear identidade for um isomorfismo topológico quando se considera uma das normas no domínio e a outra no codomínio.  $\square$

Descrevemos a seguir mais um método de obter espaços vectoriais normados a partir de outros dados.

**2.1.47 (A norma quociente)** Sejam  $E$  um espaço vectorial normado,  $G$  um espaço vectorial e  $\rho: E \rightarrow G$  uma aplicação linear sobrejetiva tal que o kernel

$$F = \ker(\rho) = \{x \in E \mid \rho(x) = 0\}$$

seja um subespaço vectorial fechado. Pode então definir-se uma norma em  $G$ , a que damos o nome de *norma quociente*, pondo, para cada  $z \in G$ ,

$$\|z\| = \inf_{\rho(x)=z} \|x\|,$$

e tem-se então que a aplicação linear  $\rho: E \rightarrow G$  é contínua, com  $\|\rho\| \leq 1$ .<sup>164</sup> Além disso, para cada  $z \in G$  e  $r > 1$ , existe  $x \in E$  com  $\rho(x) = z$  e  $\|x\| \leq r\|z\|$ , o que implica que  $\rho: E \rightarrow G$  é também aberta, em particular finalizante (cf. 1.11.1).

A norma  $\|z\|$  de  $z \in G$  admite ainda a seguinte caracterização alternativa: Se  $z = \rho(x_0)$ , então  $\|z\| = d(x_0, F)$ .

**Dem:** O facto de o elemento  $0 \in G$  verificar  $\|0\| = 0$  resulta de se ter  $0 = \rho(0)$ , onde  $0 \in E$  verifica  $\|0\| = 0$ . Por outro lado, se  $z \neq 0$  em  $G$ , vem  $z = \rho(x)$ , com  $x \in E$  e  $x \notin F$  pelo que, por  $F$  ser fechado, existe  $r > 0$  tal que  $B_r(x) \cap F = \emptyset$ , portanto, para cada  $x'$  com  $\rho(x') = z$ , o facto de ser  $\rho(x - x') = 0$ , donde  $x - x' \in F$  implica que  $x - x' \notin B_r(x)$ , donde

$$\|x'\| = \|(x - x') - x\| \geq r,$$

o que garante que  $\|z\| \geq r$ , em particular  $\|z\| > 0$ .

<sup>164</sup>De facto, afastado o caso trivial em que  $G = \{0\}$  e portanto  $\rho = 0$  e  $\|\rho\| = 0$ , pode-se verificar, como consequência do que enunciamos a seguir, que se tem mesmo  $\|\rho\| = 1$ . Propomos essa verificação no exercício 2.1.28 adiante.

Sejam  $z$  e  $w$  em  $G$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar  $x, y \in E$  com  $z = \rho(x)$ ,  $w = \rho(y)$ ,  $\|x\| < \|z\| + \frac{\delta}{2}$  e  $\|y\| < \|w\| + \frac{\delta}{2}$ , e tem-se então  $z + w = \rho(x + y)$ , donde

$$\|z + w\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| < \|z\| + \|w\| + \delta$$

e portanto, tendo em conta a arbitrariedade de  $\delta$ ,

$$\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$$

(senão obtínha-se um absurdo tomando  $\delta = \|z + w\| - (\|z\| + \|w\|)$ ).

Mostremos agora que, dados  $z \in G$  e  $a \in \mathbb{K}$ , tem-se  $\|az\| \leq |a|\|z\|$  o que, tendo em conta 2.1.6, provará que temos realmente uma norma em  $G$ . Tendo em conta a observação feita no início, podemos já supor  $a \neq 0$  e então reparamos que, para cada  $x$  tal que  $z = \rho(x)$ , tem-se  $az = \rho(ax)$ , donde

$$\frac{1}{|a|}\|az\| \leq \frac{1}{|a|}\|ax\| = \|x\|,$$

o que, pela definição do ínfimo como o maior dos minorantes, implica que se tem

$$\frac{1}{|a|}\|az\| \leq \|z\|,$$

ou seja, como queríamos,  $\|az\| \leq |a|\|z\|$ .

Reparemos agora que, para cada  $x \in E$ , vem  $\|\rho(x)\| \leq \|x\|$ . Concluimos daqui que a aplicação linear  $\rho: E \rightarrow G$  é contínua, e com  $\|\rho\| \leq 1$ .

Dado  $r > 1$ , para cada  $z \in G$ , existe  $x \in E$  com  $z = \rho(x)$  e  $\|x\| \leq r\|z\|$ , visto que, se  $z = 0$ , podemos tomar  $x = 0$  e, caso contrário, atendemos à definição de  $\|z\|$  como um ínfimo e ao facto de se ter  $\|z\| < r\|z\|$ . Tomando, para fixar ideias,  $r = 2$ , concluimos daqui que, para cada  $\varepsilon > 0$ , vem  $\rho(B_\varepsilon(0)) \supset B_{\varepsilon/2}(0)$ , e portanto também, para cada  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \rho(B_\varepsilon(x)) &= \rho(x + B_\varepsilon(0)) = \rho(x) + \rho(B_\varepsilon(0)) \supset \\ &\supset \rho(x) + B_{\varepsilon/2}(0) = B_{\varepsilon/2}(\rho(x)). \end{aligned}$$

Podemos então concluir que a aplicação linear sobrejectiva  $\rho: E \rightarrow G$  é aberta (e portanto finalizante, por 1.11.6), uma vez que, para cada aberto  $U$  de  $E$  e cada  $z \in \rho(U)$ , podemos escolher  $x \in U$  com  $z = \rho(x)$  e  $\varepsilon > 0$  com  $B_\varepsilon(x) \subset U$ , tendo-se então  $B_{\varepsilon/2}(z) \subset \rho(B_\varepsilon(x)) \subset \rho(U)$ , o que mostra que  $\rho(U)$  é aberto.

Quanto à caracterização alternativa de  $\|z\|$ , atendemos a que, sendo  $z = \rho(x_0)$ , tem-se  $z = \rho(x)$  se, e só se,  $x_0 - x \in F$ , isto é,  $x \in x_0 - F$  e portanto

$$\|z\| = \inf_{x \in x_0 - F} \|x\| = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\| = d(x_0, F). \quad \square$$

**2.1.48** Lembremos que, se  $E$  é um espaço vetorial e  $F \subset E$  é um subespaço vetorial, pode-se considerar em  $E$  uma relação de equivalência associada a  $F$ , definida por  $x \sim x'$  se, e só se,  $x' - x \in F$ , e que, notando  $[x]_F$  (ou, simplesmente, se não houver risco de confusão,  $[x]$ ) a classe de equivalência de  $x \in E$ , fica bem definida uma estrutura de espaço vetorial no conjunto  $E/F$  das classes de equivalência tal que, dados  $[x]_F$  e  $[y]_F$  e o escalar  $a$ ,

$$[x]_F + [y]_F = [x + y]_F, \quad a[x]_F = [ax]_F,$$

por outras palavras, pela condição de ficar linear a aplicação sobrejectiva  $\rho: E \rightarrow E/F$ , definida por  $\rho(x) = [x]_F$ . Dizemos então que  $E/F$  é o *espaço vetorial quociente* e que  $\rho$  é a *aplicação linear canónica*.

Uma vez que  $F$  é o kernel da aplicação linear  $\rho$ , vemos que, no caso em que  $E$  é um espaço vetorial normado e  $F$  é um subespaço vetorial fechado, fica definida uma norma quociente no espaço vetorial quociente  $E/F$ , a qual admite as caracterizações

$$\|[x_0]_F\| = \inf_{[x]_F=[x_0]_F} \|x\| = d(x_0, F).$$

**2.1.49 (Aplicações lineares definidas num quociente)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $G$  um espaço vetorial e  $\rho: E \rightarrow G$  uma aplicação linear cujo kernel  $F = \{x \in E \mid \rho(x) = 0\}$  seja um subespaço vetorial fechado e consideremos sobre  $G$  a norma quociente. Dado um espaço vetorial normado  $H$ , tem então lugar uma aplicação linear isométrica, em particular injetiva,

$$\rho^* = \mathcal{L}(\rho; Id_G): \mathcal{L}(G; H) \rightarrow \mathcal{L}(E; H)$$

(cf. 2.1.44), que aplica portanto cada  $\hat{\lambda} \in \mathcal{L}(G; H)$  na aplicação linear  $\lambda \in \mathcal{L}(E; H)$  definida por  $\lambda(x) = \hat{\lambda}(\rho(x))$ . A imagem da aplicação linear isométrica  $\rho^*$  é um subespaço vetorial fechado de  $\mathcal{L}(E; H)$ , a saber o consituído pelas aplicações lineares  $\lambda: E \rightarrow H$  tais que  $\lambda|_F = 0$ .

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em duas partes:

**a)** Começemos por mostrar que a aplicação linear  $\rho^*$  é isométrica, isto é, que se tem  $\|\lambda\| = \|\hat{\lambda}\|$  para cada  $\hat{\lambda} \in \mathcal{L}(E/F; G)$ .

**Subdem:** Tendo em conta 2.1.44, a aplicação linear  $\rho^*$  é contínua e com norma menor ou igual a  $\|\rho\| \leq 1$ . Já sabemos assim que se tem  $\|\lambda\| = \|\rho^*(\hat{\lambda})\| \leq \|\hat{\lambda}\|$ . Vamos supor, por absurdo, que se tinha  $\|\lambda\| < \|\hat{\lambda}\|$ , condição que implica que  $G \neq \{0\}$  e que existe  $z = \rho(x)$  não nulo em  $G$  tal que

$$\|\lambda\| < \frac{\|\hat{\lambda}(z)\|}{\|z\|} = \frac{\|\lambda(x)\|}{\|z\|},$$

condição que também pode ser escrita na forma  $\|\lambda\|\|z\| < \|\lambda(x)\|$ . Tendo em conta a definição de  $\|z\|$  como um ínfimo, podemos considerar  $x' \in E$  com  $\rho(x') = z = \rho(x)$  e

$$(1) \quad \|\lambda\| \|x'\| < \|\lambda(x)\|,$$

visto que se  $\|\lambda\| = 0$  podemos tomar  $x' = x$  e, caso contrário, sabemos que

$$\|z\| < \frac{\|\lambda(x)\|}{\|\lambda\|}$$

e a condição pretendida equivale a

$$\|x'\| < \frac{\|\lambda(x)\|}{\|\lambda\|}.$$

Vem então

$$\|\lambda(x)\| = \|\widehat{\lambda}(\rho(x))\| = \|\widehat{\lambda}(\rho(x'))\| = \|\lambda(x')\| \leq \|\lambda\| \|x'\|,$$

o que é absurdo por contradizer a desigualdade (1).

**b)** Vamos agora verificar que a imagem da aplicação linear  $\rho^*$  é a descrita no enunciado e é um subespaço vetorial fechado de  $\mathcal{L}(E; H)$ .

**Subdem:** Começemos por supor que  $\lambda \in \mathcal{L}(E; H)$  pertence à imagem de  $\rho^*$ , portanto que  $\lambda = \rho^*(\widehat{\lambda})$  para um certo  $\widehat{\lambda} \in \mathcal{L}(G; H)$ . Para cada  $x \in F$  tem-se então  $\rho(x) = 0$  e portanto

$$\lambda(x) = \widehat{\lambda}(\rho(x)) = \widehat{\lambda}(0) = 0.$$

Suponhamos, reciprocamente, que  $\lambda \in \mathcal{L}(E; H)$  verifica  $\lambda|_F = 0$ . Se  $x, x' \in E$  são tais que  $\rho(x) = \rho(x')$ , tem-se  $x - x' \in F$  donde

$$\lambda(x) - \lambda(x') = \lambda(x - x') = 0,$$

ou seja,  $\lambda(x) = \lambda(x')$ . Fica assim bem definida uma aplicação  $\widehat{\lambda}: G \rightarrow H$  pela condição de se ter  $\widehat{\lambda}(\rho(x)) = \lambda(x)$ , aplicação essa que se verifica facilmente ser linear. Uma vez que  $\widehat{\lambda} \circ \rho = \lambda: G \rightarrow H$  é contínua e que  $\rho$  é uma aplicação finalizante (cf. 2.1.47), concluímos que  $\widehat{\lambda} \in \mathcal{L}(G; H)$ , tendo-se então que  $\lambda = \rho^*(\widehat{\lambda})$  pertence à imagem de  $\rho^*$ . Por fim, o facto de esta imagem ser um subespaço vetorial fechado resulta de que se trata da interseção, para  $x \in F$ , dos subespaços vetoriais

$$\mathcal{L}_x(E; H) = \{\lambda \in \mathcal{L}(E; H) \mid \lambda(x) = 0\}$$

subespaços esses que são fechados por serem as imagem recíprocas de  $\{0\} \subset H$  pelas aplicações lineares contínuas  $\mathcal{L}(E; H) \rightarrow H$  definidas por  $\lambda \mapsto \lambda(x)$  (cf. 2.1.34).  $\square$

Examinamos em seguida algumas propriedades cuja validade depende de alguns dos espaços vetoriais envolvidos terem dimensão finita.

**2.1.50 (Lema)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado real e consideremos em  $\mathbb{R}^n$ , onde  $n \geq 1$ , a norma do máximo  $\|\cdot\|_\infty$ . Tem-se então:

**a)** Qualquer aplicação linear  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  é contínua.

**b)** Qualquer isomorfismo  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  é um isomorfismo topológico.

**Dem:** **a)** Notando  $e_1, \dots, e_n$  os elementos da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , seja  $M \geq 0$ ,

$$M = \|\lambda(e_1)\| + \dots + \|\lambda(e_n)\|.$$

Para cada  $x = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tem-se então

$$\begin{aligned} \|\lambda(x)\| &= \|\lambda(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n)\| = \\ &= \|a_1 \lambda(e_1) + \dots + a_n \lambda(e_n)\| \leq \\ \text{(1)} \quad &\leq |a_1| \|\lambda(e_1)\| + \dots + |a_n| \|\lambda(e_n)\| \leq \\ &\leq \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\} (\|\lambda(e_1)\| + \dots + \|\lambda(e_n)\|) \\ &= M \|x\|_\infty, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade da aplicação linear  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ .

**b)** Uma vez que a topologia usual de  $\mathbb{R}^n$  é a associada à norma do máximo  $\|\cdot\|_\infty$  e que, em consequência, é contínua a aplicação  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|_\infty$ , podemos considerar o subconjunto fechado e limitado  $A \subset \mathbb{R}^n$  constituído pelos vetores  $x \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\|x\|_\infty = 1$ , conjunto esse que é compacto, por 1.6.33, e é não vazio, por conter, por exemplo os elementos  $e_j$  da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Uma vez que  $0 \notin A$ , e portanto  $\lambda(x) \neq 0$  para cada  $x \in A$ , a continuidade da norma de  $E$  como aplicação  $E \rightarrow \mathbb{R}$  (cf. 2.1.5) e a continuidade de  $\lambda$ , provada em a), permite-nos considerar uma aplicação contínua  $A \rightarrow ]0, +\infty[$  que a  $x \in A$  associa  $\|\lambda(x)\|$  a qual, pelo teorema de Weierstrass 1.6.26, vai atingir um valor mínimo  $r > 0$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  tem-se então

$$\text{(2)} \quad \|\lambda(x)\| \geq r \|x\|_\infty$$

visto que esta desigualdade é trivial se  $x = 0$  e, caso contrário, pode-se escrever  $x = \|x\|_\infty \frac{x}{\|x\|_\infty}$  onde  $\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\|_\infty = 1$ , isto é  $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in A$ , portanto

$$\frac{1}{\|x\|_\infty} \|\lambda(x)\| = \left\| \frac{1}{\|x\|_\infty} \lambda(x) \right\| = \left\| \lambda\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \right\| \geq r,$$

condição que implica (2). Tendo em conta 2.1.40, as desigualdade (1) e (2) implicam que o isomorfismo  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  é um isomorfismo topológico.  $\square$

**2.1.51 (Continuidade das aplicações lineares quando o domínio tem dimensão finita)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados, reais ou complexos, o primeiro dos quais de dimensão finita. Tem-se então que toda a aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow F$  é contínua.

**Dem:** Começemos por notar que o resultado é trivial no caso em que  $E = \{0\}$ , caso em que  $\lambda = 0$  é contínua por ser constante. Lembremos também que todo o espaço vetorial normado complexo é também

trivialmente um espaço vetorial normado real, o qual tem dimensão finita  $2n$  quando, como espaço vetorial complexo, tiver dimensão finita  $n$ , e que toda a aplicação linear complexa é, em particular, uma aplicação linear real. Por esse motivo, basta examinar o caso em que temos espaços vetoriais reais e notar  $n \geq 1$  a dimensão de  $E$ . Sendo  $w_1, \dots, w_n$  uma base de  $E$ , podemos considerar o isomorfismo  $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ , definido por

$$\xi(a_1, \dots, a_n) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n,$$

isomorfismo que, pelo lema 2.1.50 é um isomorfismo topológico. Pelo mesmo lema, a aplicação linear  $\lambda \circ \xi: \mathbb{R}^n \rightarrow F$  é contínua e o facto de se ter

$$\lambda = (\lambda \circ \xi) \circ \xi^{-1},$$

com  $\lambda \circ \xi: \mathbb{R}^n \rightarrow F$  e  $\xi^{-1}: E \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplicações contínuas, implica que a aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow F$  é contínua.  $\square$

**2.1.52 (Corolário)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados de dimensão finita, reais ou complexos, e  $\lambda: E \rightarrow F$  um isomorfismo. Tem-se então que  $\lambda$  é mesmo um isomorfismo topológico.

**Dem:** Basta atender a que, pelo resultado precedente, as aplicações lineares  $\lambda: E \rightarrow F$  e  $\lambda^{-1}: F \rightarrow E$  são ambas contínuas.  $\square$

**2.1.53 (Generalização para as aplicações multilineares)** Sejam  $E_1, \dots, E_n$  espaços vetoriais de dimensão finita e  $F$  um espaço vetorial normado. Tem-se então que qualquer aplicação multilinear  $\xi: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  é contínua.

**Dem:** Vamos fazer a demonstração por indução em  $n$ . O caso em que  $n = 1$  é simplesmente a conclusão de 2.1.51. Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo  $n$  e seja  $\xi: E_1 \times \dots \times E_n \times E_{n+1} \rightarrow F$  uma aplicação multilinear. Para  $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$  fixados, podemos considerar uma aplicação linear  $\xi_{x_1, \dots, x_n}: E_{n+1} \rightarrow F$  definida por

$$\xi_{x_1, \dots, x_n}(x_{n+1}) = \xi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

a qual é contínua, por 2.1.51, portanto um elemento do espaço vetorial  $\mathcal{L}(E_{n+1}; F)$  sobre o qual consideramos a norma associada (cf. 2.1.30). Podemos agora considerar uma aplicação multilinear

$$\widehat{\xi}: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow \mathcal{L}(E_{n+1}; F), \quad \widehat{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \xi_{x_1, \dots, x_n},$$

a qual é contínua, pela hipótese de indução. Considerando a aplicação bilinear contínua de avaliação  $\Phi: \mathcal{L}(E_{n+1}; F) \times E_{n+1} \rightarrow F$  (cf. 2.1.34) a igualdade

$$\xi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \widehat{\xi}(x_1, \dots, x_n)(x_{n+1}) = \Phi(\widehat{\xi}(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$$

permite-nos concluir a continuidade da aplicação multilinear  $\xi$ .  $\square$

**2.1.54 (Normas num espaço de dimensão finita)** Sejam  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|'$  duas normas no espaço vetorial, real ou complexo, de dimensão finita  $E$ . Estas normas são então equivalentes.

**Dem:** Tendo em conta 2.1.51, a aplicação linear identidade  $E \rightarrow E$  é contínua tanto da norma  $\|\cdot\|$  para a norma  $\|\cdot\|'$  como da norma  $\|\cdot\|'$  para a norma  $\|\cdot\|$  e este facto implica a equivalência das duas normas (cf. 1.4.11).  $\square$

**2.1.55 (A topologia natural dum espaço vetorial de dimensão finita)** Seja  $E$  um espaço vetorial, real ou complexo, de dimensão finita. Tem-se então que existe em  $E$  pelo menos uma norma  $\|\cdot\|$ . Uma vez que todas as normas de  $E$  são equivalentes, fica então bem definida uma topologia em  $E$ , a que damos o nome da *topologia natural*, pela condição de ser a associada a qualquer das normas que se considere.

**Dem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $E = \{0\}$ , caso em que a aplicação nula  $\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma norma em  $E$ . Sendo  $\mathbb{K}$  o corpo dos escalares de  $E$ , consideremos em uma base  $w_1, \dots, w_n$  de  $E$  e seja  $\xi: \mathbb{K}^n \rightarrow E$  o isomorfismo associado à base, definido por

$$\xi(a_1, \dots, a_n) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n.$$

Considerando em  $\mathbb{K}^n$  a norma do máximo  $\|\cdot\|_\infty$ , definida por

$$\|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$$

(cf. 2.1.11) obtemos então uma norma  $\|\cdot\|$  em  $E$  definida por “transporte”, isto é, por

$$\|x\| = \|\xi^{-1}(x)\|_\infty$$

(não explicitamos a verificação de que temos assim definida uma norma em  $E$  por esta ser trivialmente previsível e um caso particular das observações sobre transporte de estruturas por meio de uma bijeção feitas na secção 1.4 a partir da nota que antecede 1.4.34).  $\square$

**2.1.56 (O espaço  $\mathcal{L}(E; F)$  quando  $E$  tem dimensão finita)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o primeiro dos quais de dimensão finita  $n$ . Tem-se então:

**a)** Se  $n \geq 1$  e  $w_1, \dots, w_n$  uma base de  $E$  então, considerando em  $F^n = F \times \dots \times F$  qualquer das normas que define a topologia produto, por exemplo a norma do máximo, tem lugar um isomorfismo topológico

$$\Theta: \mathcal{L}(E; F) \rightarrow F^n, \quad \Theta(\lambda) = (\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_n)).$$

**b)** Sendo  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ ,  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação e  $\lambda_0 \in \mathcal{L}(E; F)$ , tem-se que  $f$  tem limite  $\lambda_0$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, qualquer que seja  $u \in E$ , a aplicação  $f_u: A \rightarrow F$  definida por  $f_u(x) = f(x)(u)$  tem limite  $\lambda_0(u)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**c)** Em particular, se  $X$  é um espaço topológico,  $x_0 \in X$  e  $f: X \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é uma aplicação então  $f$  é contínua em  $x_0$  se, e só se, para cada  $u \in E$  for



contínua em  $x_0$  a aplicação  $f_u: A \rightarrow F$  definida por  $f_u(x) = f(x)(u)$ .<sup>165</sup>

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias alíneas.

1) Note-se que a conclusão de c) resulta diretamente da de b), tendo em conta a caracterização da continuidade de uma aplicação num ponto em termos de limites. Vamos assim debruçar-nos apenas sobre as conclusões de a) e b), podendo, no caso de b), afastar já o caso trivial em que  $n = 0$ , caso em que tanto  $f$  como cada  $f_u$  são as aplicações de valor constante 0.

2) Notemos que, tendo em conta a continuidade da aplicação de avaliação (cf. 2.1.34), podemos concluir que para cada  $u \in E$  é contínua a aplicação linear  $\mathcal{L}(E; F) \rightarrow F$  que a  $\lambda$  associa  $\lambda(u)$ .

3) Decorre de 2) que  $\Theta: \mathcal{L}(E; F) \rightarrow F^n$ , que é trivialmente linear, é contínua por isso acontecer cada uma das suas coordenadas  $\mathcal{L}(E; F) \rightarrow F$ .

4) Decorre também de 2) que se a aplicação  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  tiver limite  $\lambda_0$  quando  $x \rightarrow x_0$  então para cada  $u \in E$  a aplicação  $f_u: A \rightarrow F$  tem limite  $\lambda_0(u)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

5) Reparamos agora que, tendo em conta o facto de qualquer aplicação linear  $E \rightarrow F$  ser contínua (cf. 2.1.51) e o de uma aplicação linear  $E \rightarrow F$  ficar determinada se se fixarem arbitrariamente os  $n$  valores que ela deve tomar nos elementos  $w_j$  da base, concluímos que  $\Theta: \mathcal{L}(E; F) \rightarrow F^n$  é um isomorfismo.

6) Reparemos agora que têm lugar aplicações lineares  $\alpha_j: E \rightarrow \mathbb{K}$ , onde  $1 \leq j \leq n$ , necessariamente contínuas por 2.1.51, que a cada  $u \in E$  associam as suas coordenadas na base  $w_1, \dots, w_n$ , por outras palavras, definidas pela condição de se ter para cada  $u \in E$

$$u = \alpha_1(u)w_1 + \dots + \alpha_n(u)w_n.$$

7) O que dissémos em 6) permite-nos obter uma caracterização do isomorfismo inverso  $\Theta^{-1}: F^n \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ . Com efeito, sendo  $\Theta^{-1}(v_1, \dots, v_n) = \lambda$ , vem, para cada  $u \in E$ ,

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= \lambda(\alpha_1(u)w_1 + \dots + \alpha_n(u)w_n) = \alpha_1(u)\lambda(w_1) + \dots + \alpha_n(u)\lambda(w_n) = \\ &= \alpha_1(u)v_1 + \dots + \alpha_n(u)v_n, \end{aligned}$$

o que pode ser escrito na forma

$$\Theta^{-1}(v_1, \dots, v_n)(u) = \alpha_1(u)v_1 + \dots + \alpha_n(u)v_n.$$

Esta igualdade implica, tendo em conta a propriedade da “multiplicação alternativa” referida na alínea c) de 2.1.31 e a continuidade da soma de aplicações contínuas, que o isomorfismo  $\Theta^{-1}: F^n \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  também é contínuo, o que termina a justificação de a).

8) Vamos justificar, por fim, a parte de b) que ainda não examinámos,

<sup>165</sup>Note-se que, como a demonstração a seguir mostra, para uma das implicações tanto em b) como em c) é desnecessária a hipótese de  $E$  ter dimensão finita. Não explicitámos esse facto no enunciado para não o tornar mais pesado.

nomeadamente o facto de se  $\lambda_0 \in \mathcal{L}(E; F)$  for tal que para cada  $u \in E$

$$f_u(x) = f(x)(u) \rightarrow \lambda_0(u)$$

quando  $x \rightarrow x_0$  ter-se necessariamente  $f(x) \rightarrow \lambda_0$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Ora, isso resulta da continuidade de  $\Theta^{-1}: F^n \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ , estabelecida em 7), uma vez que a igualdade

$$\Theta(f(x)) = (f_{w_1}(x), \dots, f_{w_n}(x))$$

implica que

$$f(x) = \Theta^{-1}(f_{w_1}(x), \dots, f_{w_n}(x))$$

e que se tem

$$\lambda_0 = \Theta^{-1}(\lambda_0(w_1), \dots, \lambda_0(w_n)). \quad \square$$

**2.1.57 (Generalização multilinear)** Sejam  $p \geq 1$ ,  $E_1, \dots, E_p$  espaços vectoriais normados de dimensão finita sobre  $\mathbb{K}$  e  $F$  um espaço vectorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . Tem-se então:<sup>166</sup>

**b)** Sendo  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$ ,  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$  uma aplicação e  $\lambda_0 \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$ , tem-se que  $f$  tem limite  $\lambda_0$  quando  $x \rightarrow x_0$  se, e só se, quaisquer que sejam  $u_1 \in E_1, \dots, u_p \in E_p$ , a aplicação

$$f_{u_1, \dots, u_p}: A \rightarrow F, \quad f_{u_1, \dots, u_p}(x) = f(x)(u_1, \dots, u_p),$$

tiver limite  $\lambda_0(u_1, \dots, u_p)$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

**c)** Se  $X$  é um espaço topológico,  $x_0 \in X$  e  $f: X \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$  é uma aplicação então  $f$  é contínua em  $x_0$  se, e só se, quaisquer que sejam  $u_1 \in E_1, \dots, u_p \in E_p$ , a aplicação

$$f_{u_1, \dots, u_p}: A \rightarrow F, \quad f_{u_1, \dots, u_p}(x) = f(x)(u_1, \dots, u_p),$$

for contínua em  $x_0$ .<sup>167</sup>

**Dem:** Como no resultado precedente, a conclusão de c) resulta diretamente da de b), tendo em conta a caracterização da continuidade de uma aplicação num ponto em termos de limites. Ficamos assim reduzidos a provar o enunciado de b). Uma vez que quaisquer que sejam  $u_1 \in E_1, \dots, u_p \in E_p$  tem lugar uma aplicação linear

<sup>166</sup>Repare-se que nomeamos as alíneas b) e c), omitindo a), para sublinhar o paralelismo com as correspondentes alíneas no resultado precedente, já que evitámos o enunciado correspondente a a), que pode ser dispensado e seria mais longo de explicitar.

<sup>167</sup>Note-se que, como a demonstração a seguir mostra, para uma das implicações tanto em b) como em c) é desnecessária a hipótese de os  $E_j$  terem dimensão finita. Não explicitámos esse facto no enunciado para não o tornar mais pesado.

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F) \rightarrow F, \quad \lambda \mapsto \lambda(u_1, \dots, u_p),$$

a qual é contínua tendo em conta a desigualdade

$$\|\lambda(u_1, \dots, u_p)\| \leq \|u_1\| \cdots \|u_p\| \|\lambda\|,$$

e uma vez que  $f_{u_1, \dots, u_p}: A \rightarrow F$  é a composta desta aplicação linear com  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$ , concluímos que se  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$  tiver limite  $\lambda_0$  quando  $x \rightarrow x_0$  então cada  $f_{u_1, \dots, u_p}: A \rightarrow F$  tem limite  $\lambda_0(u_1, \dots, u_p)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Resta-nos assim provar a recíproca, o que será feito por indução em  $p$ . O caso em que  $p = 1$  é simplesmente o que se verificou em 2.1.56. Suponhamos então que a afirmação é verdadeira para um certo  $p$  e consideremos uma aplicação

$$f: A \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p, E_{p+1}; F)$$

tal que quaisquer que sejam  $u_1 \in E_1, \dots, u_p \in E_p, u_{p+1} \in E_{p+1}$  a aplicação

$$f_{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}}: A \rightarrow F$$

tenha limite  $\lambda_0(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Por composição com a isometria linear, em particular isomorfismo topológico,

$$\Upsilon_p: \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p, E_{p+1}; F) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; \mathcal{L}(E_{p+1}; F))$$

referido em 2.1.43, obtemos uma aplicação

$$\Upsilon_p \circ f: A \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; \mathcal{L}(E_{p+1}; F))$$

que pela hipótese de indução e por 2.1.56 vai ter limite  $\Upsilon_p(\lambda_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$  já que quaisquer que sejam  $u_1 \in E_1, \dots, u_p \in E_p$  a aplicação

$$(\Upsilon_p \circ f)_{u_1, \dots, u_p}: A \rightarrow \mathcal{L}(E_{p+1}; F)$$

tem limite  $\Upsilon_p(\lambda_0)(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{L}(E_{p+1}; F)$  quando  $x \rightarrow x_0$ , isto porque para cada  $u_{p+1} \in E_{p+1}$  a aplicação

$$((\Upsilon_p \circ f)_{u_1, \dots, u_p})_{u_{p+1}}: A \rightarrow F,$$

que não é mais do que  $f_{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}}$  tem, por hipótese, limite

$$\lambda_0(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}) = \Upsilon_p(\lambda_0)(u_1, \dots, u_p)(u_{p+1})$$

quando  $x \rightarrow x_0$ . A continuidade de  $\Upsilon_p^{-1}$  implica que  $f = \Upsilon_p^{-1} \circ (\Upsilon_p \circ f)$  tem limite  $\Upsilon_p^{-1}(\Upsilon_p(\lambda_0)) = \lambda_0$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**2.1.58 (Compactos num espaço vetorial de dimensão finita)** Suponhamos que  $E$  é um espaço vetorial de dimensão finita, real ou complexo. Quando não explicitarmos qual a topologia que se considera em  $E$  estará subentendido que se trata da sua topologia natural, portanto a associada a qualquer das suas

normas. Analogamente, quando nos referirmos a um subconjunto  $A \subset E$  como sendo limitado, estamos a considerar que o é relativamente a qualquer das suas normas, o que faz sentido uma vez que todas estas são equivalentes, e portanto com métricas associadas Lipschitz-equivalentes (cf. 2.1.16), o que implica que os conjuntos limitados relativamente a cada uma delas são os mesmos (cf. 1.1.35).

No contexto das observações precedentes podemos afirmar que, tal como já conhecíamos no contexto de  $\mathbb{R}^n$  com a norma do máximo, um subconjunto  $A \subset E$  é compacto se, e só se, for fechado e limitado.

**Dem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $E = \{0\}$ , caso em que os dois subconjuntos existentes,  $\emptyset$  e  $E$  são ambos fechados, limitados e compactos. Podemos também considerar que  $E$  é um espaço vetorial real, visto que um espaço vetorial complexo de dimensão finita  $n$  é um espaço vetorial real de dimensão  $2n$  e uma norma no sentido complexo é também norma no sentido real, o que implica que as topologias naturais e os conjuntos limitados são os mesmos quando nos situamos no contexto complexo ou no real. Já sabemos, em geral, que um conjunto compacto é sempre fechado e limitado (cf. a alínea b) de 1.6.21 e 1.6.27). Reciprocamente, seja  $n$  a dimensão real de  $E$  e suponhamos que  $A \subset E$  é fechado e limitado. Podemos então considerar o isomorfismo  $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  associado a uma base de  $E$  e então a continuidade de  $\xi$  implica que  $\xi^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$  é fechado e a de  $\xi^{-1}$  implica que  $\xi^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$  é limitado (cf. 2.1.15 e 1.4.5) o que implica que  $\xi^{-1}(A)$  é compacto (cf. 1.6.33) e da continuidade de  $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow E$  concluímos finalmente que  $A = \xi(\xi^{-1}(A))$  é compacto.

Vamos agora examinar um resultado importante, de natureza muito menos elementar que os que encontramos até agora, envolvendo a possibilidade de prolongar convenientemente ao espaço todo aplicações lineares contínuas, definidas num subespaço vetorial e com valores no corpo dos escalares (o teorema de Hahn-Banach). A demonstração desse resultado, examinado primeiro no caso dos escalares reais, utiliza um resultado profundo da teoria dos conjuntos, o teorema de Zorn, que já utilizámos para demonstrar o teorema de Tichonoff em 1.6.34 e cujo conteúdo foi explicado na nota que precedeu o teorema referido. O teorema de Zorn foi também utilizado num dos exercícios da secção 1.6 com o objetivo de construir ultrafiltros não principais (cf. a alínea p) do exercício 1.6.33).

**2.1.59 (Teorema de Hahn-Banach real)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado real,  $E_0 \subset E$  um subespaço vetorial e  $\lambda_0: E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear contínua. Existe então uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\|\lambda\| = \|\lambda_0\|$  e  $\lambda|_{E_0} = \lambda_0$ .

**Dem:** Consideremos a classe  $\mathcal{C}$  dos pares  $(F, \mu)$ , onde  $F$  é um subespaço vetorial de  $E$  com  $E_0 \subset F$  e  $\mu: F \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação linear com  $\mu|_{E_0} = \lambda_0$  tal que para cada  $x \in F$  se tenha  $|\mu(x)| \leq \|\lambda_0\| \|x\|$ . Trata-se de uma classe não vazia, por conter  $(E_0, \lambda_0)$ , e podemos considerar em  $\mathcal{C}$  uma

ordem parcial definida por  $(F, \mu) \preceq (F', \mu')$  se, e só se,  $F \subset F'$  e  $\mu = \mu'|_F$ . Dada uma cadeia não vazia de elementos  $(F_j, \mu_j)$  de  $\mathcal{C}$  (uma parte não vazia totalmente ordenada de  $\mathcal{C}$ , que, por comodidade de escrita, apresentamos como família), verifica-se facilmente que ela admite um majorante em  $\mathcal{C}$ , nomeadamente o par  $(F, \mu)$ , onde  $F$  é a união dos  $F_j$  e  $\mu$  é a aplicação que restrita a cada  $F_j$  é  $\mu_j$ .<sup>168</sup> Pelo teorema de Zorn, podemos assim considerar um elemento maximal  $(E_1, \lambda_1)$  de  $\mathcal{C}$ . Em particular, tem-se, para cada  $x \in E_1$ ,  $|\lambda_1(x)| \leq \|\lambda_0\| \|x\|$ .

Vamos agora verificar que  $E_1 = E$ , supondo, por absurdo, que se tinha  $E_1 \neq E$ .

Escolhamos um vetor  $z \in E$ , com  $z \notin E_1$ . Tem-se então  $E_1 \cap \mathbb{R}z = \{0\}$ , pelo que podemos considerar a soma direta  $E_2 = E_1 \oplus \mathbb{R}z$ , que contém estritamente  $E_1$ .

Quaisquer que sejam  $x, y \in E_1$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) - \lambda_1(y) &\leq |\lambda_1(x) - \lambda_1(y)| = |\lambda_1(x - y)| \leq \|\lambda_0\| \|x - y\| = \\ &= \|\lambda_0\| \|(x + z) - (y + z)\| \leq \|\lambda_0\| \|x + z\| + \|\lambda_0\| \|y + z\|, \end{aligned}$$

donde

$$-\lambda_1(y) - \|\lambda_0\| \|y + z\| \leq -\lambda_1(x) + \|\lambda_0\| \|x + z\|.$$

A desigualdade anterior implica que o conjunto dos reais

$$-\lambda_1(x) + \|\lambda_0\| \|x + z\|$$

com  $x \in E_1$ , é minorado e podemos assim considerar o ínfimo  $a$  daquele conjunto, tendo-se então, quaisquer que sejam  $x, y \in E_1$ ,

$$-\lambda_1(y) - \|\lambda_0\| \|y + z\| \leq a \leq -\lambda_1(x) + \|\lambda_0\| \|x + z\|,$$

portanto também, para todo o  $x \in E_1$ , considerando  $y = x$ ,

$$-\|\lambda_0\| \|x + z\| \leq \lambda_1(x) + a \leq \|\lambda_0\| \|x + z\|,$$

ou seja,

$$|\lambda_1(x) + a| \leq \|\lambda_0\| \|x + z\|.$$

Uma vez que todo o elemento de  $E_2$  se escreve de maneira única na forma  $x + bz$ , com  $x \in E_1$  e  $b \in \mathbb{R}$ , podemos agora definir uma aplicação  $\lambda_2: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\lambda_2(x + bz) = \lambda_1(x) + ab$ , aplicação essa que se verifica facilmente ser linear e ter restrição a  $E_1$  igual a  $\lambda_1$ , portanto também restrição a  $E_0$  igual a  $\lambda_0$ . Se verificarmos que, para cada  $x \in E_1$  e  $b \in \mathbb{R}$ , se tem  $|\lambda_2(x + bz)| \leq \|\lambda_0\| \|x + bz\|$ , ficará provado que  $(E_2, \lambda_2) \in \mathcal{C}$ , o que será o

<sup>168</sup>O facto de uma tal aplicação  $\mu$  existir resulta do facto de termos uma cadeia e da definição da relação de ordem parcial: Se um elemento  $x \in F$  pertencer a  $F_j$  e a  $F_j$  um destes subespaços está contido no outro e a correspondente aplicação linear é restrição da associada ao outro pelo que  $\mu_j(x) = \mu_j(x)$ .

absurdo procurado, tendo em conta a maximalidade de  $(E_1, \lambda_1)$ . Ora a desigualdade em questão é verificada trivialmente se  $b = 0$  e, no caso em que  $b \neq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} |\lambda_2(x + bz)| &= |\lambda_1(x) + ab| = |b|\lambda_1\left(\frac{x}{b}\right) + a| \leq \\ &\leq |b|\|\lambda_0\|\left\|\frac{x}{b} + z\right\| = \|\lambda_0\|\|x + bz\|, \end{aligned}$$

pelo que temos a desigualdade pretendida.

Ficou assim provado, por absurdo, que o elemento maximal  $(E_1, \lambda_1)$  de  $\mathcal{C}$  verifica  $E_1 = E$  e, notando  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação linear  $\lambda_1$ , a desigualdade mostra que  $\lambda$  é contínua e com  $\|\lambda\| \leq \|\lambda_0\|$ , tendo-se mesmo  $\|\lambda\| = \|\lambda_0\|$  uma vez que a desigualdade  $\|\lambda_0\| \leq \|\lambda\|$  resulta de se ter, para cada  $x \in E_0$ ,

$$\|\lambda_0(x)\| = \|\lambda(x)\| \leq \|\lambda\|\|x\|. \quad \square$$

Vai existir também uma versão do teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais complexos. Para a demonstrar será útil utilizar o lema seguinte, de natureza essencialmente algébrica que relaciona o dual topológico de um espaço vetorial normado complexo com o seu dual topológico enquanto espaço vetorial normado real.

**2.1.60 (Lema algébrico)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado complexo e consideremos o espaço de Banach complexo  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$  e o espaço de Banach real  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$ .<sup>169</sup> Tem então lugar uma isometria linear de espaços vetoriais normados reais

$$\mathcal{R}: \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$$

definida por  $\mathcal{R}(\mu) = \lambda$ , onde  $\lambda(x) = \Re(\mu(x))$  é a parte real de  $\mu(x)$ . O isomorfismo inverso

$$\mathcal{R}^{-1}: \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$$

está definido por  $\mathcal{R}^{-1}(\lambda) = \mu$ , onde  $\mu(x) = \lambda(x) - i\lambda(ix)$ .

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

**a)** É imediato que, se  $\mu \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$  então a correspondente aplicação  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$  é linear e o facto de se ter

$$|\lambda(x)| = |\Re(\mu(x))| \leq |\mu(x)| \leq \|\mu\|\|x\|$$

mostra que  $\lambda$  é contínua e com  $\|\lambda\| \leq \|\mu\|$ . Ficamos assim com uma aplicação bem definida  $\mathcal{R}: \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$  que se verifica facilmente

<sup>169</sup>Os índices  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}$ , não sendo estritamente necessários, têm como objetivo sublinhar quais os escalares considerados na definição das aplicações lineares. Reparar que estes espaços são os duais topológicos de  $E$ , como espaço vetorial normado complexo e como espaço vetorial normado real.

ser linear (no sentido real, naturalmente).

**b)** Vamos agora verificar que para cada  $\mu \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$  tem-se mesmo  $\|\lambda\| = \|\mu\|$ , o que mostrará que  $\mathcal{R}$  é uma aplicação linear isométrica, em particular contínua e injetiva.

**Subdem:** Começamos por observar que para cada  $x \in E$  existe um complexo  $c$  com  $|c| = 1$  tal que  $\mu(cx) \in \mathbb{R}$ . Com efeito, se  $\mu(x) = 0$  podemos tomar, por exemplo,  $c = 1$  e, caso contrário, tomamos

$$c = \frac{\overline{\mu(x)}}{|\mu(x)|}$$

e notamos que

$$\mu(cx) = c\mu(x) = \frac{\overline{\mu(x)} \times \mu(x)}{|\mu(x)|} = |\mu(x)| \in \mathbb{R}.$$

Podemos agora concluir que se tem

$$|\mu(x)| = |c\mu(x)| = |\mu(cx)| = |\lambda(cx)| \leq \|\lambda\| \|cx\| = \|\lambda\| \|x\|,$$

o que implica que  $\|\mu\| \leq \|\lambda\|$ . A desigualdade oposta já foi obtida em a).

**c)** Vamos verificar por fim que a aplicação linear  $\mathcal{R}$  é também sobrejetiva, e portanto uma isometria linear, e que a inversa de  $\mathcal{R}$  está definida do modo referido no enunciado.

**Subdem:** Se  $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$  é imediato que se obtém uma aplicação linear real  $\mu: E \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\mu(x) = \lambda(x) - i\lambda(ix)$ , aplicação linear essa que é contínua, uma vez que

$$\begin{aligned} |\mu(x)| &= \sqrt{|\lambda(x)|^2 + |\lambda(ix)|^2} \leq \sqrt{\|\lambda\|^2 \|x\|^2 + \|\lambda\|^2 \|ix\|^2} = \\ &= \sqrt{2} \|\lambda\| \|x\|. \end{aligned}$$

De facto, tendo em conta a caracterização das aplicações lineares complexas referida na alínea b) de 2.1.32,  $\mu$  é mesmo uma aplicação linear complexa, uma vez que

$$\mu(ix) = \lambda(ix) - i\lambda(-x) = i(\lambda(x) - i\lambda(ix)) = i\mu(x).$$

Encontrámos assim  $\mu \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$  tal que  $\mathcal{R}(\mu) = \lambda$ . □

**2.1.61 (Teorema de Hahn-Banach complexo)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado complexo,  $E_0 \subset E$  um subespaço vetorial e  $\mu_0: E_0 \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação linear contínua. Existe então uma aplicação linear contínua  $\mu: E \rightarrow \mathbb{C}$  com  $\|\mu\| = \|\mu_0\|$  e  $\mu|_{E_0} = \mu_0$ .

**Dem:** Seja  $\lambda_0: E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação linear contínua  $\mathcal{R}(\mu_0)$  que, pelo lema 2.1.60, verifica  $\|\lambda_0\| = \|\mu_0\|$ . Tendo em conta a versão real do teorema de Hahn-Banach em 2.1.59, podemos considerar uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{C}$  com  $\|\lambda\| = \|\lambda_0\| = \|\mu_0\|$  tal que  $\lambda|_{E_0} = \lambda_0$ . Mais uma vez pelo lema 2.1.60 podemos agora considerar a aplicação linear complexa

$\mu: E \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\mu = \mathcal{R}^{-1}(\lambda)$ , para a qual se tem  $\|\mu\| = \|\lambda\| = \|\mu_0\|$  e, para cada  $x \in E_0$ , temos, pela caracterização explícita de  $\mathcal{R}^{-1}$  e de  $\mathcal{R}$ ,

$$\mu(x) = \lambda(x) - i\lambda(ix) = \lambda_0(x) - i\lambda_0(ix) = \mu_0(x). \quad \square$$

**2.1.62 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $x_0 \in E \setminus \{0\}$  e  $a \in \mathbb{K}$ . Existe então uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\lambda(x_0) = a$  e  $\|\lambda\| = \frac{|a|}{\|x_0\|}$ . Em particular, no caso em que  $E \neq \{0\}$ , para cada  $x_0 \in E$  existe uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  com  $\|\lambda\| = 1$  e  $\lambda(x_0) = \|x_0\|$ .

**Dem:** Basta aplicar 2.1.59 ou 2.1.61, conforme  $\mathbb{K}$  seja  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , à aplicação linear  $\lambda_0: \mathbb{K}x_0 \rightarrow \mathbb{K}$  que aplica cada elemento  $bx_0$ , com  $b \in \mathbb{K}$ , em  $ba$ , para a qual se tem

$$|\lambda_0(bx_0)| = |ba| = \frac{|a|}{\|x_0\|} \|bx_0\|,$$

portanto  $\|\lambda_0\| = \frac{|a|}{\|x_0\|}$ . A última afirmação resulta da primeira se  $x_0 \neq 0$  e de que no caso em que  $x_0 = 0$  basta tomar para  $\lambda$  qualquer aplicação linear contínua de norma 1, a existência de uma tal aplicação  $\lambda$  resultando de aplicar a primeira conclusão partindo de um vetor não nulo arbitrário.  $\square$

**2.1.63 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $G \subset E$  um subespaço vetorial fechado e  $x_0 \in E$  com  $x_0 \notin G$ . Então:

**a)** Existe uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\lambda|_G = 0$  e  $\lambda(x_0) = 1$ .

**b)** Mais geralmente, se  $F$  é um espaço vetorial normado e  $w_0 \in F$ , então existe uma aplicação linear contínua  $\hat{\lambda}: E \rightarrow F$  tal que  $\hat{\lambda}|_G = 0$  e  $\hat{\lambda}(x_0) = w_0$ .

**Dem: a)** Consideremos o espaço vetorial quociente  $E/G$ , com a norma quociente (cf. 2.1.48). Uma vez que  $[x_0]_G \neq 0$  em  $E/G$ , podemos considerar, pelo corolário precedente, uma aplicação linear contínua  $\mu: E/G \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\mu([x_0]_G) = 1$ . A aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  definida por  $\lambda(x) = \mu([x]_G)$  verifica então as condições pedidas.

**b)** Sendo  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação linear contínua nas condições de a), basta definir  $\hat{\lambda}(x) = \lambda(x)w_0$ .  $\square$

**2.1.64 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado, real ou complexo,  $E_0 \subset E$  um subespaço vetorial,  $F$  um espaço vetorial normado de dimensão finita e  $\lambda_0: E_0 \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Existe então uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  tal que  $\lambda|_{E_0} = \lambda_0$ .<sup>170</sup>

<sup>170</sup>Reparar que, ao contrário do que acontecia no caso particular em que  $F = \mathbb{K}$ , examinado em 2.1.59 e 2.1.61, não afirmamos que exista um tal prolongamento  $\lambda$  com  $\|\lambda\| = \|\lambda_0\|$ .



**Dem:** Sendo  $w_1, \dots, w_n$  uma base de  $F$ , consideremos o isomorfismo  $\alpha: \mathbb{K}^n \rightarrow F$  associado, definido por

$$\alpha(a_1, \dots, a_n) = a w_1 + \dots + a_n w_n.$$

Considerando a norma  $\|\cdot\|_\infty$  em  $\mathbb{K}^n$  cuja topologia associada é a topologia produto (cf. 2.1.11), sabemos que  $\alpha: \mathbb{K}^n \rightarrow F$  e  $\alpha^{-1}: F \rightarrow \mathbb{K}^n$  são aplicações lineares contínuas (cf. 2.1.51), o que nos permite considerar a aplicação linear contínua

$$\mu_0 = \alpha^{-1} \circ \lambda_0: E_0 \rightarrow \mathbb{K}^n,$$

e portanto as aplicações lineares contínuas  $\mu_{0i}: E_0 \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , componentes daquela, definidas por

$$\mu_0(x) = (\mu_{01}(x), \dots, \mu_{0n}(x)).$$

Tendo em conta o teorema de Hahn-Banach (cf. 2.1.59 ou 2.1.61), podemos considerar para cada  $1 \leq i \leq n$  uma aplicação linear contínua  $\mu_i: E \rightarrow \mathbb{K}$  com  $\mu_i|_{E_0} = \mu_{0i}$  e obtemos uma aplicação linear contínua  $\mu: E \rightarrow \mathbb{K}^n$  definida por

$$\mu(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)),$$

que verifica  $\mu|_{E_0} = \mu_0$ . Podemos agora considerar a aplicação linear contínua  $\lambda = \alpha \circ \mu: E \rightarrow F$  para a qual se tem

$$\lambda|_{E_0} = \alpha \circ \mu|_{E_0} = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \lambda_0 = \lambda_0. \quad \square$$

**2.1.65 (Subespaços vetoriais de dimensão finita)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $E_0 \subset E$  um subespaço vetorial de dimensão finita. Tem-se então que  $E_0$  é fechado em  $E$ .

**Dem:** Considerando a aplicação linear contínua identidade  $Id: E_0 \rightarrow E_0$ , resulta de 2.1.64 a existência de uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow E_0$  tal que  $\lambda(x) = x$  para cada  $x \in E_0$ . Tem-se então

$$E_0 = \{x \in E \mid \lambda(x) = x\} = \{x \in E \mid \lambda(x) - x = 0\}$$

pelo que a continuidade da aplicação  $E \rightarrow E$ ,  $x \mapsto \lambda(x) - x$ , garante que  $E_0$  é efetivamente um subconjunto fechado de  $E$ .  $\square$

Como aplicação dos teoremas de Hahn-Banach em 2.1.59 e 2.1.61 estabelecemos agora um resultado de certo modo dual do referido em 2.1.49, no sentido de estarem trocados os papéis dos subespaços e dos espaços quociente. Ao contrário do resultado referido, o espaço vetorial normado  $H$  tem agora que ser o corpo dos escalares  $\mathbb{K}$ .

**2.1.66 (Aplicações lineares definidas num subespaço vetorial)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $F \subset E$  um subespaço vetorial e consideremos a aplicação linear contínua inclusão  $\iota: F \rightarrow E$ , que verifica trivialmente  $\|\iota\| \leq 1$ . Tem então lugar uma aplicação linear contínua

$$\iota^* = \mathcal{L}(\iota; Id_{\mathbb{K}}): \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$$

(cf. 2.1.44), que aplica portanto cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  na aplicação linear  $\lambda \circ \iota = \lambda|_F$ . Tem-se então que a aplicação linear  $\iota^*$  é sobrejetiva e com kernel fechado e a norma de  $\mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  é a norma quociente determinada pela norma de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e por aquela aplicação.

**Dem:** Tendo em conta 2.1.44, a aplicação linear  $\iota^*$  é contínua e com norma menor ou igual a  $\|\iota\| \leq 1$ . Já sabemos assim que  $\|\lambda|_F\| = \|\iota^*(\lambda)\| \leq \|\lambda\|$ . A continuidade de  $\iota^*$  garante que o seu kernel é fechado e a sobrejetividade de  $\iota^*$  é uma consequência direta do teorema de Hahn-Banach 2.1.59 ou 2.1.61. Esse mesmo teorema garante que, dado  $\hat{\lambda} \in \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$ , existe  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  com  $\iota^*(\lambda) = \hat{\lambda}$  e  $\|\lambda\| = \|\hat{\lambda}\|$ . Uma vez que  $\|\lambda\| \geq \|\hat{\lambda}\|$  para cada  $\lambda$  com  $\iota^*(\lambda) = \hat{\lambda}$ , concluímos que  $\|\hat{\lambda}\|$  é o mínimo dos  $\|\lambda\|$  com  $\iota^*(\lambda) = \hat{\lambda}$  e portanto a norma de  $\mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  é efetivamente a norma quociente determinada por  $\iota^*$ .  $\square$

Verificámos em 2.1.58 que, se  $E$  é um espaço vetorial normado de dimensão finita, um subconjunto  $A \subset E$  é compacto se, e só se, é fechado e limitado. O teorema de Riesz, que examinamos em seguida, mostra que esta equivalência nunca é verificada num espaço vetorial normado de dimensão infinita, num tal espaço existindo sempre conjuntos fechados e limitados que não são compactos. Será cómodo começar por estabelecer um lema que utiliza os resultados que temos vindo a estudar nesta secção.

**2.1.67 (Lema)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Existe então uma  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vetores de  $E$  tal que  $\|x_n\| = 1$  para cada  $n$  e  $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$  sempre que  $m \neq n$ .

**Dem:** Vamos construir recursivamente os vetores  $x_n$ . Para começar tomamos  $x \neq 0$  em  $E$  e definimos  $x_1 = \frac{x}{\|x\|}$  que verifica  $\|x_1\| = 1$ . Suponhamos construídos os vetores  $x_1, x_2, \dots, x_k$  com  $\|x_n\| = 1$  para cada  $1 \leq n \leq k$  e  $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$  sempre que  $m \neq n$  em  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Seja  $F \subset E$  o subespaço vetorial de dimensão finita gerado pelos vetores  $x_1, \dots, x_k$ , subespaço esse que é fechado tendo em conta 2.1.65. Tendo em conta 2.1.47,<sup>171</sup> podemos considerar um elemento  $y \notin F$  tal que a classe de equivalência  $[y]_F$  em  $E/F$  verifique  $\|y\| \leq 2\|[y]_F\|$ . Definimos então  $x_{k+1} = \frac{y}{\|y\|}$ , para o qual se tem  $\|x_{k+1}\| = 1$  e

<sup>171</sup>A passagem pelos espaços vectoriais normados quociente podia ser evitada, mas a vantagem é dispensar a repetição de um argumento já utilizado.

$$1 \leq 2 \frac{\| [y]_F \|}{\| y \|} = 2 \left\| \left[ \frac{y}{\| y \|} \right]_F \right\| = 2 \| [x_{k+1}]_F \|$$

e daqui deduzimos que, para cada  $x \in F$ ,

$$1 \leq 2 \| [x_{k+1}]_F \| = 2 \| [x_{k+1} - x]_F \| \leq 2 \| x_{k+1} - x \|,$$

em particular para cada  $n \leq k$

$$1 \leq 2 \| x_{k+1} - x_n \|$$

e  $\| x_{k+1} - x_n \| \geq \frac{1}{2}$ , o que termina a construção por recursão.  $\square$

**2.1.68 (Teorema de Riesz)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Tem-se então que a bola fechada  $\overline{B}_1(0)$ , apesar de ser um conjunto fechado e limitado, não é compacta.<sup>172</sup>

**Dem:** Tendo em conta o lema 2.1.67, consideremos uma  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $E$  de norma 1, em particular de elementos de  $\overline{B}_1(0)$  tal que se tenha  $\| x_m - x_n \| \geq \frac{1}{2}$  sempre que  $m \neq n$ . Uma vez que, sempre que  $a \in E$  e  $y, z \in B_{1/4}(a)$  tem-se

$$\| y - z \| \leq \| y - a \| + \| a - z \| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

constatamos que uma bola aberta de raio  $\frac{1}{4}$  não pode conter  $x_n$  para mais que um valor de  $n$  e portanto uma união finita de bolas abertas de raio  $\frac{1}{4}$  não pode conter todos os  $x_n$ , em particular não pode conter a bola  $\overline{B}_1(0)$ . Concluimos assim que a bola fechada  $\overline{B}_1(0)$  não é totalmente limitada, e portanto também não é compacta (cf. a alínea a) de 1.7.35).  $\square$

**2.1.69 (Corolário)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Para cada conjunto compacto  $K \subset E$ , tem-se então  $\text{int}(K) = \emptyset$ .

**Dem:** Se fosse  $\text{int}(K) \neq \emptyset$ , podíamos considerar  $x_0 \in E$  e  $r > 0$  tal que a bola fechada  $\overline{B}_r(x_0)$  estivesse contida em  $K$  e portanto, por ser fechada, seria compacta. A sua imagem  $\overline{B}_r(0)$  pela aplicação contínua  $x \mapsto x - x_0$ , era assim também compacta e portanto a bola  $\overline{B}_1(0)$ , imagem desta última pela aplicação contínua  $x \mapsto \frac{x}{r}$ , também era compacta, contrariando a conclusão do teorema de Riesz.  $\square$

Vamos agora examinar alguns resultados úteis envolvendo a separabilidade no contexto dos espaços vetoriais normados, não deixando de recordar que, como em qualquer espaço métrico, um espaço vetorial normado é separável se, e só se, for de base contável (cf. 1.3.26 e 1.3.27).

<sup>172</sup>De facto, como resulta da demonstração adiante, esta bola fechada nem sequer é totalmente limitada.

**2.1.70 (Separabilidade na dimensão finita)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado de dimensão finita então  $E$  é separável.

**Dem:** Podemos afastar já o caso trivial em que a dimensão é 0. Uma vez que um espaço vetorial normado complexo de dimensão  $p$  é também um espaço vetorial normado real de dimensão  $2p$ , podemos já supor que o corpo dos escalares é  $\mathbb{R}$ . Sendo então  $w_1, \dots, w_n$  uma base de  $E$ , seja  $A \subset E$  o conjunto contável dos vetores da forma  $t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$  com os escalares  $t_j$  no conjunto contável  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. O resultado ficará provado se verificarmos que  $A$  é denso em  $E$ . Sejam então  $x_0 \in E$  e  $V$  uma vizinhança arbitrária de  $x_0$ . Podemos considerar escalares  $t_{10}, \dots, t_{n0} \in \mathbb{R}$  tais que

$$x_0 = t_{10} w_1 + \dots + t_{n0} w_n$$

e, tendo em conta a continuidade em  $(t_{10}, \dots, t_{n0})$  da aplicação de  $\mathbb{R}^n$  para  $E$  que a  $(t_1, \dots, t_n)$  associa  $t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$ , existem vizinhanças  $V_j$  dos  $t_{j0}$  em  $\mathbb{R}$  tais que se  $t_j \in V_j$  para cada  $j$  venha  $t_1 w_1 + \dots + t_n w_n \in V$ . Escolhendo para cada  $j$  um escalar  $t_j \in V_j \cap \mathbb{Q}$  vemos que o correspondente  $x = t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$  pertence a  $A \cap V$ , o que prova que  $A$  é denso.  $\square$

**2.1.71 (Generalização de 2.1.70)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado que admita um subconjunto separável  $A \subset E$  que seja um gerador algébrico. Então  $E$  é separável.

**Dem: 1)** Vamos começar por demonstrar o caso particular em que o conjunto  $A$  é contável. Afastando já o caso trivial em que  $A = \emptyset$ , e portanto  $E = \{0\}$ , para qualquer vetor  $x \in E$  existem então  $w_1, \dots, w_n \in A$  e  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$  tais que  $x = t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$  pelo que existe uma parte finita  $B \subset A$  tal que  $x$  pertence ao subespaço vetorial  $F_B$  gerado por  $B$ , que é de dimensão finita. Constatamos assim que  $E$  é a união da família contável dos subespaços de dimensão finita  $F_B$  com  $B$  parte finita de  $A$ , subespaços esses que são separáveis como verificado em 2.1.70. Tendo em conta a alínea b) de 1.3.28 podemos assim concluir que  $E$  é separável.

**2)** Passemos à prova do caso geral em que  $A$  é separável. Podemos então considerar um subconjunto contável  $C \subset A$  que seja denso em  $A$ , ou seja, tal que  $A \subset \text{ad}(C)$ . Sendo  $F \subset E$  o subespaço vetorial gerado por  $C$ , o que vimos em 1) mostra que  $F$  é um espaço vetorial normado separável. Vamos mostrar que  $F$  é denso em  $E$  o que, tendo em conta a alínea a) de 1.3.28, permitirá concluir que  $E$  é separável. Sejam então  $x_0 \in E$  e  $V$  uma vizinhança arbitrária de  $x_0$  em  $E$ . Existem então  $w_{10}, \dots, w_{n0} \in A$  e  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$x_0 = t_1 w_{10} + \dots + t_n w_{n0}$$

e, tendo em conta a continuidade em  $(w_{10}, \dots, w_{n0})$  da aplicação de  $E^n$  para  $E$  que a  $(w_1, \dots, w_n)$  associa  $t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$  existem vizinhanças  $W_j$  dos  $w_{j0}$  em  $E$  tais que se  $w_j \in W_j$  para cada  $j$  venha  $t_1 w_1 + \dots + t_n w_n \in V$ . Escolhendo para cada  $j$  um vetor  $w_j \in W_j \cap C$  vemos que o correspondente

$x = t_1 w_1 + \cdots + t_n w_n$  pertence a  $F \cap V$ , o que mostra que  $F$  é efetivamente denso em  $E$ .  $\square$

**2.1.72 (Exemplo dum espaço vetorial normado não separável)** Se  $I$  é um conjunto infinito de índices e  $\mathbb{K} \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  então o espaço vetorial normado  $\ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I) = \mathbb{B}(I, \mathbb{K})$  (cf. 2.1.9 e 2.1.10) não é separável.

**Dem:** Uma vez que temos um espaço métrico, basta mostrarmos que este espaço não é de base contável e, para isso, tendo em conta 1.3.29, basta encontrar um subconjunto discreto não contável de  $\ell_E^{\infty}(I)$ . Consideremos, para cada parte arbitrária  $J \subset I$ , o elemento  $a_J = (a_{J,j})_{j \in I}$  de  $\ell_E^{\infty}(I)$  definido por

$$a_{J,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in J \\ 0, & \text{se } j \notin J \end{cases}$$

Lembrando que o conjunto de todas as partes de  $J$  não é contável e reparando que se tem  $a_J \neq a_{J'}$  sempre que  $J \neq J'$ , o subconjunto  $\mathcal{A}$  de  $\ell_E^{\infty}(I)$  cujos elementos são os  $a_J$  não é contável. Verifiquemos que  $\mathcal{A}$  é um subconjunto discreto de  $\ell_E^{\infty}(I)$ . Ora, se  $J \neq J'$ , não só  $a_J \neq a_{J'}$  como  $\|a_J - a_{J'}\|_{\infty} = 1$ , uma vez que todas as coordenadas desta família são em valor absoluto 0 ou 1 e, sendo  $j$  um elemento que pertence a um dos conjuntos e não ao outro o valor absoluto da correspondente coordenada é 1. Resulta daqui que, para cada  $a_J$  a bola aberta de centro  $a_J$  e raio 1 não contém mais nenhum elemento de  $\mathcal{A}$  e portanto a topologia induzida em  $\mathcal{A}$  é a discreta.  $\square$

Em geral, como exemplificaremos mais tarde, um espaço vetorial normado pode ser separável sem que o seu dual seja separável (ver, no entanto, 2.3.22 adiante). Pelo contrário, como veremos em seguida, a separabilidade do dual de um espaço vetorial normado implica a separabilidade deste.

**2.1.73 (Consequência da separabilidade do dual)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$  cujo dual  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  seja separável. Tem-se então que  $E$  é também separável.

**Dem:** Podemos afastar desde já o caso trivial em que  $E = \{0\}$ . Sejam  $J$  um conjunto contável de índices e  $(\lambda_j)_{j \in J}$  uma família de elementos do dual  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  tal que o conjunto dos  $\lambda_j$  seja denso em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ . Tendo em conta a caracterização da norma de uma aplicação linear como um supremo, podemos, para cada  $j \in J$ , considerar  $x_j \neq 0$  em  $E$  tal que

$$\frac{|\lambda_j(x_j)|}{\|x_j\|} \geq \frac{1}{2} \|\lambda_j\|$$

(se  $\lambda_j = 0$  qualquer  $x_j \neq 0$  serve). Sendo  $F$  o subespaço vetorial gerado pelos  $x_j$ , vemos verificar que  $\text{ad}(F) = E$  o que, tendo em conta 2.1.71 e a alínea

a) de 1.3.28, provará que  $E$  é efetivamente separável. Suponhamos, por absurdo, que isso não acontecia e consideremos, tendo em conta 2.1.63, uma aplicação linear  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  com  $\lambda \neq 0$  e  $\lambda_{\text{ad}(F)} = 0$ . Tendo em conta a densidade do conjunto dos  $\lambda_j$ , consideremos  $j \in J$  tal que  $\|\lambda_j - \lambda\| < \frac{\|\lambda\|}{3}$ . Uma vez que  $\lambda(x_j) = 0$ , podemos escrever

$$\frac{1}{2} \|\lambda_j\| \|x_j\| \leq |\lambda_j(x_j)| = |\lambda_j(x_j) - \lambda(x_j)| \leq \|\lambda_j - \lambda\| \|x_j\|,$$

donde

$$\|\lambda_j\| \leq 2\|\lambda_j - \lambda\|$$

e

$$\|\lambda\| = \|\lambda - \lambda_j + \lambda_j\| \leq \|\lambda_j - \lambda\| + \|\lambda_j\| \leq 3\|\lambda_j - \lambda\|,$$

o que é absurdo por contradizer a desigualdade  $\|\lambda_j - \lambda\| < \frac{\|\lambda\|}{3}$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex. 2.1.1** Verificar a validade da afirmação de que o espaço vetorial  $Ap(X, \mathbb{K})$  tem dimensão infinita se, e só se, o conjunto  $X$  é infinito. No caso em que o conjunto  $X$  é finito, determinar uma base, e consequentemente a dimensão, de  $Ap(X, \mathbb{K})$ .

**Ex. 2.1.2** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e  $E$  um espaço vetorial normado, real ou complexo. Generalizando o que se fez em 1.1.7, para o caso em que  $E = \mathbb{R}$ , verificar que se pode definir em  $Ap(I, E)$  uma norma  $\|\cdot\|_2$  por

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} \|x_i\|^2}$$

e verificar que esta norma é equivalente a cada uma das normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  neste espaço (cf. 2.1.13 e 2.1.11). **Sugestão:** Para a verificação de que temos efetivamente uma norma não será necessário repetir a parte artificiosa da demonstração de 1.1.7, bastando utilizar este resultado particular depois de notar que se tem

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_2 = \|(\|x_i\|)_{i \in I}\|_2,$$

onde a família no segundo membro pertence a  $Ap(I, \mathbb{R})$ .

**Ex. 2.1.3** Verificar que, se  $F, G, H$  são espaços vetoriais e  $\lambda: F \times G \rightarrow H$  é simultaneamente linear e bilinear então  $\lambda$  é necessariamente identicamente nula.

**Sugestão:** Reparar que  $(y, z) = (y, 0) + (0, z)$ .

**Ex. 2.1.4** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais e notemos  $Ap(E, F)$  o espaço vetorial de todas as aplicações  $E \rightarrow F$ . Reparar que a aplicação de avaliação  $Ap(E, F) \times E \rightarrow F$ , definida por  $(f, x) \mapsto f(x)$ , não é bilinear.

**Ex. 2.1.5** Lembrar que, como se verificou no exercício 1.2.2, no contexto dos espaços métricos a aderência de uma bola aberta está contida na correspondente bola fechada mas não é necessariamente igual a esta. Em contraste com este fenómeno, mostrar que, se  $E$  é um espaço vetorial normado,  $x_0 \in E$  e  $r > 0$  então a aderência da de  $B_r(x_0)$  é igual a  $\overline{B}_r(x_0)$ . **Sugestão:** Se  $x \in \overline{B}_r(x_0)$  verificar que para cada  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $x_0 + (1 - \frac{1}{n})(x - x_0)$  pertence a  $B_r(x_0)$  e determinar o limite desta sucessão.

**Ex. 2.1.6** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ . Suponhamos que, para cada aplicação de classe  $C^1$   $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se defina

$$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|.$$

Porque razão não se obtinha assim uma norma sobre o espaço vetorial  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  de todas as aplicações de classe  $C^1$  de  $[a, b]$  para  $\mathbb{R}$ ?

**Ex. 2.1.7** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e consideremos o espaço vetorial  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  de todas as aplicações de classe  $C^1$  de  $[a, b]$  para  $\mathbb{R}$ . Mostrar que se pode definir uma norma  $\|\cdot\|_{(1)}$  neste espaço pondo

$$\|f\|_{(1)} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} = \max\left\{\max_{t \in [a, b]} |f(t)|, \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|\right\}.$$

**Ex. 2.1.8** Sejam  $a < b$  dois números reais e considere-se em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  a norma  $\|\cdot\|_\infty$ , (cf. 2.1.26).

**a)** Mostrar que tem lugar uma aplicação linear contínua  $\lambda: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , definida por

$$\lambda(f)(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

**b)** Mostrar que  $\lambda$  é uma aplicação linear injectiva, mas não sobrejectiva.

**c)** O que se viu em b) mostra que  $\lambda$  é um isomorfismo de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  sobre um subespaço vetorial próprio  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Identificar esse subespaço vetorial  $\mathcal{C}'$  e o inverso do isomorfismo  $\lambda$  e mostrar que esse inverso não é uma aplicação linear contínua, quando se considera em  $\mathcal{C}'$  a norma  $\|\cdot\|_\infty$ . **Sugestão:** Pensar nas funções  $f_n$  definidas por  $f_n(t) = \sin(nt)$ .

**Ex. 2.1.9** Sejam  $a < b$  dois números reais e considere-se em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  a norma  $\|\cdot\|_\infty$  e em  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  a norma  $\|\cdot\|_{(1)}$ , definida no exercício 2.1.7. Mostrar que tem lugar uma aplicação linear contínua

$$D: C^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}),$$

definida por  $D(f) = f'$  (Costuma-se dizer que  $D$  é o operador de derivação).

**Ex. 2.1.10** Sejam  $a < b$  dois números reais e considere-se em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  a norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**a)** Mostrar que tem lugar uma aplicação linear contínua  $\lambda: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\lambda(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

**b)** Mostrar que tem lugar uma aplicação bilinear contínua

$$\mu: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\mu(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

c) Deduzir que é contínua a aplicação  $\alpha_2: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\alpha_2(f) = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Como se provaria, mais geralmente, que, para cada inteiro  $n \geq 1$ , é contínua a aplicação  $\alpha_n: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\alpha_n(f) = \int_a^b f(t)^n dt?$$

**Ex. 2.1.11** Sejam  $a < b$  dois números reais e considere-se em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  a norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Mostrar que, dado um número real  $r \geq 1$ , é contínua a aplicação  $\alpha_r: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\alpha_r(f) = \int_a^b |f(t)|^r dt.$$

**Ex. 2.1.12** Sejam  $a < b$  dois números reais e considere-se em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  a norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Mostrar que se pode definir em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  uma outra norma,  $\|\cdot\|'_1$ , por

$$\|f\|'_1 = \int_a^b |f(t)| dt.$$

Mostrar que as normas  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|'_1$  não são equivalentes mas que existe uma que é mais fina que a outra.

**Ex. 2.1.13** Sejam  $a < b$  dois números reais e  $c < d$  dois reais pertencentes ao intervalo  $[a, b]$ . Consideremos nos espaços vetoriais  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  e  $\mathcal{C}([c, d], \mathbb{R})$  as normas  $\|\cdot\|'_1$  definidas no exercício 2.1.12. Mostrar que tem lugar uma aplicação linear contínua

$$\Phi: \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([c, d], \mathbb{R}),$$

definida por  $\Phi(f) = f|_{[c, d]}$ .

**Ex. 2.1.14** Seja  $\mathcal{E}$  o conjunto de todas as aplicações de classe  $C^\infty$   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que são periódicas com período  $2\pi$  (isto é, verificam  $f(x + 2\pi) = f(x)$ , para cada  $x \in \mathbb{R}$ ) e tais que

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0.$$

a) Mostrar que  $\mathcal{E}$  é um subespaço vetorial do espaço  $\mathbb{B}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  das aplicações limitadas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , o que permite considerar em  $\mathcal{E}$  a norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Mostrar que, para  $f \in \mathcal{E}$ ,

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|.$$



**b)** Mostrar que, para cada  $f \in \mathcal{E}$ , a função derivada  $f'$  também pertence a  $\mathcal{E}$ . Notando  $T: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  a aplicação definida por  $T(f) = f'$ , mostrar que  $T$  é um isomorfismo de  $\mathcal{E}$  sobre  $\mathcal{E}$ .

**c)** Mostrar que a aplicação linear  $T^{-1}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  é contínua.

**d)** Considerando as funções  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f_n(x) = \sin(nx)$ , mostrar que  $f_n \in \mathcal{E}$  e, determinando  $T(f_n)$ , concluir que a aplicação linear  $T$  não é contínua.

**Ex. 2.1.15** Seja  $Pol = Pol(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o espaço vetorial das funções polinomiais  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**a)** Mostrar que se pode definir uma norma  $\| \cdot \|$  no espaço vetorial  $Pol$  por

$$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)|,$$

onde, como é usual, notamos  $f^{(n)}$  a derivada de ordem  $n$  de  $f$  (em particular,  $f^{(0)} = f$ ).

**b)** Mostrar que tem lugar uma aplicação linear contínua  $D: Pol \rightarrow Pol$ , definida por  $D(f) = f'$ .

**c)** Mostrar que tem lugar uma aplicação linear contínua  $\lambda: Pol \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\lambda(f) = f(3)$ .

**Ex. 2.1.16** Seja  $Pol = Pol(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o espaço vetorial das funções polinomiais  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**a)** Mostrar que se pode definir uma norma  $\| \cdot \|$  no espaço vetorial  $Pol$  por

$$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)|,$$

onde, como é usual, notamos  $f^{(n)}$  a derivada de ordem  $n$  de  $f$  (em particular,  $f^{(0)} = f$ ).

**b)** Mostrar que a aplicação linear  $D: Pol \rightarrow Pol$  definida por  $D(f) = f'$ , não é contínua.

**Sugestão:** Pensar nas funções  $f_n$  definidas por  $f_n(x) = x^n$ .

**c)** Mostrar que tem lugar uma aplicação bilinear contínua  $\xi: Pol \times Pol \rightarrow Pol$ , definida por  $\xi(f, g) = fg$ .

**Sugestão:** Atender à seguinte fórmula de Leibnitz para a derivada de ordem  $n$  de um produto:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} f^{(p)} f^{(q)}.$$

**Ex. 2.1.17** Sejam  $a < b$  dois números reais e consideremos no espaço vetorial  $C^1([a, b], \mathbb{R})$ , das aplicações de classe  $C^1$  de  $[a, b]$  em  $\mathbb{R}$ , a norma  $\| \cdot \|_{(1)}$  definida no exercício 2.1.7. Mostrar que uma sucessão de funções  $f_n \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  converge para  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ , relativamente a esta norma se, e só se,  $f_n$  converge uniformemente para  $f$  e a sucessão das derivadas  $f'_n$  converge uniformemente para a derivada  $f'$ .

**Ex. 2.1.18 (Normas reais e normas complexas)** Seja  $E$  um espaço vetorial complexo. Chamaremos *normas complexas* de  $E$  as normas de  $E$  enquanto espaço vetorial complexo e *normas reais* as normas de  $E$  enquanto espaço vetorial real e relabramos que qualquer norma complexa é, em particular, uma norma real.

**a)** Seja  $\| \cdot \|$  uma norma real de  $E$ . Mostrar que se existir uma norma complexa de  $E$

equivalente à norma real então, relativamente àquela, é contínua a aplicação linear  $E \rightarrow E$  que a  $x$  associa  $ix$ .

**b)** Seja  $\|\cdot\|$  uma norma real de  $E$  relativamente à qual venha contínua a aplicação linear  $E \rightarrow E$  que a  $x$  associa  $ix$ . Mostrar que se pode definir uma *norma complexa associada*, equivalente à primeira,  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ , que verifica  $\|x\| \leq \|x\|_{\mathbb{C}}$ , por

$$\|x\|_{\mathbb{C}} = \sup_{|\omega|=1} \|\omega x\|,$$

onde o supremo é tomado relativamente aos complexos  $\omega$  de módulo 1.

**Sugestão:** Sendo  $M \geq 0$  tal que  $\|ix\| \leq M\|x\|$ , mostrar que

$$\|x\| \leq \|x\|_{\mathbb{C}} \leq (M+1)\|x\|.$$

Reparar também que, se  $c \in \mathbb{C}$  então tem-se  $c = |c| \times \omega$  para algum  $\omega \in \mathbb{C}$  com  $|\omega| = 1$  (decomposição única se  $c \neq 0$ ). Poderá ser útil ter em conta 2.1.6 para a verificação que se definiu um nova norma.

**c)** No caso em que a norma real de partida  $\|\cdot\|$  já é uma norma complexa, verificar que a norma complexa associada  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$  coincide com a de partida.

**Ex. 2.1.19 (Aplicações lineares cujo domínio é um produto cartesiano)**<sup>173</sup> Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $E_i$  um espaço vetorial normado e consideremos no espaço vetorial produto cartesiano  $\prod_{i \in I} E_i$  a norma do

máximo (cf. 2.1.12). Seja também  $F$  um espaço vetorial normado.

**a)** Verificar que, para além das projeções canónicas  $\pi_i: \prod E_i \rightarrow E_i$ , que sabemos serem aplicações lineares contínuas, podemos também considerar para cada  $i_0 \in I$  uma aplicação linear contínua  $\iota_{i_0}: E_{i_0} \rightarrow \prod E_i$ , onde para cada  $x \in E_{i_0}$  a imagem  $\iota_{i_0}(x)$  é a família que a  $i_0$  associa  $x$  e a cada  $i \neq i_0$  associa 0. Mostrar ainda que para cada  $x = (x_i)_{i \in I}$  em  $\prod E_i$ , tem-se

$$x = \sum_{i \in I} \iota_i(x_i) = \sum_{i \in I} \iota_i(\pi_i(x)).$$

**b)** Verificar que se pode definir um isomorfismo bicontínuo

$$\Gamma: \mathcal{L}\left(\prod_{i \in I} E_i; F\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{L}(E_i; F),$$

onde no codomínio se considera também a norma do máximo, pela condição de aplicar cada  $\lambda: \prod E_i \rightarrow F$  na família  $(\lambda \circ \iota_i)_{i \in I}$  e que o isomorfismo inverso  $\Gamma^{-1}$  associa a cada família  $(\lambda_i)_{i \in I}$ , com  $\lambda_i: E_i \rightarrow F$  na soma

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \circ \pi_i.$$

**Sugestão:** Ter em conta a conclusão de a).

**Ex. 2.1.20 a)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , com bases  $x_1, \dots, x_m$  e  $y_1, \dots, y_n$ , respectivamente. Mostrar que o espaço vetorial  $\mathcal{L}(E; F)$  tem dimensão finita  $mn$  e determinar uma base para este espaço.

**Sugestão:** Raciocinar em termos de matrizes.

**b)** Com o auxílio dos isomorfismos em 2.1.43 mostrar, por indução, que se

<sup>173</sup>Reparar que estamos a falar de aplicações lineares e não de aplicações multilineares.

$E_1, \dots, E_p, F$  espaços vetoriais de dimensão finita, com dimensões  $m_1, \dots, m_p$  e  $n$ , respectivamente, então o espaço vetorial  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$  tem dimensão finita  $m_1 \cdots m_p n$ .

**Ex. 2.1.21** Seja  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão infinita sobre  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Mostrar que existe uma aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  que não seja contínua.

**Sugestão:** Considerar uma família linearmente independente  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vetores de norma 1 de  $E$ , indexada nos números naturais. Usando o teorema de Zorn, essa família pode ser prolongada numa base algébrica de  $E$  e daqui podemos deduzir a existência de uma aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\lambda(w_n) = n$ .

**Ex. 2.1.22** Generalizar o resultado em 2.1.31 mostrando que, dados espaços vetoriais normados  $E, F, G, H$  e uma aplicação bilinear contínua  $\rho: F \times G \rightarrow H$  fica definida uma nova aplicação bilinear contínua  $\widehat{\rho}: \mathcal{L}(E; F) \times G \rightarrow \mathcal{L}(E; H)$  por

$$\widehat{\rho}(\lambda, w)(y) = \rho(\lambda(y), w).$$

**Ex. 2.1.23** Seja  $E$  um espaço vetorial normado e  $A \subset E$  um conjunto convexo. Mostrar que  $\text{int}(A)$  e  $\text{ad}(A)$  são também conjuntos convexos. Mostrar mesmo que, se  $x \in A$ ,  $y \in \text{int}(A)$  e  $t \in ]0, 1]$ , então  $(1-t)x + ty \in \text{int}(A)$ .

**Ex 2.1.24** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $A \subset E$  um subconjunto arbitrário. Mostrar que a aderência do subespaço vetorial gerado por  $A$  é o mais pequeno subespaço vetorial fechado de  $E$  que contém  $A$ .

**Ex 2.1.25** Seja  $E$  um espaço vetorial normado real de dimensão maior ou igual a 2 (eventualmente infinita).

**a)** Mostrar que  $E \setminus \{0\}$  é conexo por arcos, e portanto também conexo.

**Sugestão:** Sejam  $x, y$  linearmente independentes e notemos  $A = E \setminus ([0, +\infty[ \cdot x)$  e  $B = E \setminus (]-\infty, 0] \cdot x)$ . Mostrar que  $E \setminus \{0\} = A \cup B$ , que  $y \in A \cap B$  e que  $A$  e  $B$  são estrelados relativamente a  $-x$  e a  $-y$ , respectivamente.

**b)** Deduzir de a) que o conjunto

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\} \subset E$$

é conexo por arcos, e portanto também conexo.

**Sugestão:** Considerar a aplicação contínua de  $E \setminus \{0\}$  sobre  $S$ , que a  $x$  associa  $\frac{x}{\|x\|}$ .

**Ex. 2.1.26 (Outra caracterização da norma de uma aplicação linear)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Verificar que, além das caracterizações referidas em 2.1.30,  $\|\lambda\|$  também pode ser caracterizado, mesmo no caso em que  $E = \{0\}$ , como o supremo dos  $\|\lambda(x)\|$  com  $\|x\| \leq 1$ .

**Ex. 2.1.27 (Estrutura de espaço vetorial normado complexo de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$ )** Seja  $E$  um espaço vetorial normado complexo e lembremos que, como se verificou no lema algébrico 2.1.60, existe um isometria linear real  $\mathcal{R}$  do espaço vetorial normado complexo  $L_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$  sobre o espaço vetorial normado real  $L_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$ . Transportando a estrutura de espaço vetorial complexo do domínio por meio desta isometria dever-se-á obter assim uma estrutura de espaço vetorial normado complexo sobre  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$ , estendendo a sua estrutura de espaço vetorial normado real. Verificar que essa estrutura de espaço vetorial complexo está definida explicitamente por

$$(c\lambda)(x) = \lambda(cx)$$

para cada  $c \in \mathbb{C}$ . **Sugestão:** Considerar  $c = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Ex 2.1.28** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $G \neq \{0\}$  um espaço vetorial e  $\rho: E \rightarrow G$  uma aplicação linear sobrejetiva com  $\ker(\rho)$  fechado e consideremos em  $G$  a correspondente norma quociente, definida em 2.1.47. Mostrar que  $\|\rho\| = 1$ .

**Ex 2.1.29** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $G$  um espaço vetorial normado de dimensão finita e  $\rho: E \rightarrow G$  uma aplicação linear contínua e sobrejetiva. Mostrar que  $\rho: E \rightarrow G$  é uma aplicação aberta. **Sugestão:** O subespaço vetorial  $F = \ker(\rho)$  é fechado. Considerando em  $G$  a norma quociente, atender a que esta norma tem que ser equivalente à norma dada.

**Ex 2.1.30** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado e  $G \subset E$  um subespaço vetorial de dimensão finita (em particular também fechado). Verificar que o subespaço vetorial  $F + G \subset E$  também é fechado.<sup>174</sup>

**Sugestão:** Considerar o espaço vetorial normado quociente  $E/F$ , com a correspondente aplicação linear contínua  $\rho: E \rightarrow E/F$  (cf. 2.1.47) e verificar que  $F + G = \rho^{-1}(\rho(G))$ , onde  $\rho(G)$  é um subespaço vetorial de dimensão finita de  $E/F$ .

**Ex 2.1.31 (Codimensão de um subespaço vetorial)** Se  $E$  é um espaço vetorial, real ou complexo, e  $F \subset E$  é um subespaço vetorial, chama-se *codimensão* de  $F$  à dimensão do espaço vetorial quociente  $E/F$  (a codimensão pode ser assim um inteiro maior ou igual a 0 ou infinita). O único subespaço vetorial de codimensão 0 de  $E$  é o próprio  $E$  e dá-se o nome de *hiperplanos* de  $E$  aos subespaços vetoriais de codimensão 1.

**a)** Verificar que, se  $F \subset E$  é um subespaço vetorial então existe sempre um subespaço vetorial  $F' \subset E$  tal que tenha lugar a soma direta  $E = F \oplus F'$  e que então a codimensão de  $F$  coincide com a dimensão de  $F'$ . **Sugestão:** Recordar que, por aplicação do teorema de Zorn, todo o espaço vetorial admite uma base, finita ou infinita, e, mais geralmente, todo o sistema linearmente independente pode ser prolongado numa base. Partir então de uma base de  $F$  e prolongá-la numa base de  $E$ . Reparar que a restrição da aplicação linear canónica  $\rho: E \rightarrow E/F$  a  $F'$  é um isomorfismo de  $F'$  sobre  $E/F$ .

**b)** Verificar que um subespaço vetorial  $F \subset E$  é um hiperplano se, e só se, for um maximal da classe dos subespaços vetoriais próprios (isto é distintos de  $E$ ).

**c)** Sejam  $E$  e  $G$  espaços vetoriais,  $\lambda: E \rightarrow G$  uma aplicação linear e  $F = \ker(\lambda)$ . Verificar que existe um isomorfismo de  $E/F$  sobre  $\lambda(E) \subset G$ , que a  $[x]_F$  associa  $\lambda(x)$ , e concluir que a codimensão de  $F \subset E$  coincide com a dimensão de  $\lambda(E)$ .

**d)** Mostrar que um subespaço vetorial  $F \subset E$  é um hiperplano se, e só se, existir uma aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$ , com  $\lambda \neq 0$ , tal que  $F = \ker(\lambda)$ . **Sugestão:** Reparar que, se  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  não é a aplicação nula então é sobrejetiva e ter em conta a conclusão da alínea c).

**e)** Sejam  $F \subset G \subset E$  dois subespaços vetoriais. Verificar que tem lugar uma aplicação linear sobrejetiva  $E/F \rightarrow E/G$  definida por  $[x]_F \mapsto [x]_G$  e deduzir que a codimensão de  $F$  é maior ou igual à codimensão de  $G$ . Deduzir ainda que, se as duas codimensões fossem iguais e finitas então  $F = G$ .

<sup>174</sup>Note-se que não afirmamos que, em geral, a soma de dois subespaços vetoriais fechados tenha que ser um subespaço vetorial fechado. Para um contraexemplo ver o exercício 2.5.22 adiante.

**Ex 2.1.32 (Complemento do exercício 2.1.31 quando  $E$  é normado)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado, real ou complexo.

**a)** Mostrar que, se  $F \subset E$  é um hiperplano então  $F$  é fechado ou denso.

**Sugestão:** Lembrar 2.1.27.

**b)** Sejam  $G$  é um espaço vetorial normado de dimensão finita,  $\lambda: E \rightarrow G$  uma aplicação linear e  $F = \ker(\lambda) \subset E$ . Mostrar que  $\lambda$  é contínua se, e só se,  $F$  for fechado em  $E$ . **Sugestão:** Reparar que, pela alínea c) do exercício 2.1.31,  $F$  tem codimensão finita e, no caso em que  $F$  é fechado, considerar no espaço vetorial  $E/F$ , de dimensão finita, a norma quociente (cf. 2.1.47) e reparar que  $\lambda$  é a composta da aplicação canônica  $\rho: E \rightarrow E/F$  com uma aplicação linear  $E/F \rightarrow G$ , o qual é necessariamente contínua.

**c)** Concluir, em particular, que se  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  é uma aplicação linear com  $\lambda \neq 0$  o hiperplano  $F = \ker(\lambda)$  é fechado se, e só se, a aplicação linear  $\lambda$  é contínua.

**d)** Sejam  $F \subset E$  um subespaço fechado de codimensão finita e  $G \subset E$  um subespaço vetorial com  $F \subset G$ . Verificar que  $G$  também tem codimensão finita e é fechado.

**Sugestão:** Ter em conta a conclusão da alínea e) do exercício 2.1.31 e reparar que, considerando o espaço vetorial normado quociente  $E/F$  e a aplicação linear contínua canônica  $\rho: E \rightarrow E/F$ , tem-se  $G = \rho^{-1}(\rho(G))$ , onde  $\rho(G)$  é fechado por ser um subespaço vetorial de dimensão finita.

**Ex. 2.1.33 (Complexificado de um espaço vetorial normado real)** Seja  $E$  um espaço vetorial real (as primeiras duas alíneas são puramente algébricas, não considerando portanto nenhuma norma em  $E$ ).

**a)** Verificar que a estrutura de espaço vetorial real do produto cartesiano  $E \times E$  pode ser estendida num estrutura de espaço vetorial complexo deste espaço, que será notado  $E_{\mathbb{C}}$ , pondo para  $a, b$  em  $\mathbb{R}$  e  $x, y$  em  $\mathbb{C}$

$$(a + bi) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Mostrar ainda que  $(x, y) = (x, 0) + i \cdot (y, 0)$ , que tem lugar uma aplicação linear real injetiva  $\iota: E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$  definida por  $\iota(x) = (x, 0)$  e que tem lugar a soma direta de subespaços vetoriais reais  $E_{\mathbb{C}} = \iota(E) \oplus i \cdot \iota(E)$ . **Nota:** Tal como na construção dois complexos a partir dos reais, o isomorfismo  $\iota$  pode ser usado para identificar  $E$  ao subespaço vetorial  $\iota(E) \subset E_{\mathbb{C}}$ , cometendo-se o abuso de notar simplesmente  $x$  o elemento  $(x, 0)$  de  $E_{\mathbb{C}}$ .

**b)** Sejam  $F$  um espaço vetorial complexo. Mostrar que tem lugar uma aplicação linear complexa

$$L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; F) \rightarrow L_{\mathbb{R}}(E; F), \quad \widehat{\xi} \mapsto \widehat{\xi} \circ \iota$$

e que esta aplicação é um isomorfismo, isto é que para cada aplicação linear real  $\xi: E \rightarrow F$  existe uma única aplicação linear complexa  $\widehat{\xi}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow F$  que “prolonga”  $\xi$ , no sentido que que  $\widehat{\xi}(\iota(x)) = \xi(x)$  para cada  $x \in E$ . Mais precisamente mostrar que, dado  $\xi$ , tem-se  $\widehat{\xi}(x, y) = \xi(x) + i\xi(y)$ .

**c)** A partir desta alínea vamos supor que  $E$  é um espaço vetorial normado real. Mostrar que se pode definir uma *norma associada*  $\|\cdot\|$  de  $E_{\mathbb{C}}$ , como espaço vetorial complexo, por

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| &= \min\{M \geq 0 \mid \forall \lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{C}) \quad |\lambda(x) + i\lambda(y)| \leq M\|\lambda\|\} = \\ &= \sup_{\substack{\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{C}) \\ \lambda \neq 0}} \frac{|\lambda(x) + i\lambda(y)|}{\|\lambda\|} \end{aligned}$$

(a última igualdade só no caso em que  $E \neq \{0\}$ ).<sup>175</sup>

**d)** Verificar que, dado  $x \in E$ , tem-se  $\|(x, 0)\| = \|x\|$ , isto é, que a aplicação linear  $\iota: E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$  é isométrica. **Sugestão:** Afastado o caso trivial em que  $E = \{0\}$ , utilizar o corolário 2.1.62 do teorema de Hahn-Banach para garantir a existência de  $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{C})$  com  $\|\lambda\| = 1$  e  $\lambda(x) = \|x\|$ .

**e)** Verificar que se tem  $\|(x, -y)\| = \|(x, y)\|$ , por outras palavras que a “conjugação” é uma isometria real  $E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ . **Sugestão:** Para cada  $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{C})$  considerar  $\bar{\lambda} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{C})$  definido por  $\bar{\lambda}(x) = \overline{\lambda(x)}$ , que verifica  $\|\bar{\lambda}\| = \|\lambda\|$ , e reparar que

$$\lambda(x) + i\lambda(-y) = \lambda(x) - i\lambda(y) = \overline{\bar{\lambda}(x) + i\bar{\lambda}(y)}.$$

**f)** Reparando que

$$(x, 0) = \frac{1}{2}((x, y) + (x, -y)), \quad (y, 0) = \frac{i}{2}((x, y) - (x, -y)),$$

deduzir de e) que  $\|(x, y)\| \geq \|x\|$  e  $\|(x, y)\| \geq \|y\|$ .

**g)** Mostrar que para cada  $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$  tem-se

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|(x, y)\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

e concluir que a norma que estamos a considerar em  $E_{\mathbb{C}}$  é uma das que definem a topologia produto de  $E \times E$ .

**h)** Seja  $F$  um espaço vetorial normado complexo. Mostrar que a restrição do isomorfismo  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; F) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  referido em b) aplica  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; F)$  sobre  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$ , sendo mesmo uma isometria linear de  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; F)$  sobre  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$ .

**Sugestão:** Tendo em conta 2.1.44, já sabemos que se  $\hat{\xi} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; F)$  tem imagem  $\xi$  então  $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  e  $\|\xi\| \leq \|\hat{\xi}\|$ . Reciprocamente, se  $\xi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  for a imagem de  $\hat{\xi}$ , considerar  $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$  arbitrário, e afastando já o caso trivial em que  $E = \{0\}$ , utilizar o corolário 2.1.62 do teorema de Hahn-Banach para considerar uma aplicação linear contínua complexa  $\mu: F \rightarrow \mathbb{C}$  com  $\|\mu\| = 1$  e

$$\mu(\xi(x) + i\xi(y)) = \|\xi(x) + i\xi(y)\|$$

e reparar que  $\mu \circ \xi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{C})$  verifica  $\|\mu \circ \xi\| \leq \|\xi\|$  e portanto

$$\|\hat{\xi}(x, y)\| = \|\xi(x) + i\xi(y)\| = |\mu(\xi(x) + i\mu(\xi(y)))| \leq \|(x, y)\| \|\xi\|.$$

**i) (Versão multilinear de h)**<sup>176</sup> Para cada  $n \geq 1$  e cada espaço vetorial normado complexo  $F$  mostrar que tem lugar uma isometria linear complexa de  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^n(E_{\mathbb{C}}; F)$  sobre  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^n(E; F)$  que a  $\hat{\xi}$  associa  $\hat{\xi} \circ (\iota \times \cdots \times \iota)$ . **Sugestão:** Para  $n = 1$  temos a conclusão da alínea precedente. Supondo o resultado válido para um certo  $n \geq 1$  verificar que a aplicação de  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{n+1}(E_{\mathbb{C}}; F)$  para  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{n+1}(E; F)$  é a composta de

<sup>175</sup>Esta não é a única norma complexa sobre  $E_{\mathbb{C}}$  que pode ser interessante considerar.

<sup>176</sup>No contexto puramente algébrico das alíneas a) e b) também poderíamos ter proposto uma versão multilinear de b).

isometrias lineares, nomeadamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{n+1}(E_{\mathbb{C}}; F) &\rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^n(E_{\mathbb{C}}; F)), && \text{cf. 2.1.43} \\ \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^n(E_{\mathbb{C}}; F)) &\rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^n(E; F)), && \text{cf. 2.1.45 e hipótese de indução} \\ \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^n(E; F)) &\rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^n(E; F)), && \text{cf. a conclusão de h)} \\ \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^n(E; F)) &\rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{n+1}(E; F), && \text{cf. 2.1.43.} \end{aligned}$$

**Ex 2.1.34 (O teorema de Hahn-Banach geométrico) a)** Se  $E$  é um espaço vetorial real, diz-se que um conjunto  $A \subset E$  é um *cone* se, sempre que  $x \in A$  e  $t > 0$ , tem-se  $tx \in A$ . Mostrar que, se  $A \subset E$  é um cone, então  $A$  é convexo se, e só se, sempre que  $x, y \in A$ ,  $x + y \in A$ .

**b)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado real de dimensão maior ou igual a 2 (eventualmente infinita) e seja  $U \subset E$  um aberto convexo não vazio tal que  $0 \notin U$ . Mostrar que existe um subespaço vetorial  $F \subset E$  de dimensão 1 tal que  $F \cap U = \emptyset$ .

**Sugestão:** 1) Começar por reparar que, sendo  $\hat{U}$  a união dos  $tU$ , com  $t > 0$ , o conjunto  $\hat{U}$  é ainda um aberto convexo que não contém 0,  $\hat{U} \supset U$  e  $\hat{U}$  é um cone. Verificar que, se  $x \in \hat{U}$ , então  $-x \notin \hat{U}$  e, consequentemente,  $\hat{U} \cap (-\hat{U}) = \emptyset$ . Tendo em conta o exercício 2.1.25, concluir a existência de  $x \in E \setminus \{0\}$  com  $x \notin \hat{U} \cup (-\hat{U})$  e tomar para  $F$  o subespaço vetorial gerado por  $x$ .

**c)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado real e seja  $U \subset E$  um aberto convexo não vazio tal que  $0 \notin U$ . Mostrar que existe um hiperplano fechado  $F \subset E$  tal que  $F \cap U = \emptyset$ . **Sugestão:** Utilizar o teorema de Zorn para mostrar que a classe dos subespaços vetoriais  $F \subset E$  tais que  $F \cap U = \emptyset$  admite um maximal  $F$ , examinar o que se passa com  $\text{ad}(F)$  para concluir que  $F$  é fechado e utilizar a conclusão de b), com o espaço vetorial normado quociente  $E/F$  e o aberto convexo imagem de  $U$  em  $E/F$  para deduzir que  $E/F$  tem que ter dimensão 1.

**d)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado real e seja  $U \subset E$  um aberto convexo não vazio tal que  $0 \notin U$ . Mostrar que existe uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lambda(x) > 0$ , para todo o  $x \in U$ . **Sugestão:** Ter em conta as conclusões de c), da alínea d) do exercício 2.1.31 e a alínea c) do exercício 2.1.32, substituindo, eventualmente,  $\lambda$  por  $-\lambda$ .

**e)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado real e sejam  $C \subset E$  um conjunto convexo não vazio e  $U \subset E$  um aberto convexo não vazio, com  $C \cap U = \emptyset$ . Mostrar que existe uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$  tais que  $\lambda(y) \leq a$ , para cada  $y \in C$  e  $\lambda(x) > a$ , para cada  $x \in U$ . **Sugestão:** Aplicar a conclusão de d) ao conjunto  $\hat{U}$  dos  $x - y$ , com  $x \in U$  e  $y \in C$ , que se verificará ser um aberto convexo que não contém 0. Tomar para  $a$  o supremo dos  $\lambda(y)$ , com  $y \in C$  e verificar que  $\lambda$  não pode atingir um mínimo em  $U$ .

**f)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado real, chamam-se *semi-espacos afins fechados* de  $E$  aos conjuntos da forma  $\{y \in E \mid \lambda(y) \leq a\}$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$  linear contínua sobrejetiva. Utilizar a conclusão de e) para concluir que qualquer conjunto convexo fechado não vazio  $C \subset E$  é a interseção de uma família (em geral infinita) de semi-espacos afins fechados. **Sugestão:** Para cada  $y \notin C$ , considerar uma bola aberta de centro  $y$  que não intersekte  $C$ .

## §2. Espaços de Banach.

**2.2.1** Chama-se *espaço de Banach* a um espaço vetorial normado  $E$ , que é completo relativamente à métrica associada.

**2.2.2** Se  $E$  é um espaço de Banach, com uma norma  $|||$ , e se  $|||'$  é uma norma equivalente a  $|||$ , então  $E$  com a norma  $|||'$  é também um espaço de Banach.<sup>177</sup>

**Dem:** Basta atender ao referido em 1.7.7, uma vez que, tendo em conta 2.1.16, as métricas associadas às duas normas são Lipschitz-equivalentes.  $\square$

**2.2.3** Mais geralmente, sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e  $\lambda: E \rightarrow F$  um isomorfismo bicontínuo. Se  $E$  for um espaço de Banach então  $F$  é também um espaço de Banach.

**Dem:** Trata-se de uma consequência de 1.7.24, uma vez que, tendo em conta 2.1.15, a aplicação linear contínua  $\lambda^{-1}: F \rightarrow E$ , sendo contínua, é lipschitziana, em particular uniformemente contínua.  $\square$

**2.2.4 (Primeiros exemplos de espaço de Banach)** Os espaços vetoriais  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ , de dimensão 1, em ambos os casos como o valor absoluto como norma, são espaços de Banach.

**Dem:** O facto de  $\mathbb{R}$ , com a sua métrica usual, que não é mais do que a associada ao valor absoluto, ser completo já foi justificado em 1.7.10. Nesse mesmo resultado foi também provado que para cada  $n \geq 1$  o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  com a métrica  $d_\infty$ , e consequentemente também com a métrica euclidiana  $d_2$ , é completo. Uma vez que a métrica de  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  associada ao valor absoluto é a métrica euclidiana  $d_2$ , concluímos que  $\mathbb{C}$  é também um espaço de Banach.  $\square$

**2.2.5** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço de Banach, real ou complexo. Tem-se então que o espaço vetorial normado

$$\ell_E^\infty(I) = \mathbb{B}(I, E),$$

com a norma  $|||_\infty$  (cf. 2.1.9 e 2.1.10) é também um espaço de Banach.

**Dem:** Temos simplesmente um caso particular da conclusão obtida em 1.7.11.  $\square$

**2.2.6 (Lema)** Como caso particular de 2.2.5, tomando  $I = \{1, \dots, n\}$  e  $E = \mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), com o valor absoluto como norma, vemos que  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$ , em ambos os casos com a norma  $|||_\infty$ , são espaços de Banach.

---

<sup>177</sup>Por outras palavras, ao contrário do que sucede em geral no contexto dos espaços métricos, no contexto dos espaços vetoriais normados a completude é uma noção topológica.



**2.2.7** Se  $E$  é um espaço vectorial normado de dimensão finita, então  $E$  é um espaço de Banach.

**Dem:** Podemos afastar o caso trivial em que  $E = \{0\}$ . Sendo  $w_1, \dots, w_n$  uma base de  $E$ , podemos considerar o isomorfismo  $\lambda: \mathbb{K}^n \rightarrow E$  associado a esta base, definido por

$$\lambda(a_1, \dots, a_n) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n,$$

isomorfismo esse que é um isomorfismo topológico, tendo em conta 2.1.51, e portanto, por 2.2.3, o facto de  $\mathbb{K}^n$  ser um espaço de Banach implica que  $E$  também é um espaço de Banach.  $\square$

**2.2.8** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto não vazio e  $E$  um espaço de Banach. Tem-se então que o subespaço vectorial  $\mathcal{C}(X, E)$  de  $\mathbb{B}(X, E)$  constituído pelas aplicações contínuas de  $X$  para  $E$  (cf. 2.1.26) é também um espaço de Banach, para a norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Dem:** Trata-se de um consequência de se tratar de um subespaço vectorial fechado do espaço de Banach  $\mathbb{B}(X, E)$  (cf. 2.1.26) ou, se preferirmos, a completude de  $\mathcal{C}(X, E)$  é um caso particular da conclusão de 1.7.14.  $\square$

**2.2.9** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $E_i$  um espaço de Banach. Considerando no produto cartesiano  $\prod_{i \in I} E_i$  a norma do máximo (cf. 2.1.12), cuja topologia associada é a topologia produto das topologias associadas dos  $E_i$ , tem-se que  $\prod_{i \in I} E_i$  é um espaço de Banach.

**Dem:** Temos simplesmente um caso particular da conclusão obtida em 1.7.12.  $\square$

**2.2.10 (Espaço de Banach das aplicações lineares)** Sejam  $F$  um espaço vectorial normado e  $G$  um espaço de Banach. Tem-se então que o espaço vectorial normado  $\mathcal{L}(F; G)$  (cf. 2.1.30) é também um espaço de Banach.<sup>178</sup>

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $a \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow a$ . Para cada  $y \in F$  podemos considerar uma aplicação linear  $\xi_y: \mathcal{L}(F; G) \rightarrow G$  definida por  $\xi_y(\alpha) = \alpha(y)$ , para a qual se tem

$$\|\xi_y(\alpha)\| = \|\alpha(y)\| \leq \|y\| \|\alpha\|,$$

o que implica que esta aplicação linear é lipschitziana, em particular uniformemente contínua (cf. 2.1.15). Tendo em conta 1.7.23, para cada  $y \in F$  a aplicação  $\xi_y \circ f: A \rightarrow G$  verifica a condição de Cauchy quando

<sup>178</sup>Em harmonia com a observação que fizemos na nota 2.1.32, admitimos neste resultado três situações: 1) Se  $F$  e  $G$  são espaços vectoriais reais, então  $\mathcal{L}(F, G)$  é um espaço vectorial real; 2) Se  $F$  e  $G$  são espaços vectoriais complexos, então  $\mathcal{L}(F, G)$  é um espaço vectorial complexo; 3) Se  $F$  é um espaço vectorial real e  $G$  é um espaço vectorial complexo, então  $\mathcal{L}(F; G)$  é um espaço vectorial complexo. De facto, só a situação 3) ultrapassa as convenções usuais de trabalharmos implicitamente com espaços vectoriais sobre o mesmo corpo.

$x \rightarrow a$  e portanto, por  $G$  ser completo, podemos definir uma aplicação  $\lambda: F \rightarrow G$  pela condição de se ter

$$f(x)(y) = \xi_y(f(x)) \rightarrow \lambda(y)$$

quando  $x \rightarrow a$ . Dados  $y, y' \in F$  e o escalar  $c$  do espaço vetorial  $G$ , deduzimos de 2.1.20 e 2.1.31 que

$$f(x)(y + y') = f(x)(y) + f(x)(y')$$

tem simultaneamente os limites  $\lambda(y + y')$  e  $\lambda(y) + \lambda(y')$  quando  $x \rightarrow a$  e que  $f(x)(cy) = cf(x)(y)$  tem simultaneamente os limites  $\lambda(cy)$  e  $c\lambda(y)$  quando  $x \rightarrow a$ , o que implica que

$$\lambda(y + y') = \lambda(y) + \lambda(y'), \quad \lambda(cy) = c\lambda(y),$$

ou seja que  $\lambda: F \rightarrow G$  é uma aplicação linear.

Seja agora  $\delta > 0$  arbitrário. Podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $a$  em  $X$  tal que, sempre que  $x, x' \in V \cap A$ , venha  $\|f(x) - f(x')\| \leq \delta$  donde, para cada  $y \in F$ ,

$$(1) \quad \|f(x)(y) - f(x')(y)\| \leq \delta \|y\|.$$

Fixado  $x' \in V \cap A$  e tendo em conta 1.2.39, 1.2.53 e a continuidade na norma (cf. 2.1.5), deduzimos de (1), considerando o limite quando  $x \rightarrow a$  que, para cada  $y \in F$ ,

$$(2) \quad \|\lambda(y) - f(x')(y)\| \leq \delta \|y\|$$

A desigualdade precedente implica, por 2.1.15, que a aplicação linear  $\lambda - f(x'): F \rightarrow G$  é contínua, e portanto que o mesmo acontece a

$$\lambda = (\lambda - f(x')) + f(x'),$$

e, por outro lado, que  $\|\lambda - f(x')\| \leq \delta$ , o que, tendo em conta a arbitrariedade do elemento  $x'$  fixado em  $V \cap A$ , mostra que  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$  admite o limite  $\lambda \in \mathcal{L}(F; G)$  quando  $x \rightarrow a$ .  $\square$

**2.2.11 (Espaço de Banach das aplicações multilineares)** Mais geralmente, sejam  $F_1, \dots, F_n$  espaços vetoriais normados e  $G$  um espaço de Banach. Tem-se então que o espaço vetorial  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G)$ , das aplicações multilineares  $F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow G$ , é também um espaço de Banach.

**Dem:** Poderíamos apresentar uma demonstração análoga à do caso linear, que acabámos de examinar, mas será mais simples partir do caso linear e fazer uma demonstração por indução em  $n$ . O caso em que  $n = 1$  é o resultado precedente. Suponhamos que o resultado é válido para um certo valor de  $n$  e que temos  $n + 1$  espaços vetoriais normados  $F_1, \dots, F_n, F_{n+1}$  e um espaço de Banach  $G$ . Tendo em conta a hipótese de indução e o resultado precedente, vemos sucessivamente que são espaços de Banach os espaços vetoriais normados  $\mathcal{L}(F_{n+1}; G)$  e  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; \mathcal{L}(F_{n+1}; G))$ . Considerando

agora a existência de um isomorfismo bicontínuo

$$\Upsilon_n^{-1}: \mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; \mathcal{L}(F_{n+1}; G)) \rightarrow \mathcal{L}(F_1, \dots, F_n, F_{n+1}; G)$$

(cf. 2.1.43), deduzimos de 2.2.3 que  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n, F_{n+1}; G)$  é também um espaço de Banach.  $\square$

**2.2.12 (Prolongamento de aplicações lineares contínuas)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $E_0 \subset E$  um subespaço vetorial denso e  $F$  um espaço de Banach. Se  $\lambda_0: E_0 \rightarrow F$  é uma aplicação linear contínua, então existe uma única aplicação contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  tal que  $\lambda|_{E_0} = \lambda_0$  e esta aplicação é linear e verifica  $\|\lambda\| = \|\lambda_0\|$ . Além disso, no caso em que a aplicação linear  $\lambda_0: E_0 \rightarrow F$  é isométrica (cf. 2.1.33), o prolongamento  $\lambda: E \rightarrow F$  é também isométrico.

**Dem:** Tendo em conta 2.1.15, a aplicação  $\lambda_0: E_0 \rightarrow F$  é lipschitziana, em particular uniformemente contínua (cf. 1.7.21). De facto, vemos que a norma  $\|\lambda_0\|$  é uma constante de Lipschitz para  $\lambda_0$  visto que se  $x, x' \in E_0$  vem

$$\|\lambda_0(x) - \lambda_0(x')\| = \|\lambda_0(x - x')\| \leq \|\lambda_0\| \|x - x'\|.$$

Tendo em conta 1.7.27, existe um única aplicação contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  tal que  $\lambda|_{E_0} = \lambda_0$  e esta aplicação admite a constante de Lipschitz  $\|\lambda_0\|$ , em particular para cada  $x \in E$  vem

$$(1) \quad \|\lambda(x)\| = \|\lambda(x) - \lambda(0)\| \leq \|\lambda_0\| \|x - 0\| = \|\lambda_0\| \|x\|.$$

Verifiquemos agora que a aplicação contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  é linear. Ora, tendo em conta a continuidade de  $\lambda$ , vemos que o subconjunto de  $E \times E$

$$\begin{aligned} A &= \{(x, x') \in E \times E \mid \lambda(x + x') = \lambda(x) + \lambda(x')\} = \\ &= \{(x, x') \in E \times E \mid \lambda(x + x') - \lambda(x) - \lambda(x') = 0\} \end{aligned}$$

é fechado em  $E \times E$  e, pela linearidade de  $\lambda_0$ , contém  $E_0 \times E_0$  que, tendo em conta 1.5.23, é igual a  $E \times E$ , por outras palavras, tem-se

$$\lambda(x + x') = \lambda(x) + \lambda(x')$$

quaisquer que sejam  $x, x' \in E$ . Do mesmo modo, o facto de se ter  $\lambda(ax) = a\lambda(x)$  para cada  $a \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$  resulta de para cada  $a \in \mathbb{K}$  o conjunto

$$A_a = \{x \in E \mid \lambda(ax) = a\lambda(x)\} = \{x \in E \mid \lambda(ax) - a\lambda(x) = 0\}$$

ser fechado em  $E$  e conter  $E_0$ , tendo assim que ser igual a  $E$ .

Provada a linearidade da aplicação contínua  $\lambda: E \rightarrow F$ , a desigualdade (1) implica que  $\|\lambda\| \leq \|\lambda_0\|$  e a desigualdade oposta  $\|\lambda_0\| \leq \|\lambda\|$  é uma consequência de se ter, para cada  $x \in E_0$ ,

$$\|\lambda_0(x)\| = \|\lambda(x)\| \leq \|\lambda\| \|x\|.$$

O facto de  $\lambda: E \rightarrow F$  ser uma aplicação linear isométrica quando  $\lambda_0: E_0 \rightarrow F$  o é resulta da conclusão já obtida em 1.7.27.  $\square$

No contexto dos espaços métricos definimos em 1.7.28 a noção de completado e provámos nos resultados seguintes a existência de completados e a sua unicidade “a menos de isometria”. Vamos agora adaptar essa noção ao contexto dos espaços vetoriais normados.

**2.2.13 (Completado dum espaço vetorial normado)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Diz-se que um espaço vetorial normado  $\widehat{E}$  é um *completado vetorial* de  $E$ , definido pela aplicação linear  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$ , se  $\widehat{E}$  é um espaço de Banach,  $\xi$  é uma aplicação linear isométrica e  $\xi(E)$  é denso em  $\widehat{E}$ .

É claro que se  $\widehat{E}$  é um completado vetorial de  $E$  definido pela aplicação linear  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$ , então, em particular, enquanto espaço métrico,  $\widehat{E}$  é um completado dos espaço métrico  $E$  definido pela aplicação  $\xi$  (cf. 1.7.28).

**2.2.14 (Propriedade fundamental do completado vetorial)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $\widehat{E}$  um completado vetorial de  $E$  definido pela aplicação linear  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$ . Sejam  $F$  um espaço de Banach e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Existe então uma única aplicação contínua  $\widehat{\lambda}: \widehat{E} \rightarrow F$  tal que  $\widehat{\lambda}(\xi(x)) = \lambda(x)$  para cada  $x \in E$  e esta aplicação  $\widehat{\lambda}$  é linear e com  $\|\widehat{\lambda}\| = \|\lambda\|$ . Além disso, se  $\lambda$  for uma aplicação linear isométrica então  $\widehat{\lambda}$  é também uma aplicação linear isométrica.

**Dem:** Uma vez que  $\lambda$ , sendo uma aplicação linear contínua, é lipschitziana, em particular uniformemente contínua (cf. 2.1.15), a existência e unicidade de uma aplicação contínua  $\widehat{\lambda}: \widehat{E} \rightarrow F$  tal que  $\widehat{\lambda}(\xi(x)) = \lambda(x)$  para cada  $x \in E$  é uma consequência de 1.7.29. Reparemos agora que o facto de  $\xi$  ser uma aplicação linear isométrica implica que  $\xi: E \rightarrow \xi(E)$  é uma isometria linear, em particular um isomorfismo topológico com  $\|\xi\| \leq 1$  e, para o isomorfismo inverso  $\xi^{-1}: \xi(E) \rightarrow E$ , também  $\|\xi^{-1}\| \leq 1$  (cf. 2.1.33 e 2.1.41). Resulta daqui que a restrição da aplicação contínua  $\widehat{\lambda}: \widehat{E} \rightarrow F$  ao subespaço vetorial denso  $\xi(E) \subset \widehat{E}$  está definida por  $y \mapsto \lambda(\xi^{-1}(y))$  sendo portanto linear contínua e resulta daqui, por 2.2.12, que  $\widehat{\lambda}$  é linear e com

$$\|\widehat{\lambda}\| = \|\lambda \circ \xi^{-1}\| \leq \|\lambda\| \|\xi^{-1}\| \leq \|\lambda\|.$$

A desigualdade inversa resulta de se ter

$$\|\lambda\| = \|\widehat{\lambda} \circ \xi\| \leq \|\widehat{\lambda}\| \|\xi\| \leq \|\widehat{\lambda}\|.$$

No caso em que  $\lambda: E \rightarrow F$  é uma aplicação linear isométrica resulta do contexto mais geral examinado em 1.7.29 que a aplicação linear  $\widehat{\lambda}: \widehat{E} \rightarrow F$  é também isométrica.  $\square$

**2.2.15 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $\widehat{E}$  um completado vetorial de  $E$  definido pela aplicação linear  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$ . Se  $F$  é um espaço de Banach, tem lugar uma isometria linear  $\xi^*: \mathcal{L}(\widehat{E}; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  definida por  $\xi^*(\widehat{\lambda}) = \widehat{\lambda} \circ \xi$ .

**Dem:** A linearidade de  $\xi^*$  é imediata e o facto de  $\xi^*$  ser sobrejetiva e injetiva e verificar  $\|\xi^*(\widehat{\lambda})\| = \|\widehat{\lambda}\|$  é uma mera reformulação das conclusões de 2.2.14.  $\square$

**2.2.16 (Corolário — Aplicações bilineares e completados)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados admitindo os completados  $\widehat{E}$  e  $\widehat{F}$  definidos pelas aplicações lineares  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$  e  $\eta: F \rightarrow \widehat{F}$ . Se  $G$  é um espaço de Banach e  $\lambda: E \times F \rightarrow G$  é uma aplicação bilinear contínua então existe uma única aplicação contínua  $\widehat{\lambda}: \widehat{E} \times \widehat{F} \rightarrow G$  verificando a identidade

$$\widehat{\lambda}(\xi(x), \eta(y)) = \lambda(x, y)$$

e esta aplicação contínua  $\widehat{\lambda}$  é bilinear e verifica  $\|\widehat{\lambda}\| = \|\lambda\|$ .

**Dem:** A unicidade de uma aplicação contínua  $\widehat{\lambda}$  nas condições enunciadas é uma consequência de 1.4.29 uma vez que, tendo em conta 1.5.23,  $\xi(E) \times \eta(F)$  é um subconjunto denso de  $\widehat{E} \times \widehat{F}$ . Para provar a existência de  $\widehat{\lambda}$  e as propriedades enunciadas<sup>179</sup>, lembramos a isometria linear  $\Upsilon_1$  em 2.1.43, e consideramos a aplicação linear contínua

$$\tilde{\lambda} = \Upsilon_1(\lambda): E \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$$

que está definida por  $\tilde{\lambda}(x)(y) = \lambda(x, y)$  e verifica  $\|\tilde{\lambda}\| = \|\lambda\|$ . Por composição com o inverso da isometria linear  $\eta^*: \mathcal{L}(\widehat{F}; G) \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$  referida no corolário 2.2.15, obtemos uma aplicação linear contínua

$$\eta^{*-1} \circ \tilde{\lambda}: E \rightarrow \mathcal{L}(\widehat{F}; G),$$

cuja norma é menor ou igual a  $\|\tilde{\lambda}\| = \|\lambda\|$ . Tendo em conta 2.2.14, podemos agora considerar uma aplicação linear contínua  $\bar{\lambda}: \widehat{E} \rightarrow \mathcal{L}(\widehat{F}; G)$ , com norma menor ou igual a  $\|\lambda\|$ , verificando a igualdade

$$\bar{\lambda}(\xi(x)) = \eta^{*-1} \circ \tilde{\lambda}(x)$$

para cada  $x \in E$ . Considerando, enfim, o inverso da isometria linear  $\Upsilon_1$  em 2.1.43, obtemos uma aplicação bilinear contínua

$$\widehat{\lambda} = \Upsilon_1^{-1}(\bar{\lambda}): \widehat{E} \times \widehat{F} \rightarrow G,$$

que tem norma menor ou igual a  $\|\lambda\|$ . Para esta aplicação bilinear tem-se então

<sup>179</sup>Repare-se que não há esperança de obter diretamente  $\widehat{\lambda}$  por aplicação de 1.7.29, uma vez que as aplicações bilineares contínuas não são, em geral, uniformemente contínuas.

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}(\xi(x), \eta(y)) &= \overline{\lambda}(\xi(x))(\eta(y)) = \eta^{*-1}(\tilde{\lambda}(x))(\eta(y)) = \\ &= \tilde{\lambda}(x)(y) = \lambda(x, y).\end{aligned}$$

Como já referimos, tem-se  $\|\widehat{\lambda}\| \leq \|\lambda\|$  e o facto de se ter também  $\|\lambda\| \leq \|\widehat{\lambda}\|$  resulta de se ter

$$\|\lambda(x, y)\| = \|\widehat{\lambda}(\xi(x), \eta(y))\| \leq \|\widehat{\lambda}\| \|\xi(x)\| \|\eta(y)\| = \|\widehat{\lambda}\| \|x\| \|y\|. \quad \square$$

**2.2.17 (“Unicidade” do completado vetorial)** Suponhamos que  $\widehat{E}_1$  e  $\widehat{E}_2$  são dois completados vetoriais do espaço vetorial normado  $E$ , definidos pelas aplicações lineares  $\xi_1: E \rightarrow \widehat{E}_1$  e  $\xi_2: E \rightarrow \widehat{E}_2$ . Tem-se então que a única aplicação contínua  $\mu: \widehat{E}_1 \rightarrow \widehat{E}_2$  que verifica  $\mu \circ \xi_1 = \xi_2$  é uma isometria linear, tendo como inverso a única aplicação contínua  $\mu': \widehat{E}_2 \rightarrow \widehat{E}_1$  que verifica  $\mu' \circ \xi_2 = \xi_1$ .

**Dem:** O facto de  $\mu$  e  $\mu'$  estarem bem definidas pela condição do enunciado e serem aplicações lineares isométricas resulta de 2.2.14. O facto de  $\mu$  ser bijetiva e com inverso  $\mu'$  resulta de 1.7.30.  $\square$

**2.2.18 (Exemplos triviais de completados vetoriais)** Analogamente ao referido em 1.7.31, se  $\widehat{E}$  é um espaço de Banach e  $E \subset \widehat{E}$  é um subespaço vetorial denso então  $\widehat{E}$  é um completado vetorial de  $E$  definido pela inclusão  $\iota: E \rightarrow \widehat{E}$ . Em particular, se  $\widehat{E}$  é um espaço de Banach, então  $\widehat{E}$  é um completado vetorial de si mesmo definido pela aplicação identidade  $Id: \widehat{E} \rightarrow \widehat{E}$ .

**2.2.19 (Construção de um completado vetorial)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , e consideremos os espaços de Banach  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , das aplicações lineares contínuas  $E \rightarrow \mathbb{K}$ , e

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$$

(o *dual topológico* e o *bidual topológico*, respetivamente). Tem então lugar uma aplicação linear isométrica

$$\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K}),$$

em particular injetiva, definida por  $\Theta(x)(\lambda) = \lambda(x)$  e, consequentemente, sendo  $\widehat{E}$  o subespaço vetorial aderência de  $\Theta(E)$  em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ ,  $\widehat{E}$  é um completado vetorial de  $E$  definido por  $\Theta$ .

**Dem:** O facto de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  serem espaços de Banach é consequência, em ambos os casos, de  $\mathbb{K}$  ser um espaço de Banach (cf. 2.2.10). Para cada  $x \in E$  podemos considerar a aplicação  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  que a  $\lambda$  associa  $\lambda(x)$  a qual é trivialmente linear e é contínua, e com norma menor ou igual a  $\|x\|$  como consequência da desigualdade

$$|\lambda(x)| \leq \|x\| \|\lambda\|$$

válida para todo o  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ . Podemos assim definir uma aplicação

$$\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$$

por  $\Theta(x)(\lambda) = \lambda(x)$ , aplicação essa que é trivialmente linear, sendo também contínua uma vez que, como vimos atrás,  $\|\Theta(x)\| \leq \|x\|$ . Mostremos agora que  $\Theta$  é mesmo uma aplicação linear isométrica, isto é que se tem mesmo  $\|\Theta(x)\| = \|x\|$  para cada  $x \in E$ . Ora, esta igualdade é trivial se  $x = 0$  e caso contrário, podemos utilizar a consequência 2.1.62 do teorema da Hahn Banach para encontrar  $\lambda_0 \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  com  $\lambda_0(x) = 1$  e  $\|\lambda_0\| = 1/\|x\|$  pelo que, além de para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  com  $\lambda \neq 0$  vir

$$(1) \quad \frac{|\Theta(x)(\lambda)|}{\|\lambda\|} = \frac{|\lambda(x)|}{\|\lambda\|} \leq \frac{\|\lambda\| \|x\|}{\|\lambda\|} = \|x\|$$

vem

$$\frac{|\Theta(x)(\lambda_0)|}{\|\lambda_0\|} = \frac{\|\lambda_0(x)\|}{\|\lambda_0\|} = \frac{1}{1/\|x\|} = \|x\|$$

e fica provado que  $\|\Theta(x)\|$ , supremo dos quocientes no membro esquerdo de (1), é mesmo um máximo, igual a  $\|x\|$ , atingido para  $\lambda = \lambda_0$ . Tendo em conta 2.1.27, a aderência  $\widehat{E}$  de  $\Theta(E)$  é um subespaço vetorial fechado de  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  portanto, como este, um espaço de Banach e, por construção,  $\Theta(E)$  é denso em  $\widehat{E}$ .  $\square$

Aproveitamos agora a aplicação linear  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ , utilizada na construção precedente, para definir os espaços de Banach reflexivos, uma noção para a qual os exemplos mais interessantes serão encontrados na próxima secção (ver 2.3.55 para um exemplo de espaço de Banach reflexivo e 2.3.58 ou o exercício 2.2.9 para um exemplo de espaço de Banach não reflexivo).

**2.2.20 (Espaços de Banach reflexivos)** Diz-se que um espaço vetorial normado  $E$  é *reflexivo* se a aplicação linear isométrica  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ , definida em 2.2.19, for sobrejetiva (e portanto uma isometria topológica). Por outras palavras, o espaço vetorial normado  $E$  é reflexivo se, e só se, para cada aplicação linear contínua  $\xi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  existe um elemento  $x \in E$  (necessariamente único) tal que  $\xi(\lambda) = \lambda(x)$  para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  (Costuma então dizer-se que  $x$  representa a aplicação linear  $\xi$ ).

Um espaço vetorial normado reflexivo é necessariamente um espaço de Banach, motivo por que daqui em diante nos referiremos usualmente à reflexividade assumindo que os espaços vetoriais normados envolvidos são espaços de Banach.

**Dem:** Basta atender a 2.2.3, uma vez que  $\Theta^{-1}: \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K}) \rightarrow E$  é então um isomorfismo topológico com  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  espaço de Banach.  $\square$

Os dois resultados a seguir utilizam o facto de os espaços reflexivos “serem essencialmente” os duais dos seus duais para mostrar propriedades destes que podem não ser válidas em espaços de Banach gerais.

**2.2.21 (Formas lineares contínuas com domínio reflexivo)**<sup>180</sup> Sejam  $E \neq \{0\}$  um espaço de Banach reflexivo sobre  $\mathbb{K}$  e  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação linear contínua. Existe então  $x_0 \in E$  com  $\|x_0\| = 1$  tal que  $\lambda(x_0) = \|\lambda\|$ . Em particular, na caracterização, em 2.1.30, de  $\|\lambda\|$  como um supremo, podemos garantir que o supremo em questão é mesmo um máximo.

**Dem:** Se  $\lambda = 0$  podemos tomar para  $x_0$  um vetor arbitrário de norma 1 (por exemplo  $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$  para  $x \in E \setminus \{0\}$  arbitrário). Suponhamos então que  $\lambda \neq 0$ . Tendo em conta 2.1.62, podemos considerar uma aplicação linear contínua  $\alpha_0: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  com  $\|\alpha_0\| = 1$  e  $\alpha_0(\lambda) = \|\lambda\|$ . Tendo em conta o facto de  $E$  ser reflexivo podemos considerar  $x_0 \in E$  com  $\|x_0\| = \|\alpha_0\| = 1$  tal que  $\alpha_0 = \Theta(x_0)$  tendo-se então

$$\lambda(x_0) = \Theta(x_0)(\lambda) = \alpha_0(\lambda) = \|\lambda\|. \quad \square$$

**2.2.22 (Dual dum espaço de Banach reflexivo separável)** Seja  $E$  um espaço de Banach separável e reflexivo sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Tem-se então que o dual  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é também separável.

**Dem:** Uma vez que  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  é uma aplicação linear contínua, concluímos de 1.4.19 que o dual  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é também separável e daqui decorre, por 2.1.73, que  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é separável.  $\square$

**2.2.23 (Invariância por isomorfismo topológico)** Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Banach e  $\alpha: E \rightarrow F$  um isomorfismo topológico. Tem-se então que  $E$  é reflexivo se, e só se,  $F$  é reflexivo.

**Dem:** Basta demonstrar que  $F$  é reflexivo se  $E$  o for, uma vez que a recíproca resulta então de aplicar esta conclusão ao isomorfismo topológico  $\alpha^{-1}: F \rightarrow E$ . Suponhamos então que  $E$  é reflexivo e consideremos o isomorfismo topológico

$$\alpha^* = \mathcal{L}(\alpha; Id_{\mathbb{K}}): \mathcal{L}(F; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$$

cujos inverso é  $\alpha^{*-1} = \mathcal{L}(\alpha^{-1}; Id_{\mathbb{K}})$  (cf. 2.1.45). Seja  $\xi: \mathcal{L}(F; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação linear contínua. Considerando a aplicação linear contínua

$$\xi \circ \alpha^{*-1}: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K},$$

o facto de  $E$  ser reflexivo implica a existência de  $x \in E$  tal que, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , venha  $\xi \circ \alpha^{*-1}(\lambda) = \lambda(x)$ . Tem-se então que o elemento  $y = \alpha(x) \in F$  tem a propriedade de, para cada  $\hat{\lambda} \in \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$ , para o qual temos o correspondente  $\lambda = \hat{\lambda} \circ \alpha \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , vir

<sup>180</sup>As aplicações lineares com valores no corpo  $\mathbb{K}$  dos escalares também são designadas habitualmente por formas lineares.



$$\xi(\widehat{\lambda}) = \xi(\widehat{\lambda} \circ \alpha \circ \alpha^{-1}) = \xi(\alpha^{*-1}(\widehat{\lambda} \circ \alpha)) = \xi \circ \alpha^{*-1}(\lambda) = \lambda(x) = \widehat{\lambda}(y),$$

o que mostra que  $y$  representa  $\xi$ . Provamos assim que  $F$  é reflexivo.  $\square$

**2.2.24 (Corolário — Invariância topológica da reflexividade)** Se  $E$  é um espaço de Banach reflexivo, então  $E$  continua reflexivo se substituirmos a sua norma por outra equivalente.

**Dem:** Basta atender a que a aplicação identidade  $Id_E$  é então um isomorfismo topológico de  $E$ , com uma das normas, para  $E$  com, a outra norma.  $\square$

**2.2.25 (Exemplo)** Se  $E$  é um espaço de Banach de dimensão finita então  $E$  é reflexivo.

**Dem:** Tendo em conta 2.1.51, sendo  $n$  a dimensão de  $E$ , então  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é o espaço vetorial de todas as aplicações lineares  $E \rightarrow \mathbb{K}$  e portanto também tem dimensão finita  $n$ . Do mesmo modo,  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  também tem dimensão finita  $n$  pelo que a aplicação linear injetiva

$$\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$$

é necessariamente sobrejetiva, o que significa que o espaço de Banach  $E$  é reflexivo.  $\square$

Vamos agora examinar uma caracterização da reflexividade dos espaços de Banach que será frequentemente mais cómoda de utilizar que a definição. Começamos por examinar as formas bilineares dualizantes e o conceito de ortogonalidade no contexto destas,

**2.2.26 (Formas bilineares dualizantes e subdualizantes)**<sup>181</sup> Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua.

Vamos dizer que  $\gamma$  é *dualizante na primeira variável* se a correspondente aplicação linear contínua

$$\widehat{\gamma} = \Upsilon_1(\gamma): E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K}), \quad \widehat{\gamma}(x)(y) = \gamma(x, y),$$

(cf. 2.1.43) for um isomorfismo topológico de  $E$  sobre  $\mathcal{L}(F; \mathbb{K})$ .<sup>182</sup> É claro que quando isso acontecer o espaço vetorial normado  $E$  é necessariamente um espaço de Banach, por isso acontecer a  $\mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  (cf. 2.2.3).

Vamos dizer que  $\gamma$  é *dualizante na segunda variável* se a aplicação bilinear oposta  $\gamma^{op}: F \times E \rightarrow \mathbb{K}$ , definida por  $\gamma^{op}(y, x) = \gamma(x, y)$ , for dualizante na primeira variável, por outras palavras, se a aplicação linear contínua

<sup>181</sup>Às aplicações bilineares com valores no corpo dos escalares é frequente dar-se o nome de *formas bilineares*.

<sup>182</sup>De forma mais sugestiva, também é frequente traduzir esta propriedade dizendo que  $\gamma$  define  $E$  como o dual topológico de  $F$ .

$$\tilde{\gamma}: F \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K}), \quad \tilde{\gamma}(y)(x) = \gamma(x, y),$$

for um isomorfismo topológico de  $F$  sobre  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ . De acordo com o que referimos atrás, quando isso acontecer o espaço vetorial normado  $F$  é necessariamente um espaço de Banach.

Mais geralmente, podemos dizer que  $\gamma$  é *subdualizante na primeira variável* se a aplicação linear  $\hat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  for injetiva<sup>183</sup> e que  $\gamma$  é *subdualizante na segunda variável* se  $\gamma^{op}$  for subdualizante na primeira variável, isto é, se a aplicação linear  $\tilde{\gamma}: F \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  for injetiva.

**2.2.27 (Exemplos triviais) a)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado então a oposta da aplicação bilinear contínua de avaliação

$$\Phi: E \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Phi(x, \lambda) = \lambda(x)$$

(cf. 2.1.34) é sempre dualizante na segunda variável e subdualizante na primeira variável e  $\Phi$  é dualizante na primeira variável se, e só se,  $E$  for reflexivo.

**b)** Sendo  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , considerado como espaço de Banach de dimensão 1, a aplicação bilinear contínua  $\gamma: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\gamma(x, y) = xy$  (a multiplicação) é dualizante nas duas variáveis.

**Dem: a)** Nas notações de 2.2.26, a aplicação linear  $\tilde{\Phi}: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é a identidade e a aplicação linear  $\hat{\Phi}: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  é a aplicação  $\Theta$  que ocorre na definição da reflexividade em 2.2.20, sendo sempre injetiva por ser isométrica (cf. 2.2.19).

**b)** Tendo em conta a simetria da aplicação bilinear, basta mostrarmos que ela é dualizante na primeira variável. A igualdade  $\hat{\gamma}(x)(1) = x$  implica que  $x = 0$  se  $\hat{\gamma}(x) = 0$  e portanto a injetividade de  $\hat{\gamma}: \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; \mathbb{K})$ . Por outro lado, dado  $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; \mathbb{K})$ , tem-se, com  $x = \lambda(1)$ , para cada  $y \in \mathbb{K}$ ,

$$\lambda(y) = \lambda(y \cdot 1) = y\lambda(1) = xy = \hat{\gamma}(x)(y),$$

portanto  $\lambda = \hat{\gamma}(x)$ . Fica assim provado que  $\hat{\gamma}: \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; \mathbb{K})$  é um isomorfismo, sendo mesmo um isomorfismo topológico uma vez que, como vimos, o isomorfismo inverso está definido por  $\hat{\gamma}^{-1}(\lambda) = \lambda(1)$  e verifica portanto  $|\hat{\gamma}^{-1}(\lambda)| = |\lambda(1)| \leq \|\lambda\|$ .  $\square$

**2.2.28 (Ortogonal direito dum subconjunto)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua. Se  $A \subset E$  é um subconjunto arbitrário define-se um subconjunto  $A^\perp \subset F$ , dito *ortogonal direito* do conjunto  $A$  (ou simplesmente *ortogonal* de  $A$  se não houver risco de confusão), por

$$A^\perp = \{y \in F \mid \forall_{x \in A} \gamma(x, y) = 0\}.$$

<sup>183</sup>De forma mais sugestiva, se  $\gamma$  define  $E$  como um subespaço vetorial do dual topológico de  $F$ .

Tem-se então:

a) O ortogonal  $A^\perp$  é um subespaço vetorial fechado de  $F$ .

b) Se  $A \subset A' \subset E$ , então  $A'^\perp \subset A^\perp \subset F$ .

c)  $\emptyset^\perp = \{0\}^\perp = F$  e, no caso em que  $\gamma$  é subdualizante na segunda variável,  $E^\perp = \{0\}$ .

d)  $(A \cup A')^\perp = A^\perp \cap A'^\perp$ ; mais geralmente, se  $J \neq \emptyset$  e  $(A_j)_{j \in J}$  é uma família de subconjuntos de  $E$ , então

$$\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)^\perp = \bigcap_{j \in J} A_j^\perp.$$

**Dem:** As conclusões de b) e d) são triviais, tal como o é em c) o facto de se ter  $\emptyset^\perp = F$ . O facto de se ter  $\{0\}^\perp = F$  resulta de ser  $\gamma(0, y) = 0$  para todo o  $y \in F$ . Para cada  $x \in E$ ,  $\{x\}^\perp$  é um subespaço vetorial fechado de  $F$  por, por, nas notações de 2.2.26, ser o kernel da aplicação linear contínua  $\hat{\gamma}(x): F \rightarrow \mathbb{K}$ . Uma vez que  $\emptyset^\perp = F$  é um subespaço vetorial fechado, a conclusão de a) resulta de d), uma vez que, para  $A \neq \emptyset$ ,  $A^\perp$  é a interseção dos subespaços vetoriais fechados  $\{x\}^\perp$  com  $x \in A$ . Por fim, mais uma vez nas notações de 2.2.26,  $E^\perp$  é o kernel da aplicação linear  $\hat{\gamma}: F \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  pelo que, se  $\gamma$  é subdualizante na segunda variável, aquela aplicação linear é injetiva e  $E^\perp = \{0\}$ .  $\square$

**2.2.29 (Ortogonal esquerdo dum subconjunto)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua. Se  $B \subset F$  é um subconjunto arbitrário define-se um subconjunto  ${}^\perp B \subset F$ , dito *ortogonal esquerdo* do conjunto  $B$  (ou simplesmente *ortogonal* de  $B$  se não houver risco de confusão), por

$${}^\perp B = \{x \in E \mid \forall_{y \in B} \gamma(x, y) = 0\}.$$

É claro que  ${}^\perp B$  não é mais do que o ortogonal direito de  $B$  relativamente à aplicação bilinear contínua oposta  $\gamma^{op}: F \times E \rightarrow \mathbb{K}$  pelo que podemos aplicar 2.2.28 para concluir que:

a) O ortogonal  ${}^\perp B$  é um subespaço vetorial fechado de  $E$ .

b) Se  $B \subset B' \subset F$ , então  ${}^\perp B' \subset {}^\perp B \subset E$ .

c)  ${}^\perp \emptyset = {}^\perp \{0\} = E$  e, no caso em que  $\gamma$  é subdualizante na primeira variável,  ${}^\perp F = \{0\}$ .

d)  ${}^\perp (B \cup B') = {}^\perp B \cap {}^\perp B'$ ; mais geralmente, se  $J \neq \emptyset$  e  $(B_j)_{j \in J}$  é uma família de subconjuntos de  $F$ , então

$${}^\perp \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} {}^\perp B_j.$$

**2.2.30 (Ortogonal do ortogonal)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua. Tem-se então:

a) Se  $A \subset E$  então  $A \subset {}^\perp(A^\perp)$ .

b) Se  $B \subset F$  então  $B \subset ({}^\perp B)^\perp$ .

c) Se  $E_0 \subset E$  é um subespaço vetorial fechado<sup>184</sup> e se  $\gamma$  é dualizante na segunda variável então  ${}^\perp(E_0^\perp) = E_0$ .

d) Se  $F_0 \subset F$  é um subespaço vetorial fechado e se  $\gamma$  é dualizante na primeira variável então  $({}^\perp F_0)^\perp = F_0$ .

**Dem:** As conclusões de a) e b) são triviais<sup>185</sup>. Resta-nos então provar c), já que d) resulta de aplicar c) à aplicação bilinear contínua oposta  $\gamma^{op}: F \times E \rightarrow \mathbb{K}$ . Suponhamos então que  $E_0 \subset E$  é um subespaço vetorial fechado e que  $\gamma$  é dualizante na segunda variável. Por a) já sabemos que  $E_0 \subset {}^\perp(E_0^\perp)$ . Para provar a igualdade consideramos agora  $x_0 \in E$  com  $x_0 \notin E_0$ . Tendo em conta 2.1.63, podemos considerar uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\lambda(x_0) = 1$  e  $\lambda(x) = 0$  para cada  $x \in E_0$ . O facto de estarmos a supor que  $\gamma$  é dualizante na segunda variável garante a existência de  $y_0 \in F$  tal que  $\lambda(x) = \gamma(x, y_0)$  para cada  $x \in E$ . Tem-se então, para cada  $x \in E_0$ ,  $\gamma(x, y_0) = \lambda(x) = 0$ , isto é  $y_0 \in E_0^\perp$ , e o facto de se ter  $\gamma(x_0, y_0) = \lambda(x_0) \neq 0$  mostra que  $x_0 \notin {}^\perp(E_0^\perp)$ . Ficou assim provado que se tem efetivamente  ${}^\perp(E_0^\perp) = E_0$ .  $\square$

A caracterização da reflexividade que examinamos em seguida é, de certo modo, uma generalização do exemplo trivial na alínea a) de 2.2.27.

**2.2.31 (Caracterização alternativa da reflexividade)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua dualizante na segunda variável. Tem-se então que  $E$  é reflexivo se, e só se,  $\gamma$  também for dualizante na primeira variável.

**Dem: a)** Vamos começar por supor que  $\gamma$  é dualizante nas duas variáveis e consideremos os correspondentes isomorfismos topológicos  $\hat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  e  $\tilde{\gamma}: F \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  definidos em 2.2.26. Seja  $\xi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação linear contínua arbitrária. Podemos então considerar a aplicação linear contínua  $\xi \circ \tilde{\gamma}: F \rightarrow \mathbb{K}$  e o elemento  $x_0 \in E$  tal que  $\hat{\gamma}(x_0) = \xi \circ \tilde{\gamma}$ . Para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  vem então, considerando  $y_\lambda \in F$  tal que  $\tilde{\gamma}(y_\lambda) = \lambda$ ,

$$\xi(\lambda) = \xi \circ \tilde{\gamma}(y_\lambda) = \hat{\gamma}(x_0)(y_\lambda) = \gamma(x_0, y_\lambda) = \tilde{\gamma}(y_\lambda)(x_0) = \lambda(x_0),$$

por outras palavras  $x_0$  representa a aplicação linear contínua  $\xi$ . Provámos assim que  $E$  é um espaço reflexivo.

**b)** Suponhamos, reciprocamente, que  $\gamma$  é dualizante na segunda variável e que  $E$  é reflexivo. Sabemos assim que são isomorfismos topológicos as aplicações lineares  $\tilde{\gamma}: F \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  definidas respetivamente em 2.2.26 e 2.2.20. Temos que mostrar que a aplicação linear

<sup>184</sup>Se  $E_0$  não for subespaço vetorial fechado a conclusão não pode ser verdadeira, tendo em conta a conclusão da alínea a) de 2.2.29. Ver o exercício 2.2.7 adiante.

<sup>185</sup>Do tipo “pai do filho de Zebedeu”...

$\hat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  definida em 2.2.26 é também um isomorfismo topológico. Seja então  $\mu \in \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  arbitrário. Consideremos a correspondente aplicação linear contínua  $\mu \circ \hat{\gamma}^{-1}: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ . Reparemos agora que, para cada  $x \in E$  tem-se  $\mu = \hat{\gamma}(x)$  se, e só se, para todo o  $y \in F$

$$\mu(y) = \hat{\gamma}(x)(y) = \gamma(x, y)$$

se, e só se, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$

$$\mu(\hat{\gamma}^{-1}(\lambda)) = \gamma(x, \hat{\gamma}^{-1}(\lambda)) = \lambda(x)$$

se, e só se, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$

$$\mu \circ \hat{\gamma}^{-1}(\lambda) = \Theta(x)(\lambda)$$

se, e só se,  $\mu \circ \hat{\gamma}^{-1} = \Theta(x)$ . A existência e unicidade de  $x \in E$  tal que  $\mu = \hat{\gamma}(x)$  é assim uma consequência de  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  ser bijetiva pelo que ficou provado que a aplicação linear contínua  $\hat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  é bijetiva e, simultaneamente, que a respetiva inversa  $\hat{\gamma}^{-1}: \mathcal{L}(F; \mathbb{K}) \rightarrow E$  está definida por

$$\hat{\gamma}^{-1}(\mu) = \Theta^{-1}(\mu \circ \hat{\gamma}^{-1}) = \Theta^{-1}(\mathcal{L}(\hat{\gamma}^{-1}; Id_{\mathbb{K}})(\mu))$$

(cf. 2.1.44), pelo que essa inversa é também contínua, e portanto  $\hat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  é um isomorfismo topológico, como queríamos.  $\square$

**2.2.32 (Corolário)** Se  $E$  é um espaço de Banach reflexivo sobre o corpo  $\mathbb{K}$  então o seu dual  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é também um espaço de Banach reflexivo.<sup>186</sup>

**Dem:** Como referido na alínea a) do exemplo 2.2.27, podemos considerar uma aplicação bilinear contínua

$$\Phi: E \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \Phi(x, \lambda) = \lambda(x)$$

que é dualizante nas duas variáveis e então, aplicando 2.2.31 à aplicação bilinear contínua oposta desta, concluímos que o espaço de Banach  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  também é reflexivo.  $\square$

**2.2.33 (Lema do subespaço e do quociente)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $G$  um espaço vectorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $\rho: E \rightarrow G$  uma aplicação linear sobrejetiva tal que o subespaço vectorial

$$E_0 = \ker(\rho) = \{x \in E \mid \rho(x) = 0\}$$

de  $E$  seja fechado e consideremos em  $G$  a correspondente norma quociente (cf. 2.1.47). Consideremos o subespaço vectorial fechado de  $F$

$$F_0 = E_0^\perp = \{y \in F \mid \forall_{x \in E_0} \gamma(x, y) = 0\}$$

<sup>186</sup>Ver adiante em 2.2.35 um recíproco deste resultado.

(cf. 2.2.28). Tem-se então:

a) Tem lugar uma aplicação bilinear contínua  $\gamma_0: G \times F_0 \rightarrow \mathbb{K}$  definida por

$$(1) \quad \gamma_0(\rho(x), y) = \gamma(x, y).$$

b) Se  $\gamma$  for dualizante na segunda variável então  $\gamma_0$  é também dualizante na segunda variável.

c) Se  $\gamma$  for dualizante nas duas variáveis então  $\gamma_0$  é também dualizante nas duas variáveis.<sup>187</sup>

**Dem:** a) Para verificar que  $\gamma_0$  está bem definida temos que ver que, se  $y \in F_0$  e  $x, x' \in E$  verificam  $\rho(x) = \rho(x')$  então  $\gamma(x, y) = \gamma(x', y)$ . Ora, isso resulta de que se tem então  $\rho(x - x') = 0$ , ou seja  $x - x' \in E_0$  donde, pela definição de  $F_0$ ,

$$0 = \gamma(x - x', y) = \gamma(x, y) - \gamma(x', y).$$

É simples verificar que  $\gamma_0$  é bilinear e vamos mostrar que  $\gamma_0$  é contínua. Ora, como  $\rho: E \rightarrow G$  é contínua, aberta e sobrejetiva (cf. 2.1.47), podemos garantir que

$$\rho \times Id_{F_0}: E \times F_0 \rightarrow G \times F_0$$

é também contínua aberta e sobrejetiva, e portanto finalizante (cf. 1.11.8 e 1.11.6) pelo que a continuidade de  $\gamma_0: G \times F_0 \rightarrow \mathbb{K}$  resulta da continuidade de  $\gamma_0 \circ (\rho \times Id_{F_0}): E \times F_0 \rightarrow \mathbb{K}$  que, pela igualdade (1), é uma restrição da aplicação bilinear contínua  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ .

b) Suponhamos que  $\gamma$  é dualizante na segunda variável.

Seja  $y_0 \in F_0$  tal que, nas notações de 2.2.26,  $\tilde{\gamma}_0(y_0) = 0 \in \mathcal{L}(G; \mathbb{K})$ , isto é, tal que  $\gamma_0(z, y_0) = 0$  para todo o  $z \in G$ . Tem-se então

$$\tilde{\gamma}(y_0)(x) = \gamma(x, y_0) = \gamma_0(\rho(x), y_0) = 0$$

para todo o  $x \in E$ , donde  $\tilde{\gamma}(y_0) = 0$  e portanto  $y_0 = 0$ . Ficou assim provado que a aplicação linear contínua  $\tilde{\gamma}_0: F_0 \rightarrow \mathcal{L}(G; \mathbb{K})$  é injetiva.

Seja agora  $\lambda \in \mathcal{L}(G; \mathbb{K})$ . Considerando

$$\mathcal{L}(\rho; Id_{\mathbb{K}})(\lambda) = \lambda \circ \rho \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K}),$$

vai existir  $y_0 \in F$  tal que  $\tilde{\gamma}(y_0) = \lambda \circ \rho$ , portanto tal que, para cada  $x \in E$ ,

$$\lambda(\rho(x)) = \gamma(x, y_0).$$

Em particular, para cada  $x \in E_0$ ,

$$\gamma(x, y_0) = \lambda(\rho(x)) = \lambda(0) = 0,$$

<sup>187</sup>Repare-se que não afirmamos que a hipótese de  $\gamma$  ser dualizante na primeira variável implique, por si só, que  $\gamma_0$  tenha que ser dualizante na primeira variável. Poder-se-ia estranhar esta falta de simetria dos papéis das duas variáveis mas ela resulta de termos essencialmente partido de  $E_0$  e definido a partir daí  $F_0$  como o seu ortogonal.

o que mostra que  $y_0 \in E_0^\perp = F_0$ , e vemos que, para cada  $z = \rho(x) \in G$  vem

$$\tilde{\gamma}_0(y_0)(z) = \gamma_0(z, y_0) = \gamma(x, y_0) = \lambda(\rho(x)) = \lambda(z),$$

isto é,  $\tilde{\gamma}_0(y_0) = \lambda$ . Ficou assim provado que  $\tilde{\gamma}_0: F_0 \rightarrow \mathcal{L}(G; \mathbb{K})$  é um isomorfismo, tendo-se mesmo um isomorfismo topológico uma vez que o isomorfismo inverso  $\tilde{\gamma}_0^{-1}: \mathcal{L}(G; \mathbb{K}) \rightarrow F_0$  está definido, como verificámos atrás, por

$$\tilde{\gamma}_0^{-1}(\lambda) = \tilde{\gamma}^{-1}(\lambda \circ \rho) = \tilde{\gamma}^{-1}(\mathcal{L}(\rho; Id_{\mathbb{K}})(\lambda))$$

sendo portanto contínuo. Provámos assim que  $\gamma_0$  é dualizante na segunda variável.

**c)** Vamos agora supor que  $\gamma$  é dualizante nas duas variáveis. Pelo que vimos em b) já sabemos que  $\gamma_0$  é dualizante na segunda variável pelo que apenas nos falta verificar que  $\gamma_0$  é também dualizante na primeira variável.

Seja  $z_0 \in G$  tal que  $\tilde{\gamma}_0(z_0) = 0 \in \mathcal{L}(F_0; \mathbb{K})$ , isto é, tal que  $\gamma_0(z_0, y) = 0$  para todo o  $y \in F_0$ . Sendo então  $z_0 = \rho(x_0)$  com  $x_0 \in E$ , vem  $\gamma(x_0, y) = 0$  para todo o  $y \in F_0$ , ou seja  $x_0 \in {}^\perp F_0$ , isto é, tendo em conta a alínea c) de 2.2.30 por  $\gamma$  ser dualizante na segunda variável,  $x_0 \in E_0$  e  $z_0 = \rho(x_0) = 0$ . Ficou assim provado que a aplicação linear contínua  $\tilde{\gamma}_0: G \rightarrow \mathcal{L}(F_0; \mathbb{K})$  é injetiva.

Seja agora  $\mu_0 \in \mathcal{L}(F_0; \mathbb{K})$ . Tendo em conta o teorema de Hahn-Banach (cf. 2.1.59 ou 2.1.61), existe  $\mu \in \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  tal que  $\mu_o = \mu|_{F_0}$  e então existe  $x_0 \in E$  tal que  $\mu = \hat{\gamma}(x_0)$ , isto é, tal que  $\mu(y) = \gamma(x_0, y)$  para cada  $y \in F$ . Tem-se então que o elemento  $z_0 = \rho(x_0) \in G$  verifica, para cada  $y \in F_0$ ,

$$\tilde{\gamma}_0(z_0)(y) = \gamma_0(z_0, y) = \gamma(x_0, y) = \mu(y) = \mu_0(y),$$

ou seja  $\tilde{\gamma}_0(z_0) = \mu_0$ . Ficou assim provado que a aplicação linear contínua  $\tilde{\gamma}_0: G \rightarrow \mathcal{L}(F_0; \mathbb{K})$  é um isomorfismo pelo que, para mostrar que  $\gamma_0$  é dualizante na primeira variável resta-nos mostrar que a aplicação linear inversa  $\tilde{\gamma}_0^{-1}: \mathcal{L}(F_0; \mathbb{K}) \rightarrow G$  também é contínua. Uma vez que, como verificámos em 2.1.66, a norma de  $\mathcal{L}(F_0; \mathbb{K})$  é a norma quociente determinada pela aplicação linear sobrejetiva de kernel fechado

$$\mathcal{L}(F; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(F_0; \mathbb{K}), \quad \mu \mapsto \mu|_{F_0},$$

o que implica que a referida aplicação linear é finalizante (cf. 2.1.47), para provar a continuidade  $\tilde{\gamma}_0^{-1}$  basta provar a continuidade da sua composta com aquela aplicação finalizante. Ora, essa continuidade resulta de que a composta referida é, como verificámos atrás, a aplicação linear de  $\mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  para  $G$  que a  $\mu$  associa  $\rho(\hat{\gamma}^{-1}(\mu))$ , onde  $\hat{\gamma}^{-1}: \mathcal{L}(F; \mathbb{K}) \rightarrow E$  é contínua.  $\square$

**2.2.34 (Subespaços e quocientes de um reflexivo)** Seja  $E$  um espaço de Banach reflexivo. Tem-se então:

**a)** Sejam  $G$  um espaço vectorial e  $\rho: E \rightarrow G$  uma aplicação linear sobrejetiva com  $E_0 = \ker(\rho)$  subespaço vectorial fechado de  $E$  e consideremos em  $G$  a norma quociente. Tem-se então que  $G$  é um espaço de Banach

reflexivo.

**b)** Se  $E_0 \subset E$  é um subespaço vetorial fechado então  $E_0$  também é um espaço de Banach reflexivo.

**Dem: a)** Podemos considerar um espaço de Banach  $F$  e uma aplicação bilinear contínua  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  dualizante nas duas variáveis, por exemplo  $F = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $\gamma$  a oposta da aplicação de avaliação (cf. a alínea a) de 2.2.27). Tendo em conta a alínea c) de 2.2.33, obtemos então um subespaço vetorial  $F_0 \subset F$  e uma aplicação bilinear contínua  $\gamma_0: G \times F_0 \rightarrow \mathbb{K}$  dualizante nas duas variáveis e resulta então de 2.2.31 que  $G$  é um espaço de Banach reflexivo.

**b)** Podemos considerar um espaço de Banach  $F$  e uma aplicação bilinear contínua  $\gamma: F \times E \rightarrow \mathbb{K}$  dualizante nas duas variáveis, por exemplo  $F = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $\gamma$  a aplicação de avaliação (cf. a alínea a) de 2.2.27). Considerando o subespaço vetorial fechado  $F_0 \subset F$ ,  $F_0 = {}^\perp E_0$  (cf. 2.2.29) resulta da alínea d) de 2.2.30 que  $F_0^\perp = E_0$  e portanto, considerando no espaço vetorial quociente  $F/F_0$  a norma quociente, obtemos, tendo em conta a alínea c) de 2.2.33, uma aplicação bilinear contínua  $\gamma_0: (F/F_0) \times E_0 \rightarrow \mathbb{K}$  dualizante nas duas variáveis e, aplicando 2.2.31 à aplicação bilinear oposta desta, concluímos que  $E_0$  é um espaço de Banach reflexivo.  $\square$

**2.2.35 (Recíproco de 2.2.32)** Seja  $E$  um espaço de Banach sobre o corpo  $\mathbb{K}$  cujo dual  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  seja reflexivo. Tem-se então que  $E$  também é reflexivo.

**Dem:** Tendo em conta 2.2.19, podemos considerar uma aplicação linear isométrica  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ , que é portanto um isomorfismo topológico sobre a sua imagem, a qual é assim um espaço de Banach, e portanto fechada em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ . Uma vez que  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  é reflexivo, por 2.2.32, resulta da alínea b) de 2.2.34 que a imagem referida é reflexiva e portanto, por 2.2.23, que  $E$  é reflexivo.  $\square$

Vamos agora mostrar a equivalência entre a reflexividade de um espaço de Banach complexo e a do mesmo quando considerado como espaço de Banach real. Utilizaremos para isso o lema em 2.1.60, assim como aquele que examinamos a seguir.

**2.2.36 (Lema)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais complexos e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação bilinear contínua e consideremos a aplicação bilinear contínua  $\gamma': E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  (naturalmente no sentido real) definida por

$$\gamma'(x, y) = \Re(\gamma(x, y)).$$

Tem-se então:

**a)** A aplicação  $\gamma$  é dualizante (respetivamente subdualizante) na segunda variável se, e só se,  $\gamma'$  for dualizante (respetivamente subdualizante) na segunda variável.

**b)** A aplicação  $\gamma$  é dualizante (respetivamente subdualizante) na primeira variável se, e só se,  $\gamma'$  for dualizante (respetivamente subdualizante) na



primeira variável.

**Dem:** Vamos provar apenas a), visto que b) resulta de aplicar a) à aplicação bilinear oposta  $\gamma^{op}: F \times E \rightarrow \mathbb{C}$ . Consideremos então a isometria linear  $\mathcal{R}: \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$  referida no lema 2.1.60. Nas notações de 2.2.26, para cada  $x \in E$  e  $y \in F$  tem-se então

$$\tilde{\gamma}'(y)(x) = \gamma'(x, y) = \Re(\gamma(x, y)) = \Re(\tilde{\gamma}(y)(x)) = \mathcal{R}(\tilde{\gamma}(y))(x),$$

ou seja  $\tilde{\gamma}'(y) = \mathcal{R}(\tilde{\gamma}(y))$  para cada  $y \in F$ . Concluímos assim que as aplicações lineares contínuas  $\tilde{\gamma}: F \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$  e  $\tilde{\gamma}': F \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$  verificam  $\tilde{\gamma}' = \mathcal{R} \circ \tilde{\gamma}$ , e portanto também  $\tilde{\gamma} = \mathcal{R}^{-1} \circ \tilde{\gamma}'$ , pelo que a primeira é um isomorfismo topológico (respetivamente é injetiva) se, e só se, a segunda for um isomorfismo topológico (respetivamente for injetiva).  $\square$

**2.2.37 (Reflexividade nos sentidos real e complexo)** Se  $E$  é um espaço de Banach complexo então  $E$  é reflexivo se, e só se, for reflexivo como espaço de Banach real.

**Dem:** Sejam  $F$  um espaço vetorial complexo e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação bilinear contínua complexa dualizante na segunda variável, por exemplo  $F = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$  e  $\gamma$  a oposta da aplicação linear de avaliação. Tendo em conta a alínea a) do lema 2.2.36 a correspondente aplicação bilinear real  $\gamma': E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\gamma'(x, y) = \Re(\gamma(x, y))$ , é também dualizante na segunda variável. Tendo em conta a alínea b) do mesmo lema e a caracterização dos espaços reflexivos em 2.2.31, vemos agora que  $E$  é reflexivo como espaço de Banach complexo se, e só se,  $\gamma$  for dualizante na primeira variável se, e só se,  $\gamma'$  for dualizante na primeira variável se, e só se,  $E$  for reflexivo como espaço de Banach real.  $\square$

Vamos agora examinar um resultado profundo de Análise Funcional, o teorema de Banach da aplicação aberta, onde vai ser essencial o facto de os espaços vetoriais normados envolvidos serem completos e onde o teorema de Baire vai jogar um papel essencial. Começamos por estabelecer um lema elementar envolvendo caracterizações das aplicações abertas no contexto da linearidade, onde a completude ainda não é necessária, e um segundo, mais profundo, onde apenas necessitamos que o domínio seja completo, e que, para além de ser utilizado na demonstração do teorema de Banach referido, servirá também para estabelecer um recíproco parcial deste.

**2.2.38 (Lema)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear. São então equivalentes as propriedades:

- 1)  $\lambda$  é uma aplicação aberta (cf. 1.11.4);
- 2)  $\lambda$  é uma aplicação aberta em  $0 \in E$  (cf. 1.11.9);
- 3) A imagem  $\lambda(B_1(0))$  da bola aberta  $B_1(0)$  de  $E$  é uma vizinhança de  $0$  em  $F$ ;
- 4) Existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para cada  $r > 0$

$$\lambda(B_r(0)) \supset B_{\varepsilon r}(0),$$

onde, naturalmente, no primeiro membro temos uma bola aberta de  $E$  e no segundo uma de  $F$ .

Quando estas se verificam a aplicação linear  $\lambda$  é sobrejetiva.

**Dem:** A implicação  $1) \Rightarrow 2)$  resulta de 1.11.10 e a implicação  $2) \Rightarrow 3)$  é uma consequência da definição de aplicação aberta num ponto, tendo em conta o facto de  $B_1(0)$  ser uma vizinhança de 0 em  $E$ . Supondo que se verifica 3), podemos considerar  $\varepsilon > 0$  tal que  $\lambda(B_1(0)) \supset B_\varepsilon(0)$  e então, lembrando 2.1.8, para cada  $r > 0$ ,

$$\lambda(B_r(0)) = \lambda(rB_1(0)) = r\lambda(B_1(0)) \supset rB_\varepsilon(0) = B_{r\varepsilon}(0),$$

o que mostra que se verifica 4). Suponhamos agora que se verifica 4) e provemos que a aplicação  $\lambda$  é aberta, isto é, que é aberta num ponto  $x_0$  arbitrário de  $E$  (cf. 1.11.10). Sendo  $U$  uma vizinhança de  $x_0$  em  $E$ , podemos considerar  $r > 0$  tal que  $B_r(x_0) \subset U$  e então, lembrando mais uma vez 2.1.8,

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon r}(\lambda(x_0)) &= \lambda(x_0) + B_{\varepsilon r}(0) \subset \lambda(x_0) + \lambda(B_r(0)) = \\ &= \lambda(x_0 + B_r(0)) = \lambda(B_r(x_0)) \subset \lambda(U), \end{aligned}$$

o que mostra que  $\lambda(U)$  é efetivamente uma vizinhança de  $\lambda(x_0)$  em  $F$ . Observamos por fim que, quando a aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow F$  é aberta, o facto de  $E$  ser uma vizinhança de 0 em  $E$  implica que o subespaço vetorial  $\lambda(E)$  de  $F$  é uma vizinhança de 0 em  $F$ , o que implica que  $\lambda(E) = F$  (cf. 2.1.29).  $\square$

**2.2.39 (Meio caminho para o teorema de Banach)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço vetorial normado e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua tal que a aderência da imagem da bola aberta  $\text{ad}(\lambda(B_1(0)))$  seja uma vizinhança de 0 em  $F$ . Tem-se então que  $\lambda$  é uma aplicação aberta, em particular sobrejetiva.<sup>188</sup>

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes:

a) Seja  $\varepsilon > 0$  tal que

$$(1) \quad \text{ad}(\lambda(B_1(0))) \supset B_\varepsilon(0).$$

O resultado ficará provado se mostrarmos que

$$(2) \quad \lambda(B_2(0)) \supset B_\varepsilon(0),$$

visto que então, lembrando 2.1.8, vem também

$$\lambda(B_1(0)) = \lambda\left(\frac{1}{2}B_2(0)\right) = \frac{1}{2}\lambda(B_2(0)) \supset \frac{1}{2}B_\varepsilon(0) = B_{\varepsilon/2}(0)$$

<sup>188</sup>Repare-se que a diferença relativamente ao que se podia concluir do lema anterior é que, em vez de estarmos a supor que a imagem da bola aberta é uma vizinhança de 0, apenas supomos que a sua aderência é uma vizinhança de 0.

e portanto  $\lambda(B_1(0))$  será uma vizinhança de 0 em  $F$ , pelo que bastará aplicar o lema 2.2.38.

Para provarmos a inclusão (2), consideramos  $y \in B_\varepsilon(0) \subset F$  arbitrário e provaremos nas próximas alíneas que  $y \in \lambda(B_2(0))$ .

**b)** Começemos por fixar  $0 < \delta < 1$  tal que

$$(3) \quad \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon,$$

o que é possível uma vez que a aplicação  $]0, 1[ \rightarrow ]0, +\infty[, \delta \mapsto \frac{\delta}{1-\delta}$  tem limite 0 quando  $\delta \rightarrow 0$ .

Vamos mostrar que se pode construir recursivamente uma sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vetores de  $E$  tal que

$$(4) \quad \begin{aligned} \|x_1\| &< 1, \\ \|x_n - x_{n-1}\| &< \frac{1}{\varepsilon} \delta^{n-1}, \text{ se } n \geq 2 \\ \|y - \lambda(x_n)\| &< \delta^n, \text{ se } n \geq 1. \end{aligned}$$

**Subdem:** A existência de  $x_1 \in E$  com  $\|x_1\| < 1$  e  $\|y - \lambda(x_1)\| < \delta$  é uma consequência da inclusão em (1) uma vez que, por ser  $y \in B_\varepsilon(0)$ ,  $y$  é aderente a  $\lambda(B_1(0))$ . Suponhamos construídos os vetores  $x_1, \dots, x_n$  verificando as condições (4) e construamos  $x_{n+1}$  de modo que os vetores  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  ainda verifiquem as condições (4). Ora, pela terceira condição em (4), tem-se

$$\left\| \frac{\varepsilon}{\delta^n} y - \lambda\left(\frac{\varepsilon}{\delta^n} x_n\right) \right\| = \frac{\varepsilon}{\delta^n} \|y - \lambda(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{\delta^n} \delta^n = \varepsilon$$

ou seja,

$$\frac{\varepsilon}{\delta^n} y - \lambda\left(\frac{\varepsilon}{\delta^n} x_n\right) \in B_\varepsilon(0) \subset \text{ad}(\lambda(B_1(0))),$$

pelo que podemos considerar  $w_n \in B_1(0)$  tal que

$$\left\| \frac{\varepsilon}{\delta^n} y - \lambda\left(\frac{\varepsilon}{\delta^n} x_n\right) - \lambda(w_n) \right\| < \delta \varepsilon$$

e, definindo

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\delta^n}{\varepsilon} w_n,$$

obtemos

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \frac{\delta^n}{\varepsilon} \|w_n\| < \frac{1}{\varepsilon} \delta^n$$

e

$$\begin{aligned}
\|y - \lambda(x_{n+1})\| &= \frac{\delta^n}{\varepsilon} \left\| \frac{\varepsilon}{\delta^n} y - \lambda\left(\frac{\varepsilon}{\delta^n} x_{n+1}\right) \right\| = \\
&= \frac{\delta^n}{\varepsilon} \left\| \frac{\varepsilon}{\delta^n} y - \lambda\left(\frac{\varepsilon}{\delta^n} x_n\right) - \lambda(w_n) \right\| < \\
&< \frac{\delta^n}{\varepsilon} \times \delta\varepsilon = \delta^{n+1},
\end{aligned}$$

o que termina a construção recursiva da sucessão.

c) Reparando agora que  $0 < \delta < 1$  e que a segunda condição em (4) pode ser escrita na forma  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \delta^n$ , estamos em condições de aplicar o lema 1.7.15 para concluir, por um lado, que a sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy e, por outro, considerando nesse lema  $n' = 1$  e lembrando a desigualdade (3), que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x_n - x_1\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \times \frac{\delta}{1 - \delta} < 1,$$

de onde deduzimos que

$$(5) \quad \|x_n\| = \|x_1 + (x_n - x_1)\| \leq \|x_1\| + \|x_n - x_1\| < \|x_1\| + 1.$$

O facto de  $E$  ser completo implica a existência de  $x \in E$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Pela continuidade da norma tem-se  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ , donde, pela primeira desigualdade em (4),

$$\|x\| \leq \|x_1\| + 1 < 2,$$

e pela continuidade de  $\lambda$  tem-se  $\lambda(x_n) \rightarrow \lambda(x)$ . Uma vez que  $\delta^n \rightarrow 0$ , a terceira desigualdade em (4) implica que  $\|y - \lambda(x_n)\| \rightarrow 0$ , ou seja  $\lambda(x_n) \rightarrow y$ , o que, pela unicidade do limite, garante que  $y = \lambda(x)$ . Ficou assim provado que  $y \in \lambda(B_2(0))$ , que é precisamente o objetivo apontado em a).  $\square$

**2.2.40 (Teorema de Banach da aplicação aberta)** Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Banach e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua sobrejectiva. Tem-se então que  $\lambda$  é uma aplicação aberta.

**Dem:** Uma vez que o espaço de Banach  $E$  é a união de todas as bolas  $B_n(0)$  com  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$F = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(0)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda(B_n(0)) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{ad}(\lambda(B_n(0))),$$

pelo que, por  $F$  ser um espaço de Baire (cf. 1.10.3), deduzimos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que o fechado  $\text{ad}(\lambda(B_n(0)))$  de  $F$  tenha um ponto interior  $y_0 = \lambda(x_0)$ . Tendo em conta o facto de a translação  $\tau_{-y_0}$  ser um homeomorfismo de  $F$  sobre  $F$  (cf. 2.1.19) assim como as propriedades gerais dos homeomorfismos em 1.4.42, concluímos daqui que  $0 = y_0 - y_0$  é interior a

$$\begin{aligned} \text{ad}(\lambda(B_n(0))) - y_0 &= \text{ad}(\lambda(B_n(0)) - \lambda(x_0)) = \\ &= \text{ad}(\lambda(B_n(0) - x_0)) = \text{ad}(\lambda(B_n(-x_0))). \end{aligned}$$

Mas, para cada  $x \in B_n(-x_0)$ , tem-se  $x + x_0 \in B_n(0)$  donde

$$\|x\| = \|(x + x_0) - x_0\| \leq \|x + x_0\| + \|x_0\| \leq n + \|x_0\|,$$

pelo que, ponto  $s = n + \|x_0\|$ , tem-se  $B_n(-x_0) \subset B_s(0)$ , donde também

$$\text{ad}(\lambda(B_n(-x_0))) \subset \text{ad}(\lambda(B_s(0))),$$

o que mostra que  $\text{ad}(\lambda(B_s(0)))$  é também uma vizinhança de 0 em  $F$ . Uma vez que as homotetias  $\rho_{1/s}$  de  $E$  e de  $F$  são homeomorfismos (cf. 2.1.23) podemos concluir que

$$\text{ad}(\lambda(B_1(0))) = \text{ad}(\lambda(\frac{1}{s}B_s(0))) = \text{ad}(\frac{1}{s}\lambda(B_s(0))) = \frac{1}{s}\text{ad}(\lambda(B_s(0)))$$

é uma vizinhança de 0 em  $F$ , pelo que aplicando 2.2.39 concluímos que  $\lambda$  é uma aplicação aberta.  $\square$

**2.2.41 (Corolário)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua bijectiva. Tem-se então que  $\lambda$  é mesmo um isomorfismo topológico, isto é, a aplicação linear  $\lambda^{-1}: F \rightarrow E$  é também contínua.

**Dem:** Tendo em conta 2.2.40, a aplicação linear contínua  $\lambda$  é também aberta, portanto, por ser bijectiva, é um homeomorfismo.  $\square$

**2.2.42 (Caracterização alternativa das aplicações bilineares dualizantes)**

Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua. Tem-se então que  $\gamma$  é dualizante na primeira variável (cf. 2.2.26) se, e só se, para cada aplicação linear contínua  $\lambda: F \rightarrow \mathbb{K}$ , existe um único elemento  $x \in E$  tal que  $\lambda(y) = \gamma(x, y)$  para todo o  $y \in F$ . Consequentemente, aplicando esta conclusão à aplicação bilinear oposta,  $\gamma$  é dualizante na segunda variável se, e só se, para cada aplicação linear contínua  $\mu: E \rightarrow \mathbb{K}$ , existe um único elemento  $y \in F$  tal que  $\mu(x) = \gamma(x, y)$  para todo o  $x \in E$ .

**Dem:** Tem lugar uma aplicação linear contínua  $\hat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  definida por  $\hat{\gamma}(x)(y) = \gamma(x, y)$ , a condição do enunciado corresponde a afirmar que esta aplicação é bijetiva e o facto de  $\gamma$  ser dualizante na primeira variável correspondem a afirmar que esta aplicação é um isomorfismo topológico. Uma vez que  $E$  e  $\mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  são espaços de Banach a equivalência que enunciamos é uma consequência do corolário 2.2.41.  $\square$

**2.2.43 (Teorema do gráfico fechado)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear. Tem-se então que  $\lambda$  é contínua se, e só se, o gráfico

$$G_\lambda = \{(x, y) \in E \times F \mid y = \lambda(x)\}$$

é fechado em  $E \times F$ .<sup>189</sup>

**Dem:** Repare-se que o facto de  $\lambda$  ser uma aplicação linear implica trivialmente que  $G_\lambda$  é um subespaço vetorial de  $E \times F$ . Uma das implicações no enunciado é válida, mais geralmente, no quadro das aplicações contínuas com valores num espaço topológico de Hausdorff: Supondo que  $\lambda: E \rightarrow F$  é contínua, podemos utilizar o facto de o conjunto diagonal

$$\Delta_F = \{(y, y') \in F \times F \mid y = y'\}$$

ser fechado em  $F \times F$  (cf. 1.5.4) e a caracterização alternativa

$$G_\lambda = \{(x, y) \in E \times F \mid (\lambda(x), y) \in \Delta_F\}$$

para deduzir que  $G_\lambda$  é fechado em  $E \times F$ . Suponhamos agora que  $G_\lambda$  é fechado em  $E \times F$ . Consideremos em  $E \times F$  a norma do máximo, referida em 2.1.12, que sabemos definir em  $E \times F$  a topologia produto e, relativamente à qual,  $E \times F$  também é um espaço de Banach (cf. 2.2.9). O facto de o subespaço vetorial  $G_\lambda$  de  $E \times F$  ser fechado em  $E \times F$  implica que  $G_\lambda$  é também um espaço de Banach. Ora, a restrição da primeira projecção  $\pi_1: E \times F \rightarrow E$  é uma aplicação linear contínua bijectiva de  $G_\lambda$  sobre  $E$  e portanto, por 2.2.41, é um isomorfismo topológico. Deduzimos daqui que a aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow F$  é contínua, por ser a composta da aplicação linear contínua segunda projecção  $\pi_2: E \times F \rightarrow F$  com a aplicação linear inversa da restrição de  $\pi_1$  a  $G_\lambda$ .  $\square$

Vamos agora utilizar de novo o resultado 2.2.39, que serviu de suporte à demonstração do teorema de Banach da aplicação aberta, para demonstrar um recíproco parcial deste teorema.

**2.2.44 (Recíproco parcial do teorema de Banach da aplicação aberta)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço vetorial normado e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua e aberta. Então  $F$  é também um espaço de Banach.

**Dem:** Seja  $\widehat{F}$  um completado vetorial de  $F$  definido pela aplicação linear  $\xi: F \rightarrow \widehat{F}$  (cf. 2.1.13), completado vetorial esse cuja existência foi estabelecida em 2.1.19, e recordemos que  $\xi$  é um isomorfismo topológico de  $F$  sobre  $\xi(F)$ , com  $\xi(F)$  denso em  $\widehat{F}$ .

Notemos com o símbolo  $B'$  as bolas abertas do subespaço vetorial  $\xi(F)$ , reservando o símbolo  $B$  “sem linha” para as bolas dos espaços vetoriais  $E$ ,  $F$  e  $\widehat{F}$ , e utilizemos o símbolo  $ad$  para designar as aderências relativa a  $\widehat{F}$ .

O facto de  $\xi$  ser um isomorfismo topológico de  $F$  sobre  $\xi(F)$ , em particular uma aplicação aberta, implica que  $\xi \circ \lambda: E \rightarrow \xi(F)$  é uma aplicação aberta, o que garante a existência de  $\varepsilon > 0$  tal que

<sup>189</sup>Para um resultado do mesmo tipo, fora do contexto da linearidade, ver os exercícios 1.5.9 e 1.6.13.

$$(1) \quad \xi \circ \lambda(B_1(0)) \supset B'_\varepsilon(0).$$

Reparemos agora que

$$\text{ad}(B'_\varepsilon(0)) \supset B_\varepsilon(0)$$

já que, se  $y \in B_\varepsilon(0)$  e  $V$  é uma vizinhança arbitrária de  $y$  em  $\widehat{F}$ , então  $V \cap B_\varepsilon(0)$  também é uma vizinhança de  $y$  em  $\widehat{F}$  e portanto, por  $\xi(F)$  ser denso em  $\widehat{F}$ ,

$$V \cap B'_\varepsilon(0) = V \cap B_\varepsilon(0) \cap \xi(F) \neq \emptyset,$$

o que mostra que  $y$  é aderente a  $B'_\varepsilon(0)$ . Concluimos agora de (1) que

$$\text{ad}(\xi \circ \lambda(B_1(0))) \supset \text{ad}(B'_\varepsilon(0)) \supset B_\varepsilon(0)$$

pelo que resulta de 2.2.39 que  $\xi \circ \lambda: E \rightarrow \widehat{F}$  é sobrejetiva, portanto, por ser  $\xi \circ \lambda(E) \subset \xi(F)$ , vem  $\xi(F) = \widehat{F}$ . Considerando então o isomorfismo topológico  $\xi^{-1}: \widehat{F} \rightarrow F$ , o facto de  $\widehat{F}$  ser um espaço de Banach implica que  $F$  também é um espaço de Banach (cf. 2.2.3).  $\square$

**2.2.45 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $G$  um espaço vetorial e  $\rho: E \rightarrow G$  uma aplicação linear sobrejetiva tal que o kernel

$$F = \{x \in E \mid \rho(x) = 0\}$$

seja um subespaço vetorial fechado. Considerando em  $G$  a norma quociente (cf. 2.1.47), tem-se então que  $G$  é também um espaço de Banach.<sup>190</sup>

Em particular, se  $E$  é um espaço de Banach e  $F \subset E$  é um subespaço vetorial fechado então considerando no espaço vetorial quociente  $E/F$  a norma quociente,  $E/F$  é também um espaço de Banach.

**Dem:** Trata-se de uma consequência de 2.2.44 uma vez que, como se verificou em 2.1.47, a aplicação linear canónica  $\rho: E \rightarrow G$  é contínua e aberta.  $\square$

Lembremos que se  $E$  é um espaço vetorial afirmar que tem lugar uma soma direta  $E = F \oplus G$ , com  $F$  e  $G$  subespaços vetoriais, corresponde a dizer que cada elemento  $x \in E$  se decompõe de maneira única como uma soma  $x = y + z$  com  $y \in F$  e  $z \in G$ . No caso em que  $E$  é um espaço vetorial normado certas decomposições em soma direta de subespaços, que estudaremos em seguida, têm propriedades especiais de compatibilidade com a topologia de  $E$ , sendo por esse motivo designadas por somas diretas topológicas. No caso particular em que  $E$  é um espaço de Banach o estudo destas últimas é consideravelmente clarificado por aplicação do teorema de Banach da aplicação aberta (ou, mais precisamente, do seu corolário 2.2.41).

<sup>190</sup>Observe-se que, no caso em que o espaço de Banach  $E$  é reflexivo, esta conclusão já foi obtida na alínea a) de 2.2.34.

**2.2.46 (Observações algébricas sobre somas diretas)** Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $F, G \subset E$  dois subespaços vetoriais.

**a)** Podemos considerar uma aplicação linear  $\sigma: F \times G \rightarrow E$ , definida por  $\sigma(y, z) = y + z$ , e, se tivermos presente a definição de soma direta, concluímos que dizer que tem lugar a soma direta  $E = F \oplus G$  é equivalente a dizer que a aplicação linear  $\sigma: F \times G \rightarrow E$  é um isomorfismo.

**b)** No caso em que tem lugar a soma direta  $E = F \oplus G$  ficam definidas aplicações lineares  $\pi_F: E \rightarrow F$  e  $\pi_G: E \rightarrow G$  pela condição de se ter, para cada  $x \in E$ ,

$$x = \pi_F(x) + \pi_G(x),$$

com  $\pi_F(x) \in F$  e  $\pi_G(x) \in G$  (as *projeções associadas à soma direta*) e estas aplicações lineares não são mais do que as compostas do isomorfismo  $\sigma^{-1}: E \rightarrow F \times G$  com as projeções canónicas  $\pi_1: F \times G \rightarrow F$  e  $\pi_2: F \times G \rightarrow G$ , em particular são sobrejetivas.<sup>191</sup>

**c)** Repare-se que, no caso em que temos a soma directa  $E = F \oplus G$ , as projeções associadas  $\pi_F$  e  $\pi_G$ , quando encaradas como aplicações lineares  $E \rightarrow E$ , verificam a identidade

$$(1) \quad \pi_F + \pi_G = Id_E$$

tendo-se, além disso, para cada  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in F &\Leftrightarrow \pi_F(x) = x \Leftrightarrow \pi_G(x) = 0, \\ x \in G &\Leftrightarrow \pi_G(x) = x \Leftrightarrow \pi_F(x) = 0, \end{aligned}$$

em particular,  $\pi_F(E) = F$  e  $\pi_G(E) = G$ .

**Subdem:** Temos uma consequência simples de (1) e de que se  $x \in F$  então vem  $x = x + 0$  com  $0 \in G$  e se  $x \in G$  então vem  $x = 0 + x$  com  $0 \in F$ .  $\square$

**d)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais e  $\alpha: E \rightarrow F$  e  $\beta: F \rightarrow E$  duas aplicações lineares tais que  $\alpha(\beta(y)) = y$  para cada  $y \in F$ . Tem-se então que  $\alpha$  é sobrejetiva e  $\beta$  é injetiva, em particular um isomorfismo de  $F$  sobre  $\beta(F) \subset E$ , e o inverso deste isomorfismo é a restrição de  $\alpha$  a  $\beta(F)$ . Além disso, considerando o kernel

$$\ker(\alpha) = \{x \in E \mid \alpha(x) = 0\},$$

tem lugar a soma direta

$$E = \beta(F) \oplus \ker(\alpha)$$

com projeções associadas  $E \rightarrow \beta(F)$  e  $E \rightarrow \ker(\alpha)$  definidas respectivamente por

$$x \mapsto \beta(\alpha(x)), \quad x \mapsto x - \beta(\alpha(x)).$$

<sup>191</sup>Repare-se que a notação  $\pi_F$  (ou  $\pi_G$ ) tem a limitação de não explicitar que a projecção depende não apenas do subespaço  $F$  mas também do complementar  $G$ .



**Subdem:** O facto de  $\alpha$  ser sobrejetiva resulta de que se  $y \in F$  a igualdade  $y = \alpha(\beta(y))$  mostra que  $y \in \alpha(E)$ . O facto de  $\beta$  ser injetiva, e portanto um isomorfismo de  $F$  sobre  $\beta(F) \subset E$ , resulta de que se  $\beta(y) = 0$  vem

$$y = \alpha(\beta(y)) = \alpha(0) = 0.$$

Além disso, se  $x \in \beta(F)$ , portanto  $x = \beta(y)$  com  $y \in F$  vemos que

$$\beta^{-1}(x) = y = \alpha(\beta(y)) = \alpha(x)$$

e portanto a restrição de  $\alpha$  a  $\beta(F)$  é efetivamente o isomorfismo inverso de  $\beta: F \rightarrow \beta(F)$ . Quanto à soma direta basta repararmos que, dado  $x \in E$ , vem

$$x = \beta(\alpha(x)) + (x - \beta(\alpha(x))),$$

com  $\beta(\alpha(x)) \in \beta(F)$  e

$$\alpha(x - \beta(\alpha(x))) = \alpha(x) - \alpha(\beta(\alpha(x))) = \alpha(x) - \alpha(x) = 0,$$

isto é,  $x - \beta(\alpha(x)) \in \ker(\alpha)$  e, se fosse  $x = x' + x''$  com  $x' \in \beta(F)$  e  $x'' \in \ker(\alpha)$ , então

$$\beta(\alpha(x)) = \beta(\alpha(x')) + \beta(\alpha(x'')) = \beta(\beta^{-1}(x')) + \beta(0) = x'$$

e portanto  $x'' = x - x' = x - \beta(\alpha(x))$ . □

**e)** Como caso particular do referido em d), vemos que, se  $E$  é um espaço vetorial,  $F \subset E$  um subespaço vetorial e  $\pi: E \rightarrow F$  uma aplicação linear tal que  $\pi(x) = x$  para cada  $x \in F$  então, sendo

$$G = \ker(\pi) = \{x \in E \mid \pi(x) = 0\},$$

tem lugar a soma direta  $E = F \oplus G$  para a qual  $\pi_F = \pi$  e  $\pi_G = Id_E - \pi$ .

**2.2.47 (Somadas diretas topológicas)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $F, G \subset E$  subespaços vetoriais tais que tenha lugar a soma direta  $E = F \oplus G$ . Considerando o correspondente isomorfismo  $\sigma: F \times G \rightarrow E$ , que é contínuo (cf. 2.1.18), e as projecções associadas  $\pi_F: E \rightarrow F$  e  $\pi_G: E \rightarrow G$ , são equivalentes as propriedades seguintes:

- 1)  $\sigma: F \times G \rightarrow E$  é um isomorfismo topológico;
- 2) A aplicação linear  $\pi_F: E \rightarrow F$  é contínua;
- 3) A aplicação linear  $\pi_G: E \rightarrow G$  é contínua.

Quando estas propriedades se verificarem, dizemos que a soma direta é uma *soma direta topológica*. É claro que então  $E = G \oplus F$  é então também uma soma direta topológica.

**Dem:** A equivalência entre 2) e 3) é uma consequência de se ter  $\pi_G = Id_E - \pi_F$  e  $\pi_F = Id_E - \pi_G$ . O facto de 1) implicar 2), e portanto 3), resulta de  $\pi_F$  ser a composta das aplicações lineares contínuas primeira projecção  $F \times G \rightarrow F$  e  $\sigma^{-1}: E \rightarrow F \times G$ . O facto de 2), ou 3), implicarem 1), resulta de que, para cada  $x \in E$ , tem-se  $\sigma^{-1}(x) = (\pi_F(x), \pi_G(x))$ . □

**2.2.48** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $F, G \subset E$  dois subespaços vetoriais tais que tenha lugar a soma direta  $E = F \oplus G$ . Tem-se então:

**a)** Se a soma direta é topológica, então  $F$  e  $G$  são subespaços vetoriais fechados de  $E$  e as projecções associadas  $\pi_F: E \rightarrow F$  e  $\pi_G: E \rightarrow G$ , além de contínuas são abertas, em particular sobrejetivas.

**b) (Banach)** Se  $E$  é um espaço de Banach e  $F$  e  $G$  são subespaços vetoriais fechados de  $E$ , então a soma direta é topológica.

**Dem:** Se a soma direta é topológica, o facto de  $F$  e  $G$  serem fechados resulta das caracterizações

$$F = \{x \in E \mid \pi_G(x) = 0\}, \quad G = \{x \in E \mid \pi_F(x) = 0\},$$

onde  $\pi_F$  e  $\pi_G$  são aplicações lineares contínuas e o facto de  $\pi_F: E \rightarrow F$  e  $\pi_G: E \rightarrow G$  serem abertas e sobrejetivas resulta de se tratarem das compostas do isomorfismo topológico  $\sigma^{-1}: E \rightarrow F \times G$  com as projecções canónicas  $F \times G \rightarrow F$  e  $F \times G \rightarrow G$ , respetivamente, que sabemos serem aplicações abertas e sobrejetivas. Suponhamos agora que  $E$  é um espaço de Banach e que  $F$  e  $G$  são subespaços vetoriais fechados, portanto também espaços de Banach. Tem-se então que  $F \times G$  também é um espaço de Banach com a norma do máximo, que define a topologia produto (cf. 2.2.9), pelo que concluímos do corolário do teorema de Banach da aplicação aberta (cf. 2.2.41) que o isomorfismo contínuo  $\sigma: F \times G \rightarrow E$  é um isomorfismo topológico, e portanto a soma direta é uma soma directa topológica.  $\square$

**2.2.49 (Subespaços vetoriais topologicamente complementados)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $F$  um subespaço vetorial. Dizemos que  $F$  é *topologicamente complementado* se existir um subespaço vetorial  $G \subset E$  tal que tenha lugar a soma direta topológica  $E = F \oplus G$ . Tem-se então:

**a)** Se  $F$  é topologicamente complementado então  $F$  é um subespaço vetorial fechado de  $E$ .

**b)** O subespaço vetorial  $F$  é topologicamente complementado se, e só se, existir uma aplicação linear contínua  $\pi: E \rightarrow F$  tal que  $\pi(x) = x$  para cada  $x \in F$  (uma *projecção linear contínua* de  $E$  sobre  $F$ ).

**c)** No caso em que  $E$  é um espaço de Banach, o subespaço vetorial  $F$  é topologicamente complementado se, e só se, for fechado e existir um subespaço vetorial fechado  $G$  tal que tenha lugar a soma direta  $E = F \oplus G$ .

**d)** Se  $F$  é um subespaço vetorial de dimensão finita de  $E$  então  $F$  é topologicamente complementado.<sup>192</sup>

**Dem:** **a)** Temos uma consequência directa da alínea a) de 2.2.48.

**b)** Se  $F$  é topologicamente complementado então basta tomar para  $\pi: E \rightarrow F$  a projecção  $\pi_F$  associada a uma soma direta topológica  $E = F \oplus G$  (cf. 2.2.47). Suponhamos, reciprocamente, que existe uma aplicação linear contínua  $\pi: E \rightarrow F$  tal que  $\pi(x) = x$  para cada  $x \in F$ . Sendo

$$G = \ker(\pi) = \{x \in E \mid \pi(x) = 0\},$$

<sup>192</sup>Ver a alínea b) do exercício 2.2.5 adiante para outro resultado no mesmo espírito.

o que referimos na alínea e) de 2.2.46 garante que tem lugar a soma direta  $E = F \oplus G$ , para a qual  $\pi = \pi_F$  e o facto de esta soma direta ser topológica é uma consequência da caracterização na alínea 2) de 2.2.47.

c) No caso em que  $F$  é topologicamente complementado, podemos considerar uma soma direta topológica  $E = F \oplus G$  e então, pela alínea a) de 2.2.48,  $F$  e  $G$  são subespaços vetoriais fechados de  $E$ . Reciprocamente, se  $F$  for um subespaço vetorial fechado do espaço de Banach  $E$  e existir um subespaço vetorial fechado  $G$  com  $E = F \oplus G$  resulta da alínea b) de 2.2.48 que esta soma direta é topológica e portanto que  $F$  é topologicamente complementado.

d) Se  $F$  é um subespaço vetorial de dimensão finita de  $E$  o corolário do teorema de Hahn-Banach em 2.1.64 aplicado à aplicação identidade  $Id_F: F \rightarrow F$  garante a existência de uma aplicação linear contínua  $\pi: E \rightarrow F$  cuja restrição a  $F$  seja a identidade o que, por b), garante que  $F$  é topologicamente complementado.  $\square$

O resultado que examinamos a seguir não está relacionado com o teorema de Banach da aplicação aberta mas, tal como este, é uma aplicação do teorema de Baire.

**2.2.50 (Teorema de Banach-Steinhaus da limitação uniforme)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço vetorial normado e  $(\lambda_i)_{i \in I}$  uma família arbitrária de aplicações lineares contínuas  $\lambda_i: E \rightarrow F$ . Tem-se então que o conjunto dos  $\lambda_i$  é limitado no espaço vetorial normado  $\mathcal{L}(E; F)$  se, e só se, para cada  $x \in E$ , o conjunto dos  $\lambda_i(x)$  é limitado em  $F$ .

**Dem:** Comecemos por supor que o conjunto do  $\lambda_i$  é limitado em  $\mathcal{L}(E; F)$ , portanto que existe  $M \geq 0$  tal que, para cada  $i \in I$ ,  $\|\lambda_i\| \leq M$ . Para cada  $x \in E$ , tem-se então, para todo o  $i \in I$ ,

$$\|\lambda_i(x)\| \leq \|\lambda_i\| \|x\| \leq M \|x\|$$

o que mostra que o conjunto dos  $\lambda_i(x)$  é limitado em  $F$ .

Suponhamos, reciprocamente, que, para cada  $x \in E$ , o conjunto dos  $\lambda_i(x)$  é limitado em  $F$ . Para cada natural  $n$ , seja  $C_n \subset E$ ,

$$C_n = \{x \in E \mid \|\lambda_i(x)\| \leq n, \text{ para cada } i \in I\},$$

conjunto que é fechado em  $E$  por ser a intersecção de uma família de fechados, indexada em  $i \in I$ . Para cada  $x \in E$  o facto de o conjunto dos  $\lambda_i(x)$  ser limitado implica a existência de  $n$  tal que  $x \in C_n$ . Concluimos assim que a união dos fechados  $C_n$  é igual a  $E$  pelo que, por  $E$  ser um espaço de Baire (cf. 1.10.3), vai existir  $n$  tal que  $\text{int}(C_n) \neq \emptyset$ . Podemos assim considerar  $x_0 \in E$  e  $r > 0$  tais que  $\overline{B}_r(x_0) \subset C_n$ . Para cada  $x \in \overline{B}_r(0)$ , tem-se então que  $x_0$  e  $x_0 + x$  pertencem a  $\overline{B}_r(x_0)$ , e portanto a  $C_n$ , pelo que, para cada  $i \in I$ ,  $\|\lambda_i(x_0)\| \leq n$  e  $\|\lambda_i(x_0 + x)\| \leq n$ , donde

$$\|\lambda_i(x)\| = \|\lambda_i(x_0 + x) - \lambda_i(x_0)\| \leq \|\lambda_i(x_0 + x)\| + \|\lambda_i(x_0)\| \leq 2n.$$

Vamos ver que este último facto implica que, para cada  $i \in I$ ,  $\|\lambda_i\| \leq \frac{2n}{r}$ , o que mostrará que o conjunto dos  $\lambda_i$  é limitado em  $\mathcal{L}(E; F)$ . Para isso, temos que verificar que, para cada  $i \in I$  e  $x \in E$ , tem-se  $\|\lambda_i(x)\| \leq \frac{2n}{r}\|x\|$ . Ora, esta desigualdade é trivial se  $x = 0$  e, no caso em que  $x \neq 0$ , ela resulta de que se tem  $\|\frac{rx}{\|x\|}\| = r$ , donde

$$\frac{r}{\|x\|}\|\lambda_i(x)\| = \|\lambda_i(\frac{rx}{\|x\|})\| \leq 2n,$$

isto é,  $\|\lambda_i(x)\| \leq \frac{2n}{r}\|x\|$ . □

**2.2.51 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço vetorial normado e  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de aplicações lineares contínuas  $\lambda_n: E \rightarrow F$  tal que, para cada  $x \in E$ , a  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos  $\lambda_n(x) \in F$  convirja para um elemento  $\lambda(x) \in F$ . Tem-se então:

**a)** O conjunto dos  $\lambda_n$  é limitado em  $\mathcal{L}(E; F)$ ;

**b)** A aplicação  $\lambda: E \rightarrow F$  definida atrás é linear contínua.<sup>193</sup>

**Dem:** Dados  $x, y \in E$  e o escalar  $a$ , as sucessões de elementos

$$\lambda_n(x + y) = \lambda_n(x) + \lambda_n(y), \quad \lambda_n(ax) = a\lambda_n(x),$$

convergem para  $\lambda(x) + \lambda(y)$  e  $a\lambda(x)$ , respectivamente, o que implica que  $\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y)$  e  $\lambda(ax) = a\lambda(x)$ , ou seja, a aplicação  $\lambda: E \rightarrow F$  é linear. Notemos agora que, para cada  $x \in E$ , o conjunto do  $\lambda_n(x)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , é limitado em  $F$ , uma vez que, por ser  $\|\lambda_n(x)\| \rightarrow \|\lambda(x)\|$ , existe  $n_0$  tal que, para cada  $n \geq n_0$ ,  $\|\lambda_n(x)\| \leq \|\lambda(x)\| + 1$ , e então todos os reais  $\|\lambda_n(x)\|$  são menores ou iguais ao máximo dos  $n_0$  números

$$\|\lambda(x)\| + 1, \|\lambda_1(x)\|, \dots, \|\lambda_{n_0-1}(x)\|.$$

O teorema de Banach-Steinhaus garante assim que existe  $M \geq 0$  tal que, para todo o  $n$ ,  $\|\lambda_n\| \leq M$ . Para cada  $x \in E$ , tem-se assim, para todo o  $n$ ,  $\|\lambda_n(x)\| \leq M\|x\|$ , e, por ser  $\|\lambda_n(x)\| \rightarrow \|\lambda(x)\|$ , vem  $\|\lambda(x)\| \leq M\|x\|$ , o que mostra que a aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow F$  é contínua. □

**2.2.52 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $(x_i)_{i \in I}$  uma família arbitrária de vetores de  $E$ . Tem-se então que o conjunto dos vetores  $x_i$  é limitado em  $E$  se, e só se, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , o conjunto dos escalares  $\lambda(x_i)$  é limitado em  $\mathbb{K}$ .

**Dem:** Consideremos a aplicação linear isométrica  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  definida em 2.2.19 e lembremos que  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é um espaço de Banach. O

<sup>193</sup>Não afirmamos, no entanto, que se tenha  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  em  $\mathcal{L}(E; F)$ . Para um contra-exemplo, ver o exercício 2.5.10 adiante. Também não se deve esperar que este resultado seja válido para sucessões generalizadas gerais em vez de  $\mathbb{N}$ -sucessões (cf. o exercício 2.2.14 adiante).

facto de  $\Theta$  ser isométrica implica que o conjunto dos  $x_i$  é limitado em  $E$  se, e só se, o conjunto dos  $\Theta(x_i)$  for limitado em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  e, tendo em conta o teorema de Banach-Steinhaus, isso acontece se, e só se, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  o conjunto dos  $\lambda(x_i) = \Theta(x_i)(\lambda)$  for limitado em  $\mathbb{K}$ .  $\square$

**2.2.53 (Aplicações bilineares separadamente contínuas)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F$  e  $G$  espaços vectoriais normados e  $\xi: E \times F \rightarrow G$  uma aplicação bilinear *separadamente contínua*, isto é, tal que:

1) Para cada  $y \in F$ , a aplicação linear  $\xi_y: E \rightarrow G$ ,  $x \mapsto \xi(x, y)$ , é contínua;

2) Para cada  $x \in E$ , a aplicação linear  ${}_x\xi: F \rightarrow G$ ,  $y \mapsto \xi(x, y)$ , é contínua.

Tem-se então que  $\xi: E \times F \rightarrow G$  é bilinear contínua.<sup>194</sup>

**Dem:** Para cada  $y \in F$ , com  $\|y\| = 1$ , podemos considerar a aplicação linear contínua  $\xi_y \in \mathcal{L}(E; G)$ . Dado  $x \in E$  arbitrário, tem-se, para todo o  $y \in F$ , com  $\|y\| = 1$ ,

$$\|\xi_y(x)\| = \|\xi(x, y)\| = \|{}_x\xi(y)\| \leq \|{}_x\xi\| \|y\| = \|{}_x\xi\|,$$

pelo que o conjunto dos  $\xi_y(x)$ , com  $y \in F$  e  $\|y\| = 1$ , é limitado em  $G$ . Podemos assim aplicar o teorema de Banach-Steinhaus 2.2.50 para garantir que o conjunto das aplicações lineares  $\xi_y$ , com  $\|y\| = 1$ , é limitado em  $\mathcal{L}(E; G)$ , pelo que existe  $M \geq 0$  tal que, para cada  $y \in F$ , com  $\|y\| = 1$ ,  $\|\xi_y\| \leq M$ . Vamos verificar que se pode deduzir daqui que, quaisquer que sejam  $x \in E$  e  $y \in F$ , tem-se  $\|\xi(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ , o que mostrará que a aplicação bilinear  $\xi$  é efectivamente contínua. Ora a desigualdade em questão é trivial no caso em que  $y = 0$  e, caso contrário, podemos considerar o elemento  $y/\|y\|$  de  $F$ , que tem norma 1, e obtemos

$$\|\xi(x, y)\| = \|y\| \|\xi(x, \frac{y}{\|y\|})\| = \|y\| \|\xi_{y/\|y\|}(x)\| \leq \|y\| M \|x\|,$$

como queríamos.  $\square$

## Exercícios

**Ex. 2.2.1** Sejam  $I$  um conjunto não vazio de índices e  $E$  um espaço de Banach e consideremos o espaço vectorial normado  $\ell_E^1(I)$ , de todas as aplicações  $(x_i)_{i \in I}$  de  $I$  para  $E$  tais que

$$\sum_{i \in I} \|x_i\| < +\infty,$$

com a norma  $\|\cdot\|_1$  definida por

<sup>194</sup>É claro que, por simetria do papel das variáveis ou, se preferirmos, considerando a aplicação bilinear  $F \times E \rightarrow G$ ,  $(y, x) \mapsto \xi(x, y)$ , podemos tirar a mesma conclusão no caso em que  $F$  é um espaço de Banach e  $E$  é um espaço vectorial normado qualquer.

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_1 = \sum_{i \in I} \|x_i\|$$

(cf. 2.1.13). Verificar que  $\ell_E^1(I)$  é também um espaço de Banach. **Sugestão:** Seguir um caminho inspirado pelo da demonstração de 2.2.10, lembrando que uma soma de uma família eventualmente infinita é o supremo de todas as somas parciais finitas.

**Ex. 2.2.2** Consideremos no espaço vetorial  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  a norma  $\|\cdot\|_1'$  definida no exercício 2.1.12 e seja, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação contínua definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < -\frac{1}{n} \\ nx, & \text{se } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{se } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Verificar que a sucessão das funções  $f_n$  é uma sucessão de Cauchy e que esta sucessão não é convergente, o que permitirá afirmar que não estamos em presença de um espaço de Banach. **Sugestão:** Supondo que a sucessão convergia para  $f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ , utilizar o exercício 2.1.13 para deduzir que a restrição de  $f$  a cada intervalo  $[-1, r]$ , com  $r < 0$ , tinha que ser constantemente  $-1$  e que a restrição de  $f$  a cada intervalo  $[r, 1]$ , com  $r > 0$ , tinha que ser constantemente  $1$ .

**Ex. 2.2.3** Enunciar e justificar, por indução, uma versão de 2.2.16 para as aplicações multilineares.

**Ex. 2.2.4** Verificámos em 2.1.65, essencialmente como aplicação do teorema de Hahn-Banach, que todo o subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço vetorial normado é fechado. Obter uma nova demonstração do mesmo resultado, utilizando 2.2.7.

**Ex. 2.2.5 a)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado e  $G \subset E$  um subespaço vetorial de dimensão finita tais que  $E = F \oplus G$ . Mostrar que esta soma direta é topológica. **Sugestão:** Reparar que não se pode aplicar a alínea b) de 2.2.48 porque não estamos a supor que  $E$  seja completo. Em vez disso, utilizar a conclusão da alínea b) do exercício 2.1.32 para mostrar que a projecção  $\pi_G: E \rightarrow G$  é contínua.

**b)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Lembrar que se verificou na alínea d) de 2.2.49 que todo o subespaço vetorial de dimensão finita de  $E$  é topologicamente complementado. Deduzir de a) que também é verdade que todo o subespaço vetorial fechado de codimensão finita  $F \subset E$  (cf. o exercício 2.1.31) é topologicamente complementado. **Sugestão:** Lembrar a conclusão da alínea a) do exercício 2.1.31.

**Ex. 2.2.6 (Produto de espaços reflexivos)** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e para cada  $i \in I$  um espaço de Banach reflexivo  $E_i$ . Mostrar que, considerando no espaço vetorial produto cartesiano  $\prod E_i$  a norma do máximo, este produto cartesiano é também reflexivo.

**Sugestão:** Ter em conta o exercício 2.1.19, cujas notações se retomarão. Dada uma aplicação linear  $\xi: \mathcal{L}(\prod E_i; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ , considerar para cada  $i \in I$  a aplicação linear contínua

$$\pi_i^* = \mathcal{L}(\pi_i; Id_{\mathbb{K}}): \mathcal{L}(E_i; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\prod E_i; \mathbb{K})$$

e  $x_i \in E_i$  representando a aplicação linear  $\xi \circ \pi_i^*: \mathcal{L}(E_i; \mathbb{K})$  e verificar em seguida que o elemento  $x = (x_i)_{i \in I}$  representa a aplicação linear  $\xi$ .

**Ex. 2.2.7** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua dualizante na segunda variável. Generalizar a conclusão da alínea c) de 2.2.30 para mostrar que se  $A \subset E$  é um subconjunto arbitrário então  ${}^\perp(A^\perp)$  é a aderência do subespaço vetorial gerado por  $A$ .

**Ex. 2.2.8** Suponhamos que  $E$  é um espaço de Banach reflexivo e que  $E_0 \subset E$  é um subespaço vetorial denso, com  $E_0 \neq E$ . Verificar que o dual  $\mathcal{L}(E_0; \mathbb{K})$  é um espaço de Banach reflexivo apesar de  $E_0$  não ser reflexivo (por não ser um espaço de Banach). **Sugestão:** Lembrar que, pelo corolário 2.2.15, existe um isomorfismo topológico entre  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $\mathcal{L}(E_0; \mathbb{K})$ .

**Ex. 2.2.9 (Exemplo de um espaço de Banach não reflexivo)** Consideremos o espaço de Banach real  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ , de todas as aplicações contínuas  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , com a norma  $\|f\|_\infty$  (cf. 2.2.8).

**a)** Verificar que se pode definir uma aplicação linear contínua  $\lambda_+: \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\|\lambda_+\| = 1$ , por

$$\lambda_+(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

e que se  $f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  verifica  $\|f\|_\infty = 1$  então tem-se  $\lambda_+(f) = 1$  (respetivamente  $\lambda_+(f) = -1$ ) se, e só se,  $f(x) = 1$  (respetivamente  $f(x) = -1$ ) para todo o  $x \in [0, 1]$ .

**b)** Verificar que se pode definir uma aplicação linear contínua  $\lambda_-: \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\|\lambda_-\| = 1$ , por

$$\lambda_-(f) = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

e que se  $f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  verifica  $\|f\|_\infty = 1$  então tem-se  $\lambda_-(f) = 1$  (respetivamente  $\lambda_-(f) = -1$ ) se, e só se,  $f(x) = 1$  (respetivamente  $f(x) = -1$ ) para todo o  $x \in [-1, 0]$ . **Sugestão:** Se não quiser “repetir” o que fez para a alínea a) pode reparar que se tem  $\lambda_-(f) = \lambda_+(\tilde{f})$  onde  $\tilde{f}(x) = f(-x)$ .

**c)** Seja  $\lambda: \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação linear contínua definida por

$$\lambda(f) = \lambda_+(f) - \lambda_-(f).$$

Considerando as aplicações contínuas  $f_n: \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - (1-x)^n, & \text{se } x \geq 0 \\ -1 + (1+x)^n, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

calcular  $\lambda(f_n)$  e concluir que se tem  $\|\lambda\| = 2$ . Aplicando o que se concluiu nas alíneas a) e b), verificar que não existe  $f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  com  $\|f\|_\infty = 1$  tal que  $|\lambda(f)| = 2$ .

**d)** Tendo em conta a conclusão de c) e a de 2.2.21 concluir que o espaço de Banach  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  não é reflexivo.

**Ex. 2.2.10 (Formas bilineares isométricas)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua. Num espírito análogo ao de 2.2.26, podemos dizer que  $\gamma$  é isométrica na primeira variável se a correspondente

aplicação linear contínua  $\hat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  for isométrica (em particular  $\hat{\gamma}$  é então injetiva, ou seja,  $\gamma$  é subdualizante na primeira variável) e que  $\gamma$  é isométrica na segunda variável se a aplicação bilinear oposta  $\gamma^{op}$  for isométrica na primeira variável, por outras palavras, se a correspondente aplicação linear contínua  $\hat{\gamma}: F \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  for isométrica (em particular  $\hat{\gamma}$  é então injetiva, ou seja,  $\gamma$  é subdualizante na segunda variável).

**a)** Verificar que se  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  for isométrica na primeira variável, então  $\|\gamma\| \leq 1$ . Concluir que o mesmo acontece se  $\gamma$  for isométrica na segunda variável.

**b)** Verificar que se  $\gamma$  for isométrica na primeira variável então  $\gamma$  é dualizante na primeira variável se, e só se, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$ , existir  $x \in E$  tal que  $\lambda(y) = \gamma(x, y)$  para cada  $y \in F$  (note-se que não afirmamos, de modo nenhum, que uma aplicação dualizante na primeira variável tenha que ser isométrica na primeira variável).

**c)** Verificar que, se  $E$  é um espaço vetorial normado então a aplicação bilinear contínua  $\Phi: E \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ , oposta da de avaliação e referida na alínea a) de 2.2.27 é isométrica nas duas variáveis. **Sugestão:** Ter em conta 2.2.19.

**d)** Verificar que, sendo  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , a multiplicação  $\gamma: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  é uma aplicação bilinear contínua isométrica nas duas variáveis (já foi referido na alínea b) de 2.2.27 que ela é dualizante nas duas variáveis).

**Ex. 2.2.11** Seja  $E$  um espaço vetorial munido de duas normas  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|'$ , relativamente às quais  $E$  é espaço de Banach. Mostrar que, se a primeira norma é mais fina que a segunda (cf. 2.1.16), então as duas normas são mesmo equivalentes.

**Sugestão:** Aplicar o teorema da Banach da aplicação aberta ao isomorfismo  $Id_E: E \rightarrow E$ .

**Ex. 2.2.12** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua tal que  $\lambda(E) \subset F$  tenha codimensão finita (cf. o exercício 2.1.31). Mostrar que  $\lambda(E)$  é um subespaço vetorial fechado de  $F$ .

**Sugestão:** Considerar um subespaço vetorial de dimensão finita  $G \subset F$  tal que  $F = \lambda(E) \oplus G$  e reparar que se pode considerar uma aplicação linear contínua sobrejetiva  $\mu: E \times G \rightarrow F$ , entre espaços de Banach, definida por  $\mu(x, y) = \lambda(x) + y$ . Aplicar então o teorema de Banach da aplicação aberta e mostrar que

$$F \setminus \lambda(E) = \mu(E \times (G \setminus \{0\})).$$

**Ex. 2.2.13** Escolhendo para  $\mathbb{K}$  um dos corpos  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , consideremos o espaço de Banach  $\ell^\infty = \mathbb{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  das sucessões limitadas  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $\mathbb{K}$ , com a norma  $\|\cdot\|_\infty$  (cf. 2.1.10 e 2.2.5).

**a)** Verificar que se pode definir uma aplicação linear contínua injetiva  $\lambda: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$  por

$$\lambda((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n \in \mathbb{N}},$$

a qual é portanto um isomorfismo de  $\ell^\infty$  sobre um subespaço vetorial  $\mathcal{E} \subset \ell^\infty$ .

**b)** Verificar que a aplicação linear inversa  $\lambda^{-1}: \mathcal{E} \rightarrow \ell^\infty$  não é contínua, e portanto que  $\lambda: \ell^\infty \rightarrow \mathcal{E}$  não é um isomorfismo topológico.

**c)** Deduzir de b) que  $\mathcal{E}$  não é um espaço de Banach, e portanto não é fechado em  $\ell^\infty$ .

**d)** Verificar que, apesar de a aplicação linear  $\lambda^{-1}: \mathcal{E} \rightarrow \ell^\infty$  não ser contínua, o seu gráfico é um subconjunto fechado de  $\mathcal{E} \times \ell^\infty$ . **Sugestão:** Reparar que o gráfico da aplicação linear contínua  $\lambda: \ell^\infty \rightarrow \mathcal{E}$  é um subconjunto fechado de  $\ell^\infty \times \mathcal{E}$ .



**Ex. 2.2.14** Seja  $E$  um espaço de Banach de dimensão infinita e consideremos o espaço de Banach  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  das aplicações lineares contínuas  $E \rightarrow \mathbb{K}$  que é um subespaço vetorial do espaço vetorial  $L(E; \mathbb{K})$ , de todas as aplicações lineares  $E \rightarrow \mathbb{K}$ , sobre o qual consideraremos a topologia da convergência simples (cf. 1.2.82). Lembremos que, como se viu no exercício 2.1.21,  $L(E; \mathbb{K})$  contém estritamente  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ .

**a)** Reparar que, como consequência de 2.2.51,  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é sequencialmente fechado em  $L(E; \mathbb{K})$ .

**b)** Mostrar que, no entanto,  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é denso em  $L(E; \mathbb{K})$ . **Sugestão:** Utilizar a versão real ou complexa do teorema de Hahn-Banach para mostrar que, para cada  $\lambda \in L(E; \mathbb{K})$  e cada subespaço vetorial de dimensão finita  $F \subset E$ , existe  $\mu \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  que coincida com  $\lambda$  em  $F$ .

**c)** Concluir de b) que, para a validade de 2.2.51, é fundamental termos uma  $\mathbb{N}$ -sucessão e não uma sucessão generalizada.

**Ex. 2.2.15** Seja  $E$  um espaço de Banach de dimensão infinita. Mostrar que  $E$  não admite nenhuma base algébrica numerável  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . **Sugestão:** Lembrar que  $E$  é um espaço de Baire (cf. 1.2.3) e reparar que, se existisse uma base algébrica  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , então, notando  $E_n$  o subespaço vetorial de dimensão finita gerado pelos vetores  $w_1, \dots, w_n$ ,  $E$  era a união numerável dos subespaços vetoriais  $E_n$ , que são fechados de interior vazio e, conseqüentemente,  $E$  teria que ter interior vazio.

**Ex. 2.2.16** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e  $\beta: F \rightarrow E$  uma aplicação linear contínua. Vamos dizer que  $\beta$  é um *monomorfismo estrito* se existir uma aplicação linear contínua  $\alpha: E \rightarrow F$  tal que  $\alpha \circ \beta = Id_F$ .

**a)** Verificar que uma aplicação linear contínua  $\beta: F \rightarrow E$  é um monomorfismo estrito se, e só se,  $\beta$  for um isomorfismo topológico de  $F$  sobre  $\beta(F)$  com  $\beta(F)$  subespaço vetorial topologicamente complementado (em particular fechado) de  $F$  (cf. 2.2.49).

**Sugestão:** Ter em conta a caracterização dos subespaços vetoriais topologicamente complementados na alínea b) de 2.2.49 e lembrar o referido na alínea d) de 2.2.46. No caso em que existe  $\alpha$  nas condições da definição de monomorfismo estrito, reparar que  $\beta \circ \alpha: E \rightarrow \beta(F)$  é uma projeção linear contínua; No caso em que  $\beta$  é um isomorfismo topológico sobre a imagem e  $\pi$  é uma projeção linear contínua de  $E$  sobre  $\beta(F)$  considerar  $\alpha = \beta^{-1} \circ \pi$ .

**b)** Suponhamos que  $F$  tem dimensão finita. Verificar que qualquer aplicação linear contínua injectiva  $\beta: F \rightarrow E$  é um monomorfismo estrito. **Sugestão:** Ter em conta a conclusão de a) e a alínea d) de 2.2.49.

**c)** Suponhamos que  $\beta: F \rightarrow E$  é um isomorfismo topológico de  $F$  sobre  $\beta(F)$  com  $\beta(F)$  fechado e de codimensão finita. Mostrar que  $\beta: F \rightarrow E$  é um monomorfismo estrito. **Sugestão:** Ter em conta a conclusão de a) e a alínea b) do exercício 2.2.5.

**d)** Suponhamos agora que  $E$  e  $F$  são espaços de Banach. Mostrar que uma aplicação linear contínua injectiva  $\beta: F \rightarrow E$  é um monomorfismo estrito se, e só se  $\beta(F)$  é fechado em  $E$  e existe um subespaço vetorial fechado  $G \subset E$  tal que  $E = \beta(F) \oplus G$ .

**Sugestão:** Ter em conta a conclusão de a), o teorema de Banach da aplicação aberta e a alínea c) de 2.2.49.

**Ex. 2.2.17** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e  $\alpha: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Vamos dizer que  $\alpha$  é um *epimorfismo estrito* se existir uma aplicação linear contínua  $\beta: F \rightarrow E$  tal que  $\alpha \circ \beta = Id_F$  (comparar com o exercício 2.2.16).

**a)** Verificar que uma aplicação linear contínua  $\alpha: E \rightarrow F$  é um epimorfismo estrito se, e só se, for aberta (em particular sobrejetiva) e com kernel  $\ker(\alpha)$  subespaço

vetorial topologicamente complementado de  $E$ .

**Sugestão:** Ter em conta a caracterização dos subespaços vetoriais topologicamente complementados na alínea b) de 2.2.49 e lembrar o referido na alínea d) de 2.2.46. No caso em que existe  $\beta$  nas condições da definição de epimorfismo estrito,  $Id_E - \beta \circ \alpha$  é uma projeção linear contínua de  $E$  sobre  $\ker(\alpha)$  e a aplicação linear  $\beta \circ \alpha: E \rightarrow \beta(F)$  é aberta, enquanto projeção associada a uma soma direta topológica, tendo-se que  $\alpha: E \rightarrow F$  é a composta desta com o isomorfismo topológico  $\beta^{-1}: \beta(F) \rightarrow F$  (restrição de  $\alpha$ ). No caso em que  $\alpha$  é aberta e  $\ker(\alpha)$  é topologicamente complementado, considerar uma soma direta topológica  $E = \ker(\alpha) \oplus G$ , mostrar que a restrição de  $\alpha$  a  $G$  é um isomorfismo de  $G$  sobre  $F$  e tomar para  $\beta$  o isomorfismo inverso desta restrição, utilizando o facto de  $\alpha$  ser finalizante (cf. 1.11.1 e 1.11.6) para justificar que  $\beta$  é contínua.

**b)** No caso em que  $F$  tem dimensão finita e a aplicação linear contínua  $\alpha: E \rightarrow F$  é sobrejetiva, mostrar que  $\alpha$  é um epimorfismo estrito.

**Sugestão:** A partir dum complementar algébrico de  $\ker(\alpha)$  em  $E$  construir uma aplicação linear  $\beta: F \rightarrow E$  tal que  $\alpha \circ \beta = Id_F$  e reparar que  $\beta$  é necessariamente contínua.

**c)** No caso em que  $E$  e  $F$  são espaços de Banach mostrar que  $\alpha$  é um epimorfismo estrito se, e só se, for uma aplicação linear sobrejetiva e existir um subespaço vetorial fechado  $G \subset E$  tal que  $E = \ker(\alpha) \oplus G$ .

**Sugestão:** Ter em conta o teorema de Banach da aplicação aberta e 2.2.48.

**Ex. 2.2.18** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado. Mostrar que são equivalentes as propriedades:

- 1)  $F$  é topologicamente complementado;
- 2) A inclusão  $\iota: F \rightarrow E$  é um monomorfismo estrito;
- 3) A aplicação linear canónica  $\rho: E \rightarrow E/F$  é um epimorfismo estrito, quando se considera em  $E/F$  a norma quociente, referida em 2.1.47.

**Sugestão:** Lembrar que a aplicação  $\rho: E \rightarrow E/F$  é aberta e ter em conta o que se verificou nos exercícios 2.2.16 e 2.2.17.

### §3. Famílias somáveis num espaço de Banach e aplicações.

Recordemos que em 1.2.67, como aplicação da noção de limite de uma sucessão generalizada, definimos o significado de uma família arbitrária  $(x_j)_{j \in J}$  de números reais ter uma soma na reta estendida  $\mathbb{R}$  e chamámos somáveis às famílias que têm soma e cuja soma é finita. Algumas propriedades elementares da noção de soma, no contexto dos números reais foram estudadas em 1.2.68, 1.2.69 e 1.2.70. A definição de soma e as duas primeiras propriedades referidas generalizam-se de modo natural ao contexto em que temos uma soma de uma família de vetores de um espaço vetorial normado, a única diferença estando em que deixa de fazer sentido considerar  $+\infty$  e  $-\infty$  como valores possíveis para as somas. É isso que vamos fazer em seguida. Para a obtenção de várias propriedades importantes será essencial que o espaço vetorial normado seja completo e, por esse motivo e para simplificar a exposição, suporemos desde o início que trabalhamos no contexto dos espaços de Banach.

**2.3.1** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $J$  um conjunto arbitrário de índices e  $(x_j)_{j \in J}$  uma família de vetores de  $E$ . Para cada subconjunto finito  $K \subset J$ , podemos considerar a *soma parcial*

$$S_K = \sum_{j \in K} x_j \in E$$

e obtemos assim uma sucessão generalizada de elementos  $S_K$  de  $E$ , cujo conjunto de índices é a classe  $\mathcal{F}(J)$  das partes finitas de  $J$ , classe onde, tal como em 1.2.67, se considera a relação  $\succeq$  definida por

$$K \succeq K' \Leftrightarrow K \supset K',$$

que a torna um conjunto dirigido. Dito isto, diremos que a família  $(x_j)_{j \in J}$  é *somável* se a sucessão generalizada dos elementos  $S_K$  tiver como limite um certo  $x \in E$  (necessariamente único uma vez que  $E$ , como qualquer espaço métrico, é um espaço de Hausdorff) e, nesse caso, dizemos que  $x$  é a *soma* da família  $(x_j)_{j \in J}$  e escreveremos

$$x = \sum_{j \in J} x_j.$$

Se relembrarmos a caracterização do limite de uma sucessão generalizada em termos de sistemas fundamentais de vizinhanças, vemos que dizer que a família  $(x_j)_{j \in J}$  é somável, e com soma  $x$ , é o mesmo que dizer que, qualquer que seja  $\delta > 0$ , existe uma parte finita  $K_0 \subset J$  tal que, qualquer que seja a parte finita  $K \subset J$ , tal que  $K \supset K_0$ , se tenha

$$\|x - \sum_{j \in K} x_j\| < \delta.$$

Repare-se ainda que, analogamente ao referido em 1.2.67, no caso em que o conjunto de índices  $J$  é finito a família é somável e com soma igual à soma finita de vetores no sentido habitual. Esta observação trivial é uma consequência de  $J$  ser então um elemento maximal de  $\mathcal{F}(J)$  (cf. 1.2.63).

Note-se ainda que, no caso em que  $E$  é um espaço de Banach complexo, a somabilidade de uma família e o valor da sua soma não dependem de considerar  $E$  como espaço de Banach complexo ou como espaço de Banach real (a multiplicação pelos escalares não intervém na definição).

**2.3.2 (Nota)** Repare-se na relação entre a definição precedente e a examinada em 1.2.67, no caso em que o espaço de Banach é  $\mathbb{R}$ . Nesse caso especial admitamos que a soma pudesse existir e ser igual a  $+\infty$  ou  $-\infty$ , caso em que não era assim um elemento do espaço de Banach mas já reservávamos a designação de somáveis para as famílias que tinham soma finita pelo que a designação de família somável e a sua soma correspondem a um caso particular da definição precedente. Recordemos também que, como estabelecido em 1.2.70, no caso especial das famílias  $(x_j)_{j \in J}$  de números

reais com  $x_j \geq 0$  para cada  $j$ , a soma existe sempre e pertence a  $[0, +\infty]$  pelo que dizer que a família é somável pode ser traduzido por  $\sum x_j < +\infty$ .

**2.3.3 (Linearidade das somas)** Seja  $E$  um espaço de Banach sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Então:

a) A família identicamente 0 de vetores de  $E$  é somável e com soma 0.

b) Dadas famílias somáveis  $(x_j)_{j \in J}$  e  $(y_j)_{j \in J}$  de vetores de  $E$  com somas  $x \in E$  e  $y \in E$  respetivamente, a família  $(x_j + y_j)_{j \in J}$  é somável e com soma  $x + y$  e, para cada  $a \in \mathbb{K}$ , a família  $(ax_j)_{j \in J}$  é somável e com soma  $ax$ .<sup>195</sup>

**Dem:** a) Temos uma consequência de todas as somas parciais finitas serem iguais ao vetor 0.

b) Temos uma consequência das propriedades algébricas dos limites examinadas em 2.1.20 e 2.1.31 uma vez que para cada parte finita  $K \subset J$  tem-se

$$\sum_{j \in K} (x_j + y_j) = \sum_{j \in K} x_j + \sum_{j \in K} y_j, \quad \sum_{j \in K} ax_j = a \sum_{j \in K} x_j. \quad \square$$

**2.3.4 (Famílias somáveis e aplicações lineares contínuas)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Se  $(x_j)_{j \in J}$  é uma família somável de vetores de  $E$  então  $(\lambda(x_j))_{j \in J}$  é uma família somável de vetores de  $F$  e

$$\sum_{j \in J} \lambda(x_j) = \lambda\left(\sum_{j \in J} x_j\right).$$

**Dem:** Trata-se de uma consequência do resultado sobre o limite da função composta em 1.2.41 e da caracterização da continuidade em termos de limites em 1.4.1, visto que para cada parte finita  $K$  de  $J$  tem-se

$$\sum_{j \in K} \lambda(x_j) = \lambda\left(\sum_{j \in K} x_j\right). \quad \square$$

Repare-se que a segunda conclusão na alínea b) de 2.3.3 podia também ter sido justificada pelo resultado precedente, a partir da observação de que a igualdade  $\|ax\| = |a|\|x\|$  mostra que, dado  $a \in \mathbb{K}$ , temos uma aplicação linear contínua  $E \rightarrow E$ ,  $x \mapsto ax$ , com norma menor ou igual a  $|a|$ . Uma observação análoga a esta justifica o corolário a seguir, em que temos um vetor fixado e uma família somável de escalares.

**2.3.5 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço de Banach sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $x \in E$  e  $(a_j)_{j \in J}$  uma família somável de escalares com soma  $a$ . Tem-se então que a família  $(a_j x)_{j \in J}$  de vetores de  $E$  é somável e com soma  $ax$ .

**Dem:** Basta aplicar 2.3.4, reparando que a igualdade  $\|ax\| = |a|\|x\|$  implica

<sup>195</sup>Comparar com 1.2.68, reparando que a respetiva alínea c) não faz sentido no contexto vetorial.

que tem lugar uma aplicação linear contínua  $\mathbb{K} \rightarrow E$ , com norma menor ou igual a  $\|x\|$ , definida por  $a \mapsto ax$ .  $\square$

**2.3.6 (Corolário)** Seja  $(z_j)_{j \in J}$  uma família somável de números complexos. Tem-se então que a família dos complexos conjugados  $(\bar{z}_j)_{j \in J}$  é também somável e

$$\sum_{j \in J} \bar{z}_j = \overline{\sum_{j \in J} z_j}.$$

**Dem:** Basta aplicar 2.3.4 à aplicação linear contínua real  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $z \mapsto \bar{z}$ .  $\square$

**2.3.7 (Séries e famílias somáveis)** Suponhamos que o conjunto dos índices  $J$  é numerável e seja  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow J$  uma aplicação bijetiva. Se uma família  $(x_j)_{j \in J}$  de vetores do espaço de Banach  $E$  for somável e com soma  $x \in E$ , então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$  é convergente e também com soma  $x$ , no sentido que, definindo as somas parciais  $S_n = \sum_{p=1}^n x_{\varphi(p)}$ , a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vetores de  $E$  tem limite  $x$ . Podemos assim escrever

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)},$$

sempre que o primeiro membro faça sentido.<sup>196</sup>

**Dem:** Reparemos que as somas parciais  $S_n$ , utilizadas para definir a soma de uma série, são um caso particular das somas parciais  $S_K$  referidas em 2.3.1, mais precisamente, tem-se

$$S_n = S_{\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}}.$$

Dito de outro modo, e encarando as famílias como aplicações, a aplicação  $\mathbb{N} \rightarrow E$  que a  $n$  associa  $S_n$  é a composta da aplicação  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N})$  que a  $n$  associa  $\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$  com a aplicação  $\mathcal{F}(\mathbb{N}) \rightarrow E$  que a  $K$  associa  $S_K$ . Tendo em conta o resultado sobre o limite da função composta estabelecido em 1.2.41, podemos concluir a asserção do enunciado desde que mostremos que a função  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N})$  que referimos tem limite  $+\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Ora, isso resulta de que, se  $K \subset J$  é finito, podemos considerar  $n_0 \in \mathbb{N}$  maior ou igual a todos os elementos de  $\varphi^{-1}(K)$  (por exemplo, o máximo de  $K$  quando  $K \neq \emptyset$ ) e então, para cada  $n \geq n_0$ , tem-se  $\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\} \supset K$ .  $\square$

<sup>196</sup>Temos uma generalização trivial do caso em que  $E = \mathbb{R}$ , examinado em 1.2.69. Note-se que o exercício 2.4.1 adiante mostra que a recíproca não é válida, mesmo no caso em que  $E = \mathbb{R}$ : Podemos ter uma série convergente sem que a família seja somável.

**2.3.8 (Versão trivial da comutatividade)** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_j)_{j \in J}$  uma família de vetores de  $E$ . Sejam  $J'$  outro conjunto de índices e  $\varphi: J \rightarrow J'$  uma aplicação bijectiva e consideremos uma nova família  $(y_k)_{k \in J'}$ , definida por  $y_k = x_{\varphi^{-1}(k)}$ . Tem-se então que  $(x_j)_{j \in J}$  é somável se, e só se,  $(y_k)_{k \in J'}$  é somável e, quando isso acontecer,

$$\sum_{k \in J'} y_k = \sum_{j \in J} x_j. \quad 197$$

Repare-se que o enunciado anterior, aplicado ao caso em que  $E = \mathbb{R}$  e  $x_j \geq 0$  para cada  $j$ , permite-nos concluir que a igualdade anterior é nesse caso válida sem ser necessária qualquer hipótese de somabilidade visto que quando uma, e portanto a outra, família não for somável ambos os membros tomam o valor  $+\infty$ .

**Dem:** O caso em que  $J$  é finito é bem conhecido, sendo uma consequência da comutatividade da adição de vetores<sup>198</sup>. No caso geral, suponhamos que  $(x_j)_{j \in J}$  é somável, e de soma  $x$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar  $K_0 \subset J$  finito tal que, sempre  $K \subset J$  é finito e verifica  $K \supset K_0$ , tem-se  $\|x - \sum_{j \in K} x_j\| < \delta$ . Considerando então a parte finita  $K'_0 = \varphi(K_0) \subset J'$ ,

vemos que, para cada parte finita  $K' \supset K'_0$  de  $J'$ ,  $K = \varphi^{-1}(K')$  é uma parte finita de  $J$  contendo  $K_0$  e, tendo em conta o caso finito,

$$\|x - \sum_{k \in J'} y'_k\| = \|x - \sum_{j \in J} x_j\| < \delta,$$

o que mostra que a família  $(y_k)_{k \in J'}$  é também somável e de soma  $x$ . A recíproca resulta de aplicar o que acabamos de provar à bijecção inversa  $\varphi^{-1}: J' \rightarrow J$ .  $\square$

Até este momento poderíamos ter dispensado a hipótese de os espaços vetoriais normados envolvidos serem completos, mas a partir de agora isso vai passar a ser importante.

**2.3.9 (Condição de Cauchy de somabilidade)** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_j)_{j \in J}$  uma família de vetores de  $E$ . Tem-se então que esta família é somável se, e só se, se verifica a seguinte *condição de Cauchy de somabilidade*: Qualquer que seja  $\delta > 0$ , existe uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal

<sup>197</sup>Lembrar que o resultado análogo a este para as séries, mesmo que de números reais, não é válido sem alguma restrição, como por exemplo a de termos uma série absolutamente convergente. De facto, os exercícios 2.3.3 e 2.3.6 mostram que, no contexto das séries de números reais, só as séries absolutamente convergentes gozam desta propriedade de comutatividade.

<sup>198</sup>Aliás a comutatividade intervém antes: Sem ela não seria possível definir uma soma de vetores indexados num conjunto finito não ordenado.

que, qualquer que seja a parte finita  $K$  de  $J$ , disjunta de  $K_0$ ,  $\|\sum_{j \in K} x_j\| < \delta$ .

**Dem:** Suponhamos que a família é somável. A sucessão generalizada das somas parciais é então convergente, e portanto de Cauchy, pelo que, dado  $\delta > 0$ , existe uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal que, quaisquer que sejam as partes finitas  $K$  e  $K'$  de  $J$ , contendo  $K_0$ , se tenha

$$\|\sum_{j \in K} x_j - \sum_{j \in K'} x_j\| < \delta.$$

Qualquer que seja a parte finita  $K$  de  $J$ , disjunta de  $K_0$ , podemos então escrever

$$\|\sum_{j \in K} x_j\| = \|\sum_{j \in K_0 \cup K} x_j - \sum_{j \in K_0} x_j\| < \delta,$$

o que mostra que se verifica a condição de Cauchy de somabilidade. Suponhamos, reciprocamente, que se verifica esta condição. Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Podemos então fixar uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal que, qualquer que seja a parte finita  $K$  de  $J$ , disjunta de  $K_0$ , se tenha  $\|\sum_{j \in K} x_j\| < \frac{\delta}{2}$ . Sejam

agora  $K$  e  $K'$  duas partes finitas de  $J$ , contendo  $K_0$ . Podemos então escrever  $K \setminus K' = K_1$  e  $K' \setminus K = K_2$ , com  $K_1$  e  $K_2$  partes finitas de  $K$ , disjuntas de  $K_0$ , pelo que

$$\begin{aligned} \|\sum_{j \in K} x_j - \sum_{j \in K'} x_j\| &= \|\sum_{j \in K_1} x_j + \sum_{j \in K \cap K'} x_j - \sum_{j \in K_2} x_j - \sum_{j \in K \cap K'} x_j\| \leq \\ &\leq \|\sum_{j \in K_1} x_j\| + \|\sum_{j \in K_2} x_j\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que a sucessão generalizada das somas parciais é de Cauchy, e portanto convergente.  $\square$

**2.3.10 (Corolário)** Seja  $E$  um espaço de Banach e seja  $(x_j)_{j \in J}$  uma família somável de vetores de  $E$ . Para cada  $\delta > 0$ , existe então uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal que, qualquer que seja  $j \notin K_0$ ,  $\|x_j\| < \delta$ . Por outras palavras, considerando o compactificado de Alexandroff  $\widehat{J} = J \cup \{\infty\}$ , de  $J$  com a topologia discreta (cf. 1.6.51), tem-se  $x_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ .

**Dem:** Trata-se de um caso particular do resultado precedente, se repararmos que, se  $j \notin K_0$ ,  $\{j\}$  é uma parte finita de  $J$  disjunta de  $K_0$ .  $\square$

**2.3.11** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_j)_{j \in J}$  uma família somável de vetores de  $E$ . Para cada subconjunto  $J' \subset J$ , tem-se então que a família  $(x_j)_{j \in J'}$  é também somável.<sup>199</sup>

**Dem:** Tendo em conta 2.3.9, para cada  $\delta > 0$  existe uma parte finita  $K_0$  de  $J$

<sup>199</sup>O resultado correspondente a este, para as séries, só é válido com hipóteses restritivas.

tal que, para cada parte finita  $K$  de  $J$ , disjunta de  $K_0$ ,  $\|\sum_{j \in K} x_j\| < \delta$ ; tem-se então que  $J' \cap K_0$  é uma parte finita de  $J'$  tal que, para cada parte finita  $K$  de  $J'$ , disjunta de  $J' \cap K_0$  (e portanto de  $K_0$ ),  $\|\sum_{j \in K} x_j\| < \delta$  pelo que, mais uma vez por 2.3.9, a família  $(x_j)_{j \in J'}$  é somável.  $\square$

**2.3.12 (Lema)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $(x_j)_{j \in J}$  uma família de vetores de  $E$  e  $J'$  uma parte de  $J$ , tal que, para cada  $j \notin J'$ ,  $x_j = 0$ . Tem-se então que a família  $(x_j)_{j \in J}$  é somável se, e só se, a família  $(x_j)_{j \in J'}$  é somável e, nesse caso,  $\sum_{j \in J} x_j = \sum_{j \in J'} x_j$ .

**Dem:** Já sabemos que, se  $(x_j)_{j \in J}$  é somável, o mesmo acontece a  $(x_j)_{j \in J'}$ . Suponhamos então que  $(x_j)_{j \in J'}$  é somável, e com soma  $x$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar uma parte finita  $K_0$  de  $J'$  tal que, qualquer que seja a parte finita  $K$  de  $J'$ , contendo  $K_0$ , se tenha  $\|x - \sum_{j \in K} x_j\| < \delta$ . Se  $K$  é uma parte finita de  $J$ , contendo  $K_0$ , tem-se que  $K' = K \cap J'$  é uma parte finita de  $J'$ , contendo  $K_0$ , e, por ser  $x_j = 0$  para cada  $j \in K \setminus K'$ ,

$$\sum_{j \in K} x_j = \sum_{j \in K'} x_j + \sum_{j \in K \setminus K'} x_j = \sum_{j \in K'} x_j,$$

pelo que se tem ainda  $\|x - \sum_{j \in K} x_j\| < \delta$ , donde o resultado.  $\square$

**2.3.13 (Caso particular da associatividade)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $(x_j)_{j \in J}$  uma família de vetores de  $E$  e  $J'$  e  $J''$  dois subconjuntos disjuntos do conjunto de índices  $J$ , com união  $J$ . Tem-se então que a família  $(x_j)_{j \in J}$  é somável se, e só se, as famílias  $(x_j)_{j \in J'}$  e  $(x_j)_{j \in J''}$  são somáveis e, nesse caso,

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{j \in J'} x_j + \sum_{j \in J''} x_j.$$

**Dem:** Já sabemos que, se a família  $(x_j)_{j \in J}$  é somável, então as famílias  $(x_j)_{j \in J'}$  e  $(x_j)_{j \in J''}$  são também somáveis. Suponhamos então que as famílias  $(x_j)_{j \in J'}$  e  $(x_j)_{j \in J''}$  são somáveis. Sejam  $(y_j)_{j \in J}$  a família cujos elementos  $y_j$  coincidem com  $x_j$ , para  $j \in J'$ , e são nulos, para  $j \notin J'$ , e  $(z_j)_{j \in J}$  a família cujos elementos  $z_j$  coincidem com  $x_j$ , para  $j \in J''$ , e são nulos, para  $j \notin J''$ , famílias que, pelo lema anterior, são somáveis e com somas  $\sum_{j \in J'} x_j$  e  $\sum_{j \in J''} x_j$ , respectivamente. Para cada  $j \in J$ , tem-se  $x_j = y_j + z_j$  pelo que, tendo em conta 2.3.3,  $(x_j)_{j \in J}$  é somável e com soma igual a  $\sum_{j \in J'} x_j + \sum_{j \in J''} x_j$ .  $\square$

**2.3.14 (Lema)** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_j)_{j \in J}$  uma família somável de vetores de  $E$ . Para cada  $\delta > 0$  existe então uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal que, qualquer que seja a parte  $J'$  de  $J$ , finita ou não, contendo  $K_0$ , se tenha



$$\left\| \sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J'} x_j \right\| < \delta.$$

**Dem:** Seja  $K_0$  uma parte finita de  $J$  tal que, qualquer que seja a parte finita  $K$  de  $J$ , disjunta de  $K_0$ , se tenha  $\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\| < \frac{\delta}{2}$ . Se  $J' \subset J$  e  $J' \supset K_0$ , então cada parte finita de  $J \setminus J'$  é disjunta de  $K_0$  pelo que  $\sum_{j \in J \setminus J'} x_j$  é limite de uma sucessão generalizada de vetores de norma menor que  $\frac{\delta}{2}$ , sendo assim um vetor de norma menor ou igual a  $\frac{\delta}{2}$ , portanto menor que  $\delta$ . Basta agora repararmos que, tendo em conta 2.3.13, tem-se

$$\left\| \sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J'} x_j \right\| = \left\| \sum_{j \in J \setminus J'} x_j \right\| < \delta. \quad \square$$

**2.3.15 (Associatividade geral)** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_j)_{j \in J}$  uma família somável de vetores de  $E$ . Seja  $(J_\alpha)_{\alpha \in A}$  uma família de subconjuntos do conjunto de índices  $J$ , disjuntos dois a dois e de união  $J$ . Tem-se então que a família das somas  $\sum_{j \in J_\alpha} x_j$ , com  $\alpha \in A$ , é somável e

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{\alpha \in A} \left( \sum_{j \in J_\alpha} x_j \right).$$

**Dem:** No caso em que  $A$  é finito, o resultado deduz-se de 2.3.13, por indução no número de elementos de  $A$ . No caso geral, seja dado  $\delta > 0$  arbitrário. Tendo em conta o lema anterior, seja  $K_0$  uma parte finita de  $J$  tal que, qualquer que seja a parte  $J'$  de  $J$ , finita ou não, contendo  $K_0$ , se tenha

$$\left\| \sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J'} x_j \right\| < \delta.$$

Seja  $B_0$  a parte finita de  $A$  constituída pelos índices  $\alpha$  tais que  $J_\alpha \cap K_0 \neq \emptyset$ . Se  $B$  é uma parte finita de  $A$ , que contenha  $B_0$ , tem-se  $J_B = \bigcup_{\alpha \in B} J_\alpha \supset K_0$

pelo que

$$\left\| \sum_{j \in J} x_j - \sum_{\alpha \in B} \left( \sum_{j \in J_\alpha} x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j \in J} x_j - \sum_{j \in J_B} x_j \right\| < \delta,$$

donde o resultado. □

Repare-se que 2.3.13 não é um caso particular de 2.3.15 na medida em que, neste último resultado, é preciso exigir que a família  $(x_j)_{j \in J}$  seja somável, não bastando assim supor que o segundo membro da igualdade faça sentido (para um contraexemplo na ausência daquela hipótese ver o exercício 2.3.2 adiante).

Vamos agora verificar que, quando temos uma família de reais  $a_j \geq 0$ ,

também se pode garantir a propriedade de associatividade apenas com a hipótese de o segundo membro fazer sentido.

**2.3.16 (Associatividade no contexto positivo)** Seja  $(a_j)_{j \in J}$  uma família de números reais com  $a_j \geq 0$ . Seja  $(J_\alpha)_{\alpha \in A}$  uma família de subconjuntos do conjunto de índices  $J$ , disjuntos dois a dois e de união  $J$  e suponhamos que para cada  $\alpha \in A$

$$(1) \quad \sum_{j \in J_\alpha} a_j < +\infty.$$

Tem-se então

$$(2) \quad \sum_{j \in J} a_j = \sum_{\alpha \in A} \left( \sum_{j \in J_\alpha} a_j \right),$$

onde cada um dos membros é  $+\infty$  ou um real em  $[0, +\infty[$ .

**Dem:** O resultado é já conhecido no caso em que o primeiro membro da igualdade (2) é finito (cf. 2.3.15). Vejamos portanto o que acontece no caso em que este é  $+\infty$ . Dado  $M > 0$  arbitrário, podemos considerar uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal que  $\sum_{j \in K_0} a_j > M$  e então, uma vez que  $K_0$  é a união dos

$K_0 \cap J_\alpha$ , que são disjuntos dois a dois, e que a soma dos  $a_j$ , com  $j \in K_0$ , é evidentemente finita, vemos que

$$\sum_{\alpha \in A} \left( \sum_{j \in J_\alpha} a_j \right) \geq \sum_{\alpha \in A} \left( \sum_{j \in K_0 \cap J_\alpha} a_j \right) = \sum_{j \in K_0} a_j > M,$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de  $M$ , implica que o segundo membro da igualdade (2) é também  $+\infty$ .  $\square$

No resultado precedente, a hipótese (1) destina-se a dar significado ao segundo membro da igualdade (2) que traduz a associatividade, uma vez que, embora admitamos  $+\infty$  como um valor possível para uma soma no contexto positivo, não estamos a admitir  $+\infty$  como parcela admissível numa tal soma. Há situações, como a Teoria da Medida, em que se torna cómodo admitir que as parcelas de uma soma de reais positivos possam também tomar o valor  $+\infty$ , definindo nesse caso, naturalmente, a soma como sendo igual a  $+\infty$  quando alguma parcela for  $+\infty$ . Se tivéssemos feito uma tal convenção é fácil concluir, tendo em conta a conclusão da alínea b) de 1.2.70 e sem mais nenhuma verificação adicional, que a igualdade (2) é válida sem necessidade de fazer a hipótese (1).

Análoga observação se poderia fazer a propósito da propriedade de Fubini, no contexto positivo, que examinamos em seguida.

**2.3.17 (Propriedade de Fubini)** Sejam  $J$  e  $J'$  dois conjuntos de índices.

Tem-se então:

a) Se  $(a_{j,k})_{(j,k) \in J \times J'}$  é uma família de reais com  $a_{j,k} \geq 0$  tal que para cada  $j \in J$

$$\sum_{k \in J'} a_{j,k} < +\infty$$

então

$$\sum_{(j,k) \in J \times J'} a_{j,k} = \sum_{j \in J} \left( \sum_{k \in J'} a_{j,k} \right).$$

b) Se  $(a_{j,k})_{(j,k) \in J \times J'}$  é uma família de reais com  $a_{j,k} \geq 0$  tal que para cada  $k \in J'$

$$\sum_{j \in J} a_{j,k} < +\infty$$

então

$$\sum_{(j,k) \in J \times J'} a_{j,k} = \sum_{k \in J'} \left( \sum_{j \in J} a_{j,k} \right).$$

c) Se  $E$  é um espaço de Banach e se  $(x_{j,k})_{(j,k) \in J \times J'}$  é uma família somável de vetores de  $E$ , então

$$\sum_{(j,k) \in J \times J'} x_{j,k} = \sum_{j \in J} \left( \sum_{k \in J'} x_{j,k} \right) = \sum_{k \in J'} \left( \sum_{j \in J} x_{j,k} \right).$$

**Dem:** Trata-se de consequências de 2.3.16, no caso das alíneas a) e b), e 2.3.15, no caso da alínea c), se repararmos que  $J \times J'$  é a união dos subconjuntos  $\{j\} \times J'$ , com  $j \in J$ , que são disjuntos dois a dois, e é também a união dos subconjuntos  $J \times \{k\}$ , com  $k \in J'$ , que são disjuntos dois a dois. Em ambos os casos temos em conta o resultado trivial de comutatividade em 2.3.8.  $\square$

**2.3.18** Se  $E$  é um espaço de Banach, diz-se que uma família  $(x_j)_{j \in J}$  de vetores de  $E$  é *absolutamente somável* se se tem  $\sum_{j \in J} \|x_j\| < +\infty$ .

**2.3.19** Se  $E$  é um espaço de Banach e se  $(x_j)_{j \in J}$  é uma família absolutamente somável de vetores de  $E$ , então esta família é somável e tem-se

$$\left\| \sum_{j \in J} x_j \right\| \leq \sum_{j \in J} \|x_j\|.$$

**Dem:** Dado  $\delta > 0$  arbitrário, a somabilidade da família dos números reais  $\|x_j\|$  implica, por 2.3.9, a existência de uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal que, qualquer que seja a parte finita  $K$  de  $J$  disjunta de  $K_0$ , se tenha  $\sum_{j \in K} \|x_j\| < \delta$ ; para cada  $K$  nessas condições tem-se então

$$\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\| \leq \sum_{j \in K} \|x_j\| < \delta$$

pelo que, mais uma vez pelo mesmo resultado, a família dos  $x_j$  é somável. Por outro lado, tendo em conta a continuidade da norma, vemos que  $\left\| \sum_{j \in J} x_j \right\|$  é o limite da sucessão generalizada dos números reais  $\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\|$ , com  $K$  parte finita de  $J$ , números reais esses que são menores ou iguais a  $\sum_{j \in K} \|x_j\|$  e portanto a  $\sum_{j \in J} \|x_j\|$ , o que implica que  $\left\| \sum_{j \in J} x_j \right\| \leq \sum_{j \in J} \|x_j\|$ .  $\square$

**2.3.20** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Se  $(x_j)_{j \in J}$  é uma família absolutamente somável de vetores de  $E$  então  $(\lambda(x_j))_{j \in J}$  é uma família absolutamente somável de vetores de  $F$ .

**Dem:** Tendo em conta 2.1.15, podemos considerar  $M \geq 0$  tal que  $\|\lambda(x)\| \leq M\|x\|$  para cada  $x \in E$ . Vem então

$$\sum_{j \in J} \|\lambda(x_j)\| \leq \sum_{j \in J} M\|x_j\| = M \sum_{j \in J} \|x_j\| < +\infty. \quad \square$$

O resultado que examinamos em seguida é por vezes utilizado para mostrar que certos espaços vetoriais normados são de Banach. Ele mostra em particular, que o resultado 2.3.19 não é válido nos espaços vetoriais normados não completos.

**2.3.21 (Caracterização dos espaços de Banach pelas séries)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado tal que, qualquer que seja a família  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vetores de  $E$  com  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| < +\infty$ , a sucessão das somas parciais  $S_n = \sum_{p=1}^n y_p$  seja convergente. Tem-se então que  $E$  é um espaço de Banach.

**Dem:** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de Cauchy de vetores de  $E$ . Construamos recursivamente uma sucessão estritamente crescente de inteiros  $\alpha(n) \in \mathbb{N}$  tal que, sempre que  $p, q \geq \alpha(n)$  se tenha  $\|x_p - x_q\| < 1/2^n$ . Em particular, definindo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n = x_{\alpha(n+1)} - x_{\alpha(n)}$ , tem-se  $\|y_n\| < 1/2^n$ , portanto

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| < \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty.$$

Por hipótese, é então convergente a sucessão das somas parciais

$$S_n = \sum_{p=1}^n y_p = x_{\alpha(n+1)} - x_{\alpha(1)}$$

e portanto também a sucessão cujo termo de ordem  $n$  é  $S_n + x_{\alpha(1)} = x_{\alpha(n+1)}$ .

Uma vez que, por indução,  $\alpha(n) \geq n$  e portanto, por enquadramento,  $\alpha(n+1) \rightarrow +\infty$ , concluímos que a sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tem sublimite donde, por 1.7.6, que esta tem limite. Tendo em conta 1.7.8, concluímos que  $E$  é um espaço métrico completo.  $\square$

**2.3.22 (Multiplicação de famílias de reais positivos)** Sejam  $(a_j)_{j \in J}$  e  $(b_k)_{k \in J'}$  duas famílias somáveis de reais com  $a_j \geq 0$  e  $b_k \geq 0$ . Tem-se então

$$\left( \sum_{j \in J} a_j \right) \times \left( \sum_{k \in J'} b_k \right) = \sum_{(j,k) \in J \times J'} a_j b_k,$$

em particular a família dos  $a_j b_k$  com  $(j, k) \in J \times J'$  também é somável.

**Dem:** Tendo em conta a propriedade de Fubini na alínea a) de 2.3.20 assim como a alínea b) de 1.2.68, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k) \in J \times J'} a_j b_k &= \sum_{j \in J} \left( \sum_{k \in J'} a_j b_k \right) = \sum_{j \in J} a_j \left( \sum_{k \in J'} b_k \right) = \\ &= \left( \sum_{j \in J} a_j \right) \times \left( \sum_{k \in J'} b_k \right). \end{aligned} \quad \square$$

**2.3.23 (Multiplicação de famílias absolutamente somáveis)** Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços de Banach e  $\gamma: E \times F \rightarrow G$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $(x_j)_{j \in J}$  uma família absolutamente somável de vetores de  $E$  e  $(y_k)_{k \in J'}$  uma família absolutamente somável de vetores de  $F$ . Tem-se então que é também absolutamente somável a família dos vetores  $\gamma(x_j, y_k)$  de  $G$  e

$$\gamma \left( \sum_{j \in J} x_j, \sum_{k \in J'} y_k \right) = \sum_{(j,k) \in J \times J'} \gamma(x_j, y_k).$$

**Dem:** Seja  $M \geq 0$  tal que se tenha  $\|\gamma(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$  (cf. 2.1.21). Tem-se então, tendo em conta 2.3.22,

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k) \in J \times J'} \|\gamma(x_j, y_k)\| &\leq \sum_{(j,k) \in J \times J'} M\|x_j\|\|y_k\| = \\ &= M \left( \sum_{j \in J} \|x_j\| \right) \left( \sum_{k \in J'} \|y_k\| \right) < +\infty, \end{aligned}$$

o que mostra que a família dos  $\gamma(x_j, y_k)$  é absolutamente somável, em particular somável. Tem-se então, tendo em conta a propriedade de Fubini na alínea c) de 2.3.20 assim como utilizações de 2.3.4 para as aplicações lineares contínuas

$$\begin{aligned} F &\rightarrow G, & y &\mapsto \gamma(x_j, y), \\ E &\rightarrow G, & x &\mapsto \gamma \left( x, \sum_{k \in J'} y_k \right), \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k) \in J \times J'} \gamma(x_j, y_k) &= \sum_{j \in J} \left( \sum_{k \in J'} \gamma(x_j, y_k) \right) = \\ &= \sum_{j \in J} \gamma(x_j, \sum_{k \in J'} y_k) = \gamma\left(\sum_{j \in J} x_j, \sum_{k \in J'} y_k\right). \quad \square \end{aligned}$$

Vamos agora examinar o que se pode dizer quando, em vez de considerarmos somas de vetores dum espaço de Banach, consideramos somas de aplicações com valores num espaço de Banach. Mostraremos que, quando se verifica uma condição simples, as somas têm o comportamento que se poderia desejar no que respeita à consideração de limites e, em particular da continuidade.

**2.3.24** Sejam  $X$  um conjunto,  $F$  um espaço de Banach e  $(f_j)_{j \in J}$  uma família de aplicações  $f_j: X \rightarrow F$ . Diz-se que esta família é *normalmente somável* se existe uma família de reais  $(a_j)_{j \in J}$  com  $a_j \geq 0$  e  $\sum_{j \in J} a_j < +\infty$  tal que para cada  $x \in X$  e  $j \in J$ ,  $\|f_j(x)\| \leq a_j$ . Esta condição implica, em particular, que para cada  $x \in X$

$$\sum_{j \in J} \|f_j(x)\| \leq \sum_{j \in J} a_j < +\infty$$

pelo que a família  $(f_j(x))_{j \in J}$  de vetores de  $F$  é absolutamente somável, em particular somável, o que permite definir uma aplicação  $f: X \rightarrow F$ , por

$$f(x) = \sum_{j \in J} f_j(x),$$

aplicação essa que se diz a *soma* da família  $(f_j)_{j \in J}$ .

**2.3.25** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $X_0 \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $X_0$  e  $F$  um espaço de Banach. Seja  $(f_j)_{j \in J}$  uma família normalmente somável de aplicações  $f_j: X_0 \rightarrow F$  tal que para cada  $j \in J$  exista o limite

$$y_j = \lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) \in F.$$

Tem-se então que a família  $(y_j)_{j \in J}$  de vetores de  $F$  é absolutamente somável, em particular somável e, sendo  $f: X_0 \rightarrow F$  a aplicação soma dos  $f_j$ , definida por

$$f(x) = \sum_{j \in J} f_j(x),$$

vem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sum_{j \in J} y_j.$$

**Dem:** Começemos por reparar que no caso em que o conjunto de índices  $J$  é finito a conclusão resulta facilmente de 2.1.20, por indução no número de elementos de  $J$  (no caso em que  $A = \emptyset$  do facto de o limite de uma aplicação constante ser essa constante). Seja  $(a_j)_{j \in J}$  uma família de reais com  $a_j \geq 0$  e  $\sum_{j \in J} a_j < +\infty$  tal que para cada  $x \in X_0$  e  $j \in J$ ,  $\|f_j(x)\| \leq a_j$ . Tendo em conta 1.2.53 e a continuidade da norma tem-se então para cada  $j \in J$

$$\|y_j\| = \lim_{x \rightarrow x_0} \|f_j(x)\| \leq a_j$$

donde

$$\sum_{j \in J} \|y_j\| \leq \sum_{j \in J} a_j < +\infty,$$

o que mostra que a família dos  $y_j$  é absolutamente somável, em particular somável. Seja agora  $\delta > 0$  arbitrário. Tendo em conta 2.3.13 e a definição de soma, podemos considerar uma parte finita  $K \subset J$  tal que

$$\sum_{j \in J \setminus K} a_j = \sum_{j \in J} a_j - \sum_{j \in K} a_j < \frac{\delta}{3}.$$

Tendo em conta a validade do resultado no caso em que o conjunto dos índices é finito, consideremos uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que para cada  $x \in V \cap X_0$  se tenha

$$\left\| \sum_{j \in K} f_j(x) - \sum_{j \in K} y_j \right\| < \frac{\delta}{3}.$$

Para cada  $x \in V \cap X_0$  tem-se então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in J \setminus K} y_j \right\| &\leq \sum_{j \in J \setminus K} \|y_j\| \leq \sum_{j \in J \setminus K} a_j < \frac{\delta}{3}, \\ \left\| \sum_{j \in J \setminus K} f_j(x) \right\| &\leq \sum_{j \in J \setminus K} \|f_j(x)\| \leq \sum_{j \in J \setminus K} a_j < \frac{\delta}{3}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{j \in J} y_j \right\| &= \left\| \sum_{j \in K} f_j(x) + \sum_{j \in J \setminus K} f_j(x) - \sum_{j \in K} y_j - \sum_{j \in J \setminus K} y_j \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{j \in K} f_j(x) - \sum_{j \in K} y_j \right\| + \left\| \sum_{j \in J \setminus K} f_j(x) \right\| + \left\| \sum_{j \in J \setminus K} y_j \right\| < \\ &< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta, \end{aligned}$$

o que prova a existência do limite pretendido.  $\square$

**2.3.26 (Corolário)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $x_0 \in X$ ,  $F$  um espaço de Banach e  $(f_j)_{j \in J}$  uma família normalmente somável de aplicações  $f_j: X \rightarrow E$  contínuas em  $x_0$ . Tem-se então que a respectiva soma  $f: X \rightarrow E$  é também uma aplicação contínua em  $x_0$ .

**Dem:** Basta atender à caracterização da continuidade de uma aplicação num ponto em termos de limites.  $\square$

A título de aplicação dos resultados sobre famílias somáveis, aplicação que nos será útil mais adiante, vamos estudar algumas propriedades da inversão numa álgebra de Banach.

**2.3.27 (Álgebras do ponto de vista algébrico)** O termo *álgebra* nem sempre é utilizado em matemática com o mesmo sentido. Para fixar ideias, vamos chamar *álgebra* a um espaço vetorial  $\mathcal{E}$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$  (igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) no qual se definiu uma nova operação binária (a *multiplicação*), notemo-la  $(x, y) \mapsto xy$ , a qual é uma aplicação bilinear  $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ . Assim:

- a)  $(x + y)z = xz + yz$ ;
- b)  $x(y + z) = xy + xz$ ;
- c)  $(ax)y = a(xy) = x(ay)$  (onde  $a \in \mathbb{K}$ ),

em particular,  $0y = 0 = x0$ , quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{E}$ . A álgebra diz-se *associativa* se a multiplicação é associativa, isto é, se se verifica a condição  $(xy)z = x(yz)$ . Do mesmo modo, ela diz-se *comutativa* se a multiplicação é comutativa, isto é, se se tem  $xy = yx$ . Diz-se que  $e \in \mathcal{E}$  é um *elemento um* da álgebra  $\mathcal{E}$  se se tem  $ex = x = xe$ , para cada  $x \in \mathcal{E}$ ; um tal elemento, a existir, é diferente do elemento 0, a menos que a álgebra seja *trivial*, isto é, a menos que  $\mathcal{E} = \{0\}$  (se 0 fosse elemento um, vinha  $x = 0x = 0$ , para cada  $x$ ). Do mesmo modo, uma álgebra não pode ter mais que um elemento um, visto que, se  $e$  e  $e'$  fossem dois elementos um, tinha-se  $e = ee' = e'$ . Muitas vezes o elemento um de uma álgebra é notado 1. A uma álgebra com elemento um também se dá o nome de *álgebra unitária*.

Dada uma álgebra associativa  $\mathcal{E}$ , com elemento um 1, diz-se que um elemento  $x \in \mathcal{E}$  é *invertível* se existe  $x' \in \mathcal{E}$  tal que  $xx' = x'x = 1$ ; um tal elemento  $x'$  é então único, visto que, se  $x''$  fosse outro elemento nas mesmas condições, tinha-se



$$x' = x'1 = x'(xx'') = (x'x)x'' = 1x'' = x'';$$

este elemento  $x'$  é chamado o *inverso* de  $x$  e notado frequentemente  $x^{-1}$ . É claro que o elemento 1 é sempre invertível, sendo o seu próprio inverso, e que, se a álgebra não é trivial, o elemento 0 não é invertível. É fácil verificar-se que, se  $x$  e  $y$  são elementos invertíveis, então  $xy$  é também invertível e  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ . Também é útil notar que se  $x, y \in \mathcal{E}$  verificam  $xy = yx$  e se  $x$  é invertível então também

$$x^{-1}y = x^{-1}(yx)x^{-1} = x^{-1}(xy)x^{-1} = yx^{-1}.$$

Se  $\mathcal{E}$  é uma álgebra associativa, define-se do modo habitual  $x^n$ , para cada  $x \in X$  e cada inteiro  $n \geq 1$ , como sendo o produto de  $n$  factores iguais a  $x$ . No caso em que a álgebra tem elemento um, define-se  $x^0 = 1$  (mesmo que  $x = 0$ !). As regras usuais de multiplicação de potências com a mesma base continuam a ser válidas (só podemos garantir a validade das de multiplicação de potências com o mesmo expoente se a álgebra for também comutativa). É ainda útil fazer a observação trivial que, do mesmo modo que todo o espaço vetorial complexo é também um espaço vetorial real, toda a álgebra complexa é também uma álgebra real.

**2.3.28 (Exemplos) a)** Sendo  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{K}$ , como espaço vetorial de dimensão 1 sobre  $\mathbb{K}$  e com a multiplicação usual, é uma álgebra associativa e comutativa com 1 como elemento um. Os elementos invertíveis são os diferentes de 0 e o respetivo inverso é o inverso usual de um real ou complexo. É claro que  $\mathbb{C}$ , para além de ser uma álgebra complexa de dimensão 1, também é uma álgebra real de dimensão 2.

**b)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  então o espaço vetorial  $\mathcal{L}(E; E)$  sobre  $\mathbb{K}$  cujos elementos são as aplicações lineares contínuas  $E \rightarrow E$  é uma álgebra associativa com a composição de aplicações como multiplicação e com a aplicação identidade  $Id_E$  como elemento um. Esta álgebra não é, em geral, comutativa e os elementos invertíveis são os isomorfismos topológicos  $E \rightarrow E$ , o inverso de um tal elemento invertível sendo, naturalmente, o isomorfismo inverso.<sup>200</sup> Note-se que esta álgebra e a trivial se, e só se,  $E = \{0\}$ .

**c)** Se  $I$  é um conjunto não vazio então o espaço vetorial  $Ap(I, \mathbb{K})$ , das aplicações  $I \rightarrow \mathbb{K}$ , é uma álgebra comutativa e associativa, quando se considera o produto habitual de aplicações associado à multiplicação no corpo  $\mathbb{K}$ . Esta álgebra tem como elemento um a aplicação de valor constante 1 e os elementos invertíveis são as aplicações com valores em  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ , o inverso de um tal elemento sendo, naturalmente, o inverso habitual de uma aplicação (não a aplicação inversa...).

**d)** No espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  pode-se considerar uma estrutura de álgebra com o

<sup>200</sup>No caso em que  $E$  é simplesmente um espaço vetorial, sem nenhuma norma considerada, podemos analogamente considerar uma álgebra  $L(E; E)$  constituída por todas as aplicações lineares  $E \rightarrow E$ .

produto externo habitual como multiplicação. Esta álgebra não é associativa nem comutativa e não tem elemento um.

**2.3.29** Vamos chamar *álgebra normada* a uma álgebra associativa unitária  $\mathcal{E}$ , munida de uma norma que verifique as condições  $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$  e  $\|1\| \leq 1$ . Em particular, a primeira condição implica que a multiplicação é uma aplicação bilinear contínua  $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ . Numa tal álgebra tem-se então, para cada  $x \in \mathcal{E}$  e cada inteiro  $n \geq 0$ ,  $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ . No caso em que a álgebra normada não é trivial, vai-se ter mesmo  $\|1\| = 1$ , visto que podemos escrever

$$\|1\| = \|1 \cdot 1\| \leq \|1\|\|1\|,$$

donde, por ser  $\|1\| \neq 0$ ,  $1 \leq \|1\|$ . Chamamos *álgebra de Banach* a uma álgebra normada que seja completa.

**2.3.30 (Exemplos)** Os exemplos de álgebra examinados nas alíneas a) e b) de 2.3.28 são, de facto, álgebras normadas, o primeiro com o valor absoluto como norma e o segundo com a norma de uma aplicação linear definida em 2.1.30. No caso da alínea a) temos uma álgebra de Banach e no caso da alínea b) temos uma álgebra de Banach se o espaço vetorial normado  $E$  for um espaço de Banach (cf. 2.1.36 e 2.1.33).

**2.3.31 (Análogo de 2.1.20 e 2.1.3)** Sejam  $\mathcal{E}$  uma álgebra normada,  $X$  um espaço topológico e  $x_0 \in X$ . Tem-se então:

**a)** Sendo  $A \subset X$ , com  $x_0$  aderente a  $A$ , e  $f, g: A \rightarrow \mathcal{E}$  duas aplicações tais que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y \in \mathcal{E}, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} z \in \mathcal{E},$$

então

$$f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} yz.$$

**b)** Em particular, se  $f, g: X \rightarrow \mathcal{E}$  são duas aplicações contínuas no ponto  $x_0$  então é também contínua no ponto  $x_0$  a aplicação  $fg: X \rightarrow \mathcal{E}$ , que a  $x \in X$  associa  $f(x)g(x)$ .

**Dem:** A conclusão de a) resulta da continuidade da multiplicação  $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , uma vez que, pela propriedade da topologia produto em 1.5.1, tem-se

$$(f(x), g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} (y, z) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}.$$

A conclusão de b) resulta da de a), tendo em conta a caracterização da continuidade de uma aplicação num ponto em termos de limites (cf. 1.4.1).  $\square$

**2.3.32 (A álgebra normada  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$ )** Sejam  $\mathcal{E}$  uma álgebra normada e  $X$  um espaço topológico compacto e não vazio. Como se verificou em 2.1.26, podemos então considerar o espaço vetorial normado  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$ , de todas as

aplicações contínuas  $X \rightarrow \mathcal{E}$ , com a norma  $\|\cdot\|_\infty$ , norma cuja topologia associada é a induzida pela topologia da convergência uniforme de  $Ap(X, \mathcal{E})$ . De facto  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  é mesmo uma álgebra normada com o produto  $fg$  de duas aplicações contínuas  $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  definido naturalmente como sendo a aplicação  $x \mapsto f(x)g(x)$ , e o elemento um sendo a aplicação de valor constante 1. A álgebra  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  é comutativa se a álgebra  $\mathcal{E}$  o for e, tendo em conta 2.2.8, é uma álgebra de Banach se  $\mathcal{E}$  o for.

**Dem:** O facto de o produto de duas aplicações contínuas ainda pertencer a  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  é uma consequência de 2.3.31, sendo então imediato que ficamos com uma álgebra associativa com o elemento 1 indicado. O facto de se ter  $\|1\| \leq 1$  em  $\mathcal{E}$  implica que se tem  $\|1(x)\| = \|1\| \leq 1$  para cada  $x$ , portanto  $\|1\|_\infty \leq 1$ . Analogamente, do facto de se ter

$$\|f(x)g(x)\| \leq \|f(x)\| \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

para cada  $x \in X$  implica que  $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ .  $\square$

**2.3.33** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach e seja  $x \in \mathcal{E}$  tal que  $\|x\| < 1$ . Tem-se então que  $1 - x$  é invertível e

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

onde a família  $(x^n)_{n \geq 0}$  de vetores de  $\mathcal{E}$  é absolutamente somável. Além disso vem

$$\|(1 - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

**Dem:** O facto de termos uma família absolutamente somável vem de que se tem, lembrando a caracterização da soma de uma série geométrica,

$$\sum_{n \geq 0} \|x^n\| \leq \sum_{n \geq 0} \|x\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|} < +\infty.$$

A família é portanto somável e podemos notar  $y = \sum_{n \geq 0} x^n$ , o qual verifica

$$\|y\| \leq \sum_{n \geq 0} \|x^n\| \leq \sum_{n \geq 0} \|x\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

Tem-se então

$$(1 - x)y = \sum_{n \geq 0} x^n - \sum_{n \geq 0} x^{n+1} = \sum_{n \geq 0} x^n - \sum_{n \geq 1} x^n = x^0 = 1$$

e, do mesmo modo,  $y(1 - x) = 1$ , o que mostra que  $1 - x$  é invertível, e com inverso  $y$ .  $\square$

**2.3.34** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach e seja  $\mathcal{E}_{inv}$  o subconjunto de  $\mathcal{E}$  constituído pelos elementos invertíveis. Tem-se então que  $\mathcal{E}_{inv}$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{E}$ , que contém 1, e a aplicação  $\text{inv}: \mathcal{E}_{inv} \rightarrow \mathcal{E}$ , definida por  $\text{inv}(x) = x^{-1}$ , é contínua.

**Dem:** Vamos começar por mostrar que 1 é interior a  $\mathcal{E}_{inv}$  e que a aplicação  $\text{inv}$  é contínua em 1. Para isso reparamos que, sendo  $B_{1/2}(0)$  a bola aberta de centro 0 e raio  $\frac{1}{2}$  de  $\mathcal{E}$ , a família de funções contínuas  $f_n: B_{1/2}(0) \rightarrow \mathcal{E}$ , definidas por  $f_n(x) = x^n$  vai ser normalmente somável, visto que se tem

$$\|f_n(x)\| \leq \|x\|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

onde  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 < +\infty$ ; deduzimos daqui, tendo em conta 2.3.26, que ficamos com uma aplicação contínua  $f: B_{1/2}(0) \rightarrow \mathcal{E}$ , definida por

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

Para cada  $y \in B_{1/2}(1)$ , podemos escrever  $y = 1 - (1 - y)$ , com  $1 - y \in B_{1/2}(0)$ , pelo que  $y$  é invertível, e com

$$y^{-1} = \sum_{n \geq 0} (1 - y)^n = f(1 - y),$$

o que mostra que  $B_{1/2}(1) \subset \mathcal{E}_{inv}$  e que a restrição de  $\text{inv}$  a esta bola aberta é contínua, em particular  $1 \in \text{int}(\mathcal{E}_{inv})$  e  $\text{inv}$  é contínua em 1. Seja agora  $x_0 \in \mathcal{E}_{inv}$  arbitrário. Considerando a aplicação contínua de  $\mathcal{E}$  em  $\mathcal{E}$ , que a  $x$  associa  $xx_0^{-1}$ , aplicação que aplica  $x_0$  em 1, vemos que a imagem recíproca do aberto  $\text{int}(\mathcal{E}_{inv})$  vai ser um aberto contendo  $x_0$ , o qual vai estar contido em  $\mathcal{E}_{inv}$ , visto que, se  $xx_0^{-1}$  é invertível, o mesmo acontece a  $x = (xx_0^{-1})x_0$ ; ficou portanto provado que  $x_0 \in \text{int}(\mathcal{E}_{inv})$  e portanto que  $\mathcal{E}_{inv}$  é aberto. Por outro lado, para cada  $x \in \mathcal{E}_{inv}$ , tem-se

$$\text{inv}(x) = x^{-1} = x_0^{-1}(xx_0^{-1})^{-1} = x_0^{-1}\text{inv}(xx_0^{-1}),$$

pelo que o teorema da continuidade da função composta e a continuidade de  $\text{inv}$  em 1 implicam a continuidade de  $\text{inv}$  em  $x_0$ .  $\square$

**2.3.35 (Corolário)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e consideremos os correspondentes espaços de Banach  $\mathcal{L}(E; F)$  e  $\mathcal{L}(F; E)$ . Tem-se então que o conjunto  $\mathcal{L}_{iso}(E; F) \subset \mathcal{L}(E; F)$  dos isomorfismos topológicos é um aberto (eventualmente vazio) e é contínua a aplicação  $\text{inv}: \mathcal{L}_{iso}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(F; E)$  definida por  $\text{inv}(\xi) = \xi^{-1}$ .

**Dem:** No caso em que  $E = F$  temos uma consequência de aplicar 2.3.34 à álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$ . No caso geral podemos já afastar o caso trivial em que  $\mathcal{L}_{iso}(E; F)$  é vazio e então escolhemos  $\xi_0 \in \mathcal{L}_{iso}(E; F)$  e atendemos a que se tem  $\xi \in \mathcal{L}_{iso}(E; F)$  se, e só se,  $\xi_0^{-1} \circ \xi \in \mathcal{L}_{iso}(E; E)$ , caso em que

se tem

$$\text{inv}(\xi) = \xi^{-1} = \text{inv}(\xi_0^{-1} \circ \xi) \circ \xi_0^{-1},$$

onde a aplicação  $\text{inv}$  no segundo membro é a correspondente à álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$ .  $\square$

**2.3.36 (Corolário)** Sejam  $X$  um espaço topológico compacto não vazio e  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach. Tem-se então que os elementos invertíveis da álgebra de Banach  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  (cf. 2.3.32) são as aplicações contínuas  $f: X \rightarrow \mathcal{E}$  tais que  $f(x)$  é invertível para cada  $x$ , o elemento inverso de um tal  $f$  sendo a aplicação  $x \mapsto f(x)^{-1}$ .

**Dem:** É evidente que, se  $f$  é invertível em  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$  então para cada  $x \in X$  o elemento  $f(x) \in \mathcal{E}$  tem que ser invertível e o inverso de  $f$  não pode deixar de ser a aplicação  $x \mapsto f(x)^{-1}$ . Reciprocamente, se  $f(x)$  é invertível para cada  $x$  então o teorema da continuidade da aplicação composta e a continuidade da aplicação  $\text{inv}: \mathcal{E}_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{E}$  implica que é contínua a aplicação  $x \mapsto f(x)^{-1}$ , sendo então imediato que esta aplicação é um inverso de  $f$  em  $\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$ .  $\square$

Como segunda aplicação dos resultados que estudámos no contexto das famílias somáveis vamos estudar exemplos importantes de espaços vectoriais normados, os espaços  $\ell_E^p(I)$ , onde  $p \in [1, +\infty[$  que no caso particular em que  $p = 1$  já foram examinados em 2.1.13 e que têm relações com os espaços  $\ell_E^\infty(I)$  examinados em 2.1.9, 2.1.10 e 2.2.5.

Começamos por definir os espaços  $\ell_E^p(I)$  para  $p > 0$  arbitrário, apesar de apenas definirmos uma norma no caso em que  $p \geq 1$ .

**2.3.37 (Os espaços  $\ell_E^p(I)$ )** Sejam  $I$  um conjunto não vazio,  $p > 0$  um número real e  $E$  um espaço vectorial normado sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Notamos  $\ell_E^p(I)$  o conjunto de todas as aplicações  $(x_i)_{i \in I}$  de  $I$  para  $E$  tais que

$$\sum_{i \in I} \|x_i\|^p < +\infty$$

e, para uma tal aplicação, notamos

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_p = \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty[.$$

Tem-se então que  $\ell_E^p(I)$  é um subespaço vectorial do espaço vectorial de todas as aplicações de  $I$  para  $E$  e a aplicação  $\ell_E^p(I) \rightarrow [0, +\infty[$  que a cada  $(x_i)_{i \in I}$  associa  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p$  verifica as condições<sup>201</sup>:

<sup>201</sup>Comparar com 2.1.3.

- a)  $\|(x_i + y_i)_{i \in I}\|_p \leq 2^{1+\frac{1}{p}} (\|(x_i)_{i \in I}\|_p + \|(y_i)_{i \in I}\|_p)$ ; <sup>202</sup>  
 b)  $\|(ax_i)_{i \in I}\|_p = |a| \|(x_i)_{i \in I}\|_p$ , para cada  $a \in \mathbb{K}$ ;  
 c)  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p = 0$  se, e só se,  $x_i = 0$  para cada  $i \in I$ .

Note-se que estamos a usar a convenção  $0^p = 0$  para cada real  $p > 0$ , convenção essa já referida na nota que precedeu 1.5.9, na página 128.

Note-se ainda que no caso em que  $p = 1$  reencontramos o espaço vetorial  $\ell_E^1(I)$  definido em 2.1.13 e a norma que considerámos nesse espaço.

Analogamente ao referido em 2.1.13, escrevemos simplesmente  $\ell_E^p$  em vez de  $\ell_E^p(I)$  no caso em que  $I = \mathbb{N}$  e é comum omitir a referência a  $E$  quando  $E = \mathbb{K}$  e for claro do contexto qual o corpo  $\mathbb{K}$  que se está a considerar.

**Dem:** Provamos simultaneamente as conclusões de a), b) e c) e o facto de termos um subespaço vetorial. Antes de provar a) começamos por notar que, dados reais  $r > 0$  e  $a, b \geq 0$  tem-se

$$(1) \quad (a + b)^r \leq 2^r (a^r + b^r).$$

Com efeito, se  $a \leq b$  tem-se  $a + b \leq 2b$  donde

$$(a + b)^r \leq (2b)^r = 2^r b^r \leq 2^r (a^r + b^r)$$

e, analogamente, se  $a \geq b$  tem-se  $a + b \leq 2a$  donde

$$(a + b)^r \leq (2a)^r = 2^r a^r \leq 2^r (a^r + b^r).$$

Passamos agora à prova de a): Dados  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_i)_{i \in I}$  em  $\ell_E^p(I)$ , obtemos, aplicando a desigualdade (1) com  $r = p$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|x_i + y_i\|^p &\leq \sum_{i \in I} (\|x_i\| + \|y_i\|)^p \leq \sum_{i \in I} 2^p (\|x_i\|^p + \|y_i\|^p) = \\ &= 2^p \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|^p + \sum_{i \in I} \|y_i\|^p \right) \end{aligned}$$

em particular  $(x_i + y_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  e, aplicando (1), agora com  $r = \frac{1}{p}$ ,

$$\begin{aligned} \|(x_i + y_i)_{i \in I}\|_p &= \left( \sum_{i \in I} \|x_i + y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|^p + \sum_{i \in I} \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq 2 \times 2^{\frac{1}{p}} \times \left( \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i \in I} \|y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) = \\ &= 2^{1+\frac{1}{p}} (\|(x_i)_{i \in I}\|_p + \|(y_i)_{i \in I}\|_p). \end{aligned}$$

<sup>202</sup>É o factor  $2^{1+\frac{1}{p}}$  que nos impede de ficarmos já a saber que temos uma norma. De facto, como veremos adiante em 2.3.44, com uma demonstração mais artificiosa, temos efetivamente uma norma no caso em que  $p \geq 1$  embora não o tenhamos em geral se  $p < 1$  (cf. o exercício 2.3.14 adiante).

Quanto a b), se  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  e  $a \in \mathbb{K}$  vem

$$\sum_{i \in I} \|ax_i\|^p = \sum_{i \in I} |a|^p \|x_i\|^p = |a|^p \sum_{i \in I} \|x_i\|^p,$$

em particular  $(ax_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$ , e

$$\|(ax_i)_{i \in I}\|_p = \left( \sum_{i \in I} \|ax_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Relativamente a c), é imediato que  $(0)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^p(I)$  e que  $\|(0)_{i \in I}\|_p$  é igual a 0 e, reciprocamente, se  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p = 0$ , o facto de estar em jogo uma soma de reais maiores ou iguais a 0 implica que  $\|x_i\|^p = 0$  para cada  $i$ , e portanto também  $x_i = 0$  para cada  $i$ .  $\square$

Antes de mostrar que, no caso em que  $p \geq 1$ , temos uma norma em  $\ell_E^p(I)$  vamos estabelecer alguns resultados envolvendo famílias de reais em  $[0, +\infty[$  indexadas no conjunto  $I$  e lembramos uma relação bem conhecida entre médias aritméticas e médias geométricas no contexto de  $[0, +\infty[$ , para a qual apresentamos um demonstração *ad hoc* para comodidade do leitor que eventualmente não a tenha já encontrado.

**2.3.38 (Médias aritméticas e médias geométricas)** Sejam  $s, t > 0$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $s + t = 1$  (os pesos), relação que implica que  $s, t < 1$ .

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , a respetiva *média aritmética ponderada* (com os pesos referidos) é o número real  $sa + tb$ , que se verifica trivialmente estar entre  $a$  e  $b$  no sentido lato e mesmo no sentido estrito no caso em que  $a \neq b$  (se  $a = b$  a média aritmética é  $a$ ).

Dados  $a, b \in [0, +\infty[$ , a respetiva *média geométrica ponderada* (com os pesos referidos) é o número real  $a^s \times b^t \in [0, +\infty[$ , que se verifica trivialmente estar entre  $a$  e  $b$  no sentido lato e mesmo no sentido estrito no caso em que  $a \neq b$  são diferentes de 0 (se um deles é zero a média geométrica é 0 e se  $a = b$  a média geométrica é  $a$ ).

**2.3.39 (Relação fundamental entre as duas médias)** Sejam  $s, t > 0$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $s + t = 1$ . Dados  $a, b \in [0, +\infty[$ , tem-se

$$a^s \times b^t \leq sa + tb,$$

tendo-se

$$a^s \times b^t < sa + tb$$

se, e só se,  $a \neq b$ .

**Dem:** Se  $a = b$  ambas as médias são iguais a  $a$ . Examinemos o caso em que  $a \neq b$ , bastando, nesse caso, considerar que  $a < b$  uma vez que ambas as médias ficam inalteradas se trocarmos  $a$  com  $b$  e  $s$  com  $t$ . No caso em que  $a = 0$  tem-se

$$a^s \times b^t = 0 < tb = sa + tb.$$

Sendo agora  $0 < a < b$ , consideremos  $\alpha < \beta$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $a = e^\alpha$  e  $b = e^\beta$ . Tem-se então  $\alpha < s\alpha + t\beta < \beta$  e, aplicando o teorema de Lagrange do valor intermédio à função  $e^x$ , com derivada igual a  $e^x$ , vemos que

$$\frac{e^{s\alpha+t\beta} - e^\alpha}{t(\beta - \alpha)} = \frac{e^{s\alpha+t\beta} - e^\alpha}{s\alpha + t\beta - \alpha} = e^{\gamma_1}$$

$$\frac{e^\beta - e^{s\alpha+t\beta}}{s(\beta - \alpha)} = \frac{e^\beta - e^{s\alpha+t\beta}}{\beta - (s\alpha + t\beta)} = e^{\gamma_2},$$

com

$$\alpha < \gamma_1 < s\alpha + t\beta < \gamma_2 < \beta,$$

pelo que, por ser  $e^{\gamma_1} < e^{\gamma_2}$ , deduzimos que

$$s(e^{s\alpha+t\beta} - e^\alpha) = st(\beta - \alpha)e^{\gamma_1} < st(\beta - \alpha)e^{\gamma_2} = t(e^\beta - e^{s\alpha+t\beta})$$

e portanto

$$e^{s\alpha+t\beta} = (s+t)e^{s\alpha+t\beta} < se^\alpha + te^\beta,$$

que não é mais do que a desigualdade estrita no enunciado, uma vez que  $se^\alpha + te^\beta = sa + tb$  e

$$e^{s\alpha+t\beta} = (e^\alpha)^s \times (e^\beta)^t = a^s \times b^t. \quad \square$$

**2.3.40 (Expoentes conjugados)** Seja  $p > 1$  um número real. Define-se então o *expoente conjugado* de  $p$  como sendo o número real  $q > 1$  definido pela igualdade  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (repare-se que  $\frac{1}{p}$  e  $\frac{1}{q}$  são então sistemas de pesos para a consideração de médias ponderadas). É claro que o expoente conjugado de  $q$  é então  $p$  pelo que também se diz que  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados. Repare-se o expoente conjugado de 2 é o próprio 2.

Note-se que dois expoentes conjugados são, por definição, dois reais maiores que 1. No entanto, já que “apetece mesmo” escrever  $\frac{1}{1} + \frac{1}{\infty} = 1$ , somos levados a pensar intuitivamente em  $\infty$  como sendo o expoente conjugado de 1 (e vice-versa). Esta intuição deve ser encarada com cuidado. Ela não significa de modo nenhum que as propriedades que sejam estabelecidas para expoentes conjugados  $p$  e  $q$  sejam também válidas com 1 no lugar de  $p$  e  $\infty$  no de  $q$ : significa simplesmente que isso poderá acontecer com algumas dessas propriedades (casos limite das propriedades conhecidas anteriormente), que deverão ser verificadas independentemente caso a caso.

**2.3.41 (Desigualdade de Hölder)** Sejam  $p > 1$  e  $q > 1$  dois expoentes conjugados,  $I$  um conjunto não vazio e  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  duas famílias de reais em  $[0, +\infty[$  tais que



$$\sum_{i \in I} a_i^p < +\infty, \quad \sum_{i \in I} b_i^q < +\infty,$$

isto é, tais que  $(a_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{R}}^p(I)$  e  $(b_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{R}}^q(I)$ . Tem-se então

$$(1) \quad \sum_{i \in I} a_i b_i \leq \|(a_i)_{i \in I}\|_p \times \|(b_i)_{i \in I}\|_q,$$

em particular  $\sum_{i \in I} a_i b_i < +\infty$ .

**Dem:** Notemos  $a = \|(a_i)_{i \in I}\|_p$  e  $b = \|(b_i)_{i \in I}\|_q$ . Se  $a = 0$  ou  $b = 0$ , então  $a_i = 0$  para cada  $i$  ou  $b_i = 0$  para cada  $i$ , pelo que  $a_i b_i = 0$  para cada  $i$  e portanto  $\sum_{i \in I} a_i b_i = 0$ , o que implica que a desigualdade (1) é trivialmente

verdadeira. Resta-nos provar a validade de (1) no caso em que  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ . Definamos então  $\hat{a}_i = \frac{1}{a} a_i$  e  $\hat{b}_i = \frac{1}{b} b_i$  e reparemos que, pela alínea b) de 2.3.37, vem  $\|(\hat{a}_i)_{i \in I}\|_p = 1$  e  $\|(\hat{b}_i)_{i \in I}\|_q = 1$ , ou seja  $\sum_{i \in I} \hat{a}_i^p = 1$  e  $\sum_{i \in I} \hat{b}_i^q = 1$ .

Tendo em conta 2.3.39 e o facto de ser  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , vem agora

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i b_i &= ab \sum_{i \in I} \hat{a}_i \hat{b}_i = ab \sum_{i \in I} (\hat{a}_i^p)^{\frac{1}{p}} (\hat{b}_i^q)^{\frac{1}{q}} \leq ab \sum_{i \in I} \frac{1}{p} \hat{a}_i^p + \frac{1}{q} \hat{b}_i^q = \\ &= ab \left( \frac{1}{p} \sum_{i \in I} \hat{a}_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i \in I} \hat{b}_i^q \right) = ab \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = ab \end{aligned}$$

pelo que, tendo em conta a definição de  $a$  e  $b$ , obtivemos a desigualdade (1) no enunciado  $\square$

**2.3.42 (Caso limite da desigualdade de Hölder)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  duas famílias de reais em  $[0, +\infty[$  tais que

$$\sum_{i \in I} a_i < +\infty, \quad \sup_{i \in I} b_i < +\infty,$$

isto é, tais que  $(a_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{R}}^1(I)$  e  $(b_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{R}}^{\infty}(I)$ . Tem-se então

$$(1) \quad \sum_{i \in I} a_i b_i \leq \|(a_i)_{i \in I}\|_1 \times \|(b_i)_{i \in I}\|_{\infty},$$

em particular  $\sum_{i \in I} a_i b_i < +\infty$ .

**Dem:** Uma vez que, para cada  $i \in I$ , tem-se  $b_i \leq \|(b_i)_{i \in I}\|_{\infty}$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i b_i &\leq \sum_{i \in I} a_i \|(b_i)_{i \in I}\|_{\infty} = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \|(b_i)_{i \in I}\|_{\infty} = \\ &= \|(a_i)_{i \in I}\|_1 \times \|(b_i)_{i \in I}\|_{\infty} \end{aligned} \quad \square$$

**2.3.43 (Desigualdade de Minkowsky)** Sejam  $p \geq 1$ ,  $I$  um conjunto não vazio e  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  duas famílias de reais em  $[0, +\infty[$  tais que

$$\sum_{i \in I} a_i^p < +\infty, \quad \sum_{i \in I} b_i^p < +\infty,$$

isto é, ambas pertencentes a  $\ell_{\mathbb{R}}^p(I)$ . Então também  $(a_i + b_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{R}}^p(I)$  e

$$(1) \quad \|(a_i + b_i)_{i \in I}\|_p \leq \|(a_i)_{i \in I}\|_p + \|(b_i)_{i \in I}\|_p.$$

**Dem:** Podemos já supor que  $p > 1$  visto que o caso em que  $p = 1$  resulta de 2.1.13, com  $E = \mathbb{R}$ . Podemos também afastar o caso em que  $a_i + b_i = 0$  para todo o  $i$ , caso em que a desigualdade (1) é trivialmente verificada. Notemos que o que verificámos em 2.3.37, com  $E = \mathbb{R}$ , implica que  $(a_i + b_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{R}}^p(I)$ . Consideremos agora o expoente conjugado  $q$  de  $p$ , portanto o definido por  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , e reparemos que se tem

$$p - 1 = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{p}{q},$$

o que implica, em particular, que

$$\sum_{i \in I} ((a_i + b_i)^{p-1})^q = \sum_{i \in I} (a_i + b_i)^p < +\infty,$$

ou seja,  $((a_i + b_i)^{p-1})_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{R}}^q(I)$ . Podemos agora deduzir, tendo em conta a desigualdade de Hölder em 2.3.41,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (a_i + b_i)^p &= \sum_{i \in I} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i \in I} b_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \\ &\leq \|(a_i)_{i \in I}\|_p \|((a_i + b_i)^{p-1})_{i \in I}\|_q + \\ &\quad + \|(b_i)_{i \in I}\|_p \|((a_i + b_i)^{p-1})_{i \in I}\|_q = \\ &= (\|(a_i)_{i \in I}\|_p + \|(b_i)_{i \in I}\|_p) \left( \sum_{i \in I} (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

donde

$$\left( \sum_{i \in I} (a_i + b_i)^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \|(a_i)_{i \in I}\|_p + \|(b_i)_{i \in I}\|_p,$$

que não é mais do que a desigualdade (1) no enunciado.  $\square$

**2.3.44 (Os espaços  $\ell_E^p(I)$  como espaços vetoriais normados)** Sejam  $p \geq 1$ ,  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço vetorial normado. No espaço vetorial  $\ell_E^p(I)$  a aplicação que a cada  $(x_i)_{i \in I}$  associa  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p$  (cf. 2.3.37) é uma norma.

Por analogia, lembremos que também temos espaços vetoriais normados  $\ell_E^\infty(I)$  (cf. 2.1.10 e 2.1.9).

**Dem:** Começamos por fazer a observação trivial que uma família  $(x_i)_{i \in I}$  de vetores de  $E$  pertence a  $\ell_E^p(I)$  se, e só se,  $(\|x_i\|)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_{\mathbb{R}}^p(I)$ , tendo-se, nesse caso

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_p = \|(\|x_i\|)_{i \in I}\|_p.$$

Tendo em conta 2.3.43, vemos agora que, dados  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_i)_{i \in I}$  em  $\ell_E^p(I)$ ,

$$\begin{aligned} \|(x_i + y_i)_{i \in I}\|_p &= \left( \sum_{i \in I} \|x_i + y_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i \in I} (\|x_i\| + \|y_i\|)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|(\|x_i\| + \|y_i\|)_{i \in I}\|_p \leq \\ &\leq \|(\|x_i\|)_{i \in I}\|_p + \|(\|y_i\|)_{i \in I}\|_p = \\ &= \|(x_i)_{i \in I}\|_p + \|(y_i)_{i \in I}\|_p. \end{aligned}$$

As restantes propriedades que uma norma deve verificar já foram estabelecidas em 2.3.37.  $\square$

**2.3.45 (Comparação das normas  $p$  e  $\infty$ )** Sejam  $p \geq 1$ ,  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço vetorial normado e consideremos o correspondente espaço vetorial normado  $\ell_E^p(I)$ . Para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  e  $i_0 \in I$  tem-se

$$\|x_{i_0}\| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p$$

e portanto para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  vem  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^\infty(I)$  e

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p.$$

Em consequência, são lineares contínuas e com norma menor ou igual a 1 as aplicações

$$\ell_E^p(I) \rightarrow E, \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto x_{i_0}$$

e a inclusão  $\ell_E^p(I) \rightarrow \ell_E^\infty(I)$ .

**Dem:** Basta reparar que

$$\|x_{i_0}\| = (\|x_{i_0}\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_i)_{i \in I}\|_p. \quad \square$$

**2.3.46 (O caso particular em que  $I$  é finito)** Seja  $I$  um conjunto finito de índices com  $n \geq 1$  elementos e sejam  $1 \leq p < +\infty$  e  $E$  um espaço vetorial normado. Tem-se então  $\ell_E^p(I) = \ell_E^\infty(I) = Ap(I, E)$  e, generalizando o que referimos, para  $p = 1$ , em 2.1.17, as normas  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_p$ , no espaço vetorial  $Ap(I, E)$  de todas as aplicações de  $I$  para  $E$ , são equivalentes. Em particular, lembrando o referido em 2.1.11, concluímos que a topologia associada à norma  $\|\cdot\|_p$  é a topologia da convergência uniforme, que sabemos coincidir com a da convergência simples.

**Dem:** Já verificámos em 2.3.45 que se tem  $\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p$ . Por outro lado, de se ter  $\|x_i\| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty$  para cada  $i$ , concluímos que

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_p = \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (n \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty,$$

o que prova a equivalência das normas.  $\square$

**2.3.47 (Comparação das normas  $p$  e  $r$ )** Sejam  $1 \leq p \leq r$  números reais,  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço vetorial normado e consideremos os correspondentes espaços vetoriais normados  $\ell_E^p(I)$  e  $\ell_E^r(I)$ . Para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  tem-se então para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^r(I)$  e

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_r \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p.$$

Em consequência  $\ell_E^p(I) \subset \ell_E^r(I)$  e a inclusão  $\ell_E^p(I) \rightarrow \ell_E^r(I)$  é linear contínua e com norma menor ou igual a 1.

**Dem:** Uma vez que o caso em que  $p = r$  é trivialmente verdadeiro, podemos já supor que  $p < r$ . Tem-se então, uma vez que  $\|x_i\| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|x_i\|^r &= \sum_{i \in I} \|x_i\|^p \|x_i\|^{r-p} \leq \sum_{i \in I} \|x_i\|^p \|(x_i)_{i \in I}\|_p^{r-p} = \\ &= \|(x_i)_{i \in I}\|_p^{r-p} \sum_{i \in I} \|x_i\|^p = \|(x_i)_{i \in I}\|_p^{r-p} \|(x_i)_{i \in I}\|_p^p = \\ &= \|(x_i)_{i \in I}\|_p^r, \end{aligned}$$

de onde deduzimos que

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_r = \left( \sum_{i \in I} \|x_i\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \|(x_i)_{i \in I}\|_p^r \right)^{\frac{1}{r}} = \|(x_i)_{i \in I}\|_p. \quad \square$$

**2.3.48 (Os espaços  $\ell_E^p(I)$  como espaços de Banach)** Sejam  $p \geq 1$ ,  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço de Banach. Tem-se então que o espaço vetorial normado  $\ell_E^p(I)$  (cf. 2.3.44) é também um espaço de Banach.

Por analogia, lembremos que, como se verificou em 2.2.5, também temos um espaço de Banach  $\ell_E^\infty(I)$ .

**Dem:** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$  aderente a  $A$  e  $f: A \rightarrow \ell_E^p(I)$  uma aplicação verificando a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Consideremos as aplicações  $f_i: A \rightarrow E$ , onde  $i \in I$ , definidas por

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}.$$

Sendo  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que, quaisquer que sejam  $x, x' \in V \cap A$ , se tenha  $\|f(x) - f(x')\|_p < \delta$ . Para cada  $i_0 \in I$  tem-se então, quaisquer que sejam  $x, x' \in V \cap A$ ,

$$\begin{aligned}\|f_{i_0}(x) - f_{i_0}(x')\| &= (\|f_{i_0}(x) - f_{i_0}(x')\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i \in I} \|f_i(x) - f_i(x')\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|f(x) - f(x')\|_p < \delta,\end{aligned}$$

o que mostra que a aplicação  $f_{i_0}: A \rightarrow E$  também verifica a condição de Cauchy quando  $x \rightarrow x_0$ . Tendo em conta o facto de  $E$  ser completo, podemos, para cada  $i \in I$ , considerar  $w_i \in E$  tal que  $f_i(x) \rightarrow w_i$  quando  $x \rightarrow x_0$ . Vamos verificar em seguida que a família  $(w_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^p(I)$  e que se tem  $f(x) \rightarrow (w_i)_{i \in I}$  quando  $x \rightarrow x_0$ , no espaço normado  $\ell_E^p(I)$ , o que terminará a demonstração.

Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Consideremos uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que, sempre que  $x, \hat{x} \in V \cap A$  se tenha  $\|f(x) - f(\hat{x})\|_p < \delta$ . Seja  $K \subset I$  uma parte finita arbitrária. Tem-se então, sempre que  $x, \hat{x} \in V \cap A$ ,

$$\sum_{i \in K} \|f_i(x) - f_i(\hat{x})\|^p \leq \sum_{i \in I} \|f_i(x) - f_i(\hat{x})\|^p = \|f(x) - f(\hat{x})\|_p^p < \delta^p$$

pelo que, encarando  $\hat{x}$  como um elemento arbitrário fixado em  $V \cap A$  e considerando o limite quando  $x \rightarrow x_0$ , reparando que temos uma soma finita e que a norma de  $E$  é uma aplicação contínua, obtemos

$$\sum_{i \in K} |w_i - f_i(\hat{x})|^p \leq \delta^p.$$

Tendo em conta a arbitrariedade da parte finita  $K \subset I$  e a caracterização de uma soma de reais maiores ou iguais a 0 como supremo de todas as somas finitas, deduzimos que se tem

$$(1) \quad \sum_{i \in I} \|w_i - f_i(\hat{x})\|^p \leq \delta^p,$$

em particular  $(w_i - f_i(\hat{x}))_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  e portanto também

$$(w_i)_{i \in I} = (w_i - f_i(\hat{x}))_{i \in I} + (f_i(\hat{x}))_{i \in I} \in \ell_E^p(I),$$

e então a desigualdade (1) exprime que

$$\|(w_i)_{i \in I} - f(\hat{x})\|_p \leq \delta$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de  $\hat{x} \in V \cap A$ , implica que se tem efetivamente  $f(x) \rightarrow (w_i)_{i \in I}$  quando  $x \rightarrow x_0$ .  $\square$

**2.3.49 (Observação sobre notação)** Suponhamos que  $I$  é um conjunto de índices e que  $I_0$  é um subconjunto. Se  $E$  é um espaço vetorial normado e, para cada  $i \in I_0$ ,  $x_i \in E$  usaremos a notação  $(x_i)_{i \in I_0}$ , que refere à partida uma família indexada em  $I_0$ , para designar também a família indexada em  $I$  que vale  $x_i$  nos índices  $i \in I_0$  e vale 0 nos índices  $i \in I \setminus I_0$ , desde que não haja perigo, a partir do contexto, de ter dúvidas sobre o significado que se

pretende. Repare-se que o perigo referido se encontra consideravelmente reduzido pelo facto de, como é evidente, ter-se, para  $1 \leq p < +\infty$ ,  $(x_i)_{i \in I_0} \in \ell_E^p(I)$  se, e só se,  $(x_i)_{i \in I_0} \in \ell_E^p(I_0)$  sendo que a norma  $\|(x_i)_{i \in I_0}\|_p$  é então a mesma nos dois contextos e, do mesmo modo, ter-se  $(x_i)_{i \in I_0} \in \ell_E^\infty(I)$  se, e só se,  $(x_i)_{i \in I_0} \in \ell_E^\infty(I_0)$  sendo que a norma  $\|(x_i)_{i \in I_0}\|_\infty$  é então a mesma nos dois contextos.

**2.3.50 (Um subespaço vetorial denso dos  $\ell_E^p(I)$ )** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $E$  um espaço vetorial normado. Tem então lugar um subespaço vetorial  $\ell_E^{fin}(I)$  do espaço vetorial de todas as aplicações  $I \rightarrow E$  constituído pelas famílias  $(x_i)_{i \in I}$  para as quais existe uma parte finita  $I_0 \subset I$  tal que  $x_i = 0$  para cada  $i \in I \setminus I_0$ .

Tem-se então que, para cada real  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\ell_E^{fin}(I)$  é um subespaço vetorial denso de  $\ell_E^p(I)$ , com a norma  $\|\cdot\|_p$ .

**Dem:** A família identicamente nula  $(0)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^{fin}(I)$ , uma vez que podemos tomar  $I_0 = \emptyset$ . Dados  $(x_i)_{i \in I}$  e  $(y_i)_{i \in I}$  em  $\ell_E^{fin}(I)$  e um escalar  $a \in \mathbb{K}$ , podemos considerar partes finitas  $I_0$  e  $I_1$  de  $I$  tais que  $x_i = 0$  para cada  $i \notin I_0$  e  $y_i = 0$  para cada  $i \notin I_1$ ; Tem-se então que  $I_0 \cup I_1$  é uma parte finita de  $I$  tal que  $x_i + y_i = 0$  para cada  $i \notin I_0 \cup I_1$ , o que mostra que  $(x_i + y_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^{fin}(I)$  e  $ax_i = 0$  para cada  $i \notin I_0$ , o que mostra que  $(ax_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^{fin}(I)$ . Provámos assim que  $\ell_E^{fin}(I)$  é efetivamente um subespaço vetorial. Seja agora  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  arbitrário. Dado  $\delta > 0$  arbitrário, o facto de se ter  $\sum \|x_i\|^p < +\infty$  permite-nos considerar uma parte finita  $I_0$  de  $I$  tal que

$$\sum_{i \in I_0} \|x_i\|^p > \sum_{i \in I} \|x_i\|^p - \delta^p = \sum_{i \in I_0} \|x_i\|^p + \sum_{i \in I \setminus I_0} \|x_i\|^p - \delta^p$$

portanto

$$\sum_{i \in I \setminus I_0} \|x_i\|^p < \delta^p.$$

Podemos então considerar, com a notação introduzida em 2.3.49, a família  $(x_i)_{i \in I_0} \in \ell_E^{fin}(I)$ , tendo-se

$$\|(x_i)_{i \in I} - (x_i)_{i \in I_0}\|_p = \left( \sum_{i \in I \setminus I_0} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \delta,$$

o que mostra que  $(x_i)_{i \in I}$  é aderente a  $\ell_E^{fin}(I)$ . □

Note-se que o caso limite  $p = \infty$  do resultado precedente já não é válido. De facto, sendo  $E$  um espaço de Banach tem-se ainda  $\ell_E^{fin}(I) \subset \ell_E^\infty(I)$  mas, como veremos a seguir, afastados os casos triviais em que  $E = \{0\}$

ou  $I$  é finito, existem subespaços vetoriais fechados próprios de  $\ell_E^\infty(I)$  que contêm  $\ell_E^{fin}(I)$ .

**2.3.51 (Dois subespaços fechados de  $\ell_E^\infty(I)$ )** Sejam  $I$  um conjunto infinito de índices e  $E \neq \{0\}$  um espaço de Banach. Tem-se então:

**1)** Tem lugar um subespaço vetorial fechado próprio  $c_E(I)$  de  $\ell_E^\infty(I)$  constituído pelas famílias  $(x_i)_{i \in I}$  de vetores de  $E$  tais que exista  $x \in E$  com

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x,$$

onde o limite é o relativo à topologia de  $\widehat{I} = I \cup \{\infty\}$  como compactificado de Alexandroff de  $I$  com a topologia discreta (cf. 1.6.51)<sup>203</sup>. Como é usual, omite-se frequentemente a referência ao conjunto de índices  $I$  quando este é  $\mathbb{N}$  e a referência a  $E$  quando este for  $\mathbb{K}$  e for claro no contexto qual o corpo dos escalares considerado.

**2)** Tem lugar uma aplicação linear contínua  $\lim: c_E(I) \rightarrow E$  que a cada  $(x_i)_{i \in I}$  associa o respetivo limite quando  $i \rightarrow \infty$ .

**3)** Tem lugar um subespaço vetorial fechado  $c_{0E}(I)$  de  $\ell_E^\infty(I)$  contido estritamente em  $c_E(I)$  constituído pela famílias  $(x_i)_{i \in I}$  com limite 0 quando  $i \rightarrow \infty$  e este subespaço vetorial é igual à aderência de  $\ell_E^{fin}(I)$  em  $\ell_E^\infty(I)$ .

**Dem: 1)** Começemos por reparar que  $c_E(I) \subset \ell_E^\infty(I)$  visto que se  $(x_i)_{i \in I}$  tem limite  $x \in E$  quando  $i \rightarrow \infty$  então  $\{x_i\}_{i \in I} \cup \{x\}$  é compacto, e portanto limitado, por ser a imagem do compactificado de Alexandroff  $\widehat{I} = I \cup \{\infty\}$  pela aplicação contínua que aplica  $i$  em  $x_i$  e  $\infty$  em  $x$ .

O facto de  $c_E(I)$  ser um subespaço vetorial de  $\ell_E^\infty(I)$  resulta de a família identicamente 0 ter limite 0 quando  $i \rightarrow \infty$  e das propriedades dos limites em 2.1.20 e 2.1.3. Para verificarmos que se trata de um subespaço vetorial fechado consideremos  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^\infty(I)$  aderente a  $c_E(I)$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, seja  $(y_i)_{i \in I} \in c_E(I)$  tal que  $\|(x_i)_{i \in I} - (y_i)_{i \in I}\|_\infty < \frac{\delta}{3}$  e, tendo em conta o facto de  $(y_i)_{i \in I}$  verificar a condição de Cauchy quando  $i \rightarrow \infty$ , seja  $I_0$  uma parte finita de  $I$  tal que sempre que  $i, i' \in I \setminus I_0$  se tenha  $\|y_i - y_{i'}\| < \frac{\delta}{3}$ ; quaisquer que sejam  $i, i' \in I \setminus I_0$  tem-se então

$$\begin{aligned} \|x_i - x_{i'}\| &\leq \|x_i - y_i\| + \|y_i - y_{i'}\| + \|y_{i'} - x_{i'}\| < \\ &< \|(x_i)_{i \in I} - (y_i)_{i \in I}\|_\infty + \frac{\delta}{3} + \|(x_i)_{i \in I} - (y_i)_{i \in I}\|_\infty < \delta, \end{aligned}$$

<sup>203</sup>Repare-se que uma das razões por que exigimos que  $I$  seja infinito é para garantir que  $\infty$  seja aderente a  $I$ , sem o que não faria sentido considerar o limite. Repare-se também que, se  $E \neq \{0\}$  fosse um espaço vetorial normado, não necessariamente completo, ainda se poderia garantir que  $c_E(I)$  é um subespaço vetorial de  $\ell_E^\infty(I)$  mas não que esse subespaço tenha que ser fechado; Continuariam, além disso, a ser válidas as conclusões de 2) e 3), neste último caso o facto de termos um subespaço vetorial fechado necessitando de uma demonstração diferente da que vamos apresentar.

o que mostra que  $(x_i)_{i \in I}$  verifica a condição de Cauchy quando  $i \rightarrow \infty$  e portanto, por  $E$  ser completo,  $(x_i)_{i \in I} \in c_E(I)$ . O facto de termos um subespaço próprio resulta de que existem famílias  $(x_i)_{i \in I}$  que não têm limite; por exemplo, sendo  $x \neq 0$  em  $E$  e  $I' \subset I$  infinito com  $I \setminus I'$  também infinito, a família definida por  $x_i = x$  se  $i \in I'$  e  $x_i = 0$  se  $i \notin I'$  não tem limite quando  $i \rightarrow \infty$  por não verificar a condição de Cauchy quando  $i \rightarrow \infty$  (qualquer que seja a parte finita  $I_0$  de  $I$  em  $I \setminus I_0$  existem necessariamente elementos em  $I'$  e elementos em  $I \setminus I'$ ).

2) O facto de  $\text{lim}: c_E(I) \rightarrow E$  ser linear resulta das propriedades dos limites em 2.1.20 e 2.1.3. O facto de esta aplicação linear ser contínua, e de norma menor ou igual a 1, resulta de que se  $(x_i)_{i \in I}$  tem limite  $x$  quando  $i \rightarrow \infty$  então  $\|x\| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty$ , uma vez que, afastado o caso trivial em que  $(x_i)_{i \in I}$  é a família identicamente 0, a bola fechada de centro 0 e raio  $\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty$  de  $E$  é um conjunto fechado que contém todos os  $x_i$  e portanto também o seu limite  $x$ .

3) O facto de  $c_{0E}(I)$  ser um subespaço vetorial fechado de  $c_E(I)$  e portanto de  $\ell_E^\infty(I)$  resulta de se tratar do kernel da aplicação linear contínua  $\text{lim}: c_E(I) \rightarrow E$  e o facto de estar contido estritamente naquele resulta de que, se  $x \neq 0$  em  $E$  a família constante de valor  $x$  está em  $c_E(I)$  mas não em  $c_{0E}(I)$ .

O facto de se ter  $\ell_E^{\text{fin}}(I) \subset \ell_E^0(I)$  resulta de que se  $(x_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^{\text{fin}}(I)$  então existe  $I_0 \subset I$  finito tal que  $x_i = 0$  para cada  $i \in I \setminus I_0$ , o que implica que  $x_i \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Resulta daqui, por  $\ell_E^0(I)$  ser fechado em  $\ell_E^\infty(I)$ , que a aderência de  $\ell_E^{\text{fin}}(I)$  em  $\ell_E^\infty(I)$  está contida em  $\ell_E^0(I)$  e o facto de ela ser mesmo igual a  $\ell_E^0(I)$  resulta de que se  $(x_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^0(I)$  e  $\delta > 0$  então, considerando uma parte finita  $I_0$  de  $I$  tal que  $\|x_i\| < \delta$  para cada  $i \in I \setminus I_0$  e, considerando a família  $(x_i)_{i \in I_0}$ , que coincide com aquela em  $I_0$  e é 0 fora de  $I_0$ , vem  $(x_i)_{i \in I_0} \in \ell_E^{\text{fin}}(I)$  e  $\|(x_i)_{i \in I} - (x_i)_{i \in I_0}\|_\infty \leq \delta$ .  $\square$

**2.3.52 (Separabilidade de  $\ell_E^p(I)$ )** Sejam  $I$  um conjunto contável não vazio,  $E$  um espaço vetorial normado separável sobre  $\mathbb{K}$  (por exemplo  $E = \mathbb{K}$ ) e  $1 \leq p < +\infty$ . Tem-se então que o espaço vetorial normado  $\ell_E^p(I)$  é também separável.<sup>204</sup>

**Dem:** Para cada parte finita  $I_0$  de  $I$ , podemos considerar o subespaço vetorial  $\ell_E^p(I, I_0)$  de  $\ell_E^p(I)$  constituído pelas famílias  $(x_i)_{i \in I}$  tais que  $x_i = 0$  para cada  $i \in I \setminus I_0$ , subespaço esse que é separável por, afastado o caso trivial em que  $I_0 = \emptyset$ , existir uma isometria linear (em particular um isomorfismo topológico) dele sobre o espaço normado separável  $\ell_E^p(I_0)$  (cf. 2.3.46 e 1.5.24), nomeadamente aquela que a cada família indexada em  $I$  associa a família restrição a  $I_0$ . Uma vez que a classe das partes finitas de  $I$  é contável, deduzimos da alínea b) de 1.3.28 que  $\ell_E^{\text{fin}}(I)$ , sendo a união contável dos conjuntos  $\ell_E^p(I, I_0)$  é também separável. Por fim, tendo em conta o resultado

<sup>204</sup>Repare-se que, como referido em 2.1.72, não se pode afirmar o mesmo para  $p = \infty$ .



de densidade em 2.3.50 e a alínea a) de 1.3.28, concluímos que  $\ell_E^p(I)$  é separável.  $\square$

Vamos agora dirigir a nossa atenção ao caso em que o espaço vetorial normado  $E$  é o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , de modo a obter um resultado de dualidade importante. Este resultado será reexaminado posteriormente no quadro mais geral de outros espaços normados.

**2.3.53 (A aplicação bilinear de dualidade)** Sejam  $p > 1$  e  $q > 1$  dois expoentes conjugados (cf. 2.3.40),  $I$  um conjunto não vazio e  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Podemos então considerar uma aplicação bilinear contínua

$$\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^p(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} x_i y_i,$$

que verifica a condição

$$|\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p \|(y_i)_{i \in I}\|_q.$$

**Dem:** Dados  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  e  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^q(I)$ , tem-se, pela desigualdade de Hölder em 2.3.41,

$$\sum_{i \in I} |x_i y_i| = \sum_{i \in I} |x_i| |y_i| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p \|(y_i)_{i \in I}\|_q < +\infty,$$

o que implica que a família dos escalares  $x_i y_i$  é absolutamente somável, e portanto somável. Fica assim bem definida a aplicação

$$\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^p(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$$

que se verifica facilmente ser bilinear. Tem-se enfim

$$|\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})| = \left| \sum_{i \in I} x_i y_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i y_i| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p \|(y_i)_{i \in I}\|_q,$$

o que implica, em particular, que a aplicação bilinear  $\Gamma$  é contínua.  $\square$

**2.3.54 (Teorema de Riesz)** Sejam  $p > 1$  e  $q > 1$  dois expoentes conjugados,  $I$  um conjunto não vazio e  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e consideremos a correspondente aplicação bilinear contínua  $\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^p(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$  definida em 2.3.53. Tem então lugar uma isometria linear

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^p(I) &\rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^q(I); \mathbb{K}), \\ \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y_i)_{i \in I}) &= \Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} x_i y_i,^{205}\end{aligned}$$

em particular  $\Gamma$  é dualizante na primeira variável.

**Dem:** Para maior clareza, vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

**1)** Deduzimos de 2.3.53 que, para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  temos uma aplicação linear contínua  $\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I}): \ell_{\mathbb{K}}^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$  com norma menor ou igual a  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p$  e que a aplicação  $\widehat{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^p(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^q(I); \mathbb{K})$  é linear contínua e com norma menor ou igual a 1.

**2)** Vamos verificar que a aplicação linear  $\widehat{\Gamma}$  é isométrica, em particular injetiva, por outras palavras que se tem mesmo

$$(1) \quad \|\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})\| = \|(x_i)_{i \in I}\|_p$$

para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^p(I)$ .

**Subdem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $(x_i)_{i \in I} = 0$ . Definamos

$$y_i = \begin{cases} |x_i|^{p-2} \times \bar{x}_i, & \text{se } x_i \neq 0 \\ 0, & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

para cada  $i \in I$  e reparemos que, por ser

$$(2) \quad p - 1 = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{p}{q},$$

vem

$$|y_i|^q = (|x_i|^{p-1})^q = |x_i|^p$$

donde  $\sum |y_i|^q = \sum |x_i|^p$ , portanto  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^q(I)$  e

$$\|(y_i)_{i \in I}\|_q = \left(\sum_{i \in I} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i \in I} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|(x_i)_{i \in I}\|_p^{\frac{p}{q}} = \|(x_i)_{i \in I}\|_p^{p-1}.$$

Tem-se então

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y_i)_{i \in I}) &= \sum_{i \in I} x_i y_i = \sum_{i \in I} |x_i|^p = \|(x_i)_{i \in I}\|_p^p = \\ &= \|(x_i)_{i \in I}\|_p \times \|(x_i)_{i \in I}\|_p^{p-1} = \\ &= \|(x_i)_{i \in I}\|_p \times \|(y_i)_{i \in I}\|_q,\end{aligned}$$

<sup>205</sup>Por abuso de linguagem, é comum traduzir este resultado dizendo que  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  “é” o dual de  $\ell_{\mathbb{K}}^q(I)$ . Note-se ainda que, na linguagem introduzida no exercício 2.2.10, estamos a afirmar, em particular, que  $\widehat{\Gamma}$  é uma aplicação bilinear isométrica na primeira variável e, por simetria dos papéis destas, também na segunda variável.

o que, por ser  $(y_i)_{i \in I} \neq 0$ , implica a igualdade (1).

**3)** Tendo como objetivo mostrar que a aplicação linear  $\widehat{\Gamma}$  é sobrejetiva, seja  $\lambda \in \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^q(I); \mathbb{K})$  arbitrário. Para cada  $i \in I$  notemos  $\varepsilon_i \in \ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I) \subset \ell_{\mathbb{K}}^q(I)$  a família que a  $i$  associa 1 e a cada  $j \neq i$  associa 0 (uma generalização dos elementos da base canónica de  $\mathbb{K}^n$ ) e consideremos os elementos  $x_i \in \mathbb{K}$  definidos por  $x_i = \lambda(\varepsilon_i)$ . Vamos verificar que a família  $(x_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$ .

**Subdem:** Seja  $I_0 \subset I$  finito arbitrário. Seja  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I) \subset \ell_{\mathbb{K}}^q(I)$  o definido por

$$y_i = \begin{cases} |x_i|^{p-2} \times \overline{x_i}, & \text{se } i \in I_0 \text{ e } x_i \neq 0 \\ 0, & \text{se } i \notin I_0 \text{ ou } x_i = 0 \end{cases}$$

e reparemos que, como anteriormente, tendo em conta a igualdade (2), vem

$$|y_i|^q = (|x_i|^{p-1})^q = |x_i|^p$$

para cada  $i \in I_0$  e que se tem

$$(y_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I_0} y_i \varepsilon_i.$$

Vem agora

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_0} |x_i|^p &= \sum_{i \in I_0} y_i x_i = \sum_{i \in I_0} y_i \lambda(\varepsilon_i) = \lambda\left(\sum_{i \in I_0} y_i \varepsilon_i\right) = \\ &= \left| \lambda\left(\sum_{i \in I_0} y_i \varepsilon_i\right) \right| \leq \|\lambda\| \|(y_i)_{i \in I}\|_q = \\ &= \|\lambda\| \left(\sum_{i \in I_0} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|\lambda\| \left(\sum_{i \in I_0} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

o que implica, no caso em que  $\sum_{i \in I_0} |x_i|^p \neq 0$ , que

$$\left(\sum_{i \in I_0} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i \in I_0} |x_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|\lambda\|,$$

donde

$$\sum_{i \in I_0} |x_i|^p \leq \|\lambda\|^p,$$

desigualdade que é trivialmente também verdadeira no caso em que se tem  $\sum_{i \in I_0} |x_i|^p = 0$ . Tendo em conta a caracterização da soma de parcelas positivas como supremo de todas as somas finitas, concluímos que

$$\sum_{i \in I} |x_i|^p \leq \|\lambda\|^p < +\infty,$$

o que era o nosso objetivo nesta alínea.

4) Vamos provar por fim que, nas condições de 3), tem-se  $\lambda = \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})$ , o que provará a sobrejetividade pretendida.

**Subdem:** Uma vez que  $\lambda$  e  $\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})$  são aplicações lineares contínuas de  $\ell_{\mathbb{K}}^q(I)$  para  $\mathbb{K}$ , para mostrar que elas coincidem basta mostrar que tomam o mesmo valor em cada elemento  $(y_i)_{i \in I}$  do subespaço vetorial denso  $\ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I)$  de  $\ell_{\mathbb{K}}^q(I)$  (cf. 2.3.50 e 1.4.29). Ora, sendo  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I)$  arbitrário e considerando uma parte finita  $I_0$  de  $I$  tal que  $y_i = 0$  para cada  $i \notin I_0$ , tem-se

$$(y_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I_0} y_i \varepsilon_i$$

e portanto

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y_i)_{i \in I}) &= \sum_{i \in I_0} x_i y_i = \sum_{i \in I_0} y_i \lambda(\varepsilon_i) = \\ &= \lambda\left(\sum_{i \in I_0} y_i \varepsilon_i\right) = \lambda((y_i)_{i \in I}). \quad \square \end{aligned}$$

**2.3.55 (Corolário — Reflexividade de  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$ )** Sejam  $1 < p < +\infty$ ,  $I$  um conjunto de índices não vazio e  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Então o espaço de Banach  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  é reflexivo.

**Dem:** Sendo  $q$  o expoente conjugado de  $p$ , vimos em 2.3.54 que a aplicação bilinear contínua  $\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^p(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$ , definida em 2.3.53, é dualizante na primeira variável. Uma vez que a aplicação bilinear oposta é a mesma aplicação, com os papéis de  $p$  e  $q$  trocados, ela é também dualizante na segunda variável. O que vimos em 2.2.31 implica assim que  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  é um espaço de Banach reflexivo.  $\square$

Vamos agora examinar o que se pode dizer por analogia com os resultados precedentes no caso limite em que  $p = 1$  e  $q = \infty$  (ou vice-versa).

**2.3.56 (Caso limite de 2.3.53)** Se  $I$  é um conjunto não vazio e  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  podemos considerar uma aplicação bilinear contínua

$$\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I) \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} x_i y_i,$$

que verifica a condição

$$|\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_1 \|(y_i)_{i \in I}\|_\infty.$$

**Dem:** Dados  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  e  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^q(I)$ , tem-se

$$|y_i| \leq \|(y_i)_{i \in I}\|_\infty$$

para cada  $i$ , donde

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |x_i y_i| &\leq \sum_{i \in I} \|(y_i)_{i \in I}\|_\infty |x_i| = \|(y_i)_{i \in I}\|_\infty \sum_{i \in I} |x_i| = \\ &= \|(x_i)_{i \in I}\|_1 \|(y_i)_{i \in I}\|_\infty < +\infty, \end{aligned}$$

o que mostra que a família dos escalares  $x_i y_i$  é absolutamente somável, e portanto somável. Fica assim bem definida a aplicação

$$\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^\infty(I) \rightarrow \mathbb{K}$$

que se verifica facilmente ser bilinear. Tem-se enfim

$$|\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})| = \left| \sum_{i \in I} x_i y_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i y_i| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_1 \|(y_i)_{i \in I}\|_\infty,$$

o que implica, em particular, que a aplicação bilinear  $\Gamma$  é contínua.  $\square$

**2.3.57 (Caso limite de 2.3.54)** Sejam  $I$  um conjunto não vazio e  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e consideremos a correspondente aplicação bilinear contínua

$$\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^\infty(I) \rightarrow \mathbb{K}$$

definida em 2.3.56. Tem-se então:

**a)** Tem lugar uma isometria linear

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^\infty(I) &\rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^1(I), \mathbb{K}), \\ \tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I})((x_i)_{i \in I}) &= \Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} x_i y_i, \end{aligned} \quad 206$$

em particular  $\Gamma$  é dualizante na segunda variável.

**b)** Tem lugar uma aplicação linear isométrica, em particular injetiva,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) &\rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I), \mathbb{K}), \\ \hat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y_i)_{i \in I}) &= \Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} x_i y_i, \end{aligned}$$

a qual, no caso em que o conjunto  $I$  é infinito, não é sobrejetiva.<sup>207</sup> Em

<sup>206</sup>Por abuso de linguagem, podemos dizer que  $\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I)$  “é” o dual de  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  embora, como veremos em b),  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  não “seja” o dual de  $\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I)$ .

<sup>207</sup>No caso em que  $I$  é finito, com  $n$  elementos, os espaços  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  e  $\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I)$  coincidem ambos com o espaço de todas as aplicações  $I \rightarrow \mathbb{K}$ , que tem dimensão  $n$ , pelo que a

particular  $\Gamma$  não é dualizante na primeira variável.

**Dem:** Para maior clareza vamos dividir a demonstração de cada uma das alíneas em várias partes, numeradas independentemente:

**a1)** Deduzimos de 2.3.56 que, para cada  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I)$  temos uma aplicação linear contínua  $\tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I}): \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \rightarrow \mathbb{K}$  com norma menor ou igual a  $\|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty}$  e que a aplicação  $\tilde{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^1(I); \mathbb{K})$  é linear contínua e com norma menor ou igual a 1.

**a2)** Vamos verificar que a aplicação linear  $\tilde{\Gamma}$  é isométrica, em particular injetiva, por outras palavras que se tem mesmo

$$(1) \quad \|\tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I})\| = \|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty}$$

para cada  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I)$ .

**Subdem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $(y_i)_{i \in I} = 0$ . Seja  $0 < K < 1$  arbitrário. Escolhamos um índice  $i_0$  tal que  $|y_{i_0}| > K\|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty}$  e consideremos a família  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I) \subset \ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  definida por

$$x_i = \begin{cases} \frac{\overline{y_{i_0}}}{|y_{i_0}|}, & \text{se } i = i_0 \\ 0, & \text{se } i \neq i_0 \end{cases}$$

que verifica

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_1 = |x_{i_0}| = 1.$$

Tem-se então

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I})((x_i)_{i \in I}) &= \sum_{i \in I} x_i y_i = x_{i_0} y_{i_0} = |y_{i_0}| > \\ &> K\|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty} = K\|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty} \|(x_i)_{i \in I}\|_1, \end{aligned}$$

donde

$$\|\tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I})\| \geq K\|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty}$$

o que, pela arbitrariedade de  $K \in ]0, 1[$  implica que se tem mesmo

$$\|\tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I})\| \geq \|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty}.$$

Uma vez que a desigualdade oposta já foi estabelecida em a1), fica assim provada a igualdade (1).

**a3)** Vamos verificar que a aplicação linear  $\tilde{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^1(I), \mathbb{K})$ , que já verificámos ser isométrica, é sobrejetiva, o que terminará a prova de a).

**Subdem:** Seja  $\lambda: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação linear contínua. Consideremos, para cada  $i \in I$ , o elemento  $\varepsilon_i \in \ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I) \subset \ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  que associa 1 ao índice  $i$  e 0 aos restantes índices, para o qual se tem  $\|\varepsilon_i\|_1 = 1$ , e notemos  $y_i = \lambda(\varepsilon_i)$ .

---

aplicação linear  $\hat{\Gamma}$  entre espaços vetoriais de dimensão  $n$ , sendo injetiva, é também sobrejetiva.

Tem-se assim  $|y_i| \leq \|\lambda\| \|\varepsilon_i\|_1 = \|\lambda\|$  para cada  $i$  pelo que  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I)$  e  $\|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty} \leq \|\lambda\|$ . Seja  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I)$  arbitrário e reparemos que, sendo  $I_0 \subset I$  um subconjunto finito tal que  $x_i = 0$  para cada  $i \in I \setminus I_0$ , tem-se

$$(x_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I_0} x_i \varepsilon_i$$

e portanto

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I})((x_i)_{i \in I}) &= \sum_{i \in I_0} x_i y_i = \sum_{i \in I_0} x_i \lambda(\varepsilon_i) = \\ &= \lambda\left(\sum_{i \in I_0} x_i \varepsilon_i\right) = \lambda((x_i)_{i \in I}). \end{aligned}$$

Verificámos assim que as aplicações lineares contínuas  $\lambda$  e  $\tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I})$  de  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  para  $\mathbb{K}$  coincidem no subespaço vetorial denso  $\ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I)$  de  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  (cf. 2.3.50) e portanto, tendo em conta 1.4.29, tem-se  $\lambda = \tilde{\Gamma}((y_i)_{i \in I})$ . Ficou assim provada a sobrejetividade de  $\tilde{\Gamma}$ .

**b1)** Deduzimos de 2.3.56 que, para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  temos uma aplicação linear contínua  $\hat{\Gamma}((x_i)_{i \in I}): \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I) \rightarrow \mathbb{K}$  com norma menor ou igual a  $\|(x_i)_{i \in I}\|_1$  e que a aplicação  $\hat{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I); \mathbb{K})$  é linear contínua e com norma menor ou igual a 1.

**b2)** Vamos verificar que a aplicação linear  $\hat{\Gamma}$  é isométrica, em particular injetiva, por outras palavras que se tem mesmo

$$(2) \quad \|\hat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})\| = \|(x_i)_{i \in I}\|_1$$

para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^1(I)$ .

**Subdem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $(x_i)_{i \in I} = 0$ . Consideremos a família  $(y_i)_{i \in I}$  definida por

$$y_i = \begin{cases} \frac{\bar{x}_i}{|x_i|}, & \text{se } x_i \neq 0 \\ 0, & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

e reparemos que se tem  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I)$  e  $\|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty} = 1$ , uma vez que  $|y_i| = 0$  ou  $|y_i| = 1$  para cada  $i$  e que, existe  $i_0$  com  $x_{i_0} \neq 0$  e então  $|y_{i_0}| = 1$ . Vemos agora que

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y_i)_{i \in I}) &= \sum_{i \in I} x_i y_i = \sum_{i \in I} |x_i| = \\ &= \|(x_i)_{i \in I}\|_1 = \|(x_i)_{i \in I}\|_1 \|(y_i)_{i \in I}\|_{\infty}, \end{aligned}$$

o que implica que  $\|\hat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})\| \geq \|(x_i)_{i \in I}\|_1$  e portanto, pelo que vimos em b1), obtemos a igualdade (2).

**b3)** Tendo em conta 2.3.51, podemos considerar o subespaço vetorial  $c_E(I)$  de  $\ell_E^{\infty}(I)$  constituído pelas famílias  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_E^{\infty}(I)$  que admitem limite

quando  $i \rightarrow \infty$  e uma aplicação linear contínua  $\text{lim}: c_E(I) \rightarrow \mathbb{K}$  que a cada família associa o respetivo limite quando  $i \rightarrow \infty$ . Pelo teorema de Hahn-Banach (cf. 2.1.59 ou 2.1.61) podemos considerar uma aplicação linear contínua  $\lambda: \ell_E^\infty(I) \rightarrow \mathbb{K}$  que tenha aquela como restrição a  $c_E(I)$ . Vamos mostrar que  $\lambda$  não pertence à imagem de  $\widehat{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I), \mathbb{K})$ , o que mostrará que esta aplicação linear não é sobrejetiva. Suponhamos, por absurdo, que se tinha  $\lambda = \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})$  para um certo  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^1(I)$ . Para cada  $i_0 \in I$ , podemos considerar o elemento  $\varepsilon_{i_0}$  de

$$\ell_{\mathbb{K}}^{fin}(I) \subset c_{0\mathbb{K}}(I) \subset c_{\mathbb{K}}(I)$$

que associa 1 ao índice  $i_0$  e 0 aos restantes índices, para o qual se tem portanto  $\lambda(\varepsilon_{i_0}) = 0$  e concluímos então que

$$0 = \lambda(\varepsilon_{i_0}) = \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})(\varepsilon_{i_0}) = \Gamma((x_i)_{i \in I}, \varepsilon_{i_0}) = x_{i_0}.$$

Concluímos assim que  $(x_i)_{i \in I}$  é a família identicamente 0. Mas, considerando agora a família  $(1)_{i \in I}$  com todos os termos iguais a 1, que pertence a obtemos  $c_E(I)$  com limite 1 quando  $i \rightarrow \infty$ , obtemos

$$1 = \lambda((1)_{i \in I}) = \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((1)_{i \in I}) = \Gamma((x_i)_{i \in I}, (1)_{i \in I}) = 0,$$

o que é o absurdo procurado.  $\square$

**2.3.58 (Corolário)** Sejam  $I$  um conjunto infinito e  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Tem-se então que os espaços de Banach  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  e  $\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I)$  não são reflexivos.

**Dem:** Tendo em conta 2.3.57, existe uma aplicação bilinear contínua  $\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^\infty(I) \rightarrow \mathbb{K}$  que é dualizante na segunda variável mas não é dualizante na primeira e este facto implica, por 2.2.31, que  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  não é reflexivo. Tendo em conta 2.2.35, o dual  $\mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^1(I); \mathbb{K})$  também não é reflexivo e, uma vez que  $\tilde{\Gamma}: \ell_{\mathbb{K}}^\infty(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^1(I); \mathbb{K})$  é um isomorfismo topológico, resulta de 2.2.23 que  $\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I)$  também não é reflexivo.  $\square$

**2.3.59 (Corolário)** O dual de um espaço vetorial normado separável não é necessariamente separável.

**Dem:** Sejam  $I$  um conjunto numerável e  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Como vimos em 2.3.52, o espaço vetorial normado  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  é separável. Como vimos em 2.3.57, existe uma isometria linear de  $\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I)$  sobre o dual  $\mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^1(I); \mathbb{K})$  pelo que, uma vez que, como verificado em 2.1.72,  $\ell_{\mathbb{K}}^\infty(I)$  não é separável, concluímos que o dual  $\mathcal{L}(\ell_{\mathbb{K}}^1(I); \mathbb{K})$  também não é separável.  $\square$

Os resultados de dualidade que examinámos de 2.3.53 a 2.3.55 podem ser também obtidos, com demonstrações mais cuidadosas, na situação mais geral em que, em vez de  $\mathbb{K}$  temos dois espaços vetoriais normados  $E$  e  $F$  e uma aplicação bilinear contínua  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  no papel da multiplicação.



**2.3.60 (Generalização de 2.3.53)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $p > 1$  e  $q > 1$  dois expoentes conjugados (cf. 2.3.40) e  $I$  um conjunto não vazio. Podemos então considerar uma aplicação bilinear contínua

$$\Gamma: \ell_E^p(I) \times \ell_F^q(I) \rightarrow \mathbb{K},$$

definida por

$$\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \gamma(x_i, y_i),$$

que verifica a condição

$$|\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})| \leq \|\gamma\| \| (x_i)_{i \in I} \|_p \| (y_i)_{i \in I} \|_q.$$

**Dem:** Dados  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  e  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_F^q(I)$ , tem-se, pela desigualdade de Hölder em 2.3.41,

$$\sum_{i \in I} |\gamma(x_i, y_i)| \leq \sum_{i \in I} \|\gamma\| \|x_i\| \|y_i\| \leq \|\gamma\| \| (x_i)_{i \in I} \|_p \| (y_i)_{i \in I} \|_q < +\infty,$$

o que implica que a família dos escalares  $\gamma(x_i, y_i)$  é absolutamente somável, e portanto somável. Fica assim bem definida a aplicação

$$\Gamma: \ell_E^p(I) \times \ell_F^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$$

que se verifica facilmente ser bilinear. Tem-se enfim

$$\begin{aligned} |\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I})| &= \left| \sum_{i \in I} \gamma(x_i, y_i) \right| \leq \sum_{i \in I} |\gamma(x_i, y_i)| \leq \\ &\leq \|\gamma\| \| (x_i)_{i \in I} \|_p \| (y_i)_{i \in I} \|_q, \end{aligned}$$

o que implica, em particular, que a aplicação bilinear  $\Gamma$  é contínua.  $\square$

**2.3.61 (O correspondente a 2.3.54)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua dualizante na primeira variável (cf. 2.2.26). Sejam  $p > 1$  e  $q > 1$  dois expoentes conjugados (cf. 2.3.40) e  $I$  um conjunto não vazio. Tem-se então que a correspondente aplicação bilinear contínua

$$\Gamma: \ell_E^p(I) \times \ell_F^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \gamma(x_i, y_i)$$

é também dualizante na primeira variável.

**Dem:** Para maior clareza, vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

1) Começemos por verificar que, na notação de 2.2.26, a aplicação linear

contínua

$$\widehat{\Gamma}: \ell_E^p(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_F^q(I); \mathbb{K})$$

é injetiva.

**Subdem:** Seja  $(x_i)_{i \in I} \neq 0 \in \ell_E^p(I)$ . Considerando um índice  $i_0$  tal que  $x_{i_0} \neq 0 \in E$ , o facto de  $\widehat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  ser injetiva implica que  $\widehat{\gamma}(x_{i_0}) \neq 0$  e portanto a existência de  $y \in F$  tal que  $\gamma(x_{i_0}, y) = \widehat{\gamma}(x_{i_0})(y) \neq 0$ . Considerando então, com a notação referida em 2.3.49, o elemento  $(y)_{i \in \{i_0\}}$  de  $\ell_F^{q, \text{in}}(I) \subset \ell_F^q(I)$ , que a  $i_0$  associa  $y$  e tem as outras coordenadas iguais a 0, vem

$$\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y)_{i \in \{i_0\}}) = \Gamma((x_i)_{i \in I}, (y)_{i \in \{i_0\}}) = \gamma(x_{i_0}, y) \neq 0$$

e portanto  $\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I}) \neq 0$ .

2) Com o objetivo de mostrar que a aplicação linear  $\widehat{\Gamma}: \ell_E^p(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_F^q(I); \mathbb{K})$  é também sobrejetiva vamos nas próximas alíneas considerar um elemento fixado  $\lambda \in \mathcal{L}(\ell_F^q(I); \mathbb{K})$ , tentando então encontrar  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  tal que  $\lambda = \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})$ , necessariamente único, e tentaremos relacionar  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p$  com  $\|\lambda\|$  de modo a provar a continuidade da aplicação linear inversa

$$\widehat{\Gamma}^{-1}: \mathcal{L}(\ell_F^q(I); \mathbb{K}) \rightarrow \ell_E^p(I),$$

que é precisamente o que se pretende provar.

3) Uma vez que se está a supor que  $\widehat{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  é um isomorfismo topológico, vamos notar  $m = \|\widehat{\gamma}^{-1}\|$ . Para cada  $i_0 \in I$  tem lugar uma aplicação linear contínua  $\lambda_{i_0}: F \rightarrow \mathbb{K}$ ,

$$\lambda_{i_0}(y) = \lambda((y)_{i \in \{i_0\}})$$

para a qual se tem

$$|\lambda_{i_0}(y)| \leq \|\lambda\| \|(y)_{i \in \{i_0\}}\|_p = \|\lambda\| \|y\|$$

e portanto  $\|\lambda_{i_0}\| \leq \|\lambda\|$ , e definimos então  $x_{i_0} \in E$  por  $x_{i_0} = \widehat{\gamma}^{-1}(\lambda_{i_0})$ , verificando-se assim as condições

$$\|x_{i_0}\| \leq m \|\lambda_{i_0}\|, \quad \gamma(x_{i_0}, y) = \widehat{\gamma}(x_{i_0})(y) = \lambda_{i_0}(y) = \lambda((y)_{i \in \{i_0\}})$$

para cada  $y \in F$ . Tendo em conta a arbitrariedade de  $i_0 \in I$ , obtivemos assim uma família  $(x_i)_{i \in I}$  de vetores de  $E$  que verificaremos nas próximas alíneas ser o elemento de  $\ell_E^p(I)$  que, como referido em 2), estamos a procurar.

4) Vamos mostrar que se pode escolher para cada  $i_0 \in I$  um vetor  $y_{i_0} \in F$  verificando as condições

$$\|y_{i_0}\| = \|x_{i_0}\|^{p-1}, \quad \lambda_{i_0}(y_{i_0}) \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{i_0}(y_{i_0}) \geq \frac{1}{2} \|\lambda_{i_0}\| \|y_{i_0}\|.$$

**Subdem:** Se  $x_{i_0} = 0$  tomamos  $y_{i_0} = 0$ . Suponhamos então que  $x_{i_0} \neq 0$ , o que implica que  $\|\lambda_{i_0}\| > 0$ , em particular  $F \neq \{0\}$ . A caracterização de  $\|\lambda_{i_0}\|$  como supremo dos quocientes  $\frac{|\lambda_{i_0}(y)|}{\|y\|}$  com  $y \neq \{0\}$  em  $F$  permite-nos considerar  $y \neq 0$  em  $F$  tal que

$$\frac{|\lambda_{i_0}(y)|}{\|y\|} > \frac{1}{2}\|\lambda_{i_0}\|.$$

Notando agora  $y_{i_0} = cy \in F$ , onde

$$c = \frac{\overline{\lambda_{i_0}(y)} \|x_{i_0}\|^{p-1}}{\|y\| |\lambda_{i_0}(y)|} \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

vem

$$|c| = \frac{\|x_{i_0}\|^{p-1}}{\|y\|}$$

donde  $\|y_{i_0}\| = |c|\|y\| = \|x_{i_0}\|^{p-1} c$

$$\begin{aligned} \lambda_{i_0}(y_{i_0}) &= c\lambda_{i_0}(y) = \frac{\lambda_{i_0}(y) \overline{\lambda_{i_0}(y)} \|x_{i_0}\|^{p-1}}{\|y\| |\lambda_{i_0}(y)|} = \frac{|\lambda_{i_0}(y)| \|x_{i_0}\|^{p-1}}{\|y\|} > \\ &> \frac{1}{2} \|\lambda_{i_0}\| \|x_{i_0}\|^{p-1} = \frac{1}{2} \|\lambda_{i_0}\| \|y_{i_0}\|, \end{aligned}$$

em particular  $\lambda_{i_0}(y_{i_0}) \in \mathbb{R}$ .

**5)** Vamos agora mostrar que, para cada parte finita  $I_0 \subset I$ , tem-se

$$\sum_{i \in I_0} \|x_i\|^p \leq (2m\|\lambda\|)^p.$$

**Subdem:** Podemos afastar já o caso trivial em que o primeiro membro da desigualdade é 0. Tendo em conta o que verificámos em 3) e 4), e reparando que a primeira igualdade em 4) implica, por ser  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , que

$$\|y_i\|^q = \|x_i\|^{(p-1)q} = \|x_i\|^{pq(1-\frac{1}{p})} = \|x_i\|^p$$

vem então

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_0} \|x_i\|^p &= \sum_{i \in I_0} \|x_i\|^{p-1} \|x_i\| = \sum_{i \in I_0} \|y_i\| \|x_i\| \leq \sum_{i \in I_0} m\|\lambda_i\| \|y_i\| \leq \\ &\leq \sum_{i \in I_0} 2m\lambda_i(y_i) = \sum_{i \in I_0} 2m\lambda((y_i)_{j \in \{i\}}) = 2m\lambda\left(\sum_{i \in I_0} (y_i)_{j \in \{i\}}\right) = \\ &= 2m\lambda((y_i)_{i \in I_0}) \leq 2m\|\lambda\| \| (y_i)_{i \in I_0} \|_q = \\ &= 2m\|\lambda\| \left(\sum_{i \in I_0} \|y_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 2m\|\lambda\| \left(\sum_{i \in I_0} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

donde

$$\left(\sum_{i \in I_0} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i \in I_0} \|x_i\|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq 2m\|\lambda\|$$

e, elevando ambos os membros a  $p$ , obtemos a desigualdade pretendida.

6) Tendo em conta a arbitrariedade da parte finita  $I_0$  de  $I$ , deduzimos de 5) que  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  e que

$$\sum_{i \in I} \|x_i\|^p \leq (2m\|\lambda\|)^p,$$

desigualdade que implica que

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_p \leq 2m\|\lambda\|.$$

7) Vamos agora mostrar que o elemento  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  é o procurado, isto é, que se tem  $\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I}) = \lambda$ .

**Subdem:** Uma vez que ambos os membros são aplicações lineares contínuas  $\ell_F^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$ , para verificar que eles são iguais basta verificar que tomam os mesmos valores no subespaço vetorial denso  $\ell_F^{fin}(I)$  de  $\ell_F^q(I)$  (cf. 2.3.50). Consideremos então  $(y_i)_{i \in I} \in \ell_F^{fin}(I)$  arbitrário. Sendo  $I_0 \subset I$  uma parte finita tal que  $y_i = 0$  para cada  $i \notin I_0$ . Tem-se então

$$(y_i)_{i \in I} = \sum_{j \in I_0} (y_j)_{i \in \{j\}}$$

portanto, lembrando a caracterização dos  $x_i$  em 3),

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y_i)_{i \in I}) &= \sum_{j \in I_0} \widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y_j)_{i \in \{j\}}) = \\ &= \sum_{j \in I_0} \Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{i \in \{j\}}) = \\ &= \sum_{j \in I_0} \gamma(x_j, y_j) = \sum_{j \in I_0} \lambda_j(y_j) = \\ &= \sum_{j \in I_0} \lambda((y_j)_{i \in \{j\}}) = \lambda((y_i)_{i \in I}), \end{aligned}$$

como queríamos.

8) Terminámos em 7) a prova de que a aplicação linear contínua

$$\widehat{\Gamma}: \ell_E^p(I) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_F^q(I); \mathbb{K})$$

é um isomorfismo e notamos agora que a continuidade da aplicação linear inversa resulta de que, como verificámos em 6), dado  $\lambda \in \mathcal{L}(\ell_F^q(I); \mathbb{K})$ , o

elemento  $(x_i)_{i \in I}$  tal que  $\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I}) = \lambda$  verifica a desigualdade  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p \leq 2m\|\lambda\|$ .<sup>208</sup>  $\square$

**2.3.62 (Corolário — Reflexividade de  $\ell_E^p(I)$ )** Sejam  $1 < p < +\infty$ ,  $I$  um conjunto de índices não vazio e  $E$  um espaço de Banach reflexivo. Então o espaço de Banach  $\ell_E^p(I)$  é também reflexivo.

**Dem:** Sendo  $\mathbb{K}$  o corpo,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , considerado, sejam  $F$  um espaço de Banach e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua dualizante nas duas variáveis (por exemplo,  $F = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $\gamma$  a oposta da aplicação bilinear de avaliação, cf. 2.2.27 a)). Sendo  $q$  o expoente conjugado de  $p$ , resulta de aplicar 2.3.61 a  $\gamma$  e à sua oposta que podemos considerar uma aplicação bilinear contínua dualizante nas duas variáveis  $\Gamma: \ell_E^p(I) \times \ell_F^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$  e daqui resulta, por 2.2.31, que  $\ell_E^p(I)$  é reflexivo.  $\square$

## Exercícios

**Ex. 2.3.1** Mostrar que a família dos números reais  $(-1)^n \frac{1}{n}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , apesar de definir uma série convergente, não é somável.

**Ex. 2.3.2** Considerar, no espaço de Banach  $\mathbb{R}$ , a família  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $x_n = (-1)^n$ . Utilize-a para mostrar que, para a validade de 2.3.15, é necessário supor que  $(x_j)_{j \in J}$  é somável, não bastando portanto supor que o segundo membro da igualdade faz sentido.

**Ex. 2.3.3** Mostrar que, se  $(x_j)_{j \in J}$  é uma família de números reais, então esta família é somável se, e só se, é absolutamente somável. As famílias somáveis de números reais, indexadas em  $\mathbb{N}$ , vão ser portanto precisamente as que definem séries absolutamente convergentes. **Sugestão:** Considerar os subconjuntos  $J'$  e  $J''$  de  $J$ , constituídos pelos índices  $j$  tais que  $x_j \geq 0$  e por aqueles tais que  $x_j < 0$ , respectivamente.

**Ex. 2.3.4** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_j)_{j \in J}$  uma família absolutamente somável de vetores de  $E$ . Utilizar 2.3.20 para mostrar que, se substituirmos a norma de  $E$  por outra equivalente a família  $(x_j)_{j \in J}$  continua a ser absolutamente somável.

**Ex. 2.3.5** Se  $E$  é um espaço vetorial de dimensão finita, com qualquer das suas normas, mostrar que uma família  $(x_j)_{j \in J}$  de vetores de  $E$  é somável se, e só se, ela é absolutamente somável.<sup>209</sup> **Sugestão:** Começar por estudar o caso particular em que  $E = \mathbb{R}^n$ .

**Ex. 2.3.6 (Famílias somáveis e séries comutativamente convergentes)** Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma família de vetores de  $E$ , indexada nos naturais. Diz-se que a família define uma *série comutativamente convergente*, de soma  $x \in E$ , se, qualquer que seja a bijecção  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$  for convergente e de soma

<sup>208</sup>Essa continuidade também resultava do teorema de Banach da aplicação aberta (cf. 2.2.41).

<sup>209</sup>Para um contra-exemplo na dimensão infinita ver o exercício 2.5.21.

$x$  (definida, naturalmente, como o limite das somas parciais  $S_p = \sum_{n=1}^p x_{\varphi(n)}$ ).

**a)** Deduzir de 2.3.8 e 2.3.7 que, se a família  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  for somável, e de soma  $x$ , então ela define uma série comutativamente convergente e de soma  $x$ .

**b)** Mostrar, reciprocamente, que, se a família define uma série comutativamente convergente, então a família é somável.

**Sugestão:** Supor que a família não é somável. Utilizar 2.3.9 para construir recursivamente, para um certo  $\delta > 0$ , conjuntos finitos  $I_p \subset \mathbb{N}$ , onde  $p \in \mathbb{N}$ , disjuntos dois a dois e tais que  $\|\sum_{n \in I_p} x_n\| \geq \delta$ . Verificar que se pode encontrar uma bijecção  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que cada  $\varphi^{-1}(I_p)$  seja um conjunto de naturais consecutivos e deduzir que a correspondente série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$  não é convergente, por a correspondente sucessão das somas parciais não ser de Cauchy.

**Ex. 2.3.7** Calcular de dois modos distintos a soma de modo a deduzir que se tem

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{p-1}{2^p} = 1.$$

**Ex. 2.3.8** Seja  $E$  um espaço de Banach e seja  $(x_j)_{j \in J}$  uma família somável de vetores de  $E$ . Mostrar que existe uma parte contável (isto é, finita ou numerável)  $J'$  de  $J$  tal que, para cada  $j \notin J'$ ,  $x_j = 0$  (por outras palavras, só as famílias que são “essencialmente contáveis” é que podem ser somáveis). **Sugestão:** Considerar, para cada  $n$ , uma parte finita  $K_n$  de  $J$  tal que, para cada  $j \notin K_n$ ,  $\|x_j\| < \frac{1}{n}$ .

**Ex. 2.3.9** Mostrar que, para cada inteiro  $n \geq 1$ , o espaço vetorial  $\mathcal{M}_n$  das matrizes do tipo  $n \times n$  tem uma estrutura natural de álgebra associativa com elemento neutro e dizer quais os respectivos elementos invertíveis. Mostrar que esta álgebra é isomorfa a uma das álgebras apresentadas no texto. Aproveitar esse facto para mostrar a existência de uma norma sobre  $\mathcal{M}_n$  que torna esta álgebra uma álgebra de Banach.

**Ex. 2.3.10** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra associativa com elemento um, que notaremos  $1$ , e munida de uma norma, notada  $\| \cdot \|$ , para a qual seja contínua a aplicação bilinear  $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $(x, y) \mapsto xy$ .<sup>210</sup> Seja  $M \geq 0$  tal que  $\|xy\| \leq M\|x\|\|y\|$  quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{E}$ .

**a)** Considerando a álgebra normada  $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ , verificar que tem lugar uma aplicação linear  $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  que a cada  $x \in \mathcal{E}$  associa a aplicação linear  $\Phi(x): \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $\Phi(x)(y) = xy$ . Verificar ainda que a aplicação linear  $\Phi$  é um *morfismo unitário de álgebras*, no sentido que  $\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$  e  $\Phi(1) = Id_{\mathcal{E}}$ .

**b)** Reparando que  $\Phi(x)(1) = x$ , mostrar que  $\Phi$  é uma aplicação injetiva e que

$$\|\Phi(x)\| \leq M\|x\|, \quad \|x\| \leq \|1\|\|\Phi(x)\|.$$

Concluir, em particular, que  $\Phi$  é um isomorfismo topológico de  $\mathcal{E}$  sobre um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ .

**c)** Deduzir de b) que se pode definir sobre  $\mathcal{E}$  uma norma  $\| \cdot \|'$  equivalente à norma original  $\| \cdot \|$  e relativamente à qual  $\mathcal{E}$  é uma álgebra normada. Afastado o caso trivial

<sup>210</sup>Não temos necessariamente uma álgebra normada, uma vez que não estamos a exigir nenhuma das desigualdades  $\|1\| \leq 1$  e  $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ . Poderíamos dizer que  $\mathcal{E}$  é uma álgebra pre-normada mas não o faremos...

em que  $\mathcal{E} = \{0\}$ , verificar que a nova norma pode ser definida explicitamente por

$$\|x\|' = \sup_{y \neq 0} \frac{\|xy\|}{\|y\|}.$$

**Ex. 2.3.11** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach.

**a)** Mostrar que se pode definir uma aplicação contínua  $\exp: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  (a *aplicação exponencial*) pela igualdade

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

**b)** Mostrar que, se  $x, y \in \mathcal{E}$  são tais que  $xy = yx$ , então

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

**Sugestão:** Reparar que a fórmula do binómio de Newton para o desenvolvimento de  $(x + y)^n$  é válida pelo facto de  $x$  e  $y$  comutarem.

**c)** Verificar que  $\exp(0) = 1$  e que, para cada  $x \in \mathcal{E}$ ,  $\exp(x)$  é invertível e  $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$ .

**Ex. 2.3.12** Seja  $E$  um espaço de Banach e consideremos o espaço de Banach  $E \times E$ , com a norma produto

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

**a)** Mostrar que tem lugar uma aplicação linear contínua  $J: E \times E \rightarrow E \times E$ , definida por  $J(x, y) = (-y, x)$  e que se tem  $J \circ J = -Id_E$ .

**b)** Verificar que, considerando a aplicação exponencial  $\exp$  da álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E \times E; E \times E)$  (cf. o exercício 2.3.11), a aplicação linear contínua

$$\exp(J): E \times E \rightarrow E \times E$$

está definida por

$$\exp(J)(x) = \cos(1)x + \sin(1)J(x).$$

**Ex. 2.3.13 (Completação de uma álgebra normada)** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra normada, não necessariamente completa, cujo elemento um notamos 1, e seja  $\widehat{\mathcal{E}}$  um completado vetorial de  $\mathcal{E}$  definido pela aplicação linear  $\xi: \mathcal{E} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}$  (cf. 2.2.13).

**a)** Utilizar 2.2.16 para mostrar que existe em  $\widehat{\mathcal{E}}$  uma única estrutura de álgebra de Banach para a qual se tenha  $\xi(xy) = \xi(x)\xi(y)$  quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{E}$ , o elemento um desta álgebra sendo então  $\xi(1)$ . Verificar que se a álgebra  $\mathcal{E}$  for comutativa o mesmo acontece à álgebra  $\widehat{\mathcal{E}}$ . Verificar ainda que se  $x \in \mathcal{E}$  é invertível então  $\xi(x)$  é invertível em  $\widehat{\mathcal{E}}$  e com inverso  $\xi(x^{-1})$ .<sup>211</sup>

**b)** Deduzir de a) que, sendo  $\mathcal{E}_{inv}$  o conjunto dos elementos invertíveis de  $\mathcal{E}$ , é contínua a aplicação  $\text{inv}: \mathcal{E}_{inv} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $\text{inv}(x) = x^{-1}$ .<sup>212</sup>

<sup>211</sup>Não afirmamos, no entanto, que se  $\xi(x)$  for invertível em  $\widehat{\mathcal{E}}$ , o elemento  $x$  tenha que ser invertível em  $\mathcal{E}$ .

<sup>212</sup>Não afirmamos, no entanto, que  $\mathcal{E}_{inv}$  seja um aberto de  $\mathcal{E}$ , como acontece no caso em que  $\mathcal{E}$  é uma álgebra de Banach.

**Ex. 2.3.14** (Se  $0 < p < 1$ ,  $\|\cdot\|_p$  não é uma norma em  $\ell_{\mathbb{K}}^p(\{1, 2\})$ ). Seja  $0 < p < 1$ . Considerando a “norma”  $\|\cdot\|_p$  em  $\mathbb{K}^2 = \ell_{\mathbb{K}}^2(\{1, 2\})$ , determinar os valores  $\|(1, 0)\|_p$ ,  $\|(1, 0)\|_p$  e

$$\|(1, 1)\|_p = \|(1, 0) + (0, 1)\|_p$$

e concluir que a “norma” não é uma norma. Generalizar o raciocínio feito para mostrar que, se  $E$  é um espaço vetorial normado diferente de  $\{0\}$  e  $I$  um conjunto de índices com mais que um elemento, então  $\|\cdot\|_p$  não é uma norma em  $\ell_E^p(I)$ .

**Ex. 2.3.15** (O espaço de Banach  $c_{\mathbb{R}}$  não é reflexivo) Consideremos o espaço de Banach  $c_{\mathbb{R}} = c_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ , das  $\mathbb{N}$ -sucessões  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais que admitem limite, com a norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  (cf. 2.3.51).

a) Verificar que se pode definir uma aplicação linear contínua  $\lambda: c_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\|\lambda\| = 1$ , por

$$\lambda((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2^n} x_n.$$

**Sugestão:** Para cada  $n_0 \in \mathbb{N}$  determinar a imagem por  $\lambda$  da  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , com  $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty} = 1$ , definida por  $x_n = (-1)^n$  se  $n \leq n_0$  e  $x_n = 0$  se  $n > n_0$ .

b) Mostrar que não existe nenhuma  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $c_{\mathbb{R}}$  com  $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty} = 1$  e  $\lambda((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \pm 1$  e deduzir daqui, tendo em conta 2.2.21, que  $c_{\mathbb{R}}$  não é reflexivo.

**Ex. 2.3.16** (A norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  como limite das normas  $\|\cdot\|_p$ ) Sejam  $E$  um espaço vetorial normado  $I$  um conjunto de índices não vazio,  $1 \leq p_0 < +\infty$  e  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^{p_0}(I)$ . Lembrando 2.3.45 e 2.3.47, sabemos que  $(x_i)_{i \in I}$  pertence a  $\ell_E^{\infty}(I)$  e a cada  $\ell_E^p(I)$  com  $p \geq p_0$  e que a aplicação que a  $p$  associa  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p$  é decrescente e com valores maiores ou iguais a  $\|(x_i)_{i \in I}\|_{\infty}$ . Mostrar que se tem mesmo

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|(x_i)_{i \in I}\|_p. \quad 213$$

**Sugestão:** Tendo em conta os factos lembrados acima, basta mostrar que, sendo  $\delta > 0$  arbitrário, existe  $p_1 \geq p_0$  tal que, sempre que  $p \geq p_1$  se tenha

$$(1) \quad \|(x_i)_{i \in I}\|_p < \|(x_i)_{i \in I}\|_{\infty} + \delta.$$

Começar por mostrar a existência de uma parte finita  $I_0 \subset I$ , com  $n$  elementos, tal que  $\sum_{i \in I \setminus I_0} \|x_i\|^{p_0} < (\frac{\delta}{2})^{p_0}$ , donde

$$(2) \quad \|(x_i)_{i \in I \setminus I_0}\|_p \leq \|(x_i)_{i \in I \setminus I_0}\|_{p_0} < \frac{\delta}{2}$$

para cada  $p \geq p_0$ . Reparando na majoração

$$\|(x_i)_{i \in I_0}\|_p = \left( \sum_{i \in I_0} \|x_i\|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} \|(x_i)_{i \in I_0}\|_{p_0}$$

e no facto de se ter  $n^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$  quando  $p \rightarrow +\infty$  considerar  $p_1 \geq p_0$  tal que para cada  $p \geq p_1$  se tenha

<sup>213</sup>A conclusão deste exercício é talvez a primeira vez em que se torna plausível a razão da utilização da notação  $\|\cdot\|_{\infty}$  para a norma do supremo.



$$(3) \quad \|(x_i)_{i \in I_0}\|_p < \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty + \frac{\delta}{2}.$$

Para cada  $p \geq p_1$  deduzir (1) a partir de (2) e (3), por ser

$$(x_i)_{i \in I} = (x_i)_{i \in I \setminus I_0} + (x_i)_{i \in I_0}.$$

**Ex. 2.3.17 (Exemplo de forma bilinear isométrica generalizando 2.3.54)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação bilinear contínua isométrica na primeira variável (cf. o exercício 2.2.10). Sejam  $p > 1$  e  $q > 1$  dois expoentes conjugados. Verificar que a correspondente aplicação bilinear contínua

$$\Gamma: \ell_E^p(I) \times \ell_F^q(I) \rightarrow \mathbb{K},$$

definida por

$$\Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \gamma(x_i, y_i)$$

(cf. 2.3.60) também é isométrica na primeira variável, o que generaliza parte da conclusão de 2.3.54 no caso em que  $E = F = \mathbb{K}$  e  $\gamma$  é a multiplicação.

**Sugestão generosa:** Reparar que o que há a provar é que, para cada  $(x_i)_{i \in I} \in \ell_E^p(I)$  a correspondente aplicação linear contínua  $\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I}): \ell_F^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$  tem norma igual a  $\|(x_i)_{i \in I}\|_p$  e que, para isso, podemos afastar à partida o caso trivial em que  $(x_i)_{i \in I}$  é a família identicamente 0. Seguir então o seguinte caminho:

**1)** Reparar que a desigualdade  $\|\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})\| \leq \|(x_i)_{i \in I}\|_p$  resulta de 2.3.60 por ser  $\|\gamma\| \leq 1$  e que, para provar a igualdade basta então mostrar que, para  $0 < K < 1$  arbitrário, existe  $(y_i)_{i \in I}$  em  $\ell_F^q(I)$  não identicamente 0 tal que

$$|\widehat{\Gamma}((x_i)_{i \in I})((y_i)_{i \in I})| \geq K \|(x_i)_{i \in I}\|_p \|(y_i)_{i \in I}\|_q.$$

**2)** Verificar que se pode escolher para cada  $i \in I$  um vetor  $y_i \in F$  verificando as condições

$$\mathbf{a)} \ \|y_i\| = \|x_i\|^{p-1}; \quad \mathbf{b)} \ \gamma(x_i, y_i) \in \mathbb{R}; \quad \mathbf{c)} \ \gamma(x_i, y_i) \geq K \|x_i\| \|y_i\| = K \|x_i\|^p.$$

Para isso, depois de tratar o caso trivial em que  $x_i = 0$ , atender a que  $|\widehat{\gamma}(x_i)| = \|x_i\|$  para escolher  $y'_i \in F \setminus \{0\}$  tal que

$$\frac{|\widehat{\gamma}(x_i)(y'_i)|}{\|y'_i\|} > K \|x_i\|,$$

o que implica uma versão da desigualdade em c) com o primeiro membro substituído pelo seu módulo, seguidamente substituir  $y'_i$  por  $y''_i = \gamma(x_i, y'_i) y'_i$  de modo a obter b) e a desigualdade em c) já sem o módulo e, por fim, tomar  $y_i$  igual a  $y''_i$  multiplicado por um número positivo conveniente de modo a obter a) sem “estragar” b) e c).

**3)** Mostrar que  $p-1 = \frac{p}{q}$  e deduzir daqui e de 2)a) que  $\|y_i\|^q = \|x_i\|^p$  e, seguidamente, que  $\|(y_i)_{i \in I}\|_q = \|(x_i)_{i \in I}\|_p^{p-1}$ .

## §4. Teorema de Stone-Weierstrass.

O teorema de Weierstrass diz-nos que qualquer função contínua num intervalo compacto  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  é limite uniforme de uma sucessão de funções polinomiais. Examinamos aqui uma generalização desse resultado, devida a Stone, seguindo, para a sua demonstração a via que se encontra no livro de Lang [10]. Começamos com um lema que exhibe uma sucessão que converge para a função  $\sqrt{t}$  num intervalo do tipo  $[0, M]$ .

**2.4.1 (Lema)** Seja  $M > 0$  fixado. Seja, para cada inteiro  $n \geq 0$ ,  $P_n: [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$  a função polinomial definida recursivamente por

$$(1) \quad \begin{aligned} P_0(t) &= 0, \\ P_{n+1}(t) &= P_n(t) + \frac{1}{2\sqrt{M}}(t - P_n(t)^2). \end{aligned}$$

Tem-se então que  $P_n(t) \rightarrow \sqrt{t}$  uniformemente (cf. 1.2.81) e, para cada  $t \in [0, M]$  e  $n \geq 0$ ,

$$(2) \quad 0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}, \quad P_n(t) \leq P_{n+1}(t).$$

**Dem:** Uma vez que as desigualdades  $0 \leq P_0(t) \leq \sqrt{t}$  são triviais, para provar as desigualdades (2) basta provar, por indução em  $n$ , que para cada  $n \geq 1$  se verificam as desigualdades

$$(2') \quad 0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}, \quad P_{n-1}(t) \leq P_n(t).$$

Para  $n = 1$ , estas desigualdades resultam de se ter  $P_1(t) = \frac{t}{2\sqrt{M}}$ , donde, por ser  $\sqrt{t} \leq \sqrt{M}$ ,

$$0 \leq P_1(t) \leq \frac{t}{2\sqrt{M}} = \frac{\sqrt{t}}{2} \leq \sqrt{t}$$

Suponhamos as desigualdades (2') válidas para um certo  $n$ . Tem-se, pela hipótese de indução,  $P_n(t)^2 \leq t$ , donde  $t - P_n(t)^2 \geq 0$ , portanto  $P_{n+1}(t) \geq P_n(t)$ , em particular  $P_{n+1}(t) \geq 0$ , e, por outro lado,

$$0 \leq \sqrt{t} + P_n(t) \leq 2\sqrt{t} \leq 2\sqrt{M},$$

donde

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) &= P_n(t) + \frac{1}{2\sqrt{M}}(\sqrt{t} - P_n(t))(\sqrt{t} + P_n(t)) \leq \\ &\leq P_n(t) + (\sqrt{t} - P_n(t)) = \sqrt{t}, \end{aligned}$$

o que termina a demonstração por indução de (2').

Reparemos agora que, da igualdade já referida

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2\sqrt{M}}(\sqrt{t} - P_n(t))(\sqrt{t} + P_n(t))$$

podemos deduzir que, para cada  $n \geq 0$  e  $t \in [0, M]$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - P_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - P_n(t) - \frac{1}{2\sqrt{M}}(\sqrt{t} - P_n(t))(\sqrt{t} + P_n(t)) = \\ &= (\sqrt{t} - P_n(t)) \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{M}}(\sqrt{t} + P_n(t))\right) \leq \\ &\leq (\sqrt{t} - P_n(t)) \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{M}}\sqrt{t}\right). \end{aligned}$$

Se repararmos que

$$\sqrt{t} - P_0(t) = \sqrt{t} \leq \sqrt{M}$$

concluimos, por indução em  $n$ , que, para cada  $n \geq 0$  e  $t \in [0, M]$ ,

$$(3) \quad \sqrt{t} - P_n(t) \leq \sqrt{M} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{M}}\sqrt{t}\right)^n.$$

Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Podemos considerar  $\delta' = \min(\delta, 2\sqrt{M})$  e o facto de se ter

$$\sqrt{M} \left(1 - \frac{\delta'}{2\sqrt{M}}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

implica a existência de  $n_0$  tal que, para cada  $n \geq n_0$ ,

$$(4) \quad \sqrt{M} \left(1 - \frac{\delta'}{2\sqrt{M}}\right)^n < \delta.$$

Para cada  $n \geq n_0$ , tem-se então, para todo o  $t \in [0, M]$ ,

$$|\sqrt{t} - P_n(t)| = \sqrt{t} - P_n(t) < \delta,$$

visto que esta desigualdade é trivial se  $\sqrt{t} < \delta$  e, no caso em que  $\sqrt{t} \geq \delta$ , ela resulta de se ter

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{M}}\sqrt{t} \leq 1 - \frac{\delta}{2\sqrt{M}} \leq 1 - \frac{\delta'}{2\sqrt{M}},$$

portanto, por (3) e (4),

$$\sqrt{t} - P_n(t) \leq \sqrt{M} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{M}}\sqrt{t}\right)^n \leq \sqrt{M} \left(1 - \frac{\delta'}{2\sqrt{M}}\right)^n < \delta.$$

Ficou assim provado que a sucessão  $P_n(t)$  converge uniformemente para  $\sqrt{t}$  em  $[0, M]$ .  $\square$

**2.4.2 (Teorema de Stone-Weierstrass)** Seja  $X$  um espaço topológico compacto não vazio e consideremos a álgebra de Banach  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , das aplicações contínuas  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  com a norma  $\| \cdot \|_\infty$ , definida por  $\|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|$ , cuja topologia associada sabemos ser a da convergência uniforme (cf. 2.3.32). Seja  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  um subconjunto que verifica as seguintes condições:

- 1)  $\mathcal{D}$  é subespaço vetorial e, se  $f, g \in \mathcal{D}$ , então  $f \times g \in \mathcal{D}$  (por outras palavras,  $\mathcal{D}$  é uma subálgebra de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ );
- 2) Tem-se  $1 \in \mathcal{D}$ , onde estamos a notar 1 a função de valor constante 1;
- 3)  $\mathcal{D}$  separa os pontos de  $X$ , no sentido que, quaisquer que sejam  $x_0 \neq x_1$  em  $X$ , existe  $f \in \mathcal{D}$  tal que  $f(x_0) \neq f(x_1)$ .

Tem-se então que  $\mathcal{D}$  é um subconjunto denso de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

**Dem:**<sup>214</sup> Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

**a)** Notemos  $\mathcal{E}$  a aderência de  $\mathcal{D}$  no espaço de Banach  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . O nosso objectivo é assim provar que  $\mathcal{E} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ .

**b)** Reparemos que, por  $\mathcal{D}$  ser um subespaço vetorial que contém a função de valor constante 1, qualquer função constante de domínio  $X$  vai pertencer a  $\mathcal{D}$ , e portanto a  $\mathcal{E}$ .

**c)** Já mostrámos em 2.1.27 que  $\mathcal{E}$ , sendo a aderência de um subespaço vetorial é também um subespaço vetorial. Vamos verificar, com um argumento análogo, que  $\mathcal{E}$  é mesmo uma subálgebra, isto é, que, se  $f, g \in \mathcal{E}$  então  $f \times g \in \mathcal{E}$ .

**Subdem:** Considerando a aplicação bilinear contínua

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \quad (f, g) \mapsto f \times g,$$

vemos que o conjunto  $\mathcal{A}$  dos  $(f, g) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  tais que  $f \times g \in \mathcal{E}$  é um fechado de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  que contém  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$  pelo que contém a sua aderência que é igual a  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$  (cf. 1.5.23).

**d)** Vamos agora verificar que, se  $f \in \mathcal{E}$  e, para cada  $x \in X$ ,  $f(x) \geq 0$ , então, notando  $\sqrt{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$  a função contínua definida por  $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ , tem-se também  $\sqrt{f} \in \mathcal{E}$ .

**Subdem:** Uma vez que  $\mathcal{E}$  é fechado, bastará mostrarmos que  $\sqrt{f}$  é aderente

<sup>214</sup>cf. Lang [10].

a  $\mathcal{E}$ . Seja então  $\delta > 0$  arbitrário e fixemos  $M > 0$  maior ou igual ao máximo de  $f(x)$ , com  $x \in X$ . Tendo em conta o lema 2.4.1, podemos considerar uma aplicação polinomial  $g: [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cada  $y \in [0, M]$ ,  $|\sqrt{y} - g(y)| < \delta$ . Em particular, considerando a aplicação contínua  $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se  $|\sqrt{f(x)} - g(f(x))| < \delta$ , para cada  $x \in X$ , donde  $\|\sqrt{f} - g \circ f\|_\infty < \delta$ . Mas, sendo  $g(y) = a_0 y^p + a_1 y^{p-1} + \dots + a_{p-1} y + a_p$ , vem

$$g(f(x)) = a_0 f(x)^p + a_1 f(x)^{p-1} + \dots + a_{p-1} f(x) + a_p,$$

pelo que, por  $\mathcal{E}$  ser uma subálgebra que contém as funções constantes, tem-se  $g \circ f \in \mathcal{E}$ . Ficou assim provado que  $\sqrt{f}$  é aderente a  $\mathcal{E}$ , como queríamos.

e) Vamos agora verificar que, se  $f, g \in \mathcal{E}$ , então também pertencem a  $\mathcal{E}$  as funções contínuas  $\max(f, g), \min(f, g): X \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas respectivamente por

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)), \quad \min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Resultará então daqui que, dados  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{E}$ , também pertencem a  $\mathcal{E}$  as funções  $\max(f_1, \dots, f_n), \min(f_1, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas respectivamente por

$$\begin{aligned} \max(f_1, \dots, f_n)(x) &= \max(f_1(x), \dots, f_n(x)), \\ \min(f_1, \dots, f_n)(x) &= \min(f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{aligned}$$

**Subdem:** Começemos por reparar que, se  $f \in \mathcal{E}$ , então também pertence a  $\mathcal{E}$  a função  $|f|: X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $|f|(x) = |f(x)|$ , o que resulta do que vimos em c) e d), tendo em conta a caracterização  $|f(x)| = \sqrt{f(x)^2}$ . Basta agora termos em conta as caracterizações

$$\begin{aligned} \max(f(x), g(x)) &= \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \\ \min(f(x), g(x)) &= \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \end{aligned}$$

cuja justificação se reduz a examinar o que se passa em cada um dos casos  $f(x) \leq g(x)$  e  $g(x) \leq f(x)$ .

f) Sejam  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  e  $x_0, x_1 \in X$ . Existe então  $g \in \mathcal{E}$  com  $g(x_0) = f(x_0)$  e  $g(x_1) = f(x_1)$ .

**Subdem:** No caso em que  $x_0 = x_1$ , basta tomar para  $g$  a função de valor constante  $f(x_0)$ , que pertence a  $\mathcal{D}$ , e portanto a  $\mathcal{E}$ . Suponhamos então que  $x_0 \neq x_1$ . Por hipótese, existe uma função  $h \in \mathcal{D} \subset \mathcal{E}$  tal que  $h(x_0) \neq h(x_1)$  e basta então tomar para  $g$  a aplicação definida por

$$g(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h(x_1) - h(x_0)} (h(x) - h(x_0)).$$

g) Sejam  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ,  $x_0 \in X$  e  $\delta > 0$ . Vamos mostrar a existência de uma

aplicação  $g \in \mathcal{E}$  tal que  $g(x_0) = f(x_0)$  e, para cada  $x \in X$ ,  $g(x) < f(x) + \delta$ .

**Subdem:** Tendo em conta o que vimos em f), podemos, para cada  $y \in X$ , considerar uma aplicação  $g_y \in \mathcal{E}$  tal que  $g_y(x_0) = f(x_0)$  e  $g_y(y) = f(y)$ , assim como o aberto de  $X$

$$U_y = \{x \in X \mid g_y(x) < f(x) + \delta\},$$

para o qual se tem portanto  $y \in U_y$ . Tendo em conta o facto de  $X$  ser compacto, podemos considerar pontos  $y_1, \dots, y_p \in X$  tais que

$$X = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_p}.$$

Tendo em conta o que vimos em e), podemos agora considerar  $g \in \mathcal{E}$  definido por

$$g(x) = \min(g_{y_1}(x), g_{y_2}(x), \dots, g_{y_p}(x)),$$

tendo-se  $g(x_0) = f(x_0)$  e, para cada  $x \in X$ , escolhendo  $j$  tal que  $x \in U_{y_j}$ ,

$$g(x) \leq g_{y_j}(x) < f(x) + \delta.$$

**h)** Seja  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  arbitrário. Vamos verificar que, para cada  $\delta > 0$ , existe  $h \in \mathcal{E}$  tal que, para todo o  $x \in X$ ,  $|f(x) - h(x)| < \delta$ . Se o fizermos, ficará provado que  $f$  é aderente a  $\mathcal{E}$  e portanto, como  $\mathcal{E}$  é fechado,  $f \in \mathcal{E}$ , o que terminará a demonstração.

**Subdem:** Tendo em conta o que vimos em g), podemos, para cada  $x_0 \in X$ , considerar um elemento  $h_{x_0} \in \mathcal{E}$  tal que  $h_{x_0}(x_0) = f(x_0)$  e, para cada  $x \in X$ ,  $h_{x_0}(x) < f(x) + \delta$ , assim como o aberto de  $X$ ,

$$V_{x_0} = \{x \in X \mid h_{x_0}(x) > f(x) - \delta\},$$

para o qual se tem portanto  $x_0 \in V_{x_0}$ . Tendo em conta o facto de  $X$  ser compacto, podemos considerar pontos  $x_1, \dots, x_q \in X$  tais que

$$X = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_q}.$$

Tendo em conta o que vimos em e), podemos agora considerar  $h \in \mathcal{E}$  definido por

$$h(x) = \max(h_{x_1}(x), h_{x_2}(x), \dots, h_{x_q}(x)),$$

tendo-se, para cada  $x \in X$ ,  $h(x) < f(x) + \delta$  e, escolhendo  $j$  tal que  $x \in V_{x_j}$ ,

$$h(x) \geq h_{x_j}(x) > f(x) - \delta,$$

donde, finalmente,  $|f(x) - h(x)| < \delta$ . □

**2.4.3 (Corolário — Teorema de Weierstrass)** Sejam  $K \subset \mathbb{R}$  um conjunto compacto e  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua. Para cada  $\delta > 0$  existe então uma aplicação polinomial  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo o  $x \in K$ ,  $|f(x) - P(x)| < \delta$ .

**Dem:** Afastando já o caso trivial em que  $K = \emptyset$ , trata-se de uma consequência directa do teorema de Stone-Weierstrass (cf. 2.4.2), se repararmos que o conjunto das restrições a  $K$  das funções polinomiais  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma subálgebra de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  que contém a função constante 1 e separa os pontos de  $K$ , uma vez que, se  $x_0 \neq x_1$  em  $K$ , a função polinomial  $P(x) = x$  verifica  $P(x_0) \neq P(x_1)$ .  $\square$

**2.4.4 (Teorema de Stone-Weierstrass complexo)** Seja  $X$  um espaço topológico compacto não vazio e consideremos a álgebra de Banach  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ , das aplicações contínuas  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ , a norma  $\|f\|_\infty$ , definida por

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|,$$

cuja topologia associada sabemos ser a da convergência uniforme. Seja  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  um subconjunto que verifica as seguintes condições:

- 1)  $\mathcal{D}$  é subespaço vetorial complexo e, se  $f, g \in \mathcal{D}$ , então  $f + g \in \mathcal{D}$  (por outras palavras,  $\mathcal{D}$  é uma subálgebra complexa de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ );
- 2) Tem-se  $1 \in \mathcal{D}$ , onde estamos a notar 1 a função de valor constante 1;
- 3)  $\mathcal{D}$  separa os pontos de  $X$ , no sentido que, quaisquer que sejam  $x_0 \neq x_1$  em  $X$ , existe  $f \in \mathcal{D}$  tal que  $f(x_0) \neq f(x_1)$ .
- 4) Para cada  $f \in \mathcal{D}$ , tem-se  $\overline{f} \in \mathcal{D}$ , onde  $\overline{f}: X \rightarrow \mathbb{C}$  está definida por  $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ .

Tem-se então que  $\mathcal{D}$  é um subconjunto denso de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ .

**Dem:** Notemos  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  o conjunto dos  $f \in \mathcal{D}$  tais que  $f(X) \subset \mathbb{R}$ , que constitui trivialmente uma subálgebra real de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  que contém a função de valor constante 1. Mostremos que  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  separa os pontos de  $X$ . Ora, se  $x_0 \neq x_1$ , podemos considerar  $f \in \mathcal{D}$  tal que  $f(x_0) \neq f(x_1)$  e portanto, sendo  $g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$  as aplicações contínuas definidas por  $f(x) = g(x) + h(x)i$ , tem-se  $g(x_0) \neq g(x_1)$  ou  $h(x_0) \neq h(x_1)$ . O facto de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  separar os pontos de  $X$  ficará assim justificado se verificarmos que se tem  $g, h \in \mathcal{D}$ , e isso resulta de se ter

$$g(x) = \frac{f(x) + \overline{f}(x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - \overline{f}(x)}{2i}.$$

Podemos então aplicar o teorema de Stone-Weierstrass (cf. 2.4.2) para deduzir que  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  é um subconjunto denso de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ . Seja agora  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  arbitrário e consideremos  $g, h$  em  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  definidos por  $f(x) = g(x) + h(x)i$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar  $\widehat{g}, \widehat{h} \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  tais que  $\|\widehat{g} - g\|_\infty < \frac{\delta}{2}$  e  $\|\widehat{h} - h\|_\infty < \frac{\delta}{2}$  em  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , tendo-se então  $\widehat{f} = \widehat{g} + i\widehat{h} \in \mathcal{D}$  e, para cada  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(x) - f(x)| &= \sqrt{(\widehat{g}(x) - g(x))^2 + (\widehat{h}(x) - h(x))^2} < \\ &< \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4}} < \delta, \end{aligned}$$

donde  $\|\widehat{f} - f\|_\infty < \delta$ , o que mostra que  $\mathcal{D}$  é efectivamente denso em  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ .  $\square$

**2.4.5 (Corolário)** Seja  $S \subset \mathbb{C}$  o conjunto dos complexos de módulo 1 e seja, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f_n: S \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação contínua definida por  $f_n(z) = z^n$ . Seja  $\mathcal{D}$  o subespaço vetorial complexo de  $\mathcal{C}(S, \mathbb{C})$  gerado pelas funções  $f_n$ , isto é, o conjunto das funções  $f$  da forma  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n f_n$ , com  $a_n \in \mathbb{C}$  e  $a_n = 0$ , salvo para um número finito de valores de  $n$ . Tem-se então que  $\mathcal{D}$  é denso em  $\mathcal{C}(S, \mathbb{C})$ .

**Dem:** O facto de se ter  $f_m \times f_n = f_{m+n}$  implica facilmente que o subespaço vetorial  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{C}(S, \mathbb{C})$  é mesmo uma subálgebra. Tem-se  $1 = f_0 \in \mathcal{D}$ , e reparando que  $f_1(z) = z$ , concluímos que  $\mathcal{D}$  separa os pontos de  $S$ . Para além disso, o facto de se ter  $z^{-n} = \overline{z^n}$ , para cada  $z \in S$ , ou seja  $f_{-n} = \overline{f_n}$ , implica facilmente que, se  $f \in \mathcal{D}$ , então  $\overline{f} \in \mathcal{D}$ . Podemos assim aplicar o teorema de Stone-Weierstrass complexo (cf. 2.4.4) para concluir que  $\mathcal{D}$  é um subconjunto denso em  $\mathcal{C}(S, \mathbb{C})$ .  $\square$

Nos corolários a seguir vamos supor que o leitor conhece a definição e as propriedades básicas da exponencial de um número complexo, em particular a fórmula de Euler que a relaciona com as funções trigonométricas. Estes assuntos serão examinados no capítulo 3 adiante, em 3.6.15.

**2.4.6 (Corolário)** Seja, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $g_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação contínua definida por

$$g_n(x) = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx),$$

para a qual se tem trivialmente  $g_n(0) = g_n(2\pi) = 1$ . Para cada função contínua  $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $h(0) = h(2\pi)$ , e cada  $\delta > 0$ , existe então uma função  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , da forma  $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n g_n(x)$ , com  $b_n \in \mathbb{C}$  e  $b_n = 0$

salvo para um número finito de índices  $n$ , tal que, para todo  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $|h(x) - g(x)| < \delta$ .

**Dem:** Lembremos que todo o elemento de  $S$  é da forma  $e^{ix}$ , para um único  $x \in [0, 2\pi[$ . Podemos assim definir uma aplicação  $\widehat{h}: S \rightarrow \mathbb{C}$  pela condição de se ter  $\widehat{h}(e^{ix}) = h(x)$ , para cada  $x \in [0, 2\pi[$  e o facto de se ter  $h(0) = h(2\pi)$  implica que a igualdade anterior é ainda válida para todo o  $x \in [0, 2\pi]$ . Tendo em conta 1.11.6 e a alínea b) de 1.11.5, a aplicação  $[0, 2\pi] \rightarrow S$ ,  $x \mapsto e^{ix}$ , é finalizante e daqui resulta que a aplicação  $\widehat{h}: S \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua. Podemos assim aplicar 2.4.5 para garantir a existência de constantes  $b_n \in \mathbb{C}$ , com  $b_n = 0$  salvo para um número finito de índices  $n$ , tais que, para todo o  $z \in S$ ,  $|\widehat{h}(z) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n| < \delta$ . Reparando que



$(e^{ix})^n = e^{inx} = g_n(x)$ , vemos que, para cada  $x \in [0, 2\pi]$ ,

$$|h(x) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n g_n(x)| = |\widehat{h}(e^{ix}) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (e^{ix})^n| < \delta. \quad \square$$

**2.4.7 (Corolário)** Seja  $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação contínua com  $h(0) = h(2\pi)$ . Para cada  $\delta > 0$ , existem então constantes  $b_0 \in \mathbb{C}$  e, para cada inteiro  $n \geq 1$ ,  $c_n, d_n \in \mathbb{C}$ , com  $c_n = d_n = 0$  salvo para um número finito de índices  $n$ , tais que, para cada  $x \in [0, 2\pi]$ ,

$$|h(x) - b_0 - \sum_{n \geq 1} (c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx))| < \delta.$$

**Dem:** Trata-se de uma consequência directa do corolário precedente, se repararmos que as funções  $g_n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , verificam  $g_0(x) = 1$ , e, para  $n \geq 1$ ,

$$g_n(x) = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad g_{-n}(x) = \cos(nx) - i \sin(nx). \quad \square$$

**2.4.8 (Corolário)** Nas condições do corolário precedente, se  $h([0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}$ , as constantes  $b_0, c_n$  e  $d_n$  podem ser escolhidas em  $\mathbb{R}$ .

**Dem:** Basta atender a que o módulo da parte real de um número complexo é menor ou igual ao módulo desse número complexo e a que, se  $b_0, c_n, d_n \in \mathbb{C}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \Re \left( h(x) - b_0 - \sum_{n \geq 1} (c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)) \right) &= \\ &= h(x) - b'_0 - \sum_{n \geq 1} (c'_n \cos(nx) + d'_n \sin(nx)), \end{aligned}$$

onde  $b'_0 = \Re(b_0)$ ,  $c'_n = \Re(c_n)$  e  $d'_n = \Re(d_n)$ . □

## Exercícios

**Ex. 2.4.1** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos compactos e de Hausdorff e seja  $\mathcal{D}$  o conjunto das funções contínuas  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  tais que exista um conjunto finito  $J$  e, para cada  $j \in J$ , funções contínuas  $g_j: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_j: Y \rightarrow \mathbb{R}$ , com

$$f(x, y) = \sum_{j \in J} g_j(x) h_j(y),$$

para cada  $(x, y) \in X \times Y$ . Mostrar que, para cada aplicação contínua  $\varphi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  e cada  $\delta > 0$ , existe uma função  $f \in \mathcal{D}$  tal que, para todo o  $(x, y) \in X \times Y$ ,

$$|\varphi(x, y) - f(x, y)| < \delta.$$

**Sugestão:** Verificar que  $\mathcal{D}$  é uma álgebra de funções contínuas em  $X \times Y$ , que

verifica as hipóteses do teorema de Stone-Weierstrass (2.4.2). Para isso, convirá lembrar que  $X$  e  $Y$  são normais (cf. 1.9.3) e ter em conta o teorema de Urysohn (cf. 1.9.6).

**Ex. 2.4.2 (Teorema de Weierstrass com domínio vetorial)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Vamos dizer que uma aplicação  $f: E \rightarrow F$  é um *polinómio homogéneo de grau 0* se for constante e que é um *polinómio homogéneo de grau  $k > 0$*  se existir uma aplicação  $k$ -linear  $\xi: E \times \cdots \times E \rightarrow F$  ( $k$  factores) tal que  $f(x) = \xi(x, \dots, x)$ .<sup>215</sup> Em particular os polinómios homogéneos de grau 1 são simplesmente as aplicações lineares  $E \rightarrow F$ .

**a)** Verificar que o conjunto  $\text{Pol}_k(E, F)$  dos polinómios homogéneos  $f: E \rightarrow F$ , de grau  $k$ , é um subespaço vetorial do espaço vetorial de todas as funções contínuas  $f: E \rightarrow F$  e que, se  $f \in \text{Pol}_k(E; F)$ , então  $f$  é homogénea de grau  $k$ , no sentido de se ter  $f(tx) = t^k f(x)$ , para cada  $t \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$  (tomamos, por convenção,  $0^0 = 1$ ).

**b)** Verificar que, no caso em que  $E = \mathbb{K}$ , os polinómios homogéneos de grau  $k$ ,  $f: \mathbb{K} \rightarrow F$  são as funções do tipo  $f(t) = t^k y$ , com  $y \in F$ . O que serão os polinómios homogéneos de grau  $k$ ,  $f: \mathbb{K}^2 \rightarrow F$ ?

**c)** Tomando agora para  $F$  o próprio  $\mathbb{K}$ , verificar que, se  $f: E \rightarrow \mathbb{K}$  é um polinómio homogéneo de grau  $p$  e  $g: E \rightarrow \mathbb{K}$  é um polinómio homogéneo de grau  $q$ , então o produto  $f \times g: E \rightarrow \mathbb{K}$  é um polinómio homogéneo de grau  $p + q$ .

**d)** Verificar que os subespaços vetoriais  $\text{Pol}_k(E; F)$  estão em soma directa, isto é que, se  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = 0$ , com  $f_k = 0$ , salvo para um número finito de valores de  $k$ , então tem-se

necessariamente  $f_k = 0$ , para todo o  $k$ . Notaremos  $\text{Pol}(E; F)$  o subespaço vetorial soma directa dos  $\text{Pol}_k(E; F)$ , cujos elementos serão chamados de polinómios.

**Sugestão:** Mostrar que se tem  $f_k = 0$  por indução completa em  $k$ , reparando que, se  $p > k$ , tem-se, para cada  $x \in E$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_p(tx)}{t^k} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_k(tx)}{t^k} = f_k(x).$$

**e)** Utilizar o teorema de Stone-Weierstrass (cf. 2.4.2) para mostrar que, se  $E$  é um espaço vetorial real de dimensão finita, então, para cada compacto não vazio  $K \subset E$ , o conjunto das restrições a  $K$  dos polinómios  $f \in \text{Pol}(E, \mathbb{R})$  é denso no espaço vetorial  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ , com a norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ . **Sugestão:** Fixada uma base de  $E$ , as funções lineares coordenadas nessa base já separam os pontos de  $K$ .

**Ex. 2.4.3** Seja  $E$  um espaço vetorial real de dimensão finita e lembremos que um conjunto  $A \subset E$  se diz *simétrico* se, para cada  $x \in A$ , tem-se também  $-x \in A$  e que, se  $A \subset E$  é simétrico, uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  (ou, mais geralmente, com valores noutra espaço vetorial) diz-se *par* se se tem  $f(-x) = f(x)$ , para cada  $x \in A$ .

**a)** Mostrar que, se  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinómio homogéneo de grau  $k$  par, então  $f$  é uma função par e que, consequentemente, notando  $\text{Pol}_+(E, \mathbb{R})$  o subespaço vetorial soma directa dos  $\text{Pol}_k(E, \mathbb{R})$ , com  $k$  par, os elementos de  $\text{Pol}_+(E, \mathbb{R})$  são funções pares.

**b)** Sejam  $A \subset E$  um conjunto compacto simétrico e  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua e par. Mostrar que, para cada  $\delta > 0$ , existe  $f \in \text{Pol}_+(E, \mathbb{R})$  tal que, para cada  $x \in A$ ,  $|\varphi(x) - f(x)| < \delta$ .

<sup>215</sup>Ver o exercício 3.3.12 adiante, para uma generalização em que  $E$  e  $F$  estão munidos de normas mas podem ter dimensão infinita.

**Sugestão:** Para utilizar o teorema de Stone-Weierstrass, considerar em  $E$  a relação de equivalência definida por  $x \sim y$  se, e só se,  $x = y$  ou  $x = -y$  e, no conjunto  $E'$ , das classes de equivalência  $[x]$ , a topologia final. Sendo  $A' \subset E'$  o conjunto compacto das classes de equivalência  $[x]$ , com  $x \in A$ , utilizar o teorema de Stone-Weierstrass para aproximar a aplicação contínua  $\widehat{\varphi}: A' \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\widehat{\varphi}([x]) = \varphi(x)$  por funções  $\widehat{f}$  obtidas analogamente a partir das funções  $f \in \text{Pol}_+(E, \mathbb{R})$ . Reparar que, fixada uma base de  $E$ , os quadrados das funções coordenadas e os quadrados das somas de duas funções coordenadas, depois de transformados em funções em  $A'$ , já separam os pontos de  $A'$ . Um método alternativo mais directo consiste em reparar que, se  $\widehat{f} \in \text{Pol}(E, \mathbb{R})$  aproxima a função par  $\varphi$  uniformemente em  $A$ , então, pondo  $f(x) = \frac{1}{2}(\widehat{f}(x) + \widehat{f}(-x))$ ,  $f$  também aproxima  $\varphi$  e pertence a  $\text{Pol}_+(E, \mathbb{R})$ .

## §5. Espaços pre-hilbertianos e espaços de Hilbert.

**2.5.1** Recordemos que, dado um número complexo  $a \in \mathbb{C}$ , nota-se  $\bar{a}$  o seu *conjugado*, isto é, o número complexo que tem a mesma parte real e tem parte imaginária simétrica. É claro que um número complexo é real se, e só se, coincide com o seu conjugado. Relembremos que a operação de conjugação goza das seguintes propriedades:

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a}\bar{b}.$$

Além disso, para cada complexo  $a$ , tem-se  $a\bar{a} = |a|^2$ , em particular  $a\bar{a}$  é sempre real e maior ou igual a 0, e a parte real e o coeficiente da parte imaginária de  $a$  são dados respetivamente por

$$\Re(a) = \frac{a + \bar{a}}{2}, \quad \Im(a) = \frac{a - \bar{a}}{2i}.$$

Se  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais complexos, diz-se que uma aplicação  $\lambda: E \rightarrow F$  é *antilinear* se ela verifica as condições  $\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y)$  e  $\lambda(ax) = \bar{a}\lambda(x)$ . Uma tal aplicação é, em particular, uma *aplicação linear real*, isto é, uma aplicação linear quando se considera  $E$  e  $F$  como espaços vetoriais reais. O exemplo mais simples de aplicação antilinear é a aplicação de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ , que a  $a$  associa o seu conjugado  $\bar{a}$ . No caso em que  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais reais consideramos que, por definição, *antilinear* é sinónimo de *linear* (não esquecer que o conjugado de um número real é ele mesmo).

**2.5.2** Uma maneira muitas vezes cómoda de encarar as aplicações antilineares, que permite, em particular, aplicar a estas propriedades conhecidas das aplicações lineares, baseia-se na observação seguinte:

Se  $E$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , pode-se considerar um novo espaço vetorial  $\bar{E}$  (a que daremos o nome de *conjugado* do primeiro), com o mesmo conjunto e a mesma adição mas com uma nova multiplicação pelos escalares definida por  $a \circ x = \bar{a}x$ . Com esta definição, uma aplicação

antilinear  $E \rightarrow F$  é a mesma coisa que uma aplicação linear  $\overline{E} \rightarrow F$ , ou ainda que uma aplicação linear  $E \rightarrow \overline{F}$ . Note-se também que toda a norma no espaço vetorial  $E$  é também uma norma no espaço vetorial conjugado  $\overline{E}$ . Repare-se que o espaço vetorial conjugado de  $\overline{E}$  é  $E$  e que no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o espaço vetorial conjugado  $\overline{E}$  é o mesmo que  $E$ .

**2.5.3** Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços vetoriais sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Diz-se que uma aplicação  $\gamma: E \times F \rightarrow G$  é *sesquilinear* se ela é linear na primeira variável e antilinear na segunda, isto é, se ela verifica as seguintes condições:

- a)  $\gamma(x + y, z) = \gamma(x, z) + \gamma(y, z)$ ;
- b)  $\gamma(x, y + z) = \gamma(x, y) + \gamma(x, z)$ ;
- c)  $\gamma(ax, y) = a\gamma(x, y)$ ;
- d)  $\gamma(x, ay) = \overline{a}\gamma(x, y)$ .

Uma tal aplicação é, em particular, uma aplicação bilinear real. No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , sesquilinear vai ser sinónimo de bilinear.

No contexto da observação em 2.5.2, uma aplicação sesquilinear  $\gamma: E \times F \rightarrow G$  é exactamente o mesmo que uma aplicação bilinear  $\gamma: E \times \overline{F} \rightarrow G$ .

**2.5.4** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Diz-se que uma aplicação sesquilinear  $\gamma: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  é *hermítica* se se tem:

$$\text{e) } \gamma(x, y) = \overline{\gamma(y, x)}.$$

Repare-se que se, tem então, para cada  $x \in X$ ,  $\gamma(x, x) = \overline{\gamma(x, x)}$ , pelo que  $\gamma(x, x)$  é um número real. No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , *hermítica* vai ser sinónimo de *simétrica*.

**2.5.5** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Chama-se *produto interno* sobre  $E$  a uma aplicação sesquilinear hermítica  $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ , que notaremos  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ , que seja *definida positiva*, isto é, que verifique as condições:

- f)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ;
- g) Se  $\langle x, x \rangle = 0$ , então  $x = 0$ .

Chama-se *espaço pre-hilbertiano* a um espaço vetorial munido de um produto interno.

**2.5.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** Sejam  $E$  um espaço vetorial e  $\gamma: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação sesquilinear hermítica verificando a condição  $\gamma(x, x) \geq 0$ , para cada  $x \in E$ .<sup>216</sup> Dados  $x, y \in E$ , tem-se então

$$|\gamma(x, y)|^2 \leq \gamma(x, x)\gamma(y, y).$$

**Dem:** Para cada  $a \in \mathbb{K}$ , tem-se

<sup>216</sup>Não temos necessariamente um produto interno porque não exigimos a propriedade g).

$$(1) \quad 0 \leq \gamma(x - ay, x - ay) = \gamma(x, x) - a\gamma(y, x) - \bar{a}\gamma(x, y) + a\bar{a}\gamma(y, y).$$

Se nos lembrarmos que o produto de um complexo pelo seu conjugado é igual ao quadrado do seu módulo, vemos que, pondo  $a = M\gamma(x, y)$  com  $M \in \mathbb{R}$  na fórmula anterior, sai

$$(2) \quad 0 \leq \gamma(x, x) - M|\gamma(x, y)|^2 - M|\gamma(x, y)|^2 + M^2|\gamma(x, y)|^2\gamma(y, y).$$

No caso em que  $\gamma(y, y) = 0$ , deduzimos de (2) que, para cada  $M > 0$ ,

$$|\gamma(x, y)|^2 \leq \frac{1}{2M} \gamma(x, x),$$

pelo que a arbitrariedade de  $M$  implica que  $\gamma(x, y) = 0$  e a desigualdade do enunciado é trivialmente verdadeira. Supondo agora que  $\gamma(y, y) \neq 0$ , podemos tomar  $M = \frac{1}{\gamma(y, y)}$  em (2) e obtemos então

$$0 \leq \gamma(x, x) - \frac{|\gamma(x, y)|^2}{\gamma(y, y)},$$

donde  $|\gamma(x, y)|^2 \leq \gamma(x, x)\gamma(y, y)$ . □

**2.5.7** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Quaisquer que sejam  $x, y \in E$ , tem-se então a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

os dois membros desta desigualdade sendo iguais se, e só se, os vetores  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes.

**Dem:** A desigualdade do enunciado não é mais do que um caso particular da do resultado anterior. É evidente que, se um dos vetores  $x$  ou  $y$  é nulo, ambos os membros da desigualdade são iguais a 0. Suponhamos assim que  $x$  e  $y$  são não nulos. Se  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes, tem-se  $x = ay$ , pelo que

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle|^2 &= |a\langle y, y \rangle|^2 = |a|^2 |\langle y, y \rangle|^2 = \\ &= a\bar{a} \langle y, y \rangle \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Supondo agora que  $x$  e  $y$  são linearmente independentes, tem-se, para cada  $a \in \mathbb{K}$ ,  $x - ay \neq 0$ , donde, analogamente ao que foi feito na demonstração precedente,

$$0 < \langle x - ay, x - ay \rangle = \langle x, x \rangle - a\langle y, x \rangle - \bar{a}\langle x, y \rangle + a\bar{a}\langle y, y \rangle,$$

e, tomando, em particular,  $a = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ , obtemos

$$0 < \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle},$$

o que implica que  $|\langle x, y \rangle|^2 < \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ . □

**2.5.8** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Tem então lugar sobre  $E$  uma *norma associada*, definida por  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , verificando-se a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ , com os dois membros desta desigualdade a serem iguais se, e só se,  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes. A igualdade  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  verifica-se se, e só se,  $y = 0$  ou  $x = ay$ , com  $a \in [0, +\infty[$ . Relativamente a esta norma, o produto interno é uma aplicação bilinear contínua (no sentido real)  $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ .

**Dem:** Para  $a \in \mathbb{K}$  e  $x \in E$ , tem-se

$$\|ax\|^2 = \langle ax, ax \rangle = a\bar{a}\langle x, x \rangle = |a|^2 \|x\|^2,$$

donde  $\|ax\| = |a| \|x\|$ . Dados  $x, y \in E$ , obtemos, tendo em conta a desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

donde  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . É evidente que, se  $y = 0$ , então  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  e, no caso em que  $x = ay$ , com  $a \in [0, +\infty[$ , vem também

$$\|x + y\| = \|(a + 1)y\| = (a + 1)\|y\| = \|ay\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|.$$

No caso em que  $x$  e  $y$  são linearmente independentes, sabemos que se tem mesmo  $|\langle x, y \rangle| < \|x\| \|y\|$  pelo que o raciocínio anterior mostra que se tem mesmo  $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ . No caso em que  $x = ay$ , com  $y \neq 0$  e  $a \notin \mathbb{R}$  ou  $a < 0$ , tem-se  $\langle x, y \rangle = a\langle y, y \rangle$  pelo que  $\Re(\langle x, y \rangle) < |\langle x, y \rangle|$  e o raciocínio anterior mostra, mais uma vez, que  $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ . Sabemos que o produto interno é uma aplicação bilinear, no sentido real, pelo que a sua continuidade é uma consequência da desigualdade de Schwarz.  $\square$

**2.5.9 (Espaço pre-hilbertiano conjugado e espaço pre-hilbertiano real associado)** Repare-se que, se  $E$  é um espaço pre-hilbertiano com o produto interno  $\gamma$ , então  $\gamma$  não é em geral, no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , um produto interno no espaço vetorial conjugado  $\bar{E}$  mas obtemos neste um *produto interno conjugado*  $\bar{\gamma}: \bar{E} \times \bar{E} \rightarrow \mathbb{K}$  definido por

$$\bar{\gamma}(x, y) = \overline{\gamma(x, y)} = \gamma(y, x).$$

Já a norma associada ao produto interno conjugado  $\bar{\gamma}$  coincide com a norma associada ao produto interno original  $\gamma$ .

Outra observação útil, e também evidente, é que, se  $E$  é um espaço pre-hilbertiano complexo com o produto interno  $\gamma$  então, apesar de  $\gamma$  não ser um produto interno de  $E$  quando considerado como espaço vetorial real (não toma valores em  $\mathbb{R}$ ) existe um *produto interno real associado*  $\gamma_{\mathbb{R}}$  de  $E$  com o espaço vetorial real definido por

$$\gamma_{\mathbb{R}}(x, y) = \Re(\gamma(x, y))$$

e as normas associadas aos dois produtos internos coincidem.

**2.5.10** Sejam  $E$  e  $F$  espaços pre-hilbertianos e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear. São então equivalentes as seguintes condições:

**a)**  $\|\lambda(x)\| = \|x\|$ , qualquer que seja  $x \in E$ , isto é, a aplicação linear é isométrica (cf. 2.1.33);

**b)**  $\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ , quaisquer que sejam  $x, y \in E$ .

Quando elas se verificarem dizemos que a aplicação linear  $\lambda$  é *unitária* (no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , também dizemos *ortogonal* em vez de *unitária*). Uma tal aplicação é sempre contínua e injectiva.

Em particular, dois produtos internos num espaço vetorial  $E$ , com a mesma norma associada, coincidem.

**Dem:** É evidente que a condição b) implica a condição a). Suponhamos então que a condição a) é verificada. Dados  $x, y \in E$ , tem-se

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) \end{aligned}$$

e, do mesmo modo

$$\begin{aligned} \|\lambda(x + y)\|^2 &= \|\lambda(x) + \lambda(y)\|^2 = \\ &= \|\lambda(x)\|^2 + \|\lambda(y)\|^2 + 2\Re(\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle), \end{aligned}$$

pelo que, tendo em conta a), vem  $\Re(\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle) = \Re(\langle x, y \rangle)$ . No caso real esta igualdade não é mais do que a igualdade em b); no caso complexo reparamos agora que, para cada complexo  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\Im(z) = b = -\Re(iz)$  e escrevemos

$$\begin{aligned} \Im(\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle) &= -\Re(i\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle) = -\Re(\langle \lambda(ix), \lambda(y) \rangle) = \\ &= -\Re(\langle ix, y \rangle) = -\Re(i\langle x, y \rangle) = \Im(\langle x, y \rangle), \end{aligned}$$

pelo que  $\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle$  e  $\langle x, y \rangle$ , tendo a mesma parte real e a mesma parte imaginária, coincidem. O facto de uma aplicação linear unitária  $\lambda$  ser contínua e injectiva foi já examinado em 2.1.33. O facto de dois produtos internos de  $E$ , com a mesma norma associada, coincidirem resulta de aplicar a conclusão anterior ao isomorfismo identidade  $I_E: E \rightarrow E$ .  $\square$

**2.5.11** Chama-se *espaço de Hilbert* a um espaço pre-hilbertiano que é completo, relativamente à norma associada. Um espaço de Hilbert é, em particular, um espaço de Banach.

**2.5.12** Como primeiro exemplo de espaço de Hilbert, temos o espaço vetorial  $\mathbb{K}^n$ , com o produto interno definido por

$$\langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \rangle = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \dots + a_n \overline{b_n}$$

(a verificação das propriedades de produto interno é trivial e o facto de

termos um espaço completo é uma consequência de ele ser de dimensão finita). Repare-se que a norma associada a este produto interno, definida por

$$\|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2},$$

é, no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a norma eucliana de  $\mathbb{R}^n$  referida em 1.1.7 e, no caso em que  $\mathbb{K}$  é  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , o caso particular em que  $p = 2$  e  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  da norma referida em 2.3.37.

Mais geralmente, se  $E$  é um espaço vetorial de dimensão finita, com uma base fixada  $w_1, \dots, w_n$ , podemos definir uma estrutura de espaço de Hilbert sobre  $E$ , que diremos ser a associada à base em questão, pondo, para  $x, y \in E$ , com  $x = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$  e  $y = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$ ,

$$\langle x, y \rangle = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \dots + a_n \overline{b_n}$$

(no contexto do transporte de estruturas, examinado na secção 1.4, trata-se do produto interno transportado do produto interno de  $\mathbb{K}^n$  pelo isomorfismo  $\mathbb{K}^n \rightarrow E$  que aplica a base canónica na base dada).

**2.5.13 (Exemplo típico de espaço de Hilbert)** Uma generalização importante do exemplo anterior é a seguinte: Seja  $I$  um conjunto não vazio de índices. Vamos notar  $\ell^2(I)$ , ou, se for importante sermos mais precisos quanto ao corpo dos escalares considerado,  $\ell^2_{\mathbb{R}}(I)$  ou  $\ell^2_{\mathbb{C}}(I)$ , o conjunto de todas as famílias  $(a_i)_{i \in I}$  de elementos de  $\mathbb{K}$  tais que  $\sum_{i \in I} |a_i|^2 < +\infty$ . Tem-se então que  $\ell^2(I)$  é um subespaço vetorial do espaço de todas as aplicações de  $I$  em  $\mathbb{K}$  e em  $\ell^2(I)$  ficamos com uma estrutura de espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle (a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \rangle = \sum_{i \in I} a_i \overline{b_i},$$

em que a soma no segundo membro é a de uma família absolutamente somável de escalares. É claro que a norma associada é dada por

$$\|(a_i)_{i \in I}\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} |a_i|^2}. \quad 217$$

Repare-se que, como antes,  $\ell^2(I)$  não é mais do que o caso particular do espaço vetorial  $\ell^p_E(I)$  definido em 2.3.37 em que  $p = 2$  e  $E = \mathbb{K}$  e a norma atrás referida é a correspondente norma  $\|\cdot\|_p$  (cf. 2.3.44).

**Dem:** O facto de  $\ell^2(I)$  ser um subespaço vetorial é o caso particular  $p = 2$  e  $E = \mathbb{K}$  do que foi estabelecido em 2.3.37. Reparemos agora que, dados reais  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$ , tem-se

$$ab \leq a^2 + b^2$$

<sup>217</sup>Este exemplo é típico uma vez que, como verificaremos adiante em 2.5.46, qualquer espaço de Hilbert é unitariamente isomorfo a um espaço de Hilbert deste tipo.



uma vez que  $ab \leq b^2$  se  $a \leq b$  e  $ab \leq a^2$  se  $a \geq b$ . Utilizando este facto, vemos agora que dadas as famílias  $(a_i)_{i \in I}$  e  $(b_i)_{i \in I}$  em  $\ell^2(I)$ , vem

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |a_i \bar{b}_i| &= \sum_{i \in I} |a_i| |b_i| \leq \sum_{i \in I} (|a_i|^2 + |b_i|^2) = \\ &= \sum_{i \in I} |a_i|^2 + \sum_{i \in I} |b_i|^2 < +\infty, \end{aligned}$$

o que mostra que a família dos  $a_i \bar{b}_i$  é absolutamente somável, em particular somável. É agora fácil constatar-se, aplicando as propriedades das somas em 2.3.3 e 2.3.6, que ficou efectivamente definido um produto interno em  $\ell^2(I)$ , cuja norma associada é a definida no enunciado. O facto de  $\ell^2(I)$  ser completo é um caso particular do que foi estabelecido em 2.3.48.  $\square$

**2.5.14 (Exemplo envolvendo o integral de funções contínuas com valores reais ou complexos)** Sejam  $a < b$  dois números reais. No espaço  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  das aplicações contínuas  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  pode-se definir um produto interno, pondo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

A norma associada a este produto interno é a norma  $\| \cdot \|_2$  definida por

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Este espaço pre-hilbertiano não é, no entanto, um espaço de Hilbert.

**2.5.15 (Nota)** A teoria do Integral de Lebesgue permite construir um espaço de Hilbert, que se costuma notar  $L^2([a, b], \mathbb{K})$ , cujos elementos são classes de equivalência de funções, em geral descontínuas, para a relação que identifica duas funções que apenas diferem num conjunto de medida nula, e cujo produto interno é dado pela mesma fórmula que no exemplo anterior. O espaço  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  identifica-se naturalmente a um subespaço vetorial denso de  $L^2([a, b], \mathbb{K})$ . Uma das razões pela qual o integral de Lebesgue é de importância fundamental é a de permitir a construção de certos espaços funcionais do tipo deste. Uma alternativa ao espaço de Hilbert  $L^2([a, b], \mathbb{K})$  consiste em aplicar a  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  a construção geral de um completado de um espaço pre-hilbertiano que descreveremos a seguir.

**2.5.16 (Completado de um espaço pre-hilbertiano)** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Diz-se que um espaço de Hilbert  $\widehat{E}$  é um *completado* de  $E$  definido pela aplicação linear  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$  se  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$  é uma aplicação linear unitária (cf. 2.5.10) e  $\xi(E)$  é denso em  $\widehat{E}$  (comparar com 2.2.13 — é claro que  $\widehat{E}$  é então, em particular, um completado vetorial de  $E$  definido por  $\xi$ ).

**2.5.17 (Existência de completado de um espaço pre-hilbertiano)** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Seja  $\widehat{E}$  um completado de  $E$ , enquanto espaço vetorial normado, definido pela aplicação linear  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$  (cf. 2.2.13 e 2.2.19). Existe então em  $\widehat{E}$  um, e um só, produto interno cuja norma associada seja a de  $\widehat{E}$  e, relativamente a este produto interno,  $\widehat{E}$  é um espaço de Hilbert.

**Dem:** A unicidade é uma consequência de 2.5.10. Sendo  $\overline{E}$  o espaço vetorial normado conjugado de  $E$  (cf. 2.5.2), o produto interno é uma aplicação bilinear contínua  $\gamma: E \times \overline{E} \rightarrow \mathbb{K}$  pelo que, reparando que  $\overline{\widehat{E}}$  é trivialmente também um completado de  $\overline{E}$  definido pela aplicação linear  $\xi: \overline{E} \rightarrow \overline{\widehat{E}}$ , podemos aplicar 2.2.16 para garantir a existência de uma aplicação bilinear contínua  $\widehat{\gamma}: \widehat{E} \times \widehat{E} \rightarrow \mathbb{K}$ , isto é, uma aplicação sesquilinear  $\widehat{\gamma}: \widehat{E} \times \widehat{E} \rightarrow \mathbb{K}$  verificando  $\widehat{\gamma}(\xi(x), \xi(y)) = \gamma(x, y)$  para quaisquer  $x, y \in E$ . Uma vez que, para  $x, y \in E$  tem-se

$$\widehat{\gamma}(\xi(x), \xi(y)) = \gamma(x, y) = \overline{\gamma(y, x)} = \overline{\widehat{\gamma}(\xi(y), \xi(x))},$$

vemos que as aplicações contínuas  $\widehat{E} \times \widehat{E} \rightarrow \mathbb{K}$  definidas respetivamente por  $(\widehat{x}, \widehat{y}) \mapsto \widehat{\gamma}(\widehat{x}, \widehat{y})$  e  $(\widehat{x}, \widehat{y}) \mapsto \overline{\widehat{\gamma}(\widehat{y}, \widehat{x})}$  coincidem no subconjunto  $\xi(E) \times \xi(E)$  denso em  $\widehat{E} \times \widehat{E}$  e portanto coincidem, o que mostra que a aplicação sesquilinear  $\widehat{\gamma}: \widehat{E} \times \widehat{E} \rightarrow \mathbb{K}$  é hermítica. Analogamente, de se ter, para cada  $x \in E$ ,

$$\|\xi(x)\|^2 = \|x\|^2 = \gamma(x, x) = \widehat{\gamma}(\xi(x), \xi(x)),$$

concluimos que as aplicações contínuas  $\widehat{E} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas respetivamente por  $\widehat{x} \mapsto \|\widehat{x}\|^2$  e  $\widehat{x} \mapsto \widehat{\gamma}(\widehat{x}, \widehat{x})$  coincidem no subconjunto denso  $\xi(E)$  de  $\widehat{E}$ , pelo que elas coincidem em  $\widehat{E}$ , por outras palavras tem-se  $\|\widehat{x}\|^2 = \widehat{\gamma}(\widehat{x}, \widehat{x})$  para cada  $\widehat{x} \in \widehat{E}$ . Daqui resulta simultaneamente que  $\widehat{\gamma}$  é um produto interno em  $\widehat{E}$  e que a norma associada a este produto interno é efetivamente a norma do completado.  $\square$

**2.5.18** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Dados  $x, y \in E$ , tem então lugar a seguinte *identidade do paralelogramo*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

**Dem:** Tem-se

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle, \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle, \end{aligned}$$

bastando em seguida somar membro a membro estas duas igualdades.  $\square$

**2.5.19** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Dados  $x, y \in E$ , diz-se que  $x$  e  $y$  são *ortogonais*, e escreve-se  $x \perp y$ , se se tem  $\langle x, y \rangle = 0$ . É evidente que se trata de uma relação simétrica e que o único vetor que é ortogonal a si mesmo é o

vetor nulo. Dado um subconjunto  $A \subset E$ , define-se o *ortogonal* de  $A$ , como sendo o conjunto  $A^\perp$  dos vetores que são ortogonais a todos os elementos de  $A$ :

$$A^\perp = \{ x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0, \text{ para todo } y \in A \}.$$

Repare-se que, tendo em conta o facto de o produto interno ser uma aplicação hermitica (cf. 2.5.4), constatamos que  $A^\perp$  é simultaneamente o ortogonal direito e o ortogonal esquerdo de  $A$  no sentido referido em 2.2.28 e 2.2.29. Como propriedades imediatas desta noção temos:

- a)  $\{0\}^\perp = E$  e  $E^\perp = \{0\}$  (para esta última lembrar que um vetor não nulo não é ortogonal a ele mesmo, e portanto não pode ser ortogonal a todos os vetores de  $E$ );
- b) Se  $A \subset B$ , então  $A^\perp \supset B^\perp$ ;
- c)  $(A^\perp)^\perp \supset A$ ;
- d)  $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ ; mais geralmente, se  $(A_j)_{j \in J}$  é uma família arbitrária de subconjuntos de  $E$ , então

$$\left( \bigcup_{j \in J} A_j \right)^\perp = \bigcap_{j \in J} A_j^\perp.$$

**2.5.20** Sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $A \subset E$  um subconjunto arbitrário. Tem-se então que  $A^\perp$  é um subespaço vetorial fechado de  $E$ .

**Dem:** Começemos por notar que, se  $y \in E$ , então  $\{y\}^\perp$  é um subespaço vetorial fechado de  $E$ , por ser a imagem recíproca de  $\{0\}$  por meio da aplicação linear contínua de  $E$  em  $\mathbb{K}$ , que a  $x$  associa  $\langle x, y \rangle$ . O caso geral é agora uma consequência de que  $\emptyset^\perp = E$  e, se  $A \neq \emptyset$ ,  $A^\perp$  vai ser a intersecção dos subespaços vetoriais fechados  $\{y\}^\perp$ , com  $y \in A$ .  $\square$

**2.5.21** Sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $x, y$  dois vetores ortogonais. Tem então lugar a *identidade de Pitágoras*:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

**Dem:** Vem  $\langle x, y \rangle = 0 = \langle y, x \rangle$ , pelo que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

**2.5.22** Sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $F \subset E$  um subespaço vetorial. Tem então lugar a soma directa  $F \oplus F^\perp \subset E$  e dizemos que um elemento  $x \in E$  admite *projectção ortogonal sobre  $F$*  se pertencer a  $F \oplus F^\perp$ , isto é, se existir um elemento  $y \in F$  tal que  $x - y \in F^\perp$ . Um tal  $y$  é então necessariamente único, notamo-lo  $\pi_F(x)$  e dizemos que ele é *projectção ortogonal* de  $x$  sobre  $F$ . Além disso, se  $x$  admite  $\pi_F(x)$  como projectção ortogonal sobre  $F$ , então  $x$  admite  $x - \pi_F(x)$  como projectção ortogonal sobre o subespaço vetorial

fechado  $F^\perp$ .<sup>218</sup>

**Dem:** O facto de ter lugar a soma directa  $F \oplus F^\perp$  resulta de que, se  $z \in F \cap F^\perp$ , tem-se  $\langle z, z \rangle = 0$ , donde  $z = 0$ . No caso em que  $x$  admite projecção ortogonal  $\pi_F(x)$  sobre  $F$ , o facto de  $x - \pi_F(x)$  ser a projecção ortogonal de  $x$  sobre  $F^\perp$  resulta de ser  $x - \pi_F(x) \in F^\perp$  e

$$x - (x - \pi_F(x)) = \pi_F(x) \in F \subset (F^\perp)^\perp. \quad \square$$

**2.5.23** Sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $F \subset E$  um subespaço vetorial. Para cada  $x \in F \oplus F^\perp$ , tem-se  $\|\pi_F(x)\| \leq \|x\|$  e vem

$$x \in F \Leftrightarrow \pi_F(x) = x, \quad x \in F^\perp \Leftrightarrow \pi_F(x) = 0.$$

Além disso  $\pi_F: F \oplus F^\perp \rightarrow F$  é uma aplicação linear contínua e  $F$  é fechado em  $F \oplus F^\perp$ .<sup>219</sup>

**Dem:** Sendo  $x \in F \oplus F^\perp$ , tem-se  $\pi_F(x) \in F$  e  $x - \pi_F(x) \in F^\perp$ , em particular estes vetores são ortogonais. Deduzimos daqui, pela identidade de Pitágoras, que

$$\|x\|^2 = \|\pi_F(x) + (x - \pi_F(x))\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|x - \pi_F(x)\|^2,$$

donde  $\|\pi_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$  e  $\|\pi_F(x)\| \leq \|x\|$ . É claro que, se  $x = \pi_F(x)$ , tem-se  $x \in F$  e, reciprocamente, se  $x \in F$ , tem-se  $x - x = 0 \in F^\perp$ , donde  $\pi_F(x) = x$ . Se  $\pi_F(x) = 0$ , vem  $x = x - \pi_F(x) \in F^\perp$  e, reciprocamente, se  $x \in F^\perp$ , tem-se  $x - 0 = x \in F^\perp$ , donde  $\pi_F(x) = 0$ . O facto de a aplicação  $\pi_F: F \oplus F^\perp \rightarrow F$  ser linear é uma consequência de se tratar da primeira projecção associada a uma soma directa e a continuidade resulta então da desigualdade  $\|\pi_F(x)\| \leq \|x\|$  já referida. O facto de  $F$  ser fechado em  $F \oplus F^\perp$  é uma consequência da continuidade referida e da caracterização

$$F = \{x \in F \oplus F^\perp \mid x - \pi_F(x) = 0\}. \quad \square$$

**2.5.24 (Propriedade minimizante da projecção ortogonal)** Sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano,  $F \subset E$  um subespaço vetorial e  $x \in E$ . Tem-se então:

**a)** Se  $x$  admite  $\pi_F(x)$  como projecção ortogonal sobre  $F$ , então

$$\|x - \pi_F(x)\| = d(x, F),$$

isto é,  $\|x - \pi_F(x)\| \leq \|x - y\|$ , para todo o  $y \in F$ .<sup>220</sup>

<sup>218</sup>Note-se que não afirmamos que todo o elemento que tenha projecção ortogonal sobre  $F^\perp$  tenha que ter projecção ortogonal sobre  $F$ . Isso acontecerá, naturalmente, no caso em que se tenha  $(F^\perp)^\perp = F$ .

<sup>219</sup>É claro que  $F^\perp$  é também fechado em  $F \oplus F^\perp$  mas isso resulta de ser mesmo fechado em  $E$  (cf. 2.5.20).

<sup>220</sup>Lembrar que  $d(x, F)$  é o ínfimo das distâncias de  $x$  aos elementos de  $F$ , ou seja, neste caso, o ínfimo dos números reais  $\|x - y\|$ , com  $y \in F$  (cf. 1.1.11).

**b)** Se  $y_0 \in F$  é tal que  $\|x - y_0\| = d(x, F)$ , então  $y_0$  é a projecção ortogonal de  $x$  sobre  $F$ .

**Dem:** **a)** Suponhamos que  $x$  admite  $\pi_F(x)$  como projecção ortogonal sobre  $F$ . Para cada  $y \in F$ , podemos então escrever

$$x - y = (x - \pi_F(x)) + (\pi_F(x) - y),$$

com  $x - \pi_F(x) \in F^\perp$  e  $\pi_F(x) - y \in F$ . Em particular, estes vetores são ortogonais pelo que, pela identidade de Pitágoras, vem

$$\|x - y\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x) - y\|^2,$$

o que implica que  $\|x - \pi_F(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2$  e  $\|x - \pi_F(x)\| \leq \|x - y\|$ .

**b)** Suponhamos agora que  $y_0 \in F$  é tal que  $\|x - y_0\| = d(x, F)$ .

Seja  $z \in F$  arbitrário. Para cada  $a \in \mathbb{K}$ , tem-se  $y_0 + az \in F$  pelo que se tem  $\|x - y_0 - az\| \geq \|x - y_0\|$ , desigualdade que, depois de elevados ambos os membros ao quadrado, pode ser escrita

$$\langle x - y_0 - az, x - y_0 - az \rangle \geq \langle x - y_0, x - y_0 \rangle,$$

ou ainda

$$a\bar{a}\langle z, z \rangle - a\langle z, x - y_0 \rangle - \bar{a}\langle x - y_0, z \rangle \geq 0.$$

Tomando, em particular,  $a = t\langle x - y_0, z \rangle$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , obtemos

$$t^2|\langle x - y_0, z \rangle|^2\langle z, z \rangle - 2t|\langle x - y_0, z \rangle|^2 \geq 0,$$

e portanto, para  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{2}t|\langle x - y_0, z \rangle|^2\langle z, z \rangle \geq |\langle x - y_0, z \rangle|^2.$$

Fazendo, por exemplo,  $t = \frac{1}{n}$  e passando ao limite, deduzimos desta desigualdade que  $|\langle x - y_0, z \rangle|^2 \leq 0$ , portanto que  $\langle x - y_0, z \rangle = 0$ , o que mostra que  $x - y_0 \in F^\perp$ . Provámos assim que  $y_0$  é a projecção ortogonal de  $x$  sobre  $F$ .  $\square$

**2.5.25** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado ou, mais geralmente, sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $F \subset E$  um subespaço vetorial completo. Tem-se então

$$E = F \oplus F^\perp.$$

**Dem:** Seja  $x \in E$  arbitrário.

Sejam  $y, y'$  dois elementos de  $F$ . Tem-se então também  $\frac{y+y'}{2} \in F$ , donde, aplicando a identidade do paralelogramo em 2.5.18 aos vetores  $x - y'$  e  $x - y$ , cuja soma é  $2(x - \frac{y+y'}{2})$  e cuja diferença é  $y - y'$ :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \|y - y'\|^2 &= \|(x - y') - (x - y)\|^2 = \\
 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\|x - \frac{y + y'}{2}\|^2 \leq \\
 &\leq 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4d(x, F)^2.
 \end{aligned}$$

Tendo em conta a definição de ínfimo, escolhamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n \in F$  tal que

$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| \leq d(x, F) + \frac{1}{n}.$$

Obtemos assim uma sucessão  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elementos de  $F$  tal que  $\|x - y_n\| \rightarrow d(x, F)$ . Resulta daqui que

$$\|x - y_n\|^2 \rightarrow d(x, F)^2$$

pelo que, dado  $\delta > 0$  arbitrário, vai existir  $n_0$  tal que, sempre que  $n \geq n_0$ ,  $\|x - y_n\|^2 \leq d(x, F)^2 + \frac{\delta^2}{4}$ ; tendo em conta (1), vemos que, sempre que  $m, n \geq n_0$ ,  $\|y_n - y_m\|^2 \leq \delta^2$ , isto é  $\|y_n - y_m\| \leq \delta$ , o que mostra que  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de Cauchy de elementos de  $F$ . Tendo em conta o facto de  $F$  ser completo, vai existir  $y_0 \in F$  tal que  $y_n \rightarrow y_0$  e resulta daqui que  $\|x - y_n\|$  converge para  $d(x, F)$  e para  $\|x - y_0\|$ , o que mostra que  $d(x, F) = \|x - y_0\|$ . Tendo em conta a alínea b) de 2.5.24, concluímos que  $y_0$  é a projecção ortogonal de  $x$  sobre  $F$ , o que mostra que  $x \in F \oplus F^\perp$ .  $\square$

**2.5.26 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e  $F$  um subespaço vetorial fechado ou, mais geralmente, sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $F \subset E$  um subespaço vetorial completo.

Tem-se então  $(F^\perp)^\perp = F$ .

**Dem:** Já sabemos que, em geral,  $(F^\perp)^\perp \supset F$ . Vemos agora que, se  $x \in (F^\perp)^\perp$ , podemos escrever  $x = y + y'$ , com  $y \in F$  e  $y' \in F^\perp$ , de onde se deduz que

$$0 = \langle x, y' \rangle = \langle y, y' \rangle + \langle y', y' \rangle = \langle y', y' \rangle,$$

portanto  $y' = 0$ , o que mostra que  $x = y \in F$ .  $\square$

**2.5.27** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado ou, mais geralmente, sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $F \subset E$  um subespaço vetorial completo.

Tendo em conta 2.5.25, o domínio da projecção ortogonal  $\pi_F$  é o próprio  $E$  e portanto, pelo que dissemos em 2.5.22, a projecção ortogonal  $\pi_{F^\perp}$  sobre  $F^\perp$  está também definida em  $E$ , tendo-se, para cada  $x \in E$ ,

$$\pi_{F^\perp}(x) = x - \pi_F(x).^{221}$$

<sup>221</sup>Isto apesar de, no caso em que  $E$  é pre-hilbertiano e  $F \subset E$  é completo, nada garantir que  $F^\perp$  seja também completo.

Por outras palavras, temos neste caso aplicações lineares contínuas

$$\pi_F: E \rightarrow F, \quad \pi_{F^\perp}: E \rightarrow F^\perp,$$

que não são mais do que as projecções associadas à soma directa  $E = F \oplus F^\perp$ , que verificam

$$I_E = \pi_F + \pi_{F^\perp}.$$

**2.5.28** Se  $E$  é um espaço pre-hilbertiano, tem lugar, para cada  $y \in E$ , uma aplicação linear contínua  $\gamma_y: E \rightarrow \mathbb{K}$ , definida por  $\gamma_y(x) = \langle x, y \rangle$ , tendo-se  $\|\gamma_y\| = \|y\|$ . Ficamos então com uma aplicação linear isométrica, em particular contínua e injectiva,  $\tilde{\gamma}: \overline{E} \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , definida por  $\tilde{\gamma}(y) = \gamma_y$ .<sup>222</sup>

**Dem:** Tendo em conta a desigualdade de Schwarz, tem-se

$$|\gamma_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

o que mostra que  $\gamma_y$  é uma aplicação linear contínua e com  $\|\gamma_y\| \leq \|y\|$ . O facto de se ter mesmo  $\|\gamma_y\| = \|y\|$  que é trivial se  $y = 0$ , resulta, para  $y \neq 0$  de ser

$$|\gamma_y(y)| = \langle y, y \rangle = \|y\| \|y\|.$$

O facto de a aplicação  $\tilde{\gamma}: \overline{E} \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  ser linear é uma consequência imediata de bilinearidade do produto interno  $\gamma: E \times \overline{E} \rightarrow \mathbb{K}$ . O facto de  $\tilde{\gamma}$  ser contínua, e com norma menor ou igual a 1, é uma consequência de se ter  $\|\gamma_y\| = \|y\|$ . Este último facto também implica a injectividade de  $\tilde{\gamma}$ , visto que, se  $\tilde{\gamma}(y) = 0$ , sai  $\|y\| = \|\tilde{\gamma}(y)\| = 0$ , donde  $y = 0$ .  $\square$

**2.5.29 (Teorema da representação de Riesz)** Seja  $E$  um espaço de Hilbert e seja  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação linear contínua. Existe então um, e um só, vetor  $y \in E$  tal que  $\lambda = \gamma_y$ , isto é, tal que se tenha  $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$ , para cada  $x \in E$ . Por outras palavras, a aplicação linear isométrica  $\tilde{\gamma}: \overline{E} \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  referida em 2.5.28 é mesmo uma isometria linear, e portanto, no sentido referido em 2.2.26, a aplicação bilinear contínua  $\gamma: E \times \overline{E} \rightarrow \mathbb{K}$ , que define o produto interno, é dualizante na segunda variável.

**Dem:** A unicidade de  $y$  é uma consequência da injectividade da aplicação linear  $\tilde{\gamma}$ . Seja agora  $F$  o conjunto dos  $x \in E$  tais que  $\lambda(x) = 0$ , conjunto que é um subespaço vetorial fechado de  $E$ . Se  $F = E$ , tem-se  $\lambda = 0 = \gamma_0$ . Caso contrário o facto de ter lugar a soma directa  $E = F \oplus F^\perp$  implica que  $F^\perp \neq \{0\}$  pelo que podemos fixar  $z \in F^\perp$ , com  $z \neq 0$ . Vamos verificar que, sendo

$$y = \frac{\overline{\lambda(z)}}{\langle z, z \rangle} z,$$

tem-se  $\lambda = \gamma_y$ . Ora, para cada  $x \in E$ , tem-se

<sup>222</sup>Comparar com as notações usadas, num contexto mais geral, em 2.2.26.

$$\lambda(\lambda(z)x - \lambda(x)z) = \lambda(z)\lambda(x) - \lambda(x)\lambda(z) = 0,$$

pelo que  $\lambda(z)x - \lambda(x)z \in F$  e portanto, por ser  $z \in F^\perp$ ,

$$0 = \langle \lambda(z)x - \lambda(x)z, z \rangle = \lambda(z)\langle x, z \rangle - \lambda(x)\langle z, z \rangle,$$

o que implica que

$$\lambda(x) = \frac{\lambda(z)}{\langle z, z \rangle} \langle x, z \rangle = \left\langle x, \frac{\overline{\lambda(z)}}{\langle z, z \rangle} z \right\rangle = \langle x, y \rangle. \quad \square$$

**2.5.30 (Corolário — Os espaços de Hilbert são reflexivos)** Se  $E$  é um espaço de Hilbert então  $E$  é reflexivo (cf. 2.2.20).

**Dem:** Como vimos em 2.5.29, o produto interno de  $E$  é uma aplicação bilinear  $\gamma: E \times \overline{E} \rightarrow \mathbb{K}$  dualizante na segunda variável pelo que, tendo em conta 2.2.31, para verificarmos que  $E$  é reflexivo basta verificar que  $\gamma$  é também dualizante na primeira variável, isto é, que a aplicação bilinear oposta  $\gamma^{op}: \overline{E} \times E \rightarrow \mathbb{K}$ , definida por  $\gamma^{op}(y, x) = \gamma(x, y)$ , é dualizante na segunda variável. Mas isso resulta de aplicar 2.5.29 ao espaço de Hilbert conjugado  $\overline{E}$  (cf. 2.5.9), uma vez que  $\gamma^{op}$  é o produto interno deste último espaço.  $\square$

**2.5.31 (Corolário pre-hilbertiano)** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano e consideremos a aplicação linear isométrica  $\tilde{\gamma}: \overline{E} \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  referida em 2.5.28. Tem-se então que a imagem  $\tilde{\gamma}(\overline{E})$  é um subespaço vetorial denso de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ .

**Dem:** Sejam  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $\delta > 0$  arbitrários. Consideremos um espaço de Hilbert  $\widehat{E}$  completado de  $E$ , definido pela aplicação linear unitária  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$  (cf. 2.5.16 e 2.5.17). Tendo em conta 2.2.14, podemos considerar uma aplicação linear contínua  $\widehat{\lambda}: \widehat{E} \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $\lambda(x) = \widehat{\lambda}(\xi(x))$  para cada  $x \in E$ . Pelo teorema da representação de Riesz, tem lugar uma isometria linear  $\tilde{\beta}: \widehat{E} \rightarrow \mathcal{L}(\widehat{E}; \mathbb{K})$  que a cada  $z \in \widehat{E}$  associa a aplicação linear  $\beta_z: \widehat{E} \rightarrow \mathbb{K}$  definida por  $\beta_z(w) = \langle w, z \rangle$  e portanto podemos considerar o elemento  $z \in \widehat{E}$  tal que  $\widehat{\lambda} = \tilde{\beta}(z) = \beta_z$ . O facto de  $\xi(E)$  ser denso em  $\widehat{E}$  garante-nos a existência de  $y \in E$  tal que  $\|z - \xi(y)\| < \delta$ . Considerando então o elemento  $\gamma_y = \tilde{\gamma}(y) \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , pertencente a  $\tilde{\gamma}(\overline{E})$ , tem-se então, para cada  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \|\lambda(x) - \gamma_y(x)\| &= \|\lambda(x) - \langle x, y \rangle\| = \|\widehat{\lambda}(\xi(x)) - \langle \xi(x), \xi(y) \rangle\| = \\ &= \|\tilde{\beta}(z)(\xi(x)) - \tilde{\beta}(\xi(y))(\xi(x))\| = \\ &= \|\tilde{\beta}(z - \xi(y))(\xi(x))\| \leq \|\tilde{\beta}(z - \xi(y))\| \|\xi(x)\| = \\ &= \|z - \xi(y)\| \|x\| \leq \delta \|x\|, \end{aligned}$$

o que implica que  $\|\lambda - \gamma_y\| \leq \delta$ . Ficou assim provado que  $\lambda$  é aderente a  $\tilde{\gamma}(\overline{E})$ .  $\square$



**2.5.32** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Hilbert e  $\alpha: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Para cada  $y \in F$ , fica então bem definido um elemento  $\alpha^*(y) \in E$  pela condição de se ter, qualquer que seja  $x \in E$ ,

$$\langle x, \alpha^*(y) \rangle = \langle \alpha(x), y \rangle.$$

A aplicação  $\alpha^*: F \rightarrow E$  assim definida é linear contínua e com  $\|\alpha^*\| = \|\alpha\|$ . Tem-se  $(\alpha^*)^* = \alpha$  e a aplicação de  $\mathcal{L}(E; F)$  em  $\mathcal{L}(F; E)$ , que a  $\alpha$  associa  $\alpha^*$ , é uma isometria antilinear<sup>223</sup>.

**Dem:** Dado  $y \in F$ , podemos considerar uma aplicação linear contínua  $\lambda_y: E \rightarrow \mathbb{K}$ , definida por  $\lambda_y(x) = \langle \alpha(x), y \rangle$ , para a qual se tem

$$\|\lambda_y(x)\| \leq \|\alpha(x)\| \|y\| \leq \|\alpha\| \|x\| \|y\|,$$

portanto  $\|\lambda_y\| \leq \|\alpha\| \|y\|$ . Pelo resultado precedente, fica bem definido um vetor  $\alpha^*(y) \in E$  pela condição de se ter  $\lambda_y = \gamma_{\alpha^*(y)}$ , isto é, de se ter, para cada  $x \in E$ ,  $\langle \alpha(x), y \rangle = \langle x, \alpha^*(y) \rangle$ , tendo-se além disso, por 2.5.28,

$$\|\alpha^*(y)\| = \|\lambda_y\| \leq \|\alpha\| \|y\|.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha^*(y+z) \rangle &= \langle \alpha(x), y+z \rangle = \langle \alpha(x), y \rangle + \langle \alpha(x), z \rangle = \\ &= \langle x, \alpha^*(y) \rangle + \langle x, \alpha^*(z) \rangle = \langle x, \alpha^*(y) + \alpha^*(z) \rangle, \\ \langle x, \alpha^*(ay) \rangle &= \langle \alpha(x), ay \rangle = \bar{a} \langle \alpha(x), y \rangle = \\ &= \bar{a} \langle x, \alpha^*(y) \rangle = \langle x, a\alpha^*(y) \rangle, \end{aligned}$$

concluimos que  $\alpha^*(y+z) = \alpha^*(y) + \alpha^*(z)$  e  $\alpha^*(ay) = a\alpha^*(y)$ , portanto que  $\alpha^*$  é uma aplicação linear e a desigualdade  $\|\alpha^*(y)\| \leq \|\alpha\| \|y\|$  mostra que a aplicação linear  $\alpha^*$  é contínua e com  $\|\alpha^*\| \leq \|\alpha\|$ . Por outro lado, tomando os conjugados de ambos os membros da identidade  $\langle \alpha(x), y \rangle = \langle x, \alpha^*(y) \rangle$ , obtemos a igualdade  $\langle y, \alpha(x) \rangle = \langle \alpha^*(y), x \rangle$ , de onde se deduz que  $\alpha(x) = (\alpha^*)^*(x)$ . Em particular, pelo que vimos atrás, temos  $\|\alpha\| = \|(\alpha^*)^*\| \leq \|\alpha^*\|$ , donde  $\|\alpha^*\| = \|\alpha\|$ . Dados  $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $a \in \mathbb{K}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \langle \alpha(x) + \beta(x), y \rangle &= \langle \alpha(x), y \rangle + \langle \beta(x), y \rangle = \\ &= \langle x, \alpha^*(y) \rangle + \langle x, \beta^*(y) \rangle = \langle x, \alpha^*(y) + \beta^*(y) \rangle, \\ \langle a\alpha(x), y \rangle &= a \langle \alpha(x), y \rangle = a \langle x, \alpha^*(y) \rangle = \langle x, \bar{a}\alpha^*(y) \rangle, \end{aligned}$$

de onde se deduz que  $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$  e  $(a\alpha)^* = \bar{a}\alpha^*$ , ou seja que a aplicação  $\alpha \mapsto \alpha^*$  é antilinear. Esta aplicação antilinear é isométrica por ser  $\|\alpha^*\| = \|\alpha\|$ , e o facto de ela ser uma isometria antilinear vem de que ela é o seu próprio inverso, por se ter  $(\alpha^*)^* = \alpha$ .  $\square$

<sup>223</sup>Isto é, uma isometria linear  $\overline{\mathcal{L}(E; F)} \rightarrow \mathcal{L}(F; E)$  ou, o que é o mesmo, uma isometria linear  $\mathcal{L}(E; F) \rightarrow \overline{\mathcal{L}(F; E)}$ .

**2.5.33** Sejam  $E$ ,  $F$  e  $G$  espaços de Hilbert e  $\alpha: E \rightarrow F$  e  $\beta: F \rightarrow G$  aplicações lineares contínuas. Tem-se então  $Id_E^* = Id_E: E \rightarrow E$  e

$$(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*: G \rightarrow E.$$

**Dem:** Basta atender, para a primeira afirmação a que, para cada  $x, x' \in E$

$$\langle Id_E(x), x' \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x, Id_E(x') \rangle$$

e, para a segunda afirmação a que, para cada  $x \in E$  e  $z \in G$ , tem-se

$$\begin{aligned} \langle (\beta \circ \alpha)(x), z \rangle &= \langle \beta(\alpha(x)), z \rangle = \langle \alpha(x), \beta^*(z) \rangle = \\ &= \langle x, \alpha^*(\beta^*(z)) \rangle = \langle x, (\alpha^* \circ \beta^*)(z) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

**2.5.34** Nas condições de 2.5.32, diz-se que a aplicação linear contínua  $\alpha^*: F \rightarrow E$  é a *adjunta* da aplicação linear contínua  $\alpha: E \rightarrow F$ . Se  $E$  é um espaço de Hilbert, diz-se que uma aplicação linear contínua  $\alpha: E \rightarrow E$  é *autoadjunta* se se tem  $\alpha^* = \alpha$ ; diz-se que ela é *anti-autoadjunta* se se tem  $\alpha^* = -\alpha$ .

Como exemplos triviais de aplicações autoadjuntas, temos a identidade  $Id_E: E \rightarrow E$  e a aplicação identicamente nula  $0: E \rightarrow E$ . Além disso, o facto de  $\alpha \mapsto \alpha^*$  ser uma aplicação linear contínua real, garante que os subconjuntos  $\mathcal{L}_{sa}(E; E)$  e  $\mathcal{L}_{-sa}(E; E)$  de  $\mathcal{L}(E; E)$ , constituídos pelas aplicações lineares contínuas autoadjuntas e pelas aplicações lineares contínuas anti-autoadjuntas, respectivamente, são subespaços vectoriais fechados reais de  $\mathcal{L}(E; E)$  (salvo casos triviais não se trata de subespaços vectoriais complexos).

**2.5.35** Se  $E$  e  $F$  são espaços de Hilbert e se  $\lambda: E \rightarrow F$  é uma aplicação linear contínua, então  $\lambda$  é unitária (cf. 2.5.10) se, e só se,  $\lambda^* \circ \lambda = I_E$ .

**Dem:** Tendo em conta o teorema de Riesz, dizer que, para cada  $y \in E$ ,  $\lambda^*(\lambda(y)) = y$  equivale a dizer que, para cada  $y \in E$  e  $x \in E$ ,  $\langle x, \lambda^*(\lambda(y)) \rangle = \langle x, y \rangle$ , ou, o que é equivalente,  $\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ , condição que traduz o facto de a aplicação linear contínua  $\lambda$  ser unitária.  $\square$

**2.5.36** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Diz-se que uma família  $(x_j)_{j \in J}$  de vetores de  $E$  é *ortogonal* se se tem  $\langle x_j, x_k \rangle = 0$ , sempre que  $j \neq k$ , isto é, se os vetores são ortogonais dois a dois. Diz-se que a família é *ortonormada* se, além disso,  $\langle x_j, x_j \rangle = 1$ , para cada  $j$ , isto é, se os vetores são dois a dois ortogonais e se cada um dos vetores tem norma 1. Usando o *símbolo de Kronecker*  $\delta_{j,k}$  para notar o inteiro 1, se  $j = k$ , e o inteiro 0, se  $j \neq k$ , podemos dizer que a família é ortonormada se, e só se, se tem  $\langle x_j, x_k \rangle = \delta_{j,k}$ .

**2.5.37** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano e seja  $(x_j)_{j \in J}$  uma família ortogonal de vetores diferentes de 0. Tem-se então que a família é linearmente independente.

**Dem:** Suponhamos que se tinha uma combinação linear nula,  $\sum_{j \in J} a_j x_j = 0$ ,

com os coeficientes  $a_j$  *quase todos nulos*, isto é, nulos salvo para um número finito de valores de  $j$ . Para cada  $k \in J$ , vinha então

$$0 = \left\langle \sum_{j \in J} a_j x_j, x_k \right\rangle = \sum_{j \in J} a_j \langle x_j, x_k \rangle = a_k \langle x_k, x_k \rangle,$$

donde  $a_k = 0$ . □

**2.5.38** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Diz-se que uma família  $(x_j)_{j \in J}$  de vetores de  $E$  é *completa* se a aderência do subespaço vetorial gerado pelos vetores  $x_j$  é igual a  $E$ . É claro que, no caso em que o conjunto de índices  $J$  é finito, ou, mais geralmente, em que  $E$  tem dimensão finita, uma família é completa se, e só se, é geradora (lembrar que todo o subespaço vetorial de dimensão finita é fechado). Diz-se que a família é uma *base de Hilbert* se ela é simultaneamente ortonormada e completa (note-se que, em geral, quando  $E$  tem dimensão infinita, uma tal família não será uma base, no sentido algébrico).

**2.5.39 (Imagem num completado)** Sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $\widehat{E}$  um espaço de Hilbert completado de  $E$ , definido pela aplicação linear  $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$  (cf. 2.5.16). Dada uma família  $(x_j)_{j \in J}$  de vetores de  $E$ , ela é ortogonal (respectivamente ortonormada) se, e só se, a família  $(\xi(x_j))_{j \in J}$  de vetores de  $\widehat{E}$  é ortogonal (respectivamente, ortonormada) e ela é completa se, e só se, a família  $(\xi(x_j))_{j \in J}$  de vetores de  $\widehat{E}$  é completa.

**Dem:** A primeira afirmação é uma consequência imediata de se ter  $\langle \xi(x), \xi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ , quaisquer que sejam  $x, y \in E$ . Reparemos agora que o facto de se ter  $\|\xi(x)\| = \|x\|$  implica que  $\xi$  é um isomorfismo bicontínuo de  $E$  sobre o subespaço vetorial  $\xi(E)$  de  $\widehat{E}$ , em particular, sendo  $F$  o subespaço vetorial gerado pelos  $x_j$ ,  $\xi(F)$  é o subespaço vetorial gerado pelos  $\xi(x_j)$  e  $F$  é denso em  $E$ , isto é a família dos  $x_j$  é completa, se, e só se,  $\xi(F)$  é denso em  $\xi(E)$ , o que, por  $\xi(E)$  ser denso em  $\widehat{E}$ , é ainda equivalente a  $\xi(F)$  ser denso em  $\widehat{E}$ , isto é, à família dos  $\xi(x_j)$  ser completa em  $\widehat{E}$  (se todo o elemento de  $\xi(E)$  for aderente a  $\xi(F)$ , então a aderência  $\text{ad}_E(\xi(F))$  de  $\xi(F)$ , relativamente a  $E$ , é fechada e contém  $\xi(E)$ , pelo que, por ser igual à sua aderência, contém a aderência de  $\xi(E)$ , igual a  $\widehat{E}$ ). □

No caso dos espaços de Hilbert, temos uma caracterização alternativa importante das famílias ortonormadas que são completas.

**2.5.40** Seja  $E$  um espaço de Hilbert. Tem-se então que uma família ortonormada  $(x_j)_{j \in J}$  de vetores de  $E$  é completa se, e só se, ela é uma *família ortonormada maximal*, no sentido que não existe nenhum vetor de norma 1 de  $E$  que seja ortogonal a todos os  $x_j$ .

**Dem:** Suponhamos que  $(x_j)_{j \in J}$  é uma família ortonormada e completa. Se  $x \in E$  for ortogonal a todos os  $x_j$ , vemos que  $\{x\}^\perp$  vai ser um subespaço

vetorial fechado contendo todos os  $x_j$ , e contendo portanto o subespaço vetorial gerado por estes vetores, pelo que contém a sua aderência, que é igual a  $E$ ; em particular  $\langle x, x \rangle = 0$ , pelo que  $x = 0$ , o que mostra que temos uma família ortonormada maximal. Suponhamos, reciprocamente, que  $(x_j)_{j \in J}$  é uma família ortonormada maximal. Se ela não fosse completa, podíamos considerar a aderência  $F$  do subespaço vetorial gerado pelos  $x_j$ , aderência essa que seria distinta de  $E$  e ainda um subespaço vetorial (cf. 2.1.27); uma vez que  $E$  é um espaço de Hilbert teríamos  $E = F \oplus F^\perp$ , pelo que  $F^\perp \neq \{0\}$ , e, escolhendo um vetor não nulo  $x$  em  $F^\perp$ , o vetor  $\frac{x}{\|x\|}$ , que tem norma 1, seria ortogonal a cada um dos  $x_j$ , o que era absurdo.  $\square$

**2.5.41** Todo o espaço de Hilbert  $E$  admite uma base de Hilbert. Mais precisamente, se  $E$  é um espaço de Hilbert, toda a família ortonormada de vetores de  $E$  pode ser prolongada numa base de Hilbert de  $E$ .

**Dem:** Começamos por notar que todo o subconjunto de  $E$  pode ser olhado, de modo trivial como uma família de vetores de  $E$  (indexada no próprio conjunto). Podemos assim falar de subconjuntos ortonormados e o teorema de Zorn vai garantir a existência de um subconjunto ortonormado maximal, contendo um conjunto ortonormado dado arbitrário (por exemplo o conjunto vazio de vetores...); com efeito dada uma família totalmente ordenada de subconjuntos ortonormados  $A_\alpha$  de  $E$ , a união dos  $A_\alpha$  é ainda um subconjunto ortonormado. Escrevendo um tal subconjunto ortonormado maximal na forma de uma família  $(x_j)_{j \in J}$ , esta vai ser uma família ortonormada maximal e portanto uma base de Hilbert.  $\square$

**2.5.42 (Exemplo)** Seja  $J$  um conjunto de índices e consideremos o espaço de Hilbert  $\ell^2(J)$ , estudado em 2.5.13. Para cada  $k \in J$ , notemos  $e_k$  a família  $(a_j)_{j \in J}$ , com  $a_k = 1$  e  $a_j = 0$ , para  $j \neq k$  (por outras palavras  $a_j = \delta_{k,j}$ ). É imediato constatar-se que a família dos  $e_k$  é ortonormada e vamos verificar que ela é mesmo uma base de Hilbert, para o que mostraremos que ela é completa. Ora, dada uma família  $x = (x_j)_{j \in J}$  e  $\delta > 0$  arbitrários, o facto de se ter  $\sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < +\infty$  implica a existência de uma parte finita  $K \subset J$  tal

que  $\sum_{j \in J \setminus K} \|x_j\|^2 < \delta^2$ . Tem-se então que  $y = \sum_{j \in K} x_j e_j$  é um elemento do subespaço vetorial gerado pelos  $e_j$ , vindo  $x - y = (b_j)_{j \in J}$ , com  $b_j = 0$ , se  $j \in K$ , e  $b_j = x_j$ , se  $j \notin K$ , o que mostra que  $\|x - y\|^2 = \sum_{j \in J \setminus K} \|x_j\|^2 < \delta^2$

e portanto que  $x$  é aderente a este subespaço vetorial. Repare-se que, no caso em que  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\ell^2(J)$  não é mais do que  $\mathbb{K}^n$  e a base dos  $e_k$  é aquela a que se dá usualmente o nome de base canónica.

**2.5.43** Seja  $E$  um espaço de Hilbert e seja  $(x_j)_{j \in J}$  uma família ortogonal de vetores de  $E$ . Tem-se então que esta família é somável se, e só se,  $\sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < +\infty$  e, nesse caso, tem lugar a identidade de Pitágoras (também conhecida por *identidade de Parseval*):

$$\left\| \sum_{j \in J} x_j \right\|^2 = \sum_{j \in J} \|x_j\|^2.$$

**Dem:** Começemos por notar que da identidade de Pitágoras em 2.5.21 resulta facilmente por indução que, para cada parte finita  $K \subset J$ , se tem

$$\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\|^2 = \sum_{j \in K} \|x_j\|^2.$$

O facto de a família  $(x_j)_{j \in J}$  ser somável é equivalente a ela verificar a condição de Cauchy (cf. 2.3.9) que afirma que, para cada  $\delta > 0$ , existe uma parte finita  $K_0$  de  $J$  tal que, qualquer que seja a parte finita  $K$  de  $J$ , disjunta de  $J_0$ , se tenha  $\left\| \sum_{j \in J} x_j \right\| < \delta$ , ou seja  $\sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < \delta^2$ , condição que é equivalente à condição de Cauchy para a família dos reais positivos  $\|x_j\|^2$ , e portanto ao facto de se ter  $\sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < +\infty$ . O facto de se ter  $\left\| \sum_{j \in J} x_j \right\|^2 = \sum_{j \in J} \|x_j\|^2$  resulta de passar ao limite a igualdade  $\left\| \sum_{j \in K} x_j \right\|^2 = \sum_{j \in K} \|x_j\|^2$  entre os termos de sucessões generalizadas indexadas no conjunto das partes finitas de  $J$ .  $\square$

**2.5.44** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e  $F$  um subespaço vetorial fechado ou, mais geralmente, sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano e  $F \subset E$  um subespaço vetorial completo. Seja  $(x_j)_{j \in J}$  uma base de Hilbert do espaço de Hilbert  $F$ . Para cada  $x \in E$ , tem-se então que a projecção ortogonal  $\pi_F(x)$  de  $x$  sobre  $F$  está definida por

$$\pi_F(x) = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j,$$

em que a soma do segundo membro é a de uma família somável.

**Dem:** Seja  $K$  uma parte finita arbitrária de  $J$ . Sendo

$$y_K = x - \sum_{j \in K} \langle x, x_j \rangle x_j,$$

tem-se então, para cada  $k \in K$ ,

$$\begin{aligned} \langle y_K, x_k \rangle &= \left\langle x - \sum_{j \in K} \langle x, x_j \rangle x_j, x_k \right\rangle = \\ &= \langle x, x_k \rangle - \sum_{j \in K} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x_k \rangle = \\ &= \langle x, x_k \rangle - \langle x, x_k \rangle = 0, \end{aligned}$$

pelo que obtemos uma família ortogonal de vetores constituída pelos  $\langle x, x_j \rangle x_j$ , com  $j \in K$ , e pelo vetor  $y_K$ . Tendo em conta a identidade de Pitágoras e a identidade de Parseval em 2.5.43, vemos que

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|y_K + \sum_{j \in K} \langle x, x_j \rangle x_j\|^2 = \|y_K\|^2 + \|\sum_{j \in K} \langle x, x_j \rangle x_j\|^2 = \\ &= \|y_K\|^2 + \sum_{j \in K} \|\langle x, x_j \rangle x_j\|^2.\end{aligned}$$

Podemos então concluir que, para cada parte finita  $K \subset J$ ,  $\sum_{j \in K} \|\langle x, x_j \rangle x_j\|^2 \leq \|x\|^2$ , donde, tomando o supremo para os diferentes  $K$ ,

$$\sum_{j \in J} \|\langle x, x_j \rangle x_j\|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

Tendo em conta, mais uma vez, 2.5.43, vemos que é somável a família dos vetores  $\langle x, x_j \rangle x_j$ , com  $j \in J$ , o que nos permite considerar o vetor

$$\sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j \in F.$$

Para verificar que este vetor é igual a  $\pi_F(x)$ , tudo o que temos que ver é que o vetor  $y = x - \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$  pertence a  $F^\perp$ , ou seja, é ortogonal a todos os vetores de  $F$ . Ora, para cada  $k \in J$ , vem, tendo em conta 2.3.4,

$$\begin{aligned}\langle y, x_k \rangle &= \langle x - \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j, x_k \rangle = \\ &= \langle x, x_k \rangle - \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, x_k \rangle = \langle x, x_k \rangle - \langle x, x_k \rangle = 0,\end{aligned}$$

pelo que o complementar ortogonal de  $\{y\}$  é um subespaço vetorial fechado que contém cada um dos  $x_k$  e portanto vai conter  $F$ .  $\square$

**2.5.45** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e  $(x_j)_{j \in J}$  uma base de Hilbert de  $E$ . Tem-se então que, para cada  $x \in E$ , existe uma, e uma só, família  $(a_j)_{j \in J}$  de escalares tal que a família dos  $a_j x_j$  seja somável e com  $x = \sum_{j \in J} a_j x_j$ , a saber, os definidos por  $a_j = \langle x, x_j \rangle$  (Dizemos então que os  $a_j$  são as *componentes* de  $x$  na base de Hilbert considerada).

**Dem:** Uma vez que a projecção ortogonal de  $E$  sobre  $E$  é trivialmente a aplicação identidade, deduzimos do resultado anterior que, para cada  $x \in E$ ,

$$x = \pi_E(x) = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j.$$

Quanto à unicidade, se fosse  $x = \sum_{j \in J} a_j x_j$ , tinha-se, para cada  $k$ ,

$$\langle x, x_k \rangle = \sum_{j \in J} a_j \langle x_j, x_k \rangle = a_k. \quad \square$$

**2.5.46** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e  $(x_j)_{j \in J}$  uma base de Hilbert de  $E$  e consideremos o espaço de Hilbert  $\ell^2(J)$ , referido em 2.5.13. Tem então lugar um isomorfismo unitário  $\Phi: E \rightarrow \ell^2(J)$ , que associa a cada  $x \in E$  a família  $(a_j)_{j \in J}$  das suas componentes na base de Hilbert dada. Em particular, dados  $x, y \in E$ , com  $x = \sum_{j \in J} a_j x_j$  e  $y = \sum_{j \in J} b_j y_j$ , tem-se a *identidade de Parseval*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} a_j \bar{b}_j,$$

em que a família de escalares do segundo membro é absolutamente somável.

**Dem:** Para cada  $x \in E$  com  $x = \sum_{j \in J} a_j x_j$ , o facto de a família dos  $a_j x_j$  ser

ortogonal e de se ter  $\|a_j x_j\|^2 = |a_j|^2$  implica, por 2.5.43 que a família  $(a_j)_{j \in J}$  das suas componentes está em  $\ell^2(J)$  e que  $\|x\| = \|(a_j)_{j \in J}\|_2$ . É imediato que a aplicação  $\Phi$  é linear, e portanto uma aplicação linear unitária, tendo em conta a caracterização destas dada na alínea a) de 2.5.10. Para vermos que  $\Phi$  é um isomorfismo unitário, resta-nos ver que é sobrejectivo e isso resulta, mais uma vez, de 2.5.43, visto que, se  $(a_j)_{j \in J}$  pertence a  $\ell^2(J)$ , tem-se  $\sum_{j \in J} \|a_j x_j\|^2 < +\infty$ , pelo que o elemento  $x = \sum_{j \in J} a_j x_j \in E$  é tal que

$\Phi(x) = (a_j)_{j \in J}$ . Por fim, a fórmula para o produto interno dada no enunciado é uma consequência da caracterização das aplicações lineares unitárias dada na alínea b) de 2.5.10.  $\square$

**2.5.47** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Hilbert e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Dada uma base de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$  de  $E$ , tem-se que a aplicação linear  $\lambda$  é unitária se, e só se, a família  $(\lambda(x_j))_{j \in J}$  constituir um sistema ortonormado de vetores de  $F$ .

**Dem:** A caracterização das aplicações unitárias dada na alínea b) de 2.5.10 mostra que, se  $\lambda$  é unitária então  $(\lambda(x_j))_{j \in J}$  é um sistema ortonormado de vetores de  $F$ . Suponhamos, reciprocamente, que isso acontece. Notemos  $F'$  a aderência do subespaço vetorial gerado pelos  $\lambda(x_j)$ , a qual vai ser um espaço de Hilbert admitindo a família dos  $\lambda(x_j)$  como base de Hilbert. Dados  $x, y \in E$ , podemos escrever  $x = \sum a_j x_j$  e  $y = \sum b_j x_j$ , tendo-se então  $\lambda(x) = \sum a_j \lambda(x_j)$  e  $\lambda(y) = \sum b_j \lambda(x_j)$  donde, pelo resultado precedente,

$$\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle = \sum a_j \bar{b}_j = \langle x, y \rangle,$$

o que mostra que a aplicação linear  $\lambda$  é unitária.  $\square$

O resultado que examinamos em seguida dá-nos um critério simples para que um espaço de Hilbert seja separável. Repare-se que esse critério vai mostrar, em particular, que se um espaço de Hilbert tem uma base de Hilbert contável então qualquer base de Hilbert é também contável.

**2.5.48 (Separabilidade e bases de Hilbert)** Seja  $E$  um espaço de Hilbert, com uma base de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$ . Tem-se então que  $E$  é separável se, e só se,  $J$  é

contável.

**Dem:** No caso em que  $J$  é contável, sabemos, por 2.1.71, que o subespaço vetorial  $F$  gerado pelos  $x_j$  é separável e portanto, tendo em conta a alínea a) de 1.3.28, a aderência  $\text{ad}(F) = E$  é também separável. No caso em que  $J$  não é contável, o facto de se ter, para  $j \neq k$ ,

$$\|x_j - x_k\| = \sqrt{\|x_j\|^2 + \|x_k\|^2} = \sqrt{2}$$

implica que a bola aberta de centro  $x_j$  e raio  $\sqrt{2}$  não contém mais nenhum elemento da base de Hilbert pelo que o conjunto dos elementos dessa base é um conjunto discreto não contável o que, por 1.3.29, implica que  $E$  não é de base contável e portanto não é separável (cf. 1.3.27).  $\square$

Embora, em geral, apenas saibamos da existência de bases de Hilbert num espaço de Hilbert por um teorema de existência não construtivo, há um caso particular em que, supondo a existência de um sistema linearmente independente e completo indexado em  $\mathbb{N}$ , se pode exhibir um método construtivo de obter tais bases, também indexadas em  $\mathbb{N}$ , o método de ortonormalização de Gram-Schmidt, que examinamos em seguida. É claro que, tendo em conta 2.5.48, não haverá esperanças de aplicar esse método no caso de um espaço de Hilbert não separável.

**2.5.49** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Definimos, para cada inteiro  $n \geq 1$ , um subconjunto  $\Omega_n(E)$  de  $E^n$ , cujos elementos são os sistemas  $(x_1, \dots, x_n)$  linearmente independentes e uma aplicação  $f_n: \Omega_n(E) \rightarrow E$  pela condição de  $f_n(x_1, \dots, x_n)$  ser a projecção ortogonal de  $x_n$  sobre o complementar ortogonal do subespaço vetorial gerado por  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  (reparar que este último subespaço é completo por ser de dimensão finita). Tendo em conta o resultado a seguir, podemos dizer que os  $f_n$  são as *funções ortonormalizadoras de Gram-Schmidt*.

**2.5.50 (Método de ortogonalização de Gram-Schmidt)** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Para cada  $n \geq 1$  tem-se então:

- $\Omega_n(E)$  é aberto em  $E^n$ ;
- A aplicação  $f_n: \Omega_n(E) \rightarrow E$  é contínua;
- Para cada  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_n(E)$ , os vetores

$$f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

constituem uma base ortogonal do subespaço vetorial de  $E$  gerado por  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (diz-se que estes vetores são os construídos a partir de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pelo *método de ortogonalização de Gram-Schmidt*).

**Dem:** Demonstramos o resultado por indução completa em  $n$ . Para  $n = 1$ , tem-se  $\Omega_1(E) = E \setminus \{0\}$ , que é aberto em  $E$ , e, uma vez que o complementar ortogonal de  $\{0\}$  é igual a  $E$ , a aplicação  $f_1: E \setminus \{0\} \rightarrow E$  está definida por  $f_1(x_1) = x_1$ , o que mostra que b) e c) são trivialmente



verificados. Seja agora  $n \geq 1$  tal que o resultado seja verdadeiro para cada  $1 \leq k \leq n$ .

Notemos agora que se tem  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega_{n+1}(E)$  se, e só se,  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_n(E)$  e  $x_{n+1}$  não pertence ao subespaço vetorial  $F_n$  gerado por  $x_1, \dots, x_n$ , o qual, tendo em conta a hipótese de indução, admite uma base ortonormada

$$g_1(x_1), g_2(x_1, x_2), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

onde

$$g_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{f_k(x_1, \dots, x_k)}{\|f_k(x_1, \dots, x_k)\|},$$

em particular as aplicações  $g_k: \Omega_k(E) \rightarrow E$  são também contínuas. Tendo em conta 2.5.23 e a caracterização da projecção ortogonal em 2.5.44, a condição  $x_{n+1} \notin F_n$  é equivalente à de  $x_{n+1}$  ser diferente da sua projecção ortogonal sobre  $F_n$ , ou seja à de se ter

$$(1) \quad x_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle x_{n+1}, g_k(x_1, \dots, x_k) \rangle g_k(x_1, \dots, x_k) \neq 0.$$

Uma vez que, sendo  $\Omega'_{n+1}(E)$  o subconjunto aberto de  $E^{n+1}$  constituído pelos  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  tais que  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_n(E)$ , o primeiro membro de (1) define uma função contínua de  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega'_{n+1}(E)$ , concluímos que  $\Omega_{n+1}(E)$  é aberto em  $\Omega'_{n+1}(E)$ , e portanto em  $E^{n+1}$ . Reparando agora que, para cada  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega_{n+1}(E)$ , se tem

$$f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle x_{n+1}, g_k(x_1, \dots, x_k) \rangle g_k(x_1, \dots, x_k),$$

vemos que  $f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \neq 0$ , que  $f_{n+1}: \Omega_{n+1} \rightarrow E$  é contínua e que  $f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  pertence ao subespaço vetorial gerado por  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ . Além disso, por construção,  $f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  é ortogonal ao subespaço gerado por  $x_1, \dots, x_n$ , que admite

$$f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

como base ortogonal, o que implica que

$$f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), f_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

é um sistema ortogonal de vetores não nulos do subespaço vetorial gerado por  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ , e portanto uma base ortogonal deste espaço.  $\square$

**2.5.51 (Método de ortonormalização de Gram-Schmidt)** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano. Considerando, para cada  $n \geq 1$ , o subconjunto aberto  $\Omega^n(E) \subset E^n$  e a aplicação contínua  $f_n: \Omega_n(E) \rightarrow E$  definidos em 2.5.49, podemos definir aplicações contínuas  $g_n: \Omega_n(E) \rightarrow E$  por

$$g_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{f_k(x_1, \dots, x_k)}{\|f_k(x_1, \dots, x_k)\|},$$

sendo então imediato que, para cada  $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_n(E)$ ,

$$g_1(x_1), g_2(x_1, x_2), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

constitui uma base ortonormada do subespaço vetorial gerado por  $x_1, \dots, x_n$ . Dizemos que esta base ortonormada é a obtida a partir da base  $x_1, \dots, x_n$  pelo *método de ortonormalização de Gram-Schmidt* e que os  $g_n$  são as *funções ortonormalizadoras de Gram-Schmidt*.

Apesar dos resultados anteriores serem essencialmente do contexto da dimensão finita, eles permitem também tirar uma conclusão sobre a dimensão infinita.

**2.5.52** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano, admitindo uma família completa e linearmente independente indexada em  $\mathbb{N}$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Considerando as funções ortonormalizadoras de Gram-Schmidt  $g_n: \Omega_n(E) \rightarrow E$ , podemos considerar, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o vetor  $y_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$ , a família  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é ortonormada e completa, portanto uma base de Hilbert de  $E$ .

**Dem:** Basta reparar que todo o vetor do subespaço vetorial gerado pelos  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , está também no subespaço vetorial gerado pelos  $x_n$ , com  $n \leq n_0$ , para algum  $n_0$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex. 2.5.1** Seja  $(E_j)_{j \in J}$  uma família de espaços de Hilbert, indexada num conjunto arbitrário  $J$ . Define-se então a respectiva *soma de Hilbert*  $\bigoplus_{j \in J} E_j$  como sendo o subconjunto do produto cartesiano  $\prod_{j \in J} E_j$  constituído pelas famílias  $(x_j)_{j \in J}$  com  $x_j \in E_j$  e  $\sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < +\infty$ .

**a)** Mostrar que  $\bigoplus_{j \in J} E_j$  é um subespaço vetorial de  $\prod_{j \in J} E_j$  e que se pode definir em  $\bigoplus_{j \in J} E_j$  uma estrutura de espaço de Hilbert, pondo

$$\langle (x_j)_{j \in J}, (y_j)_{j \in J} \rangle = \sum_{j \in J} \langle x_j, y_j \rangle.$$

**b)** Verificar que os espaços  $\ell^2(J)$ , definidos no texto, são casos particulares das somas de Hilbert de espaços de Hilbert.

**c)** Reparar que, em particular, o produto cartesiano de uma família finita de espaços de Hilbert fica com uma estrutura natural de espaço de Hilbert e verificar que a norma

associada a essa estrutura define a topologia produto das topologias associadas às normas de cada um dos factores.

**Ex. 2.5.2** Sejam  $a < b$  dois números reais e consideremos no espaço vetorial  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  das aplicações contínuas de  $[a, b]$  em  $\mathbb{K}$  as normas  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_1$ , consideradas no exercício 2.1.12, e a norma  $\|\cdot\|_2$  associada ao produto interno definido em 2.5.14.

**a)** Verificar que a norma  $\|\cdot\|_\infty$  é mais fina que a norma  $\|\cdot\|_2$  e utilizar a desigualdade de Schwarz para provar que a norma  $\|\cdot\|_2$  é mais fina que a norma  $\|\cdot\|_1$ .

**b)** Verificar que as normas  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_2$  não são equivalentes.

**c)** Verificar que as normas  $\|\cdot\|_2$  e  $\|\cdot\|_1$  não são equivalentes.

**d)** Com um raciocínio análogo ao utilizado no exercício 2.2.2, mostrar que  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , com o produto interno definido em 2.5.14, não é um espaço de Hilbert.

**Ex. 2.5.3** Sejam  $E$  é um espaço de Hilbert,  $A \subset E$  é um subconjunto arbitrário e  $F$  o subespaço vetorial gerado por  $A$ . Mostrar que  $A^\perp = \text{ad}(F)^\perp$  e deduzir que  $(A^\perp)^\perp = \text{ad}(F)$ . **Sugestão:** Lembrar 2.5.20 e 2.1.27.

**Ex. 2.5.4** Mostrar que em  $\mathbb{K}^n$ , com  $n \geq 2$ , as normas  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  não provêm de um produto interno. **Sugestão:** Averiguar a validade da identidade do paralelogramo.

**Ex. 2.5.5** Sendo  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais (maiores ou iguais a 1), considerar o espaço de Hilbert  $\ell^2 = \ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{N})$ , cujos elementos são as aplicações  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  tais que  $\sum |f(n)|^2 < +\infty$ , com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \geq 1} f(n) \overline{g(n)}.$$

**a)** Mostrar que existe uma aplicação linear contínua  $\lambda: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ , definida por

$$\lambda(f)(n) = f(n+1).$$

**b)** Determinar a aplicação linear adjunta  $\lambda^*: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ .

**Ex. 2.5.6** Consideremos o espaço de Hilbert  $\ell^2 = \ell_{\mathbb{K}}^2(\mathbb{Z})$ , cujos elementos são as aplicações  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$  tais que  $\sum_n |f(n)|^2 < +\infty$ , com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_n f(n) \overline{g(n)}.$$

**a)** Mostrar que tem lugar uma aplicação linear contínua  $\lambda: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ , definida por

$$\lambda(f)(n) = f(-n).$$

**b)** Mostrar que o conjunto  $\mathcal{E}$  das aplicações  $f \in \ell^2$  tais que  $f(n) = f(-n)$  é um subespaço vetorial fechado de  $\ell^2$ .

**c)** Mostrar que a projecção ortogonal  $\pi: \ell^2 \rightarrow \mathcal{E}$  está definida por

$$\pi(f)(n) = \frac{f(n) + f(-n)}{2}$$

e determinar o complementar ortogonal  $\mathcal{E}^\perp$  de  $\mathcal{E}$  em  $\ell^2$ .

**d)** Mostrar que a aplicação linear contínua  $\lambda: \ell^2 \rightarrow \ell^2$  é autoadjunta.

**e)** Determinar uma base ortonormada para  $\mathcal{E}$ .

**Ex. 2.5.7** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado. Verificar que  $F$  é topologicamente complementado (cf. 2.2.49).

**Ex. 2.5.8** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Hilbert e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua.

**a)** Mostrar que  $\lambda$  é um monomorfismo estrito (cf. o exercício 2.2.16) se, e só se,  $\lambda$  é injectiva e com  $\lambda(E)$  fechado em  $F$ . **Sugestão:** Lembrar as conclusões do exercício referido.

**b)** Mostrar que  $\lambda$  é um epimorfismo estrito (cf. o exercício 2.2.17) se, e só se,  $\lambda$  é sobrejectiva. **Sugestão:** Lembrar as conclusões do exercício referido.

**Ex. 2.5.9** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado e consideremos no espaço vetorial quociente  $E/F$  a norma correspondente (cf. 2.1.47). Verificar que existe em  $E/F$  um, e um só, produto interno cuja norma associada seja a referida e que então tem lugar um isomorfismo unitário  $F^\perp \rightarrow E/F$  definido por  $x \mapsto [x]_F$ . **Sugestão:** Começar por mostrar que tem lugar o isomorfismo referido e que este conserva a norma e utilizá-lo para transportar o produto interno de  $F^\perp$ .

**Ex. 2.5.10** Sendo  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais (maiores ou iguais a 1), considerar o espaço de Hilbert  $\ell^2 = \ell^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ , cujos elementos são as aplicações  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  tais que  $\sum |f(n)|^2 < +\infty$ , com o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \geq 1} f(n) \overline{g(n)}.$$

Verificar que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem lugar uma aplicação linear contínua  $\varphi_n: \ell^2 \rightarrow \mathbb{K}$ , definida por  $\varphi_n(f) = f(n)$ , que se tem  $\varphi_n(f) \rightarrow 0$ , para cada  $f \in \ell^2$  mas que  $\varphi_n$  não converge para 0 em  $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}); \mathbb{K})$ .

**Ex. 2.5.11** Seja  $E$  um espaço de Hilbert. Mostrar que tem lugar uma soma directa de subespaços vetoriais reais,

$$\mathcal{L}(E; E) = \mathcal{L}_{sa}(E; E) \oplus \mathcal{L}_{-sa}(E; E)$$

(cf. 2.5.34). Mostrar que, no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , tem-se  $\alpha \in \mathcal{L}_{sa}(E; E)$  se, e só se,  $i\alpha \in \mathcal{L}_{-sa}(E; E)$ . Deduzir daqui, no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e em que  $E$  tem dimensão finita  $n$ , qual a dimensão real dos subespaços  $\mathcal{L}_{sa}(E; E)$  e  $\mathcal{L}_{-sa}(E; E)$ .

**Ex. 2.5.12** Seja  $E$  um espaço de Hilbert. Para cada subespaço vetorial fechado  $F \subset E$ , notemos  $\iota_F: F \rightarrow E$  a aplicação inclusão e  $\pi_F: E \rightarrow F$  a projecção ortogonal sobre  $F$ . Mostrar que  $\pi_F$  é a aplicação linear adjunta de  $\iota_F$  ou, o que é o mesmo,  $\iota_F$  é a aplicação linear adjunta de  $\pi_F$ . Mostrar que, quando se olha para  $\pi_F$  como aplicação linear  $E \rightarrow E$ , a aplicação linear  $\pi_F$  é autoadjunta. **Nota:** Este exercício ilustra o cuidado que se deve ter, ao falar de adjunta de uma aplicação linear, em ter bem presente qual o espaço de Hilbert de chegada que se está a considerar.

**Ex. 2.5.13** Seja  $E$  um espaço de Hilbert e seja  $\lambda: E \rightarrow E$  uma aplicação linear contínua. Mostrar que existe um subespaço vetorial fechado  $F$  de  $E$  tal que  $\lambda$  seja a projecção ortogonal de  $E$  sobre  $F$  se, e só se, a aplicação linear contínua  $\lambda$  é autoadjunta e verifica  $\lambda \circ \lambda = \lambda$  ( $\lambda$  é *idempotente*). Mostrar ainda que, nesse caso, o subespaço vetorial fechado  $F$  é único, sendo simultaneamente igual à imagem de  $\lambda$ ,  $\lambda(E)$ , e ao complementar ortogonal do kernel de  $\lambda$ ,  $\ker(\lambda)^\perp$ .

**Ex. 2.5.14** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Hilbert e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua.

**a)** Mostrar que o complementar ortogonal de  $\lambda(E)$  é igual ao kernel da aplicação linear contínua  $\lambda^*: F \rightarrow E$ :  $\lambda(E)^\perp = \ker(\lambda^*)$ . Deduzir daqui que  $\ker(\lambda)^\perp$  é a aderência de  $\lambda^*(F)$ .

**b)** Mostrar que a aplicação linear contínua  $\lambda$  é injectiva se, e só se,  $\lambda^*(F)$  é um

subespaço vetorial denso de  $E$  e que  $\lambda(E)$  é um subespaço vetorial denso de  $F$  se, e só se, a aplicação  $\lambda^*: F \rightarrow E$  é injectiva.

**Ex. 2.5.15** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert,  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado e  $\pi \in \mathcal{L}(E; E)$  a projecção ortogonal de  $E$  sobre  $F$ . Verificar que  $\pi \circ \pi = \pi$  e deduzir daí que, considerando a aplicação exponencial da álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$  (cf. o exercício 2.3.11), tem-se  $\exp(\pi) = Id_E + (e - 1)\pi$ .

**Ex. 2.5.16** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert e consideremos a aplicação exponencial  $\exp: \mathcal{L}(E; E) \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$  da álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$  (cf. o exercício 2.3.11). Seja  $\lambda: E \rightarrow E$  uma aplicação linear contínua.

**a)** Mostrar que, sendo  $\lambda^*: E \rightarrow E$  a aplicação linear adjunta de  $\lambda$ , tem-se  $\exp(\lambda)^* = \exp(\lambda^*)$ .

**b)** Mostrar que, se a aplicação linear contínua  $\lambda$  é autoadjunta, isto é, se se tem  $\lambda^* = \lambda$ , então pode-se definir um segundo produto interno em  $E$  pela fórmula  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle \exp(\lambda)(x), y \rangle$ , produto interno cuja norma associada é equivalente à associada ao produto interno original. Sugestão: Atender a que se tem  $\exp(\lambda) = \exp(\frac{\lambda}{2}) \circ \exp(\frac{\lambda}{2})$ .

**c)** Mostrar que, se a aplicação linear contínua  $\lambda$  é anti-autoadjunta, isto é, se se tem  $\lambda^* = -\lambda$ , então a aplicação linear contínua  $\exp(\lambda): E \rightarrow E$  é um isomorfismo unitário.

**d)** Mostrar que  $\lambda$  é anti-autoadjunta se, e só se, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(t\lambda): E \rightarrow E$  é um isomorfismo unitário.

**Ex. 2.5.17** Seja  $E$  um espaço vetorial complexo.

**a)** Lembrar que, se  $\langle, \rangle_{\mathbb{C}}$  é um produto interno sobre  $E$ , então, quando se considera  $E$  como espaço vetorial real, tem lugar um *produto interno real associado*  $\langle, \rangle_{\mathbb{R}}$ , definido por  $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} = \Re(\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}})$  e que ambos os produtos internos têm a mesma norma associada (cf. 2.5.9). Verificar que o produto interno real associado verifica a propriedade  $\langle ix, iy \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}$ .

**b)** Seja  $\langle, \rangle_{\mathbb{R}}$  um produto interno sobre  $E$ , considerado como espaço vetorial real, que verifique a propriedade  $\langle ix, iy \rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}$ . Mostrar que existe então sobre  $E$ , enquanto espaço vetorial complexo, um, e um só, produto interno  $\langle, \rangle_{\mathbb{C}}$ , cujo produto interno real associado seja  $\langle, \rangle_{\mathbb{R}}$ , a saber, o definido por

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} + \langle x, iy \rangle_{\mathbb{R}}i.$$

**c)** Mostrar que, se  $E$  é um espaço pre-hilbertiano complexo e se  $F \subset E$  é um subespaço vetorial complexo, então o complementar ortogonal de  $F$  não se altera, se, em vez do produto interno complexo, se considera o produto interno real associado.

**d)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Hilbert complexos e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Mostrar que a aplicação linear adjunta de  $\lambda$  não se altera quando, em vez dos produtos internos complexos, se consideram os produtos internos reais.

**Ex. 2.5.18** Seja  $E$  um espaço vetorial real, munido de uma norma  $\| \cdot \|$ , verificando a identidade do paralelogramo, isto é, tal que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Mostrar que existe sobre  $E$  um, e um só, produto interno  $\langle, \rangle$ , cuja norma associada seja a norma dada, a saber, o definido por

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

**Sugestão:** A única verificação que não é trivial é a de que a igualdade anterior define efectivamente um produto interno, mais precisamente que ela define uma aplicação bilinear. Para isso verificar sucessivamente as seguintes propriedades:

a)  $\langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle;$

b)  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle;$  para esta última partir das identidades

$$\|x + y + z\|^2 + \|x + y - z\|^2 = 2\|x + y\|^2 + 2\|z\|^2$$

$$\|x + y - z\|^2 + \|x - y - z\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|y\|^2$$

e subtraí-las membro a membro;

c)  $\langle x, ny \rangle = n\langle x, y \rangle,$  para cada  $n \in \mathbb{Z};$

d)  $\langle x, ay \rangle = a\langle x, y \rangle,$  para cada racional  $a;$

e)  $\langle x, ay \rangle = a\langle x, y \rangle,$  para cada  $a \in \mathbb{R}.$

**Ex. 2.5.19** Seja  $E$  um espaço vetorial complexo, munido de uma norma  $\| \cdot \|$ , verificando a identidade do paralelogramo, isto é, tal que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Mostrar que existe sobre  $E$  um, e um só, produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , cuja norma associada seja a norma dada. Apresentar uma fórmula que caracterize este produto interno a partir da norma. **Sugestão:** Utilizar os exercícios 2.5.18 e 2.5.17.

**Ex. 2.5.20 (Construção alternativa dum completado)** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano.

a) Utilizando 2.5.31, verificar que existe um único produto interno em  $\overline{\mathcal{L}(E; \mathbb{K})}$  cuja norma associada seja a norma usual deste espaço de aplicações lineares e deduzir que  $\overline{\mathcal{L}(E; \mathbb{K})}$  é um espaço de Hilbert completado de  $E$  definido pela aplicação linear  $\hat{\gamma}: E \rightarrow \overline{\mathcal{L}(E; \mathbb{K})}$ .<sup>224</sup> **Sugestão:** Reparar que a existência do produto interno resulta de 2.5.17.

b) Verificar que, para o produto interno considerado em  $\overline{\mathcal{L}(E; \mathbb{K})}$ , tem-se, para cada  $y \in E$  e  $\lambda \in \overline{\mathcal{L}(E; \mathbb{K})}$ ,

$$\langle \hat{\gamma}_y, \lambda \rangle = \lambda(y).$$

**Sugestão:** Raciocinando por continuidade basta provar a igualdade quando  $\lambda$  for da forma  $\gamma_z$ .

**Ex. 2.5.21** Consideremos o espaço de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{N})$ , com a sua base de Hilbert canónica  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (cf. 2.5.42). Mostrar que a família dos vetores  $\frac{1}{n} e_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , é somável, mas não absolutamente somável.

**Ex. 2.5.22 (A soma directa de subespaços fechados pode não ser fechada<sup>225</sup>)** Seja  $E$  um espaço de Hilbert com uma base de Hilbert numerável que notaremos  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (por exemplo, o espaço  $\ell^2(\mathbb{N})$  com a sua base de Hilbert canónica). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

<sup>224</sup>Repare-se, no entanto, que este caminho não poderia constituir uma primeira construção de um completado, na medida em que estamos a utilizar 2.5.31 em cuja demonstração foi utilizada a existência de um completado.

<sup>225</sup>Comparar com a conclusão do exercício 2.1.30.

notemos

$$x_n = e_{2n-1}, \quad y_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} e_{2n-1} + \frac{1}{n} e_{2n}.$$

Sejam  $F \subset E$  a aderência do subespaço vetorial gerado pelos  $x_n$  e  $G \subset E$  a aderência do subespaço vetorial gerado pelos  $y_n$ , que são assim dois subespaços vetoriais fechados de  $E$ .

**a)** Verificar que os  $x_n$  constituem uma base de Hilbert de  $F$  e que os  $y_n$  constituem uma base de Hilbert de  $G$ .

**b)** Verificar que se tem  $F \cap G = \{0\}$  e que se pode portanto considerar a soma directa  $F \oplus G$ . **Sugestão:** Se  $w \in F \cap G$ , considerar as decomposições

$$w = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n, \quad w = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n y_n,$$

e utilizá-las para calcular de duas maneiras os produtos internos  $\langle w, e_{2n} \rangle$ .

**c)** Verificar que  $F \oplus G$  contém todos os  $e_k$  e, conseqüentemente, é um subespaço vetorial denso de  $E$ .

**d)** Verificar que  $F \oplus G \neq E$ , e portanto  $F \oplus G$  não é um subespaço vetorial fechado.

**Sugestão:** Se fosse  $F \oplus G = E$ , utilizar o corolário 2.2.41 do teorema de Banach da aplicação aberta para garantir a existência de um isomorfismo bicontínuo  $\sigma: F \times G \rightarrow E$ ,  $\sigma(x, y) = x + y$ , e reparar que isso é incompatível com o facto de se ter  $\|x_n\| = \|-y_n\| = 1$  e

$$\|x_n - y_n\| = \sqrt{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 0.$$

**Ex. 2.5.23** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e consideremos no espaço vetorial  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , das funções contínuas  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Utilizar o teorema de Weierstrass 2.4.3 para concluir que tem lugar um sistema linearmente independente completo de elementos  $Q_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , onde  $n \geq 0$ , definidos por  $Q_n(t) = t^n$ , a partir do qual se pode obter, pelo método de ortonormalização de Gram-Schmidt, uma base de Hilbert daquele espaço, formada por funções polinomiais  $P_n$ . **Nota:** No caso em que  $[a, b] = [-1, 1]$ , as funções polinomiais assim obtidas são, a menos de multiplicação por constantes convenientes, os chamados *polinómios de Legendre*.

**Ex. 2.5.24** Seja  $\mathcal{E}$  o conjunto das aplicações contínuas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que admitem o período  $2\pi$ , isto é, tais que se tem  $f(x + 2\pi) = f(x)$ , qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ .

**a)** Mostrar que  $\mathcal{E}$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  e que se pode definir em  $\mathcal{E}$  um produto interno pela igualdade

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} dt.$$

**b)** Sendo, para cada inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação contínua definida por  $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{nti}$ , verificar que se tem  $f_n \in \mathcal{E}$  e que a família dos  $f_n$  constitui uma família ortonormada de elementos de  $\mathcal{E}$ .

c) Utilizar 2.4.6 para mostrar que a família ortonormada atrás referida é completa, e portanto uma base de Hilbert.

d) Construir, a partir da família ortonormada anterior, uma nova família ortonormada que seja constituída por aplicações com valores reais. **Sugestão:** Reparar que  $f_{-n}(t) = \overline{f_n(t)}$ .

**Ex. 2.5.25** Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Hilbert,  $(x_j)_{j \in J}$  uma base de Hilbert de  $E$  e  $(y_j)_{j \in J}$  uma família ortogonal de vetores de  $F$ .

a) Mostrar que uma condição necessária e suficiente para que exista uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  tal que  $\lambda(x_j) = y_j$  é que exista  $M \geq 0$  tal que, para cada  $j$ ,  $\|y_j\| \leq M$ . Mostrar ainda que, nesse caso, uma tal aplicação linear contínua  $\lambda$  é única.

b) Suponhamos verificadas as condições de a) e que, além disso, existe  $m > 0$  tal que  $\|y_j\| \geq m$ , para cada  $j$ . Mostrar que  $\lambda$  é então um isomorfismo topológico de  $E$  sobre  $\lambda(E) \subset F$ .

c) Supondo verificadas as condições de a) e de b), mostrar que  $\lambda(E)$  é um subespaço vetorial fechado de  $F$ .

**Ex. 2.5.26** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Hilbert, com bases de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$  e  $(y_k)_{k \in K}$ , respectivamente. Dada uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$ , vamos chamar *matriz generalizada* de  $\lambda$  naquelas bases a família  $(a_{k,j})_{(k,j) \in K \times J}$  definida por

$$\lambda(x_j) = \sum_{k \in K} a_{k,j} y_k.$$

a) Verificar que, nas condições anteriores, tem-se  $a_{k,j} = \langle \lambda(x_j), y_k \rangle$ .

b) Verificar que duas aplicações lineares contínuas, com a mesma matriz generalizada, coincidem.

c) Sejam  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua e  $\lambda^*: F \rightarrow E$  a respectiva aplicação linear adjunta. Sejam  $(a_{k,j})_{(k,j) \in K \times J}$  e  $(b_{j,k})_{(j,k) \in J \times K}$  as matrizes generalizadas de  $\lambda$  e de  $\lambda^*$ , respectivamente. Mostrar que se tem  $b_{j,k} = \overline{a_{k,j}}$  (as matrizes são *transconjugadas*).

**Ex. 2.5.27** Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços de Hilbert e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua, com a respectiva aplicação linear adjunta  $\lambda^*: F \rightarrow E$ .

a) Dadas bases de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$  de  $E$  e  $(y_k)_{k \in K}$  de  $F$ , mostrar que se tem

$$\sum_{j \in J} \langle \lambda(x_j), \lambda(x_j) \rangle = \sum_{k \in K} \langle \lambda^*(y_k), \lambda^*(y_k) \rangle$$

e, em particular, que o primeiro membro é finito se, e só se, o segundo membro é finito. **Sugestão:** Pensar na matriz generalizada de  $\lambda$  naquelas bases. Deduzir que a condição de se ter  $\sum_{j \in J} \langle \lambda(x_j), \lambda(x_j) \rangle < +\infty$  não depende da escolha da base de

Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$ . Quando ela se verificar, diz-se que  $\lambda$  é uma *aplicação linear de Hilbert-Schmidt*. Em particular, a aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  é de Hilbert-Schmidt se, e só se,  $\lambda^*: F \rightarrow E$  é de Hilbert-Schmidt.

b) Mostrar que, se pelo menos um dos espaços de Hilbert  $E$  e  $F$  tem dimensão finita, então toda a aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  é de Hilbert-Schmidt.

c) Sejam  $\lambda, \mu: E \rightarrow F$  duas aplicações lineares contínuas de Hilbert-Schmidt. Mostrar que, para cada base de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$  de  $E$  a família dos escalares  $\langle \lambda(x_j), \mu(x_j) \rangle$  é absolutamente somável e que a soma  $\sum_{j \in J} \langle \lambda(x_j), \mu(x_j) \rangle$  não depende

da escolha da base de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$ . Vamos notar esta soma  $\langle \lambda, \mu \rangle$ , portanto



$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{j \in J} \langle \lambda(x_j), \mu(x_j) \rangle.$$

Mostrar simultaneamente que, sendo  $(a_{k,j})$  e  $(b_{k,j})$  as matrizes generalizadas de  $\lambda$  e de  $\mu$ , tomadas relativamente a duas bases ortonormadas de  $E$  e de  $F$ , tem-se

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{k,j} a_{k,j} \overline{b_{k,j}} = \langle \mu^*, \lambda^* \rangle,$$

em que a soma é a de uma família absolutamente somável.

**d)** Sejam  $(x_j)_{j \in J}$  e  $(y_j)_{j \in J}$  bases ortonormadas fixadas de  $E$  e  $F$ . Mostrar que, para cada família de escalares  $(a_{k,j})_{(k,j) \in K \times J}$ , pertencente a  $\ell^2(K \times J)$ , existe uma única aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$ , cuja matriz generalizada naquelas bases é aquela família e que esta aplicação é de Hilbert-Schmidt. Deduzir que o conjunto  $\mathcal{L}_{\text{HS}}(E; F)$ , das aplicações lineares contínuas de Hilbert-Schmidt, é um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E; F)$  e que em  $\mathcal{L}_{\text{HS}}(E; F)$  ficou definido um produto interno. Mostrar que a aplicação que a cada  $\lambda \in \mathcal{L}_{\text{HS}}(E; F)$  associa a sua matriz generalizada é um isomorfismo unitário de  $\mathcal{L}_{\text{HS}}(E; F)$  sobre  $\ell^2(K \times J)$  e portanto que  $\mathcal{L}_{\text{HS}}(E; F)$  é mesmo um espaço de Hilbert.

**e)** Notemos  $\| \cdot \|$  a norma de  $\mathcal{L}_{\text{HS}}(E; F)$  induzida pela norma usual de  $\mathcal{L}(E; F)$  e  $\| \cdot \|_{\text{HS}}$  a norma deste espaço associada ao produto interno atrás definido. Mostrar que se tem sempre  $\| \lambda \| \leq \| \lambda \|_{\text{HS}}$  e que, no caso em que pelo menos um dos espaços de Hilbert  $E$  e  $F$  tem dimensão finita, as normas  $\| \cdot \|$  e  $\| \cdot \|_{\text{HS}}$  são equivalentes.

**f)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Hilbert, um dos quais de dimensão 1. Mostrar que em  $\mathcal{L}(E; F) = \mathcal{L}_{\text{HS}}(E; F)$  a norma usual  $\| \cdot \|$  coincide com a norma  $\| \cdot \|_{\text{HS}}$ .

**g)** Mostrar que, no caso em que ambos os espaços de Hilbert  $E$  e  $F$  são de dimensão infinita, as normas  $\| \cdot \|$  e  $\| \cdot \|_{\text{HS}}$  em  $\mathcal{L}_{\text{HS}}(E; F)$  não são equivalentes.

**Ex. 2.5.28** Mostrar que, se  $E$  é um espaço de Hilbert de dimensão infinita, uma base de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$  de  $E$  nunca é uma base no sentido algébrico. Deduzir daqui, tendo em conta o método de ortonormalização de Gram-Schmidt, que um espaço de Hilbert nunca admite uma base algébrica numerável. **Nota:** Este resultado tem uma justificação alternativa, uma vez que é um caso particular do que foi estudado no exercício 2.2.15.

**Ex. 2.5.29 (Ter presente o teorema de Tichonoff em 1.6.34)** Seja  $E$  um espaço de Hilbert, com uma base de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$ , e seja  $(r_j)_{j \in J}$  uma família de reais  $r_j \geq 0$  tal que  $\sum_{j \in J} r_j^2 < +\infty$ . Seja  $C \subset E$  o cubo de Hilbert, constituído pelos  $x \in E$  tais que, na decomposição  $x = \sum_{j \in J} a_j x_j$ , se tenha  $|a_j| \leq r_j$ .

**a)** Mostrar que  $C$  é compacto;

**b)** Mostrar que, se  $(y_k)_{k \in K}$  é uma sucessão generalizada de elementos de  $C$  e se  $y \in C$ , com  $y_k = \sum_{j \in J} a_{k,j} x_j$  e  $y = \sum_{j \in J} a_j x_j$ , então  $y_k \rightarrow y$  se, e só se, para cada  $j \in J$ ,

$$a_{k,j} \rightarrow a_j.$$

**Sugestão:** Para ambas as alíneas, considerar, para cada  $j \in J$ , o subconjunto compacto  $X_j$  de  $\mathbb{K}$ , constituído pelos escalares de módulo menor ou igual a  $r_j$ , e o produto cartesiano  $X = \prod_{j \in J} X_j$  que, com a a topologia produto, é compacto. Mostrar

que tem lugar uma aplicação contínua e bijectiva de  $X$  sobre  $C$ , que a cada  $(a_j)_{j \in J}$  associa  $\sum_{j \in J} a_j x_j$ .

## §6. Outras topologias vetoriais. Topologias fracas.

**2.6.1** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Vamos dizer que uma topologia sobre  $E$  é uma *topologia vetorial*, ou que  $E$ , considerado com essa topologia, é um *espaço vetorial topológico* se forem contínuas as aplicações

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y, \\ \mathbb{K} \times E &\rightarrow E, (t, x) \mapsto tx \end{aligned}$$

(comparar com o exercício 1.5.3).

**2.6.2** Se recordamos os resultados obtidos em 2.1.18 e 2.1.22, concluímos que se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  então  $E$  é um espaço vetorial topológico, quando munido da topologia associada à norma.

**2.6.3** Tal como verificámos no caso dos espaços vetoriais normados, dados um espaço vetorial topológico  $E$  sobre  $\mathbb{K}$ , um espaço topológico  $Z$  e  $z_0 \in Z$ , tem-se:

**a)** Sendo  $C \subset Z$ , com  $z_0$  aderente a  $C$ , e  $f, g: C \rightarrow E$  duas aplicações tais que

$$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} x \in E, \quad g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} y \in E,$$

então

$$f(z) + g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} x + y.$$

Em particular se  $f, g: Z \rightarrow E$  são duas aplicações contínuas no ponto  $z_0$  então é também contínua no ponto  $z_0$  a aplicação  $f + g: Z \rightarrow E$ , que a  $z \in X$  associa  $f(z) + g(z)$ .

**b)** Sendo  $C \subset Z$ , com  $z_0$  aderente a  $C$ , e  $\alpha: C \rightarrow \mathbb{K}$  e  $f: C \rightarrow E$  duas aplicações tais que

$$\alpha(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} c \in \mathbb{K}, \quad f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} x \in E,$$

então

$$\alpha(z)f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} cx.$$

Em particular, se  $\alpha: Z \rightarrow \mathbb{K}$  e  $f: Z \rightarrow E$  são duas aplicações contínuas no ponto  $z_0$  então é também contínua no ponto  $z_0$  a aplicação  $\alpha f: Z \rightarrow E$ , que a  $z \in X$  associa  $\alpha(z)f(z)$ .

c) Para cada  $x_0 \in E$  a translação  $\tau_{x_0}: E \rightarrow E$ , definida por  $x \mapsto x_0 + x$ , é contínua (soma de uma constante com a identidade) e portanto um homeomorfismo por ter a translação  $\tau_{-x_0}$  como inversa.

d) Para cada  $r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  a homotetia  $\rho_r: E \rightarrow E$ , definida por  $x \mapsto rx$ , é contínua (produto de uma constante pela identidade), e portanto um homeomorfismo por ter a homotetia  $\rho_{1/r}$  como inversa.

**Dem:** Trata-se de consequências diretas da continuidade das aplicações referidas em 2.6.1 e da caracterizações dos limites de aplicações com valores num produto cartesiano.  $\square$

Vamos examinar nesta secção alguns exemplos importantes de topologias vetoriais que não aparecem como associadas a nenhuma norma.

**2.6.4** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . No espaço dual  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , das aplicações lineares contínuas  $E \rightarrow \mathbb{K}$ , vamos chamar *topologia fraca-\** (lê-se “fraca-estrela”) à topologia induzida pela topologia da convergência simples do conjunto  $Ap(E, \mathbb{K})$  de todas as aplicações  $E \rightarrow \mathbb{K}$  (cf. 1.2.82), topologia essa que sabemos ser de Haudorff, por isso acontecer à topologia de  $\mathbb{K}$ . Frequentemente escreveremos  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$  quando quisermos evidenciar que estamos a considerar em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  a topologia fraca-<sup>226</sup> (por oposição à topologia associada à norma de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  que por vezes também é designada por *topologia forte*).

**2.6.5** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  então, para cada  $x_0 \in E$ , a aplicação linear  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\lambda \mapsto \lambda(x_0)$ , que por 2.1.34 sabemos ser contínua, é também contínua como aplicação  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*} \rightarrow \mathbb{K}$ .<sup>227</sup>

**Dem:** Lembremos que, como referido na nota c) em 1.5.14, a topologia da convergência simples de  $Ap(E, \mathbb{K})$  coincide com a topologia produto indexada em  $E$  e com todos os fatores iguais a  $\mathbb{K}$ , facto que utilizaremos doravante sem referência explícita. Constatamos agora, tendo em conta a alínea b) de 1.5.15, que a aplicação em questão é contínua por ser a restrição da aplicação contínua  $Ap(E, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  definida do mesmo modo.  $\square$

De facto, como veremos a seguir, podemos afirmar mais: As únicas aplicações lineares contínuas  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*} \rightarrow \mathbb{K}$  são as do tipo atrás referido. Demonstramos antes dois lemas de natureza puramente algébrica.

**2.6.6 (Lemas algébricos)** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e sejam  $\lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_n: E \rightarrow \mathbb{K}$  aplicações lineares. Tem-se então:

<sup>226</sup>A letra  $w$  está associada à palavra inglesa “weak”.

<sup>227</sup>Repare-se que, ao contrário do que sucedia em 2.1.34, não estamos aqui a afirmar a continuidade da aplicação bilinear de avaliação  $\Phi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*} \times E \rightarrow \mathbb{K}$ . De facto, afastado o caso em que  $E$  tem dimensão finita, a alínea c) do exercício 2.6.1 mostra que aquela aplicação bilinear não é contínua.

**a)** Se  $\xi_0: L(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  é uma aplicação linear então existe  $x_0 \in E$  tal que  $\xi_0(\lambda_j) = \lambda_j(x_0)$  para cada  $1 \leq j \leq n$ .<sup>228</sup>

**b)** Seja  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação linear tal que  $\lambda(x) = 0$  para cada  $x \in E$  com  $\lambda_j(x)$  para todo o  $1 \leq j \leq n$ . Existem então escalares  $a_j \in \mathbb{K}$  tais que

$$\lambda = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_n\lambda_n.$$

**Dem:** **a)** Seja  $F \subset E$  o subespaço vetorial,

$$F = \{x \in E \mid \lambda_j(x) = 0 \text{ para cada } 1 \leq j \leq n\}.$$

Considerando o espaço vetorial quociente  $E/F$  e a aplicação linear canónica  $\rho: E \rightarrow E/F$ , sejam  $\widehat{\lambda}_j: E/F \rightarrow \mathbb{K}$  as aplicações lineares definidas por  $\widehat{\lambda}_j([x]_F) = \lambda_j(x)$  e  $\widehat{\xi}_0: \mathcal{L}(E/F; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  a aplicação linear definida por  $\widehat{\xi}_0(\widehat{\lambda}) = \xi_0(\widehat{\lambda} \circ \rho)$ . Reparemos que o facto de termos uma aplicação linear injetiva  $E/F \rightarrow \mathbb{K}^n$  que a cada  $[x]_F$  associa

$$(\widehat{\lambda}_1([x]_F), \dots, \widehat{\lambda}_n([x]_F)) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)),$$

implica que  $E/F$  tem dimensão finita. Podemos assim concluir que tem lugar um isomorfismo  $\Theta: E/F \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E/F; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  que a  $[x]_F$  associa a aplicação linear  $\widehat{\xi} \mapsto \widehat{\xi}([x]_F)$  pelo que podemos considerar  $x_0 \in E$  tal que  $\Theta([x_0]_F) = \widehat{\xi}_0$ , tendo-se então para cada  $1 \leq j \leq n$

$$\xi_0(\lambda_j) = \xi_0(\widehat{\lambda}_j \circ \rho) = \widehat{\xi}_0(\widehat{\lambda}_j) = \Theta([x_0]_F)(\widehat{\lambda}_j) = \widehat{\lambda}_j([x_0]_F) = \lambda_j(x_0).$$

**b)** Suponhamos que não existiam escalares  $a_1, \dots, a_n$  nas condições referidas, isto é, que  $\lambda$  não pertencia ao subespaço vetorial  $\mathcal{E}$  de  $L(E; \mathbb{K})$  gerado por  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Podíamos então considerar uma aplicação linear  $\xi_0: L(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  que fosse identicamente 0 em  $\mathcal{E}$  e com  $\xi_0(\lambda) \neq 0$ , aplicação linear cuja existência se pode garantir considerando uma base de  $\mathcal{E}$ , juntando-lhe  $\lambda$  e completando o resultado numa base de  $L(E; \mathbb{K})$ . Pelo lema em a) existia então  $x_0 \in E$  tal que  $0 = \xi_0(\lambda_j) = \lambda_j(x_0)$  e, no entanto,  $0 \neq \xi_0(\lambda) = \lambda(x_0)$ , o que contrariava a hipótese.  $\square$

**2.6.7** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $\xi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação linear contínua. Existe então um único elemento  $x_0 \in E$  tal que

$$\xi(\lambda) = \lambda(x_0)$$

para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ .

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes:

**1)** Começemos por mostrar a unicidade de  $x_0$  nas condições do enunciado.

**Subdem:** Suponhamos que  $x_0 \neq x'_0$  em  $E$ . Tem-se então  $x_0 - x'_0 \neq 0$  pelo que pelo corolário 2.1.62 do teorema de Hahn-Banach, podemos considerar  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  tal que  $\lambda(x_0 - x'_0) \neq 0$ , donde  $\lambda(x_0) \neq \lambda(x'_0)$ , o que mostra

<sup>228</sup>Observe-se que no caso em que  $E$  tem dimensão finita esta conclusão resulta trivialmente de a aplicação linear usual  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  ser um isomorfismo.

que é impossível ser simultaneamente  $\xi(\lambda) = \lambda(x_0)$  e  $\xi(\lambda) = \lambda(x'_0)$ .

**2)** Vamos mostrar a existência de vetores  $x_1, \dots, x_n \in E$  tal que se tenha  $\xi(\lambda) = 0$  sempre que  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  verifica  $\lambda(x_j) = 0$  para cada  $1 \leq j \leq n$ .

**Subdem:** Tendo em conta a continuidade de  $\xi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*} \rightarrow \mathbb{K}$  em 0, podemos, a partir da vizinhança  $B_1(0)$  de  $0 = \xi(0)$  em  $\mathbb{K}$ , considerar uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de 0 em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$  tal que se tenha  $|\xi(\lambda)| < 1$  sempre que  $\lambda \in \mathcal{U}$ . Tendo em conta a caracterização das vizinhanças para a topologia produto e para a topologia induzida podemos então considerar vetores  $x_1, \dots, x_n$  em  $E$  e  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$  tais que se tenha  $\lambda \in \mathcal{U}$  sempre que para todo o  $1 \leq j \leq n$  se tenha  $|\lambda(x_j)| < \varepsilon_j$ . Vemos agora que se for  $\lambda(x_j) = 0$  para cada  $1 \leq j \leq n$  vemos que para todo o  $R > 0$  também

$$|(R\lambda)(x_j)| = R|\lambda(x_j)| = 0 < \varepsilon_j$$

donde  $R\lambda \in \mathcal{U}$  e portanto

$$R|\xi(\lambda)| = |\xi(R\lambda)| < 1$$

ou ainda  $|\xi(\lambda)| < \frac{1}{R}$  o que, tendo em conta a arbitrariedade de  $R$ , implica que  $\xi(\lambda) = 0$ .

**3)** Nas notações de 2.2.19, vemos agora que as aplicações lineares

$$\Theta(x_1), \dots, \Theta(x_n): \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

são tais que  $\xi(\lambda) = 0$  sempre que para cada  $1 \leq j \leq n$

$$0 = \lambda(x_j) = \Theta(x_j)(\lambda)$$

pelo que, aplicando o lema algébrico na alínea b) de 2.6.6, concluímos que existem escalares  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$\xi = a_1\Theta(x_1) + \dots + a_n\Theta(x_n) = \Theta(a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$$

e portanto, sendo  $x_0 = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \in E$ , tem-se efetivamente, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ ,

$$\xi(\lambda) = \Theta(x_0)(\lambda) = \lambda(x_0). \quad \square$$

**2.6.8 (Comparação das topologias)** A topologia associada à norma de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é mais fina que a topologia fraca-\*, isto é, tendo em conta a caracterização em 1.4.11, a identidade

$$Id: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$$

é contínua.

**Dem:** Tendo em conta a alínea a) de 1.5.15, basta mostrarmos que para cada  $x_0 \in E$  é contínua a aplicação

$$\mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda \mapsto \lambda(x_0),$$

e esse facto resulta de 2.1.34. □

**2.6.9 (Continuidade das operações)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . São então contínuas as aplicações

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} &\rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}, & (\lambda, \mu) &\mapsto \lambda + \mu, \\ \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} &\rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}, & (t, \lambda) &\mapsto t\lambda, \end{aligned}$$

por outras palavras,  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$  é um espaço vetorial topológico.

**Dem:** Tendo em conta a alínea a) de 1.5.15, para provarmos a continuidade da primeira aplicação basta provar que para cada  $x_0 \in E$  é contínua a aplicação

$$\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (\lambda, \mu) \mapsto \lambda(x_0) + \mu(x_0),$$

e isso resulta de que temos a composta da aplicação contínua

$$\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}, \quad (\lambda, \mu) \mapsto (\lambda(x_0), \mu(x_0))$$

(cf. 2.1.34), com a soma que é uma aplicação contínua  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ . Analogamente, para provar a continuidade da segunda aplicação basta provar que para cada  $x_0 \in E$  é contínua a aplicação

$$\mathbb{K} \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (t, \lambda) \mapsto t\lambda(x_0)$$

e isso resulta de que temos a composta da aplicação contínua

$$\mathbb{K} \times \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K}, \quad (t, \lambda) \mapsto (t, \lambda(x_0))$$

com a multiplicação que é uma aplicação contínua  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ .  $\square$

**2.6.10 (Funtorialidade)** Sejam os espaços vetoriais normados  $E, F$  sobre  $\mathbb{K}$  e  $\varphi: F \rightarrow E$  uma aplicação linear contínua e consideremos a correspondente aplicação linear contínua  $\mathcal{L}(\varphi; Id): \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  definida por  $\mathcal{L}(\varphi; Id)(\lambda) = \lambda \circ \varphi$  (caso particular de 2.1.44 com  $n = 1$ ). Tem-se então que  $\mathcal{L}(\varphi; Id)$  também é contínua como aplicação

$$\mathcal{L}(\varphi; Id): \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})_{w*}.$$

**Dem:** Tendo em conta a alínea a) de 1.5.15, para provarmos a continuidade de  $\mathcal{L}(\varphi; Id): \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathbb{K})_{w*}$  basta provarmos que para cada  $y \in F$  é contínua a aplicação  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathbb{K}$  que a cada  $\lambda$  associa

$$\mathcal{L}(\varphi; Id)(\lambda)(y) = \lambda(\varphi(y))$$

e essa continuidade resulta de cf. 2.6.5.  $\square$

**2.6.11 (Mudança de escalares)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado complexo e consideremos o espaço de Banach complexo  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})$  e o espaço de Banach real  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$ . Tem-se então que o isomorfismo

$$\mathcal{R}: \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$$

definido por  $\mathcal{R}(\mu) = \lambda$ , onde  $\lambda(x) = \Re(\mu(x))$  é a parte real de  $\mu(x)$  (cf.

2.1.60) é um homeomorfismo  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})_{w^*} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})_{w^*}$ .

**Dem:** Tendo em conta a alínea a) de 1.5.15, para provarmos a continuidade de  $\mathcal{R}: \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})_{w^*} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})_{w^*}$  basta verificar que para cada  $x_0 \in E$  é contínua a aplicação  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})_{w^*} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\mu \mapsto \mathcal{R}(\mu)(x_0) = \Re(\mu(x_0))$$

e isso resulta da continuidade das aplicações lineares  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})_{w^*} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mu \mapsto \mu(x_0)$ , e  $\Re: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . Do mesmo modo, para provarmos a continuidade de  $\mathcal{R}^{-1}: \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})_{w^*} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C})_{w^*}$  basta verificar que para cada  $x_0 \in E$  é contínua a aplicação  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})_{w^*} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\lambda \mapsto \mathcal{R}^{-1}(\lambda)(x_0)$  e isso resulta de que, por 2.1.60, tem-se

$$\mathcal{R}^{-1}(\lambda)(x_0) = \lambda(x_0) - i\lambda(ix_0). \quad \square$$

Vamos agora debruçar-nos sobre duas propriedades especiais que são válidas no caso em que o espaço vetorial  $E$  tem dimensão finita.

**2.6.12** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n \geq 1$ , com uma base  $w_1, \dots, w_n$ . Tem-se então, considerando a norma do máximo em  $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ , que sabemos definir a topologia produto (cf. 2.1.12):

**a)** Tem lugar um isomorfismo topológico

$$\Psi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$$

definido por

$$\Psi(\lambda) = (\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_n)).$$

**b)** O isomorfismo

$$\Psi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*} \rightarrow \mathbb{K}^n$$

referido em a) é também um homeomorfismo.

**Dem: a)** Lembrando que, por  $E$  ter dimensão finita, toda a aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua (cf. 2.1.51), o facto de a aplicação linear  $\Psi$  ser um isomorfismo traduz simplesmente a propriedade de uma aplicação linear ficar univocamente determinada quando se fixam arbitrariamente as imagens dos elementos de uma base. O facto de  $\Psi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$  ser um isomorfismo topológico resulta de toda a aplicação linear entre espaços vetoriais normados com domínio de dimensão finita ser contínua

**b)** Para verificar que  $\Psi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*} \rightarrow \mathbb{K}^n$  é contínua basta mostrarmos que cada uma das coordenadas de  $\Psi$   $\Psi_j: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*} \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua. Ora, isso resulta de 2.6.5 uma vez que  $\Psi_j(\lambda) = \lambda(w_j)$ . O facto de

$$\Psi^{-1}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$$

ser contínua resulta de que se trata da compostas das aplicações contínuas  $\Psi^{-1}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $Id: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$  (cf. 2.6.8).  $\square$

**2.6.13 (Corolário)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado de dimensão finita sobre  $\mathbb{K}$ . Tem-se então  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$ , isto é, a topologia fraca-\* coincide com a definida pela norma.

**Dem:** No caso em que  $E$  tem dimensão 0 o espaço vetorial  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  tem a aplicação linear 0 como único elemento e, como tal, possui uma única topologia. No caso em que a dimensão de  $E$  é maior que 0, temos que as duas topologias coincidem por a identidade  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$  ser um homeomorfismo, uma vez que se trata da composta dos homeomorfismos  $\Psi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n$  e  $\Psi^{-1}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$ .  $\square$

Deixando de nos restringir a espaços vetoriais de dimensão finita, vamos agora examinar um resultado importante de compacidade para a topologia fraca-\*

**2.6.14 (Teorema de Banach-Alaoglu)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . Para cada  $R > 0$  a bola fechada

$$\overline{B}_R(0) = \{\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \mid \|\lambda\| \leq R\}$$

é compacta em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$ , em particular é também fechada em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$ .

**Dem:** Lembrando que a topologia da convergência simples de  $Ap(E, \mathbb{K})$  coincide com a topologia produto, e reparando que, para cada  $x \in E$ , o conjunto fechado e limitado em  $\mathbb{K}$

$$K_x = \{y \in \mathbb{K} \mid |y| \leq R\|x\|\},$$

é compacto, deduzimos do teorema de Tichonoff em 1.6.34 que é compacto para a topologia da convergência simples de  $Ap(E, \mathbb{K})$  o conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \prod_{x \in E} K_x = \{f: E \rightarrow \mathbb{K} \mid \forall_{x \in E} f(x) \in K_x\} = \\ &= \{f: E \rightarrow F \mid \forall_{x \in E} |f(x)| \leq R\|x\|\}. \end{aligned}$$

Notemos agora que o subconjunto  $L(E; \mathbb{K})$  de  $Ap(E, \mathbb{K})$  constituído por todas as aplicações lineares (contínuas ou não) é fechado para a topologia da convergência simples, por ser a interseção da interseção, para  $x, y \in E$ , das imagens recíprocas de  $\{0\}$  pelas aplicações contínuas  $Ap(E, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$

$$f \mapsto f(x + y) - f(x) - f(y)$$

com a interseção para,  $x \in E$  e  $a \in \mathbb{K}$ , das imagens recíprocas de  $\{0\}$  pelas aplicações contínuas  $Ap(E, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$

$$f \mapsto f(ax) - af(x).$$



Reparando por fim que se tem

$$\overline{\mathcal{B}}_R(0) = L(E; \mathbb{K}) \cap \mathcal{K},$$

concluimos que  $\overline{\mathcal{B}}_R(0)$  é fechado em  $\mathcal{K}$ , e portanto compacto para a topologia da convergência simples ou, o que é o mesmo, para a topologia fraca-\* de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ . O facto de a bola fechada  $\overline{\mathcal{B}}_R(0)$  ser fechada em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$  é uma consequência deste espaço topológico ser de Hausdorff.  $\square$

**2.6.15 (Variante de Banach-Alaoglu)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado separável sobre  $\mathbb{K}$ . Para cada  $R > 0$ , a topologia induzida na bola fechada

$$\overline{\mathcal{B}}_R(0) = \{\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \mid \|\lambda\| \leq R\}$$

pela topologia de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$  é metrizável e, consequentemente,  $\overline{\mathcal{B}}_R(0)$ , com esta topologia, além de ser compacto é também sequencialmente compacto.

**Dem:** Uma vez que, como se viu em 2.6.14,  $\overline{\mathcal{B}}_R(0)$ , com a topologia induzida pela de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*}$ , é compacto, se verificarmos que é também sequencialmente compacto bastará, por 1.7.39, mostrar que se trata de um espaço topológico metrizável. Para verificarmos que isso acontece, vamos utilizar o teorema de metrizabilidade em 1.6.30. Ora, uma vez que  $E$  é separável, podemos considerar uma parte contável  $A \subset E$  densa e, para cada  $a \in A$ , a aplicação contínua  $f_a: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w^*} \rightarrow \mathbb{K}$  definida por  $\lambda \mapsto \lambda(a)$  (cf. 2.1.34). Com o objetivo de mostrarmos que a família das restrições a  $\overline{\mathcal{B}}_R(0)$  das aplicações contínuas  $f_a$  separa os pontos de  $\overline{\mathcal{B}}_R(0)$ , consideremos  $\lambda \neq \mu$  em  $\overline{\mathcal{B}}_R(0)$ . Podemos então considerar  $x \in E$  tal que  $\lambda(x) \neq \mu(x)$  e, sendo  $\delta = |\lambda(x) - \mu(x)| > 0$  e  $M > 0$  tal que  $\|\lambda\| \leq M$  e  $\|\mu\| \leq M$ , considerar, para densidade de  $A$ ,  $a \in A$  tal que  $\|x - a\| < \frac{\delta}{2M}$ . Tem-se então, como queríamos,

$$f_a(\lambda) = \lambda(a) \neq \mu(a) = f_a(\mu)$$

visto que se fosse  $\lambda(a) = \mu(a)$ , vinha

$$\begin{aligned} \delta &= |\lambda(x) - \mu(x)| \leq |\lambda(x) - \lambda(a)| + |\mu(a) - \mu(x)| \leq \\ &\leq \|\lambda\| \|x - a\| + \|\mu\| \|a - x\| < M \frac{\delta}{2M} + M \frac{\delta}{2M} = \delta, \end{aligned}$$

o que era absurdo.  $\square$

Vamos agora utilizar as topologias fracas-\* dos duais de espaços vetoriais normados para definir a outra topologia importante no contexto dos espaços vetoriais normados que referimos no início desta secção.

**2.6.16** Seja  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . Chamamos *topologia fraca* de  $E$  à topologia para a qual a aplicação linear injetiva

$$\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$$

(cf. 2.2.19) é um homeomorfismo sobre  $\Theta(E) \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ , com a topologia induzida pela topologia fraca-\*, a qual coincide com a topologia induzida pela topologia da convergência simples de  $Ap(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}), \mathbb{K})$ . Escreveremos por vezes  $E_w$  quando quisermos sublinhar que estamos a considerar em  $E$  a sua topologia fraca e não a topologia original, associada à norma (por oposição, chamada também *topologia forte*). Observe-se que a topologia fraca de  $E$  é uma topologia de Hausdorff, uma vez que é homeomorfa à topologia de um subespaço vetorial do espaço de Hausdorff  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})_{w^*}$ .

**2.6.17** Se  $E$  é um espaço vetorial normado então cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é também uma aplicação linear contínua  $E_w \rightarrow \mathbb{K}$ .<sup>229</sup>

**Dem:** Lembremos que, como referido na nota c) em 1.5.14, a topologia da convergência simples de  $Ap(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}), \mathbb{K})$  coincide com a topologia produto indexada em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e com todos os fatores iguais a  $\mathbb{K}$ . Tendo em conta a alínea b) de 1.5.15, sabemos que é contínua a aplicação

$$Ap(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}), \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \varphi(\lambda),$$

pelo que, por composição com  $\Theta$ , obtemos uma aplicação contínua de  $E_w$  para  $\mathbb{K}$  que a  $x$  associa  $\Theta(x)(\lambda) = \lambda(x)$ , sendo assim precisamente a aplicação  $\lambda$ .  $\square$

**2.6.18 (Aplicações com valores em  $E_w$ )** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Tem-se então:

**a)** Dados um espaço topológico  $Z$ ,  $C \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e  $f: C \rightarrow E_w$  uma aplicação, tem-se  $f(z) \rightarrow x_0$  em  $E_w$  quando  $z \rightarrow z_0$  se, e só se, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ ,  $\lambda(f(z)) \rightarrow \lambda(x_0)$  em  $\mathbb{K}$  quando  $z \rightarrow z_0$ .

**b)** Dados um espaço topológico  $Z$  e uma aplicação  $f: Z \rightarrow E_w$ , tem-se que  $f$  é contínua num ponto  $z_0 \in Z$  se, e só se, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , é contínua a aplicação de  $Z$  em  $\mathbb{K}$  que a  $z$  associa  $\lambda(f(z))$ .

**Dem: a)** Supondo que  $f(z) \rightarrow x_0$  em  $E_w$  quando  $z \rightarrow z_0$  então, pela continuidade de  $\Theta$ , vem  $\Theta(f(z)) \rightarrow \Theta(x_0)$  quando  $z \rightarrow z_0$  em  $Ap(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}), \mathbb{K})$  donde, pela alínea a) de 1.5.15, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  vem

$$\lambda(f(z)) = \Theta(f(z))(\lambda) \rightarrow \Theta(x_0)(\lambda) = \lambda(x_0)$$

quando  $z \rightarrow z_0$ . Reciprocamente, se  $\lambda(f(z)) \rightarrow \lambda(x_0)$  quando  $z \rightarrow z_0$  para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , por outras palavras  $\Theta(f(z))(\lambda) \rightarrow \Theta(x_0)(\lambda)$  quando  $z \rightarrow z_0$  para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , vem, pelo resultado atrás referido,  $\Theta(f(z)) \rightarrow \Theta(x_0)$  quando  $z \rightarrow z_0$  em  $Ap(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}), \mathbb{K})$ , e portanto em  $\Theta(E)$ , pelo que a continuidade de  $\Theta^{-1}: \Theta(E) \rightarrow E_w$  implica que  $f(z) \rightarrow x_0$  em  $E_w$  quando  $z \rightarrow z_0$ .

<sup>229</sup>Comparar com 2.6.5.

b) Temos uma consequência direta de a), tendo em conta a caracterização da continuidade num ponto em termos de limites.  $\square$

**2.6.19 (Comparação das topologias)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  então a topologia associada à norma é mais fina que a topologia fraca, isto é, tendo em conta a caracterização em 1.4.11, a identidade  $Id: E \rightarrow E_w$  é contínua.<sup>230</sup>

**Dem:** Tendo em conta 2.6.18, temos uma consequência de para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  ser contínua a aplicação  $E \rightarrow \mathbb{K}$  que a  $x$  associa  $\lambda(x)$ , o que é uma tautologia.  $\square$

**2.6.20 (Continuidade das operações)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ , então são contínuas as aplicações

$$\begin{aligned} E_w \times E_w &\rightarrow E_w, & (x, y) &\mapsto x + y, \\ \mathbb{K} \times E_w &\rightarrow E_w, & (t, x) &\mapsto tx, \end{aligned}$$

por outras palavras,  $E_w$  é um espaço vetorial topológico.

**Dem:** Tendo em conta 2.6.18, para provar a continuidade da primeira aplicação basta mostrar que para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é contínua a aplicação de  $E_w \times E_w$  para  $\mathbb{K}$  que a  $(x, y)$  associa  $\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y)$  e isso resulta de, como consequência de 2.6.17, serem contínuas as aplicações de  $E_w \times E_w$  para  $\mathbb{K}$  que a  $(x, y)$  associam  $\lambda(x)$  e  $\lambda(y)$  respetivamente. Analogamente, para provar a continuidade da segunda aplicação basta provar que para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é contínua a aplicação  $\mathbb{K} \times E_w \rightarrow \mathbb{K}$  que a  $(t, x)$  associa  $\lambda(tx) = t\lambda(x)$  e isso resulta de serem contínuas as aplicações  $\mathbb{K} \times E_w \rightarrow \mathbb{K}$  e  $\mathbb{K} \times E_w \rightarrow \mathbb{K}$  que a  $(t, x)$  associam  $t$  e  $\lambda(x)$ .  $\square$

**2.6.21 (Functorialidade)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\varphi: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Tem-se então que  $\varphi: E_w \rightarrow F_w$  é também contínua.<sup>231</sup>

**Dem:** Tendo em conta 2.6.18, para provar esta continuidade basta mostrar que para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  é contínua a aplicação de  $E_w$  para  $\mathbb{K}$  que a  $x$  associa  $\lambda(\varphi(x))$  e isso resulta de 2.6.17, uma vez que  $\lambda \circ \varphi \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ .  $\square$

**2.6.22 (Mudança de escalares)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado complexo. Tem-se então que a topologia fraca de  $E$  coincide com a sua topologia fraca como espaço vetorial normado real.<sup>232</sup>

**Dem:** Usemos as notações  $E_w$  e  $E_{\mathbb{R}w}$  para distinguir à partida as topologias fracas de  $E$  como espaço vetorial complexo e como espaço vetorial real respetivamente. Para mostrar que as duas coincidem basta mostrar que a identidade é contínua de cada uma para a outra, o que faremos, mais uma vez, com recurso a 2.6.18 e tendo em conta também 2.1.60.

1) Seja  $\mu \in \mathcal{L}(E; \mathbb{C})$  arbitrário. Considerando o correspondente  $\lambda = \mathcal{R}(\mu)$

<sup>230</sup>Comparar com 2.6.8.

<sup>231</sup>Comparar com 2.6.10.

<sup>232</sup>Comparar com 2.6.11.

em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ , sabemos que  $\lambda: E_{\mathbb{R}w} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua pelo que, tendo em conta a identidade  $\mu(x) = \lambda(x) - i\lambda(ix)$  e a continuidade da aplicação linear  $E_{\mathbb{R}w} \rightarrow E_{\mathbb{R}w}$ ,  $x \mapsto ix$  (cf. 2.6.21), concluímos que  $\mu: E_{\mathbb{R}w} \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua. Fica assim provado que  $Id: E_{\mathbb{R}w} \rightarrow E_w$  é contínua.

2) Seja  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$  arbitrário. Considerando o correspondente  $\mu = \mathcal{R}^{-1}(\lambda)$  em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{C})$ , sabemos que  $\mu: E_w \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua pelo que tendo em conta a identidade  $\lambda(x) = \Re(\mu(x))$ , concluímos que  $\lambda: E_w \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Fica assim provado que  $Id: E_w \rightarrow E_{\mathbb{R}w}$  é contínua.  $\square$

**2.6.23 (Topologia fraca na dimensão finita)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  com dimensão finita. A topologia fraca de  $E$  coincide então com a topologia da norma.<sup>233</sup>

**Dem:** Sabemos que o dual  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é um espaço vetorial normado de dimensão finita igual à de  $E$  e portanto que o mesmo vai acontecer ao bidual  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ . Daqui se deduz que a aplicação linear isométrica

$$\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$$

é um isomorfismo, e portanto um homeomorfismo. Uma vez que, por 2.6.13, a topologia fraca-\* coincide com a topologia da norma, vemos agora que a identidade de  $E$ , sendo a composta do homeomorfismo  $\Phi$  de  $E$  com a topologia da norma para  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  com o homeomorfismo  $\Phi^{-1}$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  para  $E_w$ , é um homeomorfismo de  $E$  com a topologia da norma para  $E_w$ , o que mostra que as duas topologias coincidem.  $\square$

**2.6.24 (Corolário — Generalização de 2.6.17)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados, o segundo dos quais de dimensão finita. Se  $\lambda: E \rightarrow F$  é uma aplicação linear contínua então  $\lambda$  é também contínua  $E_w \rightarrow F$ .

**Dem:** Tendo em conta 2.6.21, a aplicação linear  $\lambda$  é contínua  $E_w \rightarrow F_w$  e, por 2.6.23, tem-se  $F_w = F$ .  $\square$

**2.6.25 (Topologia fraca dum subespaço vetorial)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $F \subset E$  um subespaço vetorial. Tem-se então que a topologia fraca de  $F$  é a induzida pela topologia fraca de  $E$ .

**Dem:** Uma vez que a inclusão  $\iota: F \rightarrow E$ , que a  $x$  associa  $x$ , é linear contínua, deduzimos de 2.6.21 que ela é também contínua de  $F_w$  para  $E_w$  e portanto a identidade de  $F$  é contínua de  $F_w$  para  $F$  com a topologia induzida pela de  $E_w$ . Resta-nos verificar que a identidade de  $F$  também é contínua da topologia induzida pela de  $E_w$  para a topologia de  $F_w$ . Fá-lo-emos com recurso a 2.6.18 e consideramos para isso  $\lambda \in \mathcal{L}(F; \mathbb{K})$  arbitrário. Tendo em conta o teorema de Hahn-Banach (cf. 2.1.59 ou 2.1.61), podemos considerar  $\hat{\lambda} \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  tal que  $\hat{\lambda}|_F = \lambda$ . Ficamos então, por 2.6.17, com uma aplicação linear contínua  $\hat{\lambda}: E_w \rightarrow \mathbb{K}$  cuja restrição a  $F$  é igual a  $\lambda$  pelo que  $\lambda$  é contínua de  $F$  com a topologia induzida pela de  $E_w$  para  $\mathbb{K}$ . Tendo em conta 2.6.18 podemos assim concluir que a identidade de

<sup>233</sup>Comparar com 2.6.13.

$F$  é efetivamente contínua de  $F$  com a topologia induzida pela de  $E_w$  para  $F_w$ .  $\square$

**2.6.26 (Subespaços vetoriais fracamente fechados)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $F \subset E$  um subespaço vetorial. Tem-se então que  $F$  é fechado em  $E$  com a topologia da norma, se, e só se,  $F$  é fechado em  $E_w$ .

**Dem:** Uma vez que a topologia da norma é mais fina que a topologia fraca, isto é que  $Id: E \rightarrow E_w$  é contínua, concluímos que se  $F$  for fechado em  $E_w$  então  $F$  (igual à sua imagem recíproca por  $Id$ ) é também fechado em  $E$ . Suponhamos agora que  $F$  é fechado em  $E$ . Sendo  $x_0 \in E \setminus F$  arbitrário sabemos, por 2.1.63, que existe  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  com  $\lambda|_F = 0$  e  $\lambda(x_0) \neq 0$ . Uma vez que  $\lambda: E_w \rightarrow \mathbb{K}$  também é contínua, vemos agora que

$$U = \{x \in E \mid \lambda(x) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$$

é um aberto de  $E_w$  que contém  $x_0$  e tem interseção vazia com  $F$ , o que mostra que  $x_0$  não é aderente a  $F$  para a topologia de  $E_w$ . Ficou assim provado que  $F$  é fechado em  $E_w$ .  $\square$

**2.6.27 (A bola fechada é fracamente fechada)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $R > 0$ . Tem-se então que a bola fechada  $\overline{B}_R(0)$  é um subconjunto fechado em  $E_w$ .<sup>234</sup>

**Dem:** Seja  $x_0 \in E$  com  $x_0 \notin \overline{B}_R(0)$ . Tendo em conta o corolário do teorema de Hahn-Banach 2.1.62, podemos considerar  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  com  $\|\lambda\| \leq 1$  e  $\lambda(x_0) = \|x_0\|$ . Uma vez que  $\lambda: E_w \rightarrow \mathbb{K}$  é contínua, podemos considerar o aberto  $U = \{x \in E \mid |\lambda(x)| > R\}$  de  $E_w$ , que contém  $x_0$  e que não intersesta  $\overline{B}_R(0)$ , uma vez que se  $y \in \overline{B}_R(0)$  vem

$$|\lambda(y)| \leq \|\lambda\| \|y\| \leq \|y\| \leq R. \quad \square$$

**2.6.28 (Comparação das topologias fraca e fraca-\*)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ , Tem-se então que a topologia fraca de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é mais fina que a sua topologia fraca-\*, isto é,

$$Id: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_w \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$$

é contínua.

**Dem:** Uma vez que a topologia de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$  é a induzida pela topologia da convergência simples de  $Ap(E; \mathbb{K})$ , basta mostrarmos que, para cada  $x \in E$  é contínua a aplicação  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_w \rightarrow \mathbb{K}$  definida por  $\lambda \mapsto \lambda(x)$  e isso resulta de 2.6.17, uma vez que, sendo  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  a aplicação linear

<sup>234</sup>Para uma generalização deste resultado, que utiliza uma versão geométrica do teorema de Hahn-Banach referida no exercício 2.1.34, ver o exercício 2.6.11 adiante.

isométrica em 2.2.19,  $\Theta(x)$  é um elemento de  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  tal que

$$\lambda(x) = \Theta(x)(\lambda). \quad \square$$

Combinando o resultado precedente com 2.6.19, com  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  no papel de  $E$ , podemos dizer que a topologia fraca de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  “está entre” a topologia forte e a topologia fraca-\* deste espaço, mais precisamente que as identidades são contínuas

$$\mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_w \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}.$$

**2.6.29 (Condição para a igualdade das topologias fraca e fraca-\*)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Tem-se então que as topologias fraca e fraca-\* de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  coincidem se, e só se,  $E$  for um espaço de Banach reflexivo (cf. 2.2.20).

**Dem:** Uma vez que a identidade  $Id: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_w \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$  é sempre contínua, vemos que as duas topologias coincidem se, e só se, a identidade  $Id: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_w$  for contínua o que, tendo em conta 2.6.18, vai acontecer se, e só se, cada aplicação linear contínua  $\xi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  for também contínua como aplicação  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathbb{K}$ . Se  $E$  for um espaço de Banach reflexivo isso acontece uma vez que um tal  $\xi$  é da forma  $\Theta(x)$  para um certo  $x \in E$ , ou seja é da forma  $\lambda \mapsto \lambda(x)$ , sendo assim contínua por 2.6.5. Reciprocamente, se as duas topologias coincidem então cada aplicação linear contínua  $\xi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ , que por 2.6.17 é também contínua de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_w$  para  $\mathbb{K}$ , e portanto de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$  para  $\mathbb{K}$ , vai, por 2.6.7, ser da forma  $\Theta(x_0)$  para um certo  $x_0 \in E$ , o que mostra que  $E$  é um espaço de Banach reflexivo.  $\square$

**2.6.30 (Versão de Banach-Alaoglu para espaços reflexivos)** Sejam  $E$  um espaço de Banach reflexivo sobre  $\mathbb{K}$ ,  $R > 0$  e

$$\overline{B}_R(0) = \{x \in E \mid \|x\| \leq R\}$$

a bola fechada de centro 0 e raio  $R$ . Tem-se então:

**a)** A bola  $\overline{B}_R(0)$ , com a topologia induzida pela de  $E_w$ , é compacta (é “fracamente compacta”).<sup>235</sup>

**b)** No caso em que  $E$  é separável,  $\overline{B}_R(0)$ , com a topologia induzida pela de  $E_w$ , é metrizável e portanto também sequencialmente compacta.<sup>236</sup>

**Dem:** O facto de  $E$  ser um espaço de Banach reflexivo implica que a aplicação linear isométrica  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  é um isomorfismo e a

<sup>235</sup>Veremos adiante no exercício 2.6.6 que a compacidade de  $\overline{B}_1(0) \subset E$  com a topologia induzida pela topologia fraca só é possível no caso em que  $E$  é um espaço de Banach reflexivo.

<sup>236</sup>Veremos no corolário a seguir que a compacidade sequencial ainda é verificada sem a hipótese de  $E$  ser separável.

definição da topologia fraca de  $E$  em 2.6.16 implica que  $\Theta$  é também um homeomorfismo de  $E_w$  sobre  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})_{w^*}$ . O facto de  $\Theta$  ser uma isometria linear implica que a restrição de  $\Theta$  é um homeomorfismo de  $\overline{B}_R(0)$  com a topologia induzida pela topologia fraca sobre a bola fechada de centro 0 e raio  $R$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  com a topologia induzida pela topologia fraca-\*. Uma vez que esta última é compacta, pelo teorema de Banach-Alaoglu em 2.6.14, obtemos assim a conclusão de a). Do mesmo modo, se  $E$  é separável, sabemos, por 2.2.22, que  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é separável o que implica, por 2.6.15, que a bola de  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  com a topologia induzida pela topologia fraca-\* é metrizável e sequencialmente compacta e podemos assim concluir que o mesmo acontece a  $\overline{B}_R(0)$  com a topologia induzida pela de  $E_w$ .  $\square$

**2.6.31 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço de Banach reflexivo sobre  $\mathbb{K}$ , não necessariamente separável, e  $R > 0$ . Tem-se então que a bola fechada  $\overline{B}_R(0)$ , com a topologia induzida pela de  $E_w$ , é sequencialmente compacta.<sup>237</sup>

**Dem:** Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de vetores de  $\overline{B}_R(0)$ . Seja  $F \subset E$  a aderência do subespaço vetorial de  $E$  gerado pelos vetores  $x_n$  que, tendo em conta 2.1.27, é um subespaço vetorial fechado de  $E$ , e portanto um espaço de Banach. Tendo em conta 2.2.34, 2.1.71 e a alínea a) de 1.3.28,  $F$  é um espaço de Banach reflexivo e separável e, por 2.6.25, a topologia de  $F_w$  é a induzida pela de  $E_w$ . Uma vez que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de vetores da bola fechada de  $F$ , podemos aplicar a conclusão da alínea b) de 2.6.30 para garantir a existência de um sublimite estrito desta sucessão na bola fechada de  $F$ , com a topologia induzida pela de  $F_w$ , e portanto na bola fechada de  $E$ , com a topologia induzida pela de  $E_w$ .  $\square$

O resultado que examinamos em seguida é um exemplo de aplicação das propriedades da topologia fraca que temos vindo a estudar. Ele poderá ser comparado com o enunciado em 2.2.21: Aí se provou que o que, em geral, é definido como um supremo é mesmo um máximo na presença da reflexividade de um espaço normado interveniente. No próximo resultado mostramos que o que, em geral, é um ínfimo é necessariamente um mínimo em caso de reflexividade de um certo espaço normado.

**2.6.32 (Minimizante da distância aos vetores dum subespaço)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $F \subset E$  um subespaço vetorial reflexivo (em particular de Banach, e portanto fechado). Para cada  $x_0 \in E$  existe então  $y_0 \in F$  tal que  $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, F)$ .

**Dem:** Tendo em conta a caracterização de  $d(x_0, F)$  como um ínfimo, podemos considerar para cada  $n \in \mathbb{N}$  um vetor  $y_n \in F$  tal que

<sup>237</sup>Ao contrário da alínea b) do resultado precedente, não afirmamos agora que a bola fechada seja metrizável para a topologia induzida pela de  $E_w$ .

$$(1) \quad \|x_0 - y_n\| \leq d(x_0, F) + \frac{1}{n}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o facto de se ter  $d(x_0, F) \leq \|x_0 - 0\| = \|x_0\|$  implica que

$$\|y_n\| \leq \|y_n - x_0\| + \|x_0\| \leq 2\|x_0\| + 1$$

e portanto todos os  $y_n$  pertencem à bola fechada de centro 0 e raio  $2\|x_0\| + 1$  de  $F$  bola essa que, por 2.6.30, é compacta em  $F_w$ . Podemos assim garantir que a  $\mathbb{N}$ -sucessão  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vai admitir um sublimite  $y_0 \in F$  para a topologia de  $F_w$ , que sabemos ser a induzida pela de  $E_w$  (cf. 2.6.25). Vamos mostrar que se tem  $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, F)$ , o que terminará a demonstração. Uma vez que, por ser  $y_0 \in F$ , tem-se  $\|x_0 - y_0\| \geq d(x_0, F)$ . Suponhamos então, por absurdo, que se tinha  $\|x_0 - y_0\| > d(x_0, F)$ . Podíamos então escolher  $\delta > 0$  tal que  $\|x_0 - y_0\| > d(x_0, F) + \delta$ , por outras palavras,  $y_0$  não pertence à bola fechada de centro  $x_0$  e raio  $d(x_0, F) + \delta$  de  $E$ , bola essa que é fechada em  $E_w$ , tendo em conta 2.6.27 e o facto de as translações serem homeomorfismos  $E_w \rightarrow E_w$ . Mas, sendo  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ , a desigualdade (1) mostra que para cada  $n \geq n_0$  o vetor  $y_n$  pertence a essa bola fechada e isso conduz-nos ao absurdo procurado uma vez que, pela caracterização do sublimites na alínea a) de 1.6.13,  $y_0$  deveria ser aderente ao conjunto dos  $y_n$  com  $n \geq n_0$  na topologia de  $E_w$ .  $\square$

**2.6.33 (Corolário)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $F \subset E$  um subespaço vetorial reflexivo. Considerando a norma quociente no espaço vetorial quociente  $E/F$ , tem-se então que cada vetor de  $E/F$  pode ser escrito na forma  $[x_1]_F$  com  $\|[x_1]_F\| = \|[x_1]_F\|$ .

**Dem:** Trata-se de uma consequência direta de 2.6.32, se recordarmos a caracterização de  $\|[x_0]_F\|$  com  $x_0 \in E$  referida em 2.1.48.  $\square$

Examinamos a seguir uma propriedade curiosa dos espaços de Banach  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$ , com  $I$  conjunto infinito, que mostra que, apesar de, como veremos adiante no exercício 2.6.3, a topologia fraca de cada um deles ser distinta da sua topologia forte, as  $\mathbb{N}$ -sucessões que convergem para um certo limite para uma delas são as mesmas que convergem para esse limite para a outra.

**2.6.34 (Convergência de  $\mathbb{N}$ -sucessões em  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$ )** Sejam  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  e  $I$  um conjunto de índices não vazio e consideremos o correspondente espaço de Banach  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  (cf. 2.3.48), cujos elementos será cómodo encarar agora como aplicações  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$  com  $\|f\|_1 = \sum |f(i)| < +\infty$  em vez de famílias indexadas em  $I$ . Sendo  $f \in \ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos de  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$ , tem-se então  $f_n \rightarrow f$  na topologia da norma se, e só se,  $f_n \rightarrow f$  na topologia fraca.

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:



**a)** Uma vez que a identidade  $Id: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \rightarrow \ell_{\mathbb{K}}^1(I)_w$  é contínua (cf. 2.6.19), já sabemos que se  $f_n \rightarrow f$  na topologia da norma então também  $f_n \rightarrow f$  na topologia fraca. Tudo o que é necessário é assim mostrar que, reciprocamente, se  $f_n \rightarrow f$  na topologia fraca então  $f_n \rightarrow f$  na topologia da norma, sendo ainda suficiente verificar esta implicação no caso particular em que  $f = 0$ , uma vez que se  $f_n \rightarrow f$  na topologia fraca então  $f_n - f \rightarrow 0$  na topologia fraca e que se  $f_n - f \rightarrow 0$  na topologia da norma então também  $f_n = (f_n - f) + f \rightarrow f$  nesta topologia.

**b)** Vamos supor, por absurdo, que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de elementos de  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$  tal que  $f_n \rightarrow 0$  para a topologia fraca mas  $f_n \not\rightarrow 0$  para a topologia da norma e obteremos nas próximas alíneas uma contradição, o que terminará a demonstração.

**c)** Lembremos que, como ser verificou em 2.3.56, tem lugar uma aplicação bilinear contínua  $\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I) \rightarrow \mathbb{K}$  definida por

$$\Gamma(f, g) = \sum_{i \in I} f(i)g(i),$$

a qual nos permite associar a cada  $g \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I)$  uma aplicação linear contínua  $\tilde{\Gamma}(g): \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \rightarrow \mathbb{K}$  definida por  $\tilde{\Gamma}(g)(f) = \Gamma(f, g)$ .

**d)** Para cada  $i_0 \in I$ , tem-se  $f_n(i_0) \rightarrow 0$  em  $\mathbb{K}$ .

**Subdem:** Uma vez que  $f_n \rightarrow 0$  para a topologia fraca, vemos que, para cada  $g \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I)$ ,  $\tilde{\Gamma}(g)(f_n) \rightarrow \tilde{\Gamma}(g)(0) = 0$ , bastando agora reparar que, sendo  $g \in \ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I)$  o definido por  $g(i_0) = 1$  e  $g(i) = 0$  para cada  $i \neq i_0$ , tem-se

$$\tilde{\Gamma}(g)(f_n) = \sum_{i \in I} f_n(i)g(i) = f_n(i_0).$$

**e)** Uma vez que estamos a supor que  $f_n \not\rightarrow 0$  para a topologia da norma, podemos fixar  $\delta > 0$  tal que, qualquer que seja  $n_0 \in \mathbb{N}$ , exista  $n \geq n_0$  tal que  $\|f_n\|_1 \geq \delta$ .

**f)** Vamos mostrar que existe uma sucessão estritamente crescente de naturais  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  e uma sucessão de subconjuntos finitos disjuntos dois a dois  $A_1, A_2, A_3, \dots$  de  $I$  de modo que para cada  $p \geq 1$  se verifiquem as desigualdades

$$\mathbf{f}_1) \sum_{i \in A_p} |f_{n_p}(i)| \geq \frac{2\delta}{3}, \quad \mathbf{f}_2) \sum_{i \in I \setminus A_p} |f_{n_p}(i)| \leq \frac{\delta}{3},$$

onde  $\delta > 0$  é o fixado em e).

**Subdem:** Vamos fazer uma construção recursiva, começando por definir  $n_1$  e  $A_1$ . Tendo em conta e), seja  $n_1 \geq 1$  tal que  $\|f_{n_1}\|_1 \geq \delta$ . Tendo em conta a caracterização duma soma como supremo de todas as somas finitas podemos escolher uma parte finita  $A_1 \subset I$  tal que

$$\sum_{i \in A_1} |f_{n_1}(i)| \geq \|f_{n_1}\|_1 - \frac{\delta}{3}$$

e daqui decorre que

$$\sum_{i \in A_1} |f_{n_1}(i)| \geq \delta - \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3},$$

$$\sum_{i \in I \setminus A_1} |f_{n_1}(i)| = \|f_{n_1}\|_1 - \sum_{i \in A_1} |f_{n_1}(i)| \geq \|f_{n_1}\|_1 - \frac{2\delta}{3} = \frac{\delta}{3},$$

que não são mais do que  $f_1$  e  $f_2$ ) para  $p = 1$ .

Suponhamos agora construídos  $n_1 < n_2 < \dots < n_p$  e  $A_1, A_2, \dots, A_p$  verificando as condições  $f_1$ ) e  $f_2$ ) e passemos à construção de  $n_{p+1} > n_p$  e de  $A_{p+1}$  disjunto de cada um dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_p$  de modo que se verifiquem as duas condições referidas.

Em primeiro lugar, temos em conta d) e o facto de uma soma finita de sucessões com limite 0 ter ainda limite 0 para garantir a existência de  $k \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq k$  se tenha, notando  $\bar{A}_p = A_1 \cup \dots \cup A_p$ ,

$$\sum_{i \in \bar{A}_p} |f_n(i)| \leq \frac{\delta}{6}.$$

Seguidamente, tendo em conta e), fixamos  $n_{p+1}$  maior ou igual ao máximo entre  $k$  e  $n_p + 1$  tal que se tenha  $\|f_{n_{p+1}}\|_1 \geq \delta$ , tendo-se assim

$$\sum_{i \in \bar{A}_p} |f_{n_{p+1}}(i)| \leq \frac{\delta}{6},$$

$$\sum_{i \in I \setminus \bar{A}_p} |f_{n_{p+1}}(i)| = \|f_{n_{p+1}}\|_1 - \sum_{i \in \bar{A}_p} |f_{n_{p+1}}(i)| \geq \|f_{n_{p+1}}\|_1 - \frac{\delta}{6}.$$

Esta última desigualdade implica que podemos considerar uma parte finita  $A_{p+1}$  de  $I \setminus \bar{A}_p$ , portanto uma parte finita de  $I$  disjunta de  $A_1, \dots, A_p$ , tal que

$$\sum_{i \in A_{p+1}} |f_{n_{p+1}}(i)| \geq \|f_{n_{p+1}}\|_1 - \frac{\delta}{3},$$

em particular

$$\sum_{i \in A_{p+1}} |f_{n_{p+1}}(i)| \geq \delta - \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3},$$

ou seja a condição  $f_1$ ) para o índice  $p + 1$ , e deduzimos também que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I \setminus A_{p+1}} |f_{n_{p+1}}(i)| &= \|f_{n_{p+1}}\|_1 - \sum_{i \in A_{p+1}} |f_{n_{p+1}}(i)| \leq \\ &\leq \|f_{n_{p+1}}\|_1 - \|f_{n_p}\|_1 + \frac{\delta}{3} = \frac{\delta}{3}, \end{aligned}$$

ou seja a condição  $f_2$ ) para o índice  $p + 1$ .

**g)** Vamos agora definir uma aplicação  $g: I \rightarrow \mathbb{K}$  em  $\ell_{\mathbb{K}}^{\infty}(I)$ , com  $|g(i)| = 1$  para cada  $i$ , por

$$g(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \notin \bigcup A_p \\ 1, & \text{se } i \in A_p \text{ e } f_{n_p}(i) = 0 \\ \frac{f_{n_p}(i)}{|f_{n_p}(i)|}, & \text{se } i \in A_p \text{ e } f_{n_p}(i) \neq 0 \end{cases}$$

e reparemos que se tem para cada  $i \in A_p$

$$f_{n_p}(i)g(i) = |f_{n_p}(i)|.$$

**h)** Vamos agora mostrar que para cada  $p$  tem-se

$$|\tilde{\Gamma}(g)(f_{n_p})| = \left| \sum_{i \in I} f_{n_p}(i)g(i) \right| \geq \frac{\delta}{3}$$

o que implica, por o conjunto dos  $n_p$  ser infinito, que a  $\mathbb{N}$ -sucessão dos  $\tilde{\Gamma}(g)(f_{n_p}) \in \mathbb{K}$  não tem limite 0, o que será o absurdo procurado (e terminará portanto a demonstração), uma vez que  $f_n \rightarrow 0$  para a topologia fraca e  $\tilde{\Gamma}(g): \ell_{\mathbb{K}}^1(I) \rightarrow \mathbb{K}$  é uma aplicação linear contínua.

**Subdem:** Tendo em conta a propriedade  $f_2$ ), vem

$$\left| \sum_{i \in I \setminus A_p} f_{n_p}(i)g(i) \right| \leq \sum_{i \in I \setminus A_p} |f_{n_p}(i)g(i)| = \sum_{i \in I \setminus A_p} |f_{n_p}(i)| \leq \frac{\delta}{3}$$

e deduzimos agora, tendo em conta a propriedade  $f_1$ )

$$\begin{aligned} \frac{2\delta}{3} &\leq \sum_{i \in A_p} |f_{n_p}(i)| = \sum_{i \in A_p} f_{n_p}(i)g(i) = \\ &= \left| \sum_{i \in I} f_{n_p}(i)g(i) - \sum_{i \in I \setminus A_p} f_{n_p}(i)g(i) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i \in I} f_{n_p}(i)g(i) \right| + \left| \sum_{i \in I \setminus A_p} f_{n_p}(i)g(i) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i \in I} f_{n_p}(i)g(i) \right| + \frac{\delta}{3} \end{aligned}$$

donde finalmente

$$\left| \sum_{i \in I} f_{n_p}(i)g(i) \right| \geq \frac{2\delta}{3} - \frac{\delta}{3} = \frac{\delta}{3}. \quad \square$$

Vamos agora examinar outro exemplo importante de espaço vetorial topológico que não aparece como definido a partir de nenhuma norma.

**2.6.35** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $X$  um espaço topológico. Vamos dizer que uma aplicação  $f: X \rightarrow E$  é *localmente limitada* num ponto  $x_0 \in X$  se existir uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $X$  tal que  $f(V) \subset E$  seja um conjunto limitado. Diz-se que  $f: X \rightarrow E$  é *localmente limitada* se for localmente limitada em todos os pontos de  $X$ . Tem-se então:

**a)** Se  $f: X \rightarrow E$  é contínua em  $x_0$  então é localmente limitada em  $x_0$ .

**b)** No caso em que  $X$  é localmente compacto<sup>238</sup>, a aplicação  $f$  é localmente limitada se, e só se, para cada compacto  $K \subset X$  o conjunto  $f(K) \subset E$  é limitado.

**Dem: a)** Dado  $x_0 \in X$ , a continuidade de  $f$  em  $x_0$  implica a existência de uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que  $f(V) \subset B_1(f(x_0))$ , condição que implica que  $f(V)$  é um conjunto limitado.

**b)** Suponhamos que  $f$  é localmente limitada e seja  $K \subset X$  um conjunto compacto. Para cada  $a \in K$  seja  $V_a$  uma vizinhança de  $a$  em  $X$  tal que  $f(V_a)$  seja limitado. Uma vez que os interiores dos  $V_a$  constitui uma cobertura aberta de  $K$ , a propriedade das coberturas em 1.6.36 garante a existência de pontos  $a_1, \dots, a_n$  em  $K$  tais que  $K \subset V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_n}$ , tendo-se então

$$f(K) \subset f(V_1) \cup \dots \cup f(V_n),$$

o que implica que  $f(K)$  é limitado. Supondo, reciprocamente, que  $f(K)$  é limitado para cada compacto  $K \subset X$ , o facto de cada ponto  $x_0 \in X$  admitir uma vizinhança compacta implica que  $f$  é localmente limitada.  $\square$

**2.6.36** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $X$  um espaço topológico localmente compacto. Tem-se então:

**a)** O subconjunto  $\mathbb{B}_{loc}(X, E)$  de  $Ap(X, E)$ , constituído pelas aplicações localmente limitadas, é um subespaço vetorial e a topologia induzida pela topologia da convergência uniforme nos compactos de  $Ap(X, E)$  é uma topologia vetorial de  $\mathbb{B}_{loc}(X, E)$ .<sup>239</sup>

**b)** O conjunto  $\mathcal{C}(X, E)$ , das aplicações contínuas  $f: X \rightarrow E$ , é um subespaço

<sup>238</sup>Ou, mais geralmente, um espaço onde cada ponto possua pelo menos uma vizinhança compacta. Esta generalidade permite incluir os espaços compactos, que só podemos garantir serem localmente compactos quando forem de Hausdorff.

<sup>239</sup>Pelo contrário, mesmo no caso em que  $X$  é compacto, o que se verificou na alínea b) do exercício 1.5.4 mostra que não se deve esperar que  $Ap(X, E)$ , com a topologia da convergência uniforme nos compactos, seja um espaço vetorial topológico.

vetorial fechado de  $\mathbb{B}_{loc}(X, E)$ .

**Dem:** Lembremos que, como se verificou em 2.1.9, para cada compacto não vazio  $K \subset X$  o conjunto  $\mathbb{B}(K, E) \subset Ap(K, E)$  das aplicações limitadas  $f: K \rightarrow E$  é um subespaço vetorial, onde está definida a norma  $\|\cdot\|_\infty$  cuja topologia associada é a induzida pela topologia da convergência uniforme. Em particular  $\mathbb{B}(K, E)$  com a topologia da convergência uniforme é um espaço vetorial topológico. Sendo  $\mathcal{K}$  a classe dos subespaços compactos não vazios de  $X$ , consideremos a aplicação injetiva de  $Ap(X, E)$  para o produto cartesiano  $\prod_{K \in \mathcal{K}} Ap(K, E)$ , que a  $f$  associa a família das restrições  $f|_K$ ,

utilizada em 1.7.45 para definir a topologia da convergência uniforme nos compactos de  $Ap(X, E)$ . Uma vez que essa aplicação é, neste caso, linear e que  $\mathbb{B}_{loc}(X, E)$  é a imagem recíproca por meio desta do subespaço vetorial  $\prod_{K \in \mathcal{K}} \mathbb{B}(K, E)$ , concluímos que  $\mathbb{B}_{loc}(X, E)$  é efetivamente um subespaço

vetorial de  $Ap(X, E)$ . Para provar a continuidade da soma como aplicação de  $\mathbb{B}_{loc}(X, E) \times \mathbb{B}_{loc}(X, E)$  para  $\mathbb{B}_{loc}(X, E)$  basta, pela alínea b) de 1.7.46, mostrar que para cada  $K \in \mathcal{K}$  é contínua de  $\mathbb{B}_{loc}(X, E) \times \mathbb{B}_{loc}(X, E)$  para  $\mathbb{B}(K, E)$  a aplicação que a  $(f, g)$  associa  $(f + g)|_K = f|_K + g|_K$  e isso resulta de que, tendo em conta a alínea c) do mesmo resultado, temos a composta da aplicação contínua de  $\mathbb{B}_{loc}(X, E) \times \mathbb{B}_{loc}(X, E)$  para  $\mathbb{B}(K, E) \times \mathbb{B}(K, E)$  que a  $(f, g)$  associa  $(f|_K, g|_K)$  com a soma como aplicação  $\mathbb{B}(K, E) \times \mathbb{B}(K, E) \rightarrow \mathbb{B}(K, E)$ , onde  $\mathbb{B}(K, E)$  é um espaço vetorial topológico. Analogamente, para mostrar que a multiplicação pelos escalares, como aplicação de  $\mathbb{K} \times \mathbb{B}_{loc}(X, E)$  para  $\mathbb{B}_{loc}(X, E)$  é contínua, basta mostrar que para cada  $K \in \mathcal{K}$  a aplicação de  $\mathbb{K} \times \mathbb{B}_{loc}(X, E)$  para  $\mathbb{B}(K, E)$ , que a  $(t, f)$  associa  $(tf)|_K = tf|_K$  é contínua e isso resulta de se tratar da composta da aplicação contínua de  $\mathbb{K} \times \mathbb{B}_{loc}(X, E)$  para  $\mathbb{K} \times \mathbb{B}(K, E)$ , que a  $(t, f)$  associa  $(t, f|_K)$ , com a multiplicação pelos escalares do espaço vetorial topológico  $\mathbb{B}(K, E)$ . O facto de  $\mathcal{C}(X, E)$  ser um subespaço vetorial fechado de  $\mathbb{B}_{loc}(X, E)$  resulta de se tratar de um subespaço vetorial de  $Ap(X, E)$  (por exemplo, tendo em conta as propriedades dos espaços vetoriais topológicos em 2.6.3) e de, como se verificou em 1.7.51, ser mesmo fechado em  $Ap(X, E)$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex. 2.6.1 (Recíproca de 2.6.13)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  com dimensão infinita.

**a)** Verificar que se  $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  é uma vizinhança de 0 para a topologia fraca-\* então  $\mathcal{U}$  contém um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  diferente de  $\{0\}$ . **Sugestão:** Reparar que existem vetores  $x_1, \dots, x_n \in E$  tais que  $\mathcal{U}$  contém todas as aplicações lineares contínuas que se anulam em cada  $x_j$  e utilizar a alínea a) do corolário 2.1.63 para garantir a existência de  $\lambda \neq 0$  em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  com  $\lambda(x_j) = 0$  para cada  $1 \leq j \leq n$ ,

considerando então o subespaço vetorial  $\mathbb{K}\lambda$  de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ .

**b)** Deduzir de a) que a topologia fraca-\* de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  não pode ser definida por nenhuma norma, em particular é distinta da topologia da norma usual deste espaço.

**c)** Deduzir de a) que a aplicação bilinear de avaliação  $\Phi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \times E \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\Phi(\lambda, x) = \lambda(x)$ , não é contínua em  $(0, 0)$ . **Sugestão:** Se  $\Phi$  fosse contínua em  $(0, 0)$ , considerar uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de 0 em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$  e  $\varepsilon > 0$  tais que  $|\lambda(x)| < 1$  sempre que  $\lambda \in \mathcal{U}$  e  $\|x\| < \varepsilon$  e chegar a um absurdo considerando  $\lambda \neq 0$  num subespaço vetorial de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  contido em  $\mathcal{U}$ .

**d)** Mostrar que, apesar do concluído em c), a aplicação bilinear  $\Phi$  é separavelmente contínua, no sentido referido em 2.2.53.

**e)** Mostrar que, apesar do referido em c), no caso em que  $E$  é de Banach, vale a seguinte propriedade de “continuidade sequencial” de  $\Phi$ : Dadas  $\mathbb{N}$ -sucessões de elementos  $\lambda_n \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $x_n \in E$  tais que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$  e  $x_n \rightarrow x$  em  $E$ , tem-se  $\lambda_n(x_n) \rightarrow \lambda(x)$  em  $\mathbb{K}$ .

**Sugestão:** Utilizar 2.2.51 para garantir que o conjunto dos  $\lambda_n$  é limitado em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ . Utilizar então a desigualdade

$$|\lambda_n(x_n) - \lambda(x)| \leq \|\lambda_n\| \|x_n - x\| + |\lambda_n(x) - \lambda(x)|.$$

**f)** Lembrando 1.2.57, deduzir de c) e e) que, no caso em que  $E$  é de Banach, a topologia fraca-\* de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  não é metrizável.

**Ex. 2.6.2** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e seja  $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  um subespaço vetorial de dimensão finita.

**a)** Mostrar que  $\mathcal{E}$ , para além de ser fechado em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  (cf. 2.1.65) é também fechado em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$ . **Sugestão:** Sendo  $\lambda_0 \notin \mathcal{E}$ , considerar uma base  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $\mathcal{E}$  e deduzir de 2.6.6 a existência de  $x_0 \in E$  com  $\lambda_0(x_0) \neq 0$  e  $\lambda_j(x_0) = 0$  para  $1 \leq j \leq n$ . Lembrando a continuidade de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\lambda \mapsto \lambda(x_0)$ , encontrar uma vizinhança de  $\lambda_0$  em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$  que não intersesta  $\mathcal{E}$ .

**b)** Tendo em conta 2.6.5 e o teorema de Hahn-Banach, mostrar que se  $\xi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$  é linear contínua para a topologia da norma, então  $\xi$  também é contínua para a topologia induzida pela de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$ .

**c)** Mostrar que coincidem as topologias de  $\mathcal{E}$  induzidas pela norma e pela topologia de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$ . **Sugestão:** Considerando um isomorfismo  $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}^n$  utilizar b) para mostrar que  $\alpha$  é contínua para a topologia de  $\mathcal{E}$  induzida pela de  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$  e deduzir daqui que a identidade de  $\mathcal{E}$  é contínua da topologia fraca-\* para a topologia da norma.

**d)** Reparar que a conclusão de c) fornece uma justificação alternativa do corolário 2.6.13.

**Ex. 2.6.3 (Recíproca de 2.6.23 — Comparar com o exercício 2.6.1)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  com dimensão infinita.

**a)** Verificar que se  $U \subset E$  é uma vizinhança de 0 para a topologia fraca então  $U$  contém algum subespaço vetorial de  $E$  diferente de  $\{0\}$ . **Sugestão:** Reparar que existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  tais que  $U$  contém cada  $x$  que verifica  $\lambda_j(x) = 0$  para cada  $1 \leq j \leq n$ . Reparando que a aplicação linear  $E \rightarrow \mathbb{K}^n$  que a cada  $x$  associa  $(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$  não pode ser injetiva escolher  $x_0 \neq 0$  no kernel desta aplicação linear, considerando então o subespaço vetorial  $\mathbb{K}x_0$  de  $E$ .

**b)** Deduzir de a) que a topologia fraca de  $E$  não pode ser definida por nenhuma norma, em particular é distinta da topologia associada à norma dada.

**c)** Deduzir de a) que a aplicação bilinear de avaliação  $\Phi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \times E_w \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\Phi(\lambda, x) = \lambda(x)$ , não é contínua em  $(0, 0)$ . **Sugestão:** Se  $\Phi$  fosse contínua em  $(0, 0)$ ,

considerar  $\varepsilon > 0$  e uma vizinhança  $U$  de 0 em  $E_w$  tais que  $|\lambda(x)| < 1$  sempre que  $\|\lambda\| < \varepsilon$  e  $x \in U$  e chegar a um absurdo considerando  $x \neq 0$  num subespaço vetorial de  $E$  contido em  $U$ .

**d)** Mostrar que, apesar do concluído em c), a aplicação bilinear  $\Phi$  é separávelmente contínua, no sentido referido em 2.2.53 e reparar que obtemos assim uma nova justificação para o facto de a topologia de  $E_w$  não ser definível por uma norma.

**e)** Mostrar que, apesar do referido em c), vale a seguinte propriedade de “continuidade sequencial” de  $\Phi$ : Dadas  $\mathbb{N}$ -sucessões de elementos  $\lambda_n \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $x_n \in E$  tais que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  em  $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  e  $x_n \rightarrow x$  em  $E_w$ , tem-se  $\lambda_n(x_n) \rightarrow \lambda(x)$  em  $\mathbb{K}$ .

**Sugestão:** Utilizar 2.2.51 para garantir que o conjunto dos  $\Theta(x_n)$  é limitado em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ , e portanto que o conjunto dos  $x_n$  é limitado em  $E$ . Utilizar então a desigualdade

$$\|\lambda_n(x_n) - \lambda(x)\| \leq \|\lambda_n - \lambda\| \|x_n\| + \|\lambda(x_n) - \lambda(x)\|.$$

**f)** Lembrando 1.2.57, deduzir de c) e e) que a topologia fraca de  $E$  não é metrizável.

**Ex. 2.6.4 (Um subespaço vetorial fechado que não é  $w^*$ -fechado)** Seja  $E$  um espaço de Banach não reflexivo sobre  $\mathbb{K}$  (por exemplo  $E = \ell_{\mathbb{K}}^1 = \ell_{\mathbb{K}}^1(\mathbb{N})$ , cf. 2.3.58) e consideremos a aplicação linear isométrica  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  definida em 2.2.19, que sabemos não ser sobrejetiva.

**a)** Verificar que  $\Theta(E)$  é um espaço de Banach, portanto fechado em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ , e concluir, por 2.6.26, que  $\Theta(E)$  é também fechado em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})_{w^*}$ .

**b)** Verificar que  $\Theta(E)$  é denso em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})_{w^*}$ , e portanto não é fechado neste espaço. **Sugestão:** Dados  $\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  e  $\mathcal{U}$  vizinhança de  $\xi$  para a topologia de  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})_{w^*}$ , verificar que existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$  tais que  $\mathcal{U}$  contenha todos os  $\eta \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  com  $\eta(\lambda_j) = \xi(\lambda_j)$  para todo o  $1 \leq j \leq n$ ; Utilizar então o lema algébrico na alínea a) de 2.6.6, depois de prolongar  $\xi$  linearmente a  $L(E; \mathbb{K})$ , para encontrar  $x_0 \in E$  tal que  $\Theta(x_0) \in \mathcal{U}$ .

**Ex. 2.6.5 (Uma alternativa não puramente algébrica à alínea a) de 2.6.6)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n: E \rightarrow \mathbb{K}$  aplicações lineares contínuas. Dada uma aplicação linear contínua  $\xi: \mathcal{L}(E; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  mostrar que, para cada  $r > 1$  existe  $x_0 \in E$  tal que  $\|x_0\| \leq r\|\xi\|$  e  $\xi(\lambda_j) = \lambda_j(x_0)$  para cada  $1 \leq j \leq n$ .

**Sugestão:** Adaptar a demonstração do lema referido, reparando que o subespaço vetorial  $F \subset E$  é fechado, considerando a norma quociente em  $E/F$  e utilizando uma das conclusões em 2.1.47 para escolher convenientemente o representante  $x_0$  da classe de equivalência considerada em  $E/F$ .

**Ex. 2.6.6 (Recíproco de 2.6.30)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  tal que a bola fechada  $\overline{B}_1(0) \subset E$  seja compacta para a topologia induzida pela topologia fraca de  $E$ . Mostrar que  $E$  é um espaço de Banach reflexivo.

**Sugestão:** Temos que mostrar que cada  $\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  pertence à imagem da aplicação linear isométrica  $\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$  definida em 2.2.19, bastando verificar isso no caso em que, por exemplo,  $\|\xi\| = \frac{1}{2}$ . Proceder analogamente ao sugerido para a alínea b) do exercício 2.6.4, mas utilizando agora o exercício 2.6.5, para mostrar que qualquer vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\xi$  em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})_{w^*}$  contém algum elemento de  $\Theta(\overline{B}_1(0))$ , atendendo por fim, ao facto de  $\Theta(\overline{B}_1(0))$ , com a topologia induzida pela de  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})_{w^*}$ , ser homeomorfo a  $\overline{B}_1(0)$ , com a topologia induzida pela de  $E_w$ , e portanto compacto, e, em consequência, fechado em  $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})_{w^*}$ .

**Ex. 2.6.7 (Conjuntos fracamente compactos)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $A \subset E$  um subconjunto compacto para a topologia fraca da  $E_w$ . Mostrar que  $A$  é fechado e limitado em  $E$ . **Sugestão:** Reparar que  $A$  é mesmo fechado em  $E_w$ . Para mostrar que  $A$  é limitado em  $E$  utilizar o corolário 2.2.52 do teorema da limitação uniforme reparando que, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ , a continuidade de  $\lambda: E_w \rightarrow \mathbb{K}$  implica que  $\lambda(A)$  é limitado em  $\mathbb{K}$ .

**Ex. 2.6.8 (Imagem da bola fechada) a)** Sejam  $E$  um espaço de Banach reflexivo,  $F$  um espaço vetorial normado e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Considerando a bola fechada unitária

$$\overline{B}_1(0) = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\},$$

mostrar que a imagem  $\lambda(\overline{B}_1(0))$  é um subconjunto fechado de  $F$ . **Sugestão:** Ter em conta 2.6.30 e 2.6.21 para concluir que a imagem é compacta, e portanto fechada, para a topologia fraca de  $F$ .

**b)** Consideremos o espaço de Banach  $c_{\mathbb{R}} = c_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ , das  $\mathbb{N}$ -sucessões  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais que admitem limite, com a norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  e a aplicação linear contínua  $\lambda: c_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\|\lambda\| = 1$ , definida por

$$\lambda((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2^n} x_n$$

(cf. o exercício 2.3.15). Tendo em conta a alínea b) do exercício referido, mostrar que a imagem por  $\lambda$  da bola fechada de centro 0 e raio 1 de  $c_{\mathbb{R}}$  é o intervalo  $] -1, 1[$ , em particular não é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}$ . Porque razão este facto não contraria a conclusão de a)?

**Ex. 2.6.9 (Topologia fraca dum produto cartesiano)** Sejam  $E$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados e consideremos em  $E \times F$  uma das normas que define a topologia produto, por exemplo a norma do máximo. Mostrar que a topologia fraca de  $E \times F$  é a topologia produto das topologias fracas de  $E$  e de  $F$ . **Sugestão:** Mostrar que a identidade de  $E \times F$  é contínua de cada uma das topologias para a outra, utilizando essencialmente apenas a propriedade 2.6.21. Mais precisamente, sendo  $\pi_1: E \times F \rightarrow E$  e  $\pi_2: E \times F \rightarrow F$  as projeções canónicas e  $\iota_1: E \rightarrow E \times F$  e  $\iota_2: F \rightarrow E \times F$  as injecções canónicas ( $\iota_1(x) = (x, 0)$  e  $\iota_2(y) = (0, y)$ ), que são aplicações lineares contínuas, atender a que também são contínuas

$$\begin{aligned} \pi_1: (E \times F)_w &\rightarrow E_w, & \pi_1: E_w \times F_w &\rightarrow E_w, & \iota_1: E_w &\rightarrow (E \times F)_w, \\ \pi_2: (E \times F)_w &\rightarrow F_w, & \pi_2: E_w \times F_w &\rightarrow F_w, & \iota_2: F_w &\rightarrow (E \times F)_w, \end{aligned}$$

e reparar que a identidade de  $E \times F$  é igual a  $\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2$ .

**Ex. 2.6.10 (Aplicação do teorema do gráfico fechado<sup>240</sup>) a)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear que seja contínua de  $E$  para  $F_w$ . Mostrar que  $\lambda$  também é contínua de  $E$  para  $F$  (e consequentemente, também de  $E_w$  para  $F_w$ ). **Sugestão:** Verificar que o gráfico

$$G_{\lambda} = \{(x, y) \in E \times F \mid y = \lambda(x)\}$$

é um subespaço vetorial de  $E \times F$  fechado em  $E \times F_w$ , e consequentemente também em  $E \times F$  e aplicar o teorema do gráfico fechado em 2.2.43.

<sup>240</sup>Cf. Brézis [4].



**b)** Obter a mesma conclusão continuando a exigir que  $E$  seja um espaço de Banach mas exigindo apenas que  $F$  seja um espaço vetorial normado. **Sugestão:** Considerar um completado vetorial  $\widehat{F}$  de  $F$ , definido pela aplicação linear  $\xi: F \rightarrow \widehat{F}$  (cf. 2.2.13), e, lembrando que  $\xi: F_w \rightarrow \widehat{F}_w$  também é copntinua, aplicar a conclusão de a) a  $\xi \circ \lambda: E \rightarrow \widehat{F}$ .

**Ex. 2.6.11 (Generalização de 2.6.27 para quem conhecer o teorema de Hahn-Banach geométrico)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado e  $C \subset E$  um conjunto convexo e fechado. Mostrar que  $C$  também é fechado para a topologia fraca de  $E$ . **Sugestão:** Sendo  $x_0 \notin C$ , utilizar a conclusão da alínea e) do exercício 2.1.34 para considerar uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$  com a ajuda da qual poder-se-á construir uma vizinhança de  $x_0$  para a topologia fraca que não interseta  $C$ .

**Ex. 2.6.12** Seja  $E$  um espaço de Hilbert sobre  $\mathbb{K}$  e notemos  $E_w$  o espaço  $E$  com a topologia fraca.

**a)** Verificar que, dados um espaço topológico  $Z$ ,  $C \subset Z$ ,  $z_0 \in Z$  aderente a  $C$  e  $f: C \rightarrow E_w$  uma aplicação, então  $f(z) \rightarrow x_0$  em  $E_w$  quando  $z \rightarrow z_0$  se, e só se, para cada  $y \in E$ , a aplicação  $C \rightarrow \mathbb{K}$  tem limite  $\langle x_0, y \rangle$  quando  $z \rightarrow z_0$ . **Sugestão:** Ter em conta a alínea a) de 2.6.18 e o teorema de representação de Riesz em 2.5.29.

**b)** Suponhamos agora que  $E$  tem dimensão infinita e que  $(x_j)_{j \in J}$  é uma base de Hilbert de  $E$  (cf. 2.5.41). Mostrar que se tem  $x_j \rightarrow 0$  em  $E_w$  quando  $j \rightarrow \infty$  no compactificado de Alexandroff de  $J$ , com a topologia discreta. Deduzir que a esfera unitária  $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$  não é fracamente fechada. **Sugestão:** Lembrar que  $\sum_j w_j$  é uma família somável de vetores de  $E$  então  $w_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$  (cf. 2.3.10).

**c)** Provar, mais geralmente, que se  $E$  tem dimensão infinita a aderência de  $S$  para a topologia de  $E_w$  é igual à bola unitária  $\overline{B}_1(0)$ . **Sugestão:** Seja  $x \in \overline{B}_1(0)$  e notemos  $r = \|x\|$ . Considerar uma base de Hilbert  $(x_j)_{j \in J}$  tal que  $x = rx_{j_0}$  para um certo  $j_0 \in J$ . Definindo, para cada  $j \neq j_0$ ,  $y_j = rx_{j_0} + \sqrt{1 - r^2}x_j \in S$ , verificar que se tem  $y_j \rightarrow x$  em  $E_w$  quando  $j \rightarrow \infty$ .

**Ex. 2.6.13** Sejam  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $I$  um conjunto infinito de índices e  $1 < p < +\infty$  e consideremos o correspondente espaço de Banach  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  (cf. 2.3.48). Para cada  $i \in I$  seja  $\varepsilon_i \in \ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  a família que associa 1 ao índice  $i$  e 0 a todos os restantes índices, a qual verifica naturalmente  $\|\varepsilon_i\| = 1$ .

**a)** Considerando em  $\widehat{I} = I \cup \{\infty\}$  a topologia do compactificado de Alexandroff de  $I$  com a topologia discreta, reparar que não se tem  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow \infty$  para a topologia forte de  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  mas que já se tem  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  para a topologia fraca de  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$ . **Sugestão:** Sendo  $q > 1$  o esponente conjugado de  $p$ , lembrar a caracterização dos elementos do dual de  $\ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  que resulta de 2.3.54 (com os papéis de  $p$  e  $q$  trocados) reparando que se  $(w_i)_{i \in I} \in \ell_{\mathbb{K}}^q(I)$  então tem-se  $w_i \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow \infty$ .

**b)** Deduzir de a) que se  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma  $\mathbb{N}$ -sucessão de índices distintos em  $I$ , então a  $\mathbb{N}$ -sucessão que a  $n$  associa  $\varepsilon_{i_n} \in \ell_{\mathbb{K}}^p(I)$  tem limite 0 para a topologia fraca mas não tem limite 0 para a topologia forte, e comparar este facto com o que foi estabelecido em 2.6.34 para o caso de  $\ell_{\mathbb{K}}^1(I)$ .

**Ex. 2.6.14** Sejam  $E \neq \{0\}$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $X$  um espaço topológico de Hausdorff, localmente compacto e não compacto e consideremos no espaço vetorial  $\mathcal{C}(X, E)$ , das aplicações contínuas  $f: X \rightarrow E$ , a topologia da convergência uniforme nos compactos, para a qual sabemos que  $\mathcal{C}(X, E)$  é um espaço vetorial topológico.

**a)** Verificar que se  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}(X, E)$  é uma vizinhança de 0 então  $\mathcal{U}$  contém algum subespaço vetorial de  $\mathcal{C}(X, E)$  diferente de  $\{0\}$  (comparar com propriedades análogas nos exercícios 2.6.1 e 2.6.3). **Sugestão:** Reparar que existe um compacto  $K \subset X$  tal que  $\mathcal{U}$  contém todas as aplicações contínuas  $f \in \mathcal{C}(X, E)$  com  $f|_K = 0$  e, tendo em conta o teorema de Urysohn em 1.9.6, verificar a existência de  $f \neq 0$  em  $\mathcal{C}(X, E)$  com  $f|_K = 0$ , que se pode obter multiplicando uma aplicação com valores em  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  por um vetor não nulo de  $E$ .

**b)** Deduzir de a) que a topologia da convergência uniforme nos compactos de  $\mathcal{C}(X, E)$  não pode ser definida por nenhuma norma deste espaço (embora, como se verificou em 1.7.54, seja metrizablevel no caso em que  $X$  é de base contável).

# CAPÍTULO 3

## Cálculo diferencial em espaços normados

### §1. O diferencial numa aplicação.

**3.1.1** Sejam  $F$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{K}$  um subconjunto e  $t_0 \in A$  um ponto não isolado, isto é, aderente a  $A \setminus \{t_0\}$  (cf. 1.3.16). Diz-se que uma aplicação  $f: A \rightarrow F$  é *derivável* no ponto  $t_0$  se existir o limite

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

dizendo-se então que esse limite, um vetor de  $F$ , é a *derivada* de  $f$  no ponto  $t_0$ .<sup>241</sup>

Repare-se que, no caso em que o corpo dos escalares  $\mathbb{K}$  é  $\mathbb{R}$  e em que o espaço vetorial normado  $F$  é também  $\mathbb{R}$  a definição precedente não é mais do que a que se utiliza em qualquer curso elementar de funções reais de variável real. A extensão para o caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  não apresenta qualquer dificuldade, pelo menos no que respeita à definição, e o facto de admitirmos que o espaço de chegada possa ser um espaço vetorial normado também não levanta problemas, desde que se repare que o quociente de um vetor por um escalar não nulo é, por definição, o produto desse vetor pelo inverso do escalar.

**3.1.2 (Observação trivial sobre mudança de escalares)** Uma observação trivial que é útil ter presente refere-se à situação em que  $F$  é um espaço vetorial normado complexo (e portanto também um espaço vetorial normado real) e em que  $A \subset \mathbb{R}$  e  $t_0 \in A$  é um ponto não isolado. Nessa situação a derivabilidade de uma aplicação  $f: A \rightarrow F$  em  $t_0$  e o valor da derivada nesse ponto não dependem de se considerar  $A$  como parte de  $\mathbb{R}$  e  $F$  como espaço vetorial real ou  $A$  como parte de  $\mathbb{C}$  e  $F$  como espaço vetorial complexo.

O nosso objetivo nesta secção é estudar a derivabilidade no caso em que o domínio  $A$ , em vez de estar contido no corpo  $\mathbb{K}$  dos escalares, é uma parte de um outro espaço vetorial normado  $E$ . Com frequência simplifica-se o

---

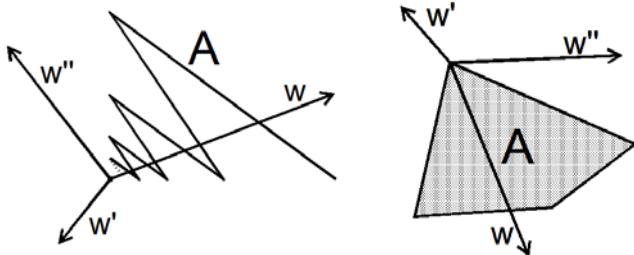
<sup>241</sup>Repare-se que  $A \setminus \{t_0\}$  é o domínio da aplicação cujo limite está em jogo, pelo que a condição de  $t_0$  não ser ponto isolado de  $A$  é precisamente aquela que assegura que faz sentido considerar o limite referido.

estudo nesse quadro mais geral exigindo que o domínio  $A$  seja um aberto do espaço vetorial normado  $E$  mas essa simplificação acaba por ter o seu preço, seja por fazer com que o caso em que  $E = \mathbb{K}$  deixe de ser um caso particular da teoria geral seja por obrigar a soluções *ad hoc* em situações em que o domínio natural é, por exemplo, um produto cartesiano  $[a, b] \times U \subset \mathbb{R} \times E$  com  $U$  aberto de  $E$ . É com o objetivo de tentar evitar esse tipo de “aborrecimento” que não faremos aqui a simplificação referida e começamos por examinar quais os pontos de um domínio  $A \subset E$  em que fará sentido estudar a derivabilidade.

**3.1.3 (Cone de derivabilidade de um conjunto num dos seus pontos)** Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $A \subset E$ . Se  $x_0 \in A$  vamos chamar *cone de derivabilidade* de  $A$  no ponto  $x_0$  ao conjunto  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$  dos vetores  $w \in E$  para os quais  $0 \in \mathbb{K}$  é aderente ao conjunto de escalares

$$\{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\}.$$

**3.1.4 (Exemplos)** Nas duas figuras seguintes sugerimos subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  e representamos vetores tendo como origem o ponto que consideramos em cada um deles. Em cada um dos casos os vetores  $w$  e  $w'$  pertencem ao cone de derivabilidade e o vetor  $w''$  não pertence a este.



**3.1.5 (Propriedades elementares)** Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $x_0 \in A$ . Tem-se então:

- Vem  $0 \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$  e se  $w \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$  também  $tw \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$  para cada  $t \in \mathbb{K}$ .<sup>242</sup>
- Se  $E$  é normado e  $x_0 \in A$  é um ponto isolado de  $A$ , então  $\mathbf{t}_{x_0}(A) = \{0\}$ .
- Se  $E$  é normado e  $x_0$  é interior ao conjunto  $A$  então  $\mathbf{t}_{x_0}(A) = E$ .
- Se  $x_0 \in A' \subset A \subset E$  então  $\mathbf{t}_{x_0}(A') \subset \mathbf{t}_{x_0}(A)$ .
- Se  $x_0 \in A' \subset E$  e  $x_0 \in A'' \subset E$ , então

$$\mathbf{t}_{x_0}(A' \cup A'') = \mathbf{t}_{x_0}(A') \cup \mathbf{t}_{x_0}(A'').$$

Em consequência, se  $E$  é normado, se  $x_0 \in A \subset E$  e se  $V$  é uma vizinhança

<sup>242</sup>Poder-se-ia dizer que  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$  é um *super-cone*, tendo em conta que o facto de termos um cone, como referido no exercício 2.1.34, corresponde a esta implicação ser válida para cada  $t > 0$  em  $\mathbb{R}$ .

de  $x_0$  em  $A$ , então

$$\mathbf{t}_{x_0}(V) = \mathbf{t}_{x_0}(A).$$

**f)** No caso em que  $E = \mathbb{K}$ , se  $t_0 \in A \subset \mathbb{K}$ , tem-se  $\mathbf{t}_{t_0}(A) = \{0\}$  se  $t_0$  é um ponto isolado de  $A$  e  $\mathbf{t}_{t_0}(A) = \mathbb{K}$  caso contrário.

**g)** Sendo  $F$  outro espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $\lambda: E \rightarrow F$  um isomorfismo então

$$\mathbf{t}_{\lambda(x_0)}(\lambda(A)) = \lambda(\mathbf{t}_{x_0}(A)).$$

**h)** Se  $E' \subset E$  é um subespaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  tal que  $A \subset E'$  então  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$  não depende de se considerar  $E$  ou  $E'$  como espaço ambiente, em particular  $\mathbf{t}_{x_0}(A) \subset E'$ .

**Dem:** **a)** O facto de se ter  $0 \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$  resulta de  $0 \in \mathbb{K}$  ser aderente a  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Sendo  $w \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$  e  $t \in \mathbb{K}$ , para mostrar que  $tw \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$  podemos já afastar o caso trivial em que  $t = 0$  e então isso resulta de que

$$\{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + stw \in A\} = \frac{1}{t} \{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\},$$

onde a homotetia  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $s \mapsto \frac{1}{t}s$ , é uma aplicação contínua que aplica  $0$  em  $0$  e  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  em  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

**b)** Suponhamos que  $E$  é normado e  $x_0$  é um ponto isolado de  $A \subset E$ . Uma vez que, como se viu em a),  $0 \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$ , examinemos o que se passa com  $w \in E \setminus \{0\}$ . Sendo  $\varepsilon > 0$  tal que a bola aberta  $B_\varepsilon(x_0)$  não contenha nenhum elemento de  $A \setminus \{x_0\}$ , vemos que para cada  $t \in \mathbb{K}$  com  $|t| < \frac{\varepsilon}{\|w\|}$  vem

$$\|x_0 + tw - x_0\| = |t|\|w\| < \varepsilon$$

donde, no caso em que  $t \neq 0$  e portanto  $x_0 + tw \neq x_0$ ,  $x_0 + tw \notin A$  e portanto, em qualquer caso,  $t \notin \{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\}$ . Ficou assim provado que  $0$  não é aderente a  $\{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\}$  e portanto que  $w \notin \mathbf{t}_{x_0}(A)$ .

**c)** Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_0) \subset A$ . Uma vez que já sabemos que  $0 \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$ , consideremos  $w \in E \setminus \{0\}$  arbitrário. Para cada  $s \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  com  $|s| < \frac{\varepsilon}{\|w\|}$  tem-se então

$$\|x_0 + sw - x_0\| = |s|\|w\| < \varepsilon$$

donde  $x_0 + sw \in A$  pelo que  $0 \in \mathbb{K}$ , sendo aderente a  $B_{\frac{\varepsilon}{\|w\|}}(0) \setminus \{0\}$  é também aderente a  $\{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\}$  ou seja  $w \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$ .

**d)** Temos uma consequência de para cada  $w \in E$  vir

$$\{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A'\} \subset \{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\}$$

e portanto  $0$  ser aderente ao segundo se for aderente ao primeiro.

**e)** A primeira afirmação é uma consequência de para cada  $w \in E$  o conjunto

$$\{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A' \cup A''\}$$

ser igual à união dos conjuntos

$$\{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A'\}, \quad \{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A''\},$$

o que implica que 0 é aderente àquele se, e só se, for aderente a um destes. A segunda afirmação resulta de que podemos escrever

$$A = V \cup ((A \setminus V) \cup \{x_0\}),$$

com  $x_0$  ponto isolado de  $(A \setminus V) \cup \{x_0\}$ .

**f)** Já verificámos em b) que  $\mathbf{t}_{t_0}(A) = \{0\}$  no caso em que  $t_0$  é ponto isolado de  $A$ . Suponhamos então que  $t_0$  não é um ponto isolado de  $A$ , ou seja que  $t_0$  é aderente a  $A \setminus \{t_0\}$ . Tendo em conta a continuidade da translação  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $t \mapsto t - t_0$ , que aplica  $t_0$  em 0, concluímos que 0 é aderente a

$$(A \setminus \{t_0\}) - t_0 = \{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid t_0 + s \in A\}$$

ou seja  $1 \in \mathbf{t}_{t_0}(A)$ . Concluímos daqui, tendo em conta a), que para cada  $t \in \mathbb{K}$  tem-se  $t = t \cdot 1 \in \mathbf{t}_{t_0}(A)$ .

**g)** Basta atender a que para cada  $w \in E$  tem-se

$$x_0 + tw \in A \Leftrightarrow \lambda(x_0 + tw) \in \lambda(A) \Leftrightarrow \lambda(x_0) + t\lambda(w) \in \lambda(A).$$

**h)** Trata-se de uma consequência de, para cada  $w \in E \setminus E'$  se ter  $x_0 + sw \notin E'$  para cada  $s \neq 0$ , uma vez que se isso não acontecesse vinha

$$w = \frac{1}{s} ((x_0 + sw) - x_0) \in E'. \quad \square$$

Uma das razões pelas quais é importante considerar o cone de derivabilidade é o facto de os vetores deste serem precisamente aqueles segundo os quais faz sentido considerar a possível existência das derivadas dirigidas que definimos em seguida.

**3.1.6 (Derivada dirigida segundo um vetor)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais normado,  $x_0 \in A \subset E$  e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Se  $w \in \mathbf{t}_{x_0}(A) \subset E$ , diz-se que é *derivável* em  $x_0$  *segundo*  $w$  se existir o limite

$$D_w f(x_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + sw) - f(x_0)}{s} \in F,$$

limite a que se dá o nome de *derivada dirigida* de  $f$  em  $x_0$  *segundo*  $w$ .

Repare-se que a aplicação cujo limite se refere tem como domínio o conjunto de escalares

$$\{s \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\}$$

e que o facto de se ter  $w \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$  corresponde exactamente a afirmar que 0 é aderente a este conjunto.

Repare-se que qualquer aplicação  $f: A \rightarrow F$  é trivialmente derivável em  $x_0$  segundo 0 e com  $D_0f(x_0) = 0$  (limite duma aplicação constante de valor 0).

**3.1.7 (Comparação dos contextos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ )** Já fizémos várias vezes a observação que se  $E$  é um espaço vetorial complexo podemos também encará-lo como espaço vetorial real. Devemos no entanto notar que, tanto para a definição de  $\mathbf{t}_{t_0}(A)$  como para a da derivada segundo um vetor, não é indiferente qual o corpo de escalares que se considera. Quando houver risco de confusão ou quando se pretender relacionar os dois pontos de vista, usaremos, com o significado natural, as notações  $\mathbf{t}_{t_0}^{\mathbb{R}}(A)$  e  $\mathbf{t}_{t_0}^{\mathbb{C}}(A)$  para os cones de derivabilidade nos dois contextos. Repare-se que se tem sempre

$$\mathbf{t}_{t_0}^{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbf{t}_{t_0}^{\mathbb{C}}(A)$$

já que, para cada  $w \in E$ ,

$$\{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\} \subset \{s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid x_0 + sw \in A\}.$$

Temos aqui, de certo modo, uma inversão do paradigma “o que vale para  $\mathbb{C}$  vale também para  $\mathbb{R}$ ”. É, no entanto, evidente que dados um espaço vetorial normado complexo  $F$  e uma aplicação  $f: A \rightarrow F$ , se  $w \in \mathbf{t}_{t_0}^{\mathbb{R}}(A)$  e existir  $D_w f(x_0)$  no sentido complexo, então essa derivada dirigida é também derivada dirigida no sentido real (aqui já de acordo com o paradigma atrás referido).

Mostra a experiência que, em geral, a noção de diferenciabilidade mais importante para as aplicações (diferenciabilidade no sentido de Fréchet) corresponde a pedir mais do que a existência de derivadas dirigidas. Analogamente ao que fizémos para as derivadas dirigidas, começamos por caracterizar quais os pontos do domínio de uma aplicação em que faz sentido questionar a sua diferenciabilidade.

**3.1.8 (Pontos de diferenciabilidade dum conjunto)** Sejam  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $A \subset E$  um subconjunto. Vamos dizer que  $x_0 \in A$  é um ponto de diferenciabilidade de  $A$  se o subespaço vetorial gerado pelo cone de derivabilidade  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$  for igual a  $E$ .

As seguintes propriedades são consequências diretas do que já conhecemos sobre os cones de derivabilidade:

**a)** Se  $x_0 \in A$  é um ponto de diferenciabilidade  $A$  então qualquer vetor de  $E$  é soma finita de vetores de  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$  (tendo em conta a alínea a) de 3.1.5, o conjunto destas somas finitas já é um subespaço vetorial).

**b)** Se  $E \neq \{0\}$  é normado e  $x_0 \in A$  é um ponto de diferenciabilidade então

$x_0$  não é um ponto isolado de  $A$  (cf. a alínea b) de 3.1.5).

**c)** Se  $E$  é normado e  $x_0$  é um ponto interior de  $A \subset E$ , então  $x_0$  é um ponto de diferenciabilidade de  $A$  (cf. a alínea c) de 3.1.5). Em particular, se  $A \subset E$  for um conjunto aberto então cada  $x_0 \in A$  é um ponto de diferenciabilidade.

**d)** Se  $x_0 \in A' \subset A \subset E$  e  $x_0$  for ponto de diferenciabilidade de  $A'$  então  $x_0$  também é ponto de diferenciabilidade de  $A$  (cf. a alínea d) de 3.1.5).

**e)** Se  $x_0 \in A \subset E$  é um ponto de diferenciabilidade,  $E$  é normado e  $V$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $A$  então  $x_0$  também é um ponto de diferenciabilidade de  $V$  (cf. a alínea e) de 3.1.5).

**f)** No caso em que  $E = \mathbb{K}$ , se  $t_0 \in A \subset \mathbb{K}$  então  $t_0$  é ponto de diferenciabilidade de  $A$  se, e só se,  $t_0$  não é ponto isolado de  $A$  (cf. a alínea f) de 3.1.5). Em particular, se  $J \subset \mathbb{R}$  é um *intervalo não trivial* (isto é, com mais que um elemento) então qualquer  $t_0 \in J$  é um ponto de diferenciabilidade, tanto de  $J$  como parte do espaço vetorial real  $\mathbb{R}$  como de  $J$  como parte do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}$ <sup>243</sup>.

**g)** Se  $F$  é outro espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\lambda: E \rightarrow F$  é um isomorfismo e  $x_0 \in A \subset E$  é ponto de diferenciabilidade então  $\lambda(x_0)$  é um ponto de diferenciabilidade de  $\lambda(A)$  (cf. a alínea g) de 3.1.5).

**h)** No caso em que  $E$  é um espaço vetorial complexo, se  $x_0 \in A \subset E$  for um ponto de diferenciabilidade de  $A$  no sentido real então é também um ponto de diferenciabilidade de  $A$  no sentido complexo (cf. 3.1.7 — tal como aí, temos uma inversão do paradigma usual).

### 3.1.9 (Pontos de diferenciabilidade e produtos cartesianos finitos) Sejam $I$

um conjunto finito não vazio de índices e  $E_i$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  para cada  $i \in I$  e consideremos o espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  produto cartesiano  $\prod_{i \in I} E_i$ . Se  $x_{i0} \in A_i \subset E_i$  é um ponto de diferenciabilidade para cada  $i \in I$

então  $(x_{i0})_{i \in I}$  é um ponto de diferenciabilidade de  $\prod_{i \in I} A_i$ .<sup>244</sup>

**Dem:** Começemos por mostrar que, se  $w_j \in \mathfrak{t}_{x_{j0}}(A_j)$  então o vetor  $\widehat{w}_j$  de  $\prod_{i \in I} E_i$ , que associa  $w_j$  ao índice  $j$  e 0 aos restantes índices, pertence a

$\mathfrak{t}_{(x_{i0})_{i \in I}}(\prod_{i \in I} A_i)$ . Ora, isso resulta de que se  $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  é tal que  $x_{j0} + tw_j$

pertence a  $A_j$  então também

$$(x_{i0})_{i \in I} + t\widehat{w}_j \in \prod_{i \in I} A_i$$

<sup>243</sup>Mas não de  $J$  como parte do espaço vetorial real  $\mathbb{C}$ .

<sup>244</sup>Apesar deste resultado ter um espírito semelhante ao dos enunciados nas várias alíneas de 3.1.8, enunciamo-lo separadamente uma vez que, ao contrário daqueles, ele não resulta diretamente de nenhuma propriedade com o mesmo espírito dos cones de derivabilidade. Com efeito, como se verifica facilmente, não se pode concluir que uma família  $(w_i)_{i \in I}$  tenha que pertencer ao cone de derivabilidade de  $\prod_{i \in I} A_i$  em  $(x_{i0})_{i \in I}$  a partir do facto de se

ter  $w_i \in \mathfrak{t}_{x_{i0}}(A_i)$  para cada  $i$ .



pelo que se  $0$  é aderente ao conjunto dos  $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  com a primeira propriedade então  $0$  é também aderente ao conjunto dos  $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  com a segunda propriedade. Notemos agora  $\mathcal{F}$  um subespaço vectorial arbitrário de  $\prod_{i \in I} E_i$  que contenha  $\mathbf{t}_{(x_{i_0})_{i \in I}}(\prod_{i \in I} A_i)$ . Para cada  $j$  o conjunto  $F_j \subset E_j$  dos  $w_j \in E_j$  tais que  $\hat{w}_j \in \mathcal{F}$  é então um subespaço vectorial de  $E_j$  que, pelo que vimos no início, contém  $\mathbf{t}_{x_{j_0}}(A_j)$  e portanto o facto de  $x_{j_0}$  ser um ponto de diferenciabilidade de  $A_{j_0}$  implica que  $F_j = E_j$ . Provámos assim que para cada  $w_j \in E_j$  tem-se  $\hat{w}_j \in \mathbf{t}_{(x_{i_0})_{i \in I}}(\prod_{i \in I} A_i) \subset \mathcal{F}$  e portanto para qualquer  $(w_i)_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} E_i$  vem

$$(w_i)_{i \in I} = \sum_{j \in I} \hat{w}_j \in \mathcal{F}.$$

Provámos assim que  $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} E_i$  pelo que o subespaço vectorial de  $\prod_{i \in I} E_i$  gerado por  $\mathbf{t}_{(x_{i_0})_{i \in I}}(\prod_{i \in I} A_i)$  é  $\prod_{i \in I} E_i$  ou seja  $(x_{i_0})_{i \in I}$  é um ponto de diferenciabilidade de  $\prod_{i \in I} A_i$ .  $\square$

**3.1.10 (Exemplos)** Relembrando os exemplos sugeridos graficamente em 3.1.4, repare-se que no segundo todos os pontos de  $A$  são pontos de diferenciabilidade e que no primeiro são pontos de diferenciabilidade, além do utilizado como origem dos vetores, os “vértices” da “poligonal”.

**3.1.11 (Aplicações diferenciáveis no sentido de Fréchet)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação.

No caso em que  $E \neq \{0\}$ , diz-se que  $f$  é *diferenciável* no ponto  $x_0$  se existir uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  tal que

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

(lembrar que, como referido na alínea b) de 3.1.8,  $x_0$  não é um ponto isolado de  $A$ ), condição que, tendo em conta a caracterização dos limites num espaço métrico em 1.2.29, é equivalente a

$$(1') \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Quando isso acontecer, uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  nas condições anteriores é necessariamente única e será chamada o *diferencial* de  $f$  no ponto  $x_0$ , sendo notada  $Df(x_0)$  ou, com mais frequência,  $Df_{x_0}$ . De facto, para cada  $w \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$  a aplicação  $f$  tem então derivada em  $x_0$  segundo

$w$  dada por

$$(2) \quad D_w f(x_0) = Df_{x_0}(w).^{245}$$

Será cómodo não afastar o caso trivial em que  $E = \{0\}$ , caso em que tem que ser  $A = \{0\}$  e  $x_0 = 0$ . Nesse caso consideraremos qualquer aplicação  $f: \{0\} \rightarrow F$  como diferenciável em 0 e com  $Df_0 = 0: \{0\} \rightarrow F$  (a única aplicação linear), apesar de não fazer sentido considerar o limite em (1) ou (1'). A igualdade (2) continua a ser válida (necessariamente com  $w = 0$ ), tendo em conta a última observação em 3.1.6. Note-se que nas demonstrações dos resultados envolvendo a diferenciabilidade ignoraremos sem mais aviso o caso em que algum dos espaços ambientes do domínio seja  $\{0\}$  desde que a demonstração desse caso seja trivial.

**Dem:** O enunciado acima é, na sua maioria, constituído por definições. O que fica por provar é, no caso em que  $E \neq \{0\}$ , a unicidade de uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  verificando (1) e o facto de para uma tal aplicação linear contínua  $\lambda$  vir  $D_w f(x_0) = \lambda(w)$  para cada  $w \in \mathfrak{t}_{x_0}(A)$ . Começemos por mostrar este último facto, afastando já o caso em que  $w = 0$ , caso em que a última observação em 3.1.6 garante a validade da igualdade. Considerando a aplicação

$$\{t \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \mid x_0 + tw \in A\} \rightarrow A \setminus \{x_0\}. \quad t \mapsto x_0 + tw,$$

que tem limite  $x_0$  quando  $t \rightarrow 0$ , deduzimos do resultado sobre o limite da aplicação composta que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + tw) - f(x_0) - \lambda(x_0 + tw - x_0)\|}{\|x_0 + tw - x_0\|} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + tw) - f(x_0) - t\lambda(w)\|}{|t|\|w\|} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\frac{f(x_0 + tw) - f(x_0)}{t} - \lambda(w)}{\|w\|} \right\| \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tw) - f(x_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(w) + \|w\| \frac{\frac{f(x_0 + tw) - f(x_0)}{t} - \lambda(w)}{\|w\|} = \\ &= \lambda(w) + \|w\| \cdot 0 = \lambda(w), \end{aligned}$$

por outras palavras, existe a derivada dirigida  $D_w f(x_0)$  e é igual a  $\lambda(w)$ . O que acabamos de provar permite mostrar facilmente a unicidade: Se  $\lambda$  e  $\hat{\lambda}$  fossem duas aplicações lineares contínuas  $E \rightarrow F$  verificando (1), vinha para

<sup>245</sup>O segundo membro desta igualdade explica porque usaremos a notação  $Df_{x_0}$  com mais frequência do que  $Df(x_0)$ : Se estivéssemos a usar esta última teríamos que escrever  $Df(x_0)(w)$ , uma acumulação de parênteses que pode ser visualmente menos agradável e não sublinhar convenientemente a diferença dos papéis de  $x_0$  e de  $w$ .

cada  $w \in \mathbf{t}_{x_0}(A)$

$$\lambda(w) = D_w f(x_0) = \widehat{\lambda}(w)$$

pelo que  $\lambda$  e  $\widehat{\lambda}$ , coincidindo em  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$ , coincidem no subespaço vetorial de  $E$  gerado por  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$  que, pelo facto de  $x_0$  ser um ponto de diferenciabilidade de  $A$ , é igual a  $E$ .  $\square$

**3.1.12 (Formulação alternativa da condição de diferenciabilidade)** No contexto de 3.1.11, a condição (1') (e portanto a condição (1)) é equivalente à existência para cada  $\delta > 0$  de  $\varepsilon > 0$  tal que para cada  $x \in A$  com  $\|x - x_0\| < \varepsilon$  se tenha

$$(1'') \quad \|f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)\| \leq \delta \|x - x_0\|.$$

**Dem:** Basta atender a que a condição (1'') é trivialmente verdadeira para  $x = x_0$  e que para  $x \neq x_0$  ela é equivalente a

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \delta,$$

considerando então a caracterização dos limites que utiliza as bolas fechadas no espaço de chegada e as bolas abertas no de partida.  $\square$

**3.1.13 (Continuidade das aplicações diferenciáveis)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação diferenciável em  $x_0$ . Tem-se então que  $f$  é contínua em  $x_0$ .

**Dem:** Trata-se de uma consequência das propriedades gerais sobre limites de somas e de multiplicações e da continuidade da aplicação linear  $Df_{x_0}: E \rightarrow F$  visto que podemos escrever

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + \\ &\quad + \|x - x_0\| \frac{f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \\ &= f(x_0) + Df_{x_0}(0) + 0 \cdot 0 = f(x_0). \end{aligned} \quad \square$$

**3.1.14 (O caso da variável escalar)** Sejam  $F$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $t_0 \in A \subset \mathbb{K}$  um ponto não isolado (ou, o que é o mesmo, um ponto de diferenciabilidade de  $A$  — cf. a alínea f) de 3.1.8) e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Tem-se então que  $f$  é derivável em  $t_0$ , no sentido em 3.1.1, se, e só se,  $f$  for diferenciável em  $t_0$ , no sentido em 3.1.11, e, quando isso acontecer, a derivada e o diferencial estão relacionados por

$$f'(t_0) = Df_{t_0}(1), \quad Df_{t_0}(a) = a f'(t_0),$$

por outras palavras  $Df_{t_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$  e  $f'(t_0) \in F$  correspondem-se pela

isometria linear  $\Upsilon: \mathcal{L}(\mathbb{K}; F) \rightarrow F$  em 2.1.42.

Uma observação trivial que decorre daqui é que no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $A \subset \mathbb{R}$  a diferenciabilidade de  $f: A \rightarrow F$  num ponto não isolado  $t_0 \in A$  no sentido real é equivalente à sua diferenciabilidade no sentido complexo, quando se considera  $A$  como parte de  $\mathbb{C}$ , o diferencial em  $t_0$  no sentido real sendo então a restrição a  $\mathbb{R}$  do seu diferencial em  $t_0$  no sentido complexo (cf. 3.1.2).

**Dem:** Começemos por supor que  $f$  é diferenciável em  $t_0$ . Vem então

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|f(t) - f(t_0) - Df_{t_0}(t - t_0)\|}{|t - t_0|} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - \frac{Df_{t_0}(t - t_0)}{t - t_0} \right\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - Df_{t_0}(1) \right\| \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - Df_{t_0}(1) + Df_{t_0}(1) = \\ &= 0 + Df_{t_0}(1) = Df_{t_0}(1), \end{aligned}$$

o que mostra que  $f$  é derivável em  $t_0$  e com  $f'(t_0) = Df_{t_0}(1)$ . Suponhamos, reciprocamente, que  $f$  é derivável em  $t_0$  e seja  $\lambda = \Upsilon^{-1}(f'(t_0)) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$  a aplicação linear contínua definida por  $\lambda(a) = af'(t_0)$ . Tem-se então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|f(t) - f(t_0) - \lambda(t - t_0)\|}{|t - t_0|} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - \frac{(t - t_0)f'(t_0)}{t - t_0} \right\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \|f'(t_0) - f'(t_0)\| = 0, \end{aligned}$$

e portanto  $f$  é diferenciável em  $t_0$  e com diferencial  $Df_{t_0} = \lambda$ . □

**3.1.15 (Diferenciabilidade e restrições)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação diferenciável em  $x_0$ . Se  $x_0 \in A' \subset A$  e  $x_0$  for ainda um ponto de diferenciabilidade de  $A'$  então a restrição  $f|_{A'}: A' \rightarrow F$  é ainda diferenciável em  $x_0$  e com o mesmo diferencial em  $x_0$  que a aplicação  $f$ .

**Dem:** Trata-se de um consequência direta do resultado correspondente sobre o limite de uma restrição em 1.2.36. □

**3.1.16 (Carácter local da diferenciabilidade)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Se  $V$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $A$  já referimos na alínea e) de 3.1.8 que  $x_0$  também é ponto de diferenciabilidade de  $V$  e tem-se então que  $f: A \rightarrow F$  é diferenciável em  $x_0$  se, e só se,  $f|_V: V \rightarrow F$  for

diferenciável e, quando isso acontecer, as duas aplicações têm o mesmo diferencial em  $x_0$ .

**Dem:** Trata-se de um consequência direta do resultado geral correspondente sobre os limites de aplicações em 1.2.39.  $\square$

**3.1.17 (Alteração do espaço de chegada)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Se  $F' \subset F$  é um subespaço vetorial **fechado** tal que  $f(A) \subset F'$  então  $f$  é diferenciável em  $x_0$  como aplicação  $A \rightarrow F$  se, e só se,  $f$  é diferenciável em  $x_0$  como aplicação  $A \rightarrow F'$  e, nesse caso, o diferencial  $Df_{x_0}$  é o mesmo nos dois contextos (em particular  $Df_{x_0}(E) \subset F'$ ).

**Dem:** Resulta imediatamente da definição que se  $f$  é diferenciável em  $x_0$  como aplicação  $A \rightarrow F'$  então também o é como aplicação  $A \rightarrow F$  e com o mesmo diferencial (uma aplicação linear contínua  $E \rightarrow F'$  também é uma aplicação linear contínua  $E \rightarrow F$ ). A recíproca só não é tão imediata porque,  $f$  sendo diferenciável em  $x_0$  como aplicação  $A \rightarrow F$  poderia *a priori* acontecer que o diferencial  $Df_{x_0}: E \rightarrow F$  não fosse uma aplicação linear com valores em  $F'$ . No entanto, se verificarmos que se tem necessariamente  $Df_{x_0}(E) \subset F'$ , já será trivial concluir que  $f$  é diferenciável como aplicação  $A \rightarrow F'$  e com o mesmo diferencial  $Df_{x_0}$ . Começemos por verificar o que se passa quando  $w \in \mathfrak{t}_{x_0}(A)$ . Nesse caso, tendo em conta 3.1.11, sabemos que se tem

$$Df_{x_0}(w) = D_w f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tw) - f(x_0)}{t}$$

pelo que, uma vez que para cada escalar  $t \neq 0$  tal que  $x_0 + tw \in A$  se tem

$$\frac{f(x_0 + tw) - f(x_0)}{t} \in F'$$

e que  $F'$  é um subespaço vetorial fechado, concluímos que  $Df_{x_0}(w) \in F'$ . Notamos, por fim, que o conjunto dos vetores  $w \in E$  tais que  $Df_{x_0}(w) \in F'$  é um subespaço vetorial de  $E$  que verificámos conter  $\mathfrak{t}_{x_0}(A)$  e portanto contém o subespaço vetorial de  $E$  gerado por  $\mathfrak{t}_{x_0}(A)$ , o qual é, por hipótese, igual a  $E$ . Por outras palavras, ficou provado que para cada  $w \in E$  tem-se  $Df_{x_0}(w) \in F'$  o que é precisamente o que nos faltava provar.  $\square$

**3.1.18 (Mudança de escalares)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados complexos,  $A \subset E$ ,  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação e  $x_0 \in A$  um ponto de diferenciabilidade de  $f$  no sentido real, e portanto também no sentido complexo (cf. a alínea h) de 3.1.8). Decorre imediatamente da definição que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  no sentido complexo se, e só se,  $f$  for diferenciável em  $x_0$  no sentido real e com  $Df_{x_0}: E \rightarrow F$  aplicação linear complexa, o diferencial no sentido real coincidindo então com o diferencial no sentido complexo.

**3.1.19 (Exemplos triviais de diferenciabilidade)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $x_0 \in A$  um ponto de diferenciabilidade. Tem-se então:

a) Se  $f: A \rightarrow F$  é uma aplicação de valor constante  $y_0$  então  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e com  $Df_{x_0} = 0: E \rightarrow F$ .

b) Se  $f: A \rightarrow F$  é a restrição de uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  então  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e com  $Df_{x_0} = \lambda$ .

**Dem: a)** Basta atender a que se tem

$$\frac{f(x) - f(x_0) - 0(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \frac{y_0 - y_0 - 0}{\|x - x_0\|} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

b) Basta atender a que se tem

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \frac{\lambda(x) - \lambda(x_0) - \lambda(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0. \quad \square$$

**3.1.20 (Propriedades de linearidade da diferenciabilidade)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $x_0 \in A$  um ponto de diferenciabilidade. Tem-se então:

a) Se  $f, g: A \rightarrow F$  são duas aplicações diferenciáveis em  $x_0$  então também é diferenciável em  $x_0$  a aplicação  $f + g: A \rightarrow F$  e tem-se

$$D(f + g)_{x_0} = Df_{x_0} + Dg_{x_0}.$$

Repare-se que do que acabamos de referir deduz-se imediatamente por indução um resultado análogo sobre a soma de um número finito de aplicações diferenciáveis em  $x_0$  e sobre o diferencial dessa soma no ponto  $x_0$ .

b) Se  $f: A \rightarrow F$  é diferenciável em  $x_0$  e  $a \in \mathbb{K}$  então é também diferenciável em  $x_0$  a aplicação  $af: A \rightarrow F$  e tem-se

$$D(af)_{x_0} = aDf_{x_0}.$$

c) Mais geralmente, se  $f: A \rightarrow F$  é diferenciável em  $x_0$  e  $\xi: F \rightarrow G$  é uma aplicação linear contínua, onde  $G$  é outro espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ , então  $\xi \circ f: A \rightarrow G$  é diferenciável em  $x_0$  e tem-se

$$D(\xi \circ f)_{x_0} = \xi \circ Df_{x_0}.$$

**Dem: a)** Tem-se que  $Df_{x_0} + Dg_{x_0}: E \rightarrow F$  é uma aplicação linear contínua para a qual

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0) - (Df_{x_0} + Dg_{x_0})(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \\ & = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} + \frac{g(x) - g(x_0) - Dg_{x_0}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \right) = \\ & = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

c) Tem-se que  $\xi \circ Df_{x_0}: E \rightarrow G$  é uma aplicação linear contínua para a qual

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\xi(f(x)) - \xi(f(x_0)) - \xi(Df_{x_0}(x - x_0))}{\|x - x_0\|} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \xi \left( \frac{f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \right) = \\ &= \xi \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \right) = \xi(0) = 0. \end{aligned}$$

b) Trata-se do caso particular de c) em que consideramos a aplicação linear contínua  $\xi: F \rightarrow F$  definida por  $\xi(y) = ay$ .  $\square$

**3.1.21 (Diferenciabilidade da aplicação composta)** Sejam  $E, F, G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$ ,  $B \subset F$  e  $f: A \rightarrow F$  e  $g: B \rightarrow G$  duas aplicações tais que  $f(A) \subset B$ . Sejam  $x_0 \in A$  um ponto de diferenciabilidade tal que  $f(x_0) \in B$  seja um ponto de diferenciabilidade, que  $f$  seja diferenciável em  $x_0$  e que  $g$  seja diferenciável em  $f(x_0)$ . Tem-se então que  $g \circ f: A \rightarrow G$  é diferenciável em  $x_0$  e com

$$D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{f(x_0)} \circ Df_{x_0}.$$

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1) Com o objetivo de limitar a dimensão das expressões envolvidas, vamos mostrar que será suficiente provar o caso particular em que  $Dg_{f(x_0)} = 0$ , caso em que deveremos provar que  $g \circ f$  é diferenciável em  $x_0$  e com diferencial  $D(g \circ f)_{x_0} = 0$ .

**Subdem:** Supondo que se provou o caso particular, podemos, no caso geral, considerar a aplicação  $\hat{g}: B \rightarrow G$  definida por  $\hat{g}(y) = g(y) - Dg_{f(x_0)}(y)$  que verifica, tendo em conta 3.1.19 e 3.1.20,

$$D\hat{g}_{f(x_0)} = Dg_{f(x_0)} - Dg_{f(x_0)} = 0$$

e o facto de se ter  $g(f(x)) = \hat{g}(f(x)) + Dg_{f(x_0)}(f(x))$  implica então, pela alínea c) de 3.1.20 e pelo caso particular que se supõe provado que

$$D(g \circ f)_{x_0} = D(\hat{g} \circ f)_{x_0} + Dg_{f(x_0)} \circ Df_{x_0} = Dg_{f(x_0)} \circ Df_{x_0}.$$

2) Vamos então supor que se tem  $Dg_{f(x_0)} = 0$ , isto é

$$(1) \quad \lim_{y \rightarrow f(x_0)} \frac{\|g(y) - g(f(x_0))\|}{\|y - f(x_0)\|} = 0,$$

e o nosso objetivo é provar que  $g \circ f$  é diferenciável em  $x_0$  e com  $D(g \circ f)_{x_0} = 0$ , isto é que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Fá-lo-emos com o auxílio do resultado geral sobre limites em 1.2.37

reparando que se pode escrever  $A \setminus \{x_0\} = A' \cup A''$ , onde

$$A' = \{x \in A \setminus \{x_0\} \mid f(x) = f(x_0)\},$$

$$A'' = \{x \in A \setminus \{x_0\} \mid f(x) \neq f(x_0)\}.$$

Tendo em conta o resultado referido, o que teremos que verificar é o que enunciamos nas duas alíneas a seguir:

3) Se  $x_0$  for aderente a  $A'$  então

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A'}} \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

**Subdem:** Trata-se de uma consequência de para cada  $x \in A'$  ser mesmo

$$\frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

4) Se  $x_0$  for aderente a  $A''$  então

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A''}} \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

**Subdem:** Uma vez que  $f$  é contínua em  $x_0$ , donde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  e que para cada  $x \in A''$  tem-se  $f(x) \neq f(x_0)$ , deduzimos de (1) pelo resultado sobre o limite da aplicação composta que

$$(2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A''}} \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} = 0.$$

Notamos agora que para cada  $x \in A''$  tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = \\ &= \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \times \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0) + Df_{x_0}(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \\ &\leq \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \times \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \\ &\quad + \frac{\|g(f(x)) - g(f(x_0))\|}{\|f(x) - f(x_0)\|} \times \|Df_{x_0}\| \end{aligned}$$

pelo que, tendo em conta (2) e o facto de se ter, pela diferenciabilidade de  $f$  em  $x_0$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A''}} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df_{x_0}(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$



concluimos por enquadramento (cf. 1.2.34) que tem lugar o limite que pretendíamos justificar nesta alínea.  $\square$

**3.1.22 (Diferenciabilidade e normas equivalentes)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$ ,  $x_0 \in A$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação diferenciável em  $x_0$ . Tem-se então:

**a)** Se substituirmos a norma de  $F$  por outra equivalente, a aplicação  $f$  continua diferenciável em  $x_0$  e com o mesmo diferencial.

**b)** Se substituirmos a norma de  $E$  por outra equivalente então a aplicação  $f$  continua diferenciável em  $x_0$  e com o mesmo diferencial.

**Dem:** **a)** Basta repararmos que a noção de limite é topológica e não se altera assim quando se substitui a norma por outra equivalente.

**b)** Apesar de se poder dar uma demonstração mais direta, é formalmente mais simples aplicar o resultado 3.1.21 sobre a diferenciabilidade da aplicação composta, reparando que trocar a norma de  $E$  pode ser encarado como compor a aplicação  $f$  com a identidade  $Id_A: A \rightarrow A$ , onde consideramos o domínio como parte de  $E$  com a segunda norma e o codomínio como parte de  $E$  com a primeira norma, essa identidade sendo uma restrição da aplicação linear contínua  $Id_E: E \rightarrow E$ .  $\square$

O teorema sobre a diferenciabilidade da aplicação composta admite formulações alternativas quando algum dos espaços ambientes dos domínios é o corpo dos escalares  $\mathbb{K}$ , formulações que fazem intervir a derivada em vez do diferencial. Essas formulações deduzem-se imediatamente do enunciado geral, se nos lembrarmos das relações entre a derivada e o diferencial expressas nas identidades  $f'(t_0) = Df_{t_0}(1)$  e  $Df_{t_0}(a) = af'(t_0)$  referidas em 3.1.14. A título de exemplo, detalhamos essas formulações:

**3.1.23 a)** Sejam  $F$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $B \subset F$  e  $g: B \rightarrow G$  uma aplicação. Sejam  $t_0 \in A \subset \mathbb{K}$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação derivável em  $t_0$  tal que  $f(A) \subset B$ , que  $f(t_0)$  seja um ponto de diferenciabilidade de  $B$  e que  $g$  seja diferenciável em  $f(t_0)$ . Tem-se então que  $g \circ f: A \rightarrow G$  é derivável em  $t_0$  e

$$(g \circ f)'(t_0) = Dg_{f(t_0)}(f'(t_0)).$$

**b)** Sejam  $G$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $B \subset \mathbb{K}$  e  $g: B \rightarrow G$  uma aplicação. Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação diferenciável em  $x_0$  tal que  $f(A) \subset B$ , que  $f(x_0)$  seja um ponto de diferenciabilidade de  $B$  e que  $g$  seja derivável em  $f(x_0)$ . Tem-se então que  $g \circ f: A \rightarrow G$  é diferenciável em  $x_0$ , e para cada  $w \in E$ ,

$$D(g \circ f)_{x_0}(w) = Dg_{f(x_0)}(w)g'(f(x_0)).$$

**c)** Sejam  $G$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $B \subset \mathbb{K}$  e  $g: B \rightarrow G$  uma

aplicação. Sejam  $t_0 \in A \subset \mathbb{K}$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação derivável em  $t_0$  tal que  $f(A) \subset B$ , que  $f(t_0)$  seja um ponto de diferenciabilidade de  $B$  e que  $g$  seja derivável em  $f(t_0)$ . Tem-se então que  $g \circ f: A \rightarrow G$  é derivável em  $t_0$  e

$$(g \circ f)'(t_0) = f'(t_0) g'(f(t_0)).$$

**3.1.24 (Aplicações com valores num produto cartesiano finito)** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $F_i$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e consideremos sobre o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} F_i$  uma das normas que define a topologia produto, por exemplo a norma do máximo, definida por

$$\|(v_i)_{i \in I}\| = \max_{i \in I} \|v_i\|$$

(cf. 2.1.12). Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e, para cada  $i \in I$ ,  $f_i: A \rightarrow F_i$  uma aplicação e consideremos a correspondente aplicação  $f: A \rightarrow \prod_{i \in I} F_i$ , definida por

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}.$$

Tem-se então que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  se, e só se, cada  $f_i: A \rightarrow F_i$  é diferenciável em  $x_0$  e então, para cada  $w \in E$ ,

$$Df_{x_0}(w) = (Df_{i x_0}(w))_{i \in I}.$$

**Dem:** Consideremos para cada  $j \in I$  a projeção canónica  $\pi_j: \prod_{i \in I} F_i \rightarrow F_j$ , definida por  $\pi_j((v_i)_{i \in I}) = v_j$ , que sabemos ser uma aplicação linear contínua, em particular diferenciável em cada ponto de  $\prod_{i \in I} F_i$  e com diferencial nesse ponto igual a  $\pi_j$  (cf. a alínea b) de 3.1.19). Se  $f$  for diferenciável em  $x_0$  deduzimos de 3.1.21 que, para cada  $j \in I$ , é também diferenciável em  $x_0$  a composta  $\pi_j \circ f$ , que não é mais do que  $f_j$ , e com

$$Df_{j x_0}(w) = D\pi_{j f(x_0)}(Df_{x_0}(w)) = \pi_j(Df_{x_0}(w)),$$

condição que significa precisamente que se tem

$$Df_{x_0}(w) = (Df_{i x_0}(w))_{i \in I}.$$

Suponhamos, reciprocamente, que cada  $f_j: A \rightarrow F_j$  é diferenciável em  $x_0$ . Considerando, para cada  $j \in I$ , a injeção canónica  $\iota_j: F_j \rightarrow \prod_{i \in I} F_i$ , que a cada  $v_j$  associa a família  $(v_i)_{i \in I}$  com  $v_i = 0$  para cada  $i \neq j$ , que é uma aplicação linear contínua, deduzimos, mais uma vez de 3.1.21, que é diferenciável em  $x_0$  a aplicação  $\iota_j \circ f_j: A \rightarrow \prod_{i \in I} F_i$ . Reparando agora que, para cada  $x \in A$ ,

$$f(x) = \sum_{j \in I} \iota_j \circ f_j(x),$$

deduzimos da versão para várias parcelas da alínea a) de 3.1.20 que  $f$  é diferenciável em  $x_0$ .  $\square$

**3.1.25 (Diferenciabilidade das aplicações bilineares contínuas)** Sejam  $F$ ,  $G$  e  $H$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: F \times G \rightarrow H$  uma aplicação bilinear contínua. Considerando em  $F \times G$  qualquer das normas que define a topologia produto, por exemplo a norma do máximo definida por

$$\|(u, v)\| = \max\{\|u\|, \|v\|\},$$

tem-se então que  $\gamma$  é diferenciável em cada  $(y_0, z_0) \in F \times G$  e com

$$D\gamma_{(y_0, z_0)}(u, v) = \gamma(u, z_0) + \gamma(y_0, v).$$

**Dem:** Começemos por reparar que o facto de  $\gamma$  ser bilinear garante a linearidade da aplicação  $\lambda: F \times G \rightarrow H$  definida por

$$\lambda(u, v) = \gamma(u, z_0) + \gamma(y_0, v)$$

e esta aplicação linear é contínua uma vez que

$$\begin{aligned} \|\lambda(u, v)\| &\leq \|\gamma(u, z_0)\| + \|\gamma(y_0, v)\| \leq \|\gamma\| \|u\| \|z_0\| + \|\gamma\| \|y_0\| \|v\| \leq \\ &\leq \|\gamma\| (\|y_0, z_0\|) (\|u\| + \|v\|) \leq 2\|\gamma\| \|y_0, z_0\| \|(u, v)\|. \end{aligned}$$

Reparando agora que

$$\begin{aligned} \gamma(y, z) &= \gamma(y_0 + y - y_0, z_0 + z - z_0) = \\ &= \gamma(y_0, z_0) + \gamma(y - y_0, z_0) + \gamma(y_0, z - z_0) + \gamma(y - y_0, z - z_0), \end{aligned}$$

vemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|\gamma(y, z) - \gamma(y_0, z_0) - \lambda(y - y_0, z - z_0)\|}{\|(y - y_0, z - z_0)\|} = \frac{\|\gamma(y - y_0, z - z_0)\|}{\|(y - y_0, z - z_0)\|} \leq \\ &\leq \frac{\|\gamma\| \|y - y_0\| \|z - z_0\|}{\|(y - y_0, z - z_0)\|} \leq \|\gamma\| \|z - z_0\| \end{aligned}$$

e portanto, uma vez que  $\|\gamma\| \|z - z_0\| \rightarrow 0$  quando  $(y, z) \rightarrow (y_0, z_0)$ , deduzimos por enquadramento que, quando  $(y, z) \rightarrow (y_0, z_0)$ ,

$$\frac{\|\gamma(y, z) - \gamma(y_0, z_0) - \lambda(y - y_0, z - z_0)\|}{\|(y - y_0, z - z_0)\|} \rightarrow 0,$$

o que mostra que  $\gamma$  é diferenciável em  $(y_0, z_0)$  e com  $\lambda$  como diferencial nesse ponto.  $\square$

**3.1.26 (Regra de Leibnitz)** Sejam  $F$ ,  $G$  e  $H$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: F \times G \rightarrow H$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e

$f: A \rightarrow F$  e  $g: A \rightarrow G$  duas aplicações diferenciáveis em  $x_0$ . É então também diferenciável em  $x_0$  a aplicação  $h: A \rightarrow H$  definida por

$$h(x) = \gamma(f(x), g(x))$$

e tem-se

$$Dh_{x_0}(w) = \gamma(Df_{x_0}(w), g(x_0)) + \gamma(f(x_0), Dg_{x_0}(w)).$$

**Dem:** Temos uma consequência do resultado sobre o diferencial da aplicação composta uma vez que se tem  $h = \gamma \circ \hat{h}$ , onde  $\hat{h}: A \rightarrow F \times G$  é a aplicação definida por  $h(x) = (f(x), g(x))$ , que, como verificámos em 3.1.24, é diferenciável em  $x_0$  e com  $D\hat{h}_{x_0}(w) = (Df_{x_0}(w), Dg_{x_0}(w))$ . Com efeito, vem então

$$\begin{aligned} Dh_{x_0}(w) &= D\gamma_{(f(x_0), g(x_0))}(D\hat{h}_{x_0}(w)) = \\ &= D\gamma_{(f(x_0), g(x_0))}(Df_{x_0}(w), Dg_{x_0}(w)) = \\ &= \gamma(Df_{x_0}(w), g(x_0)) + \gamma(f(x_0), Dg_{x_0}(w)). \quad \square \end{aligned}$$

**3.1.27 (Nota)** O resultado precedente é a generalização natural da regra de Leibniz usual sobre a derivação do produto de funções com valores reais. Esse facto fica mais evidente se usarmos a notação multiplicativa  $y \times z$ , para  $y \in F$  e  $z \in G$ , como sinónimo de  $\gamma(y, z)$ .<sup>246</sup> Com essa notação podemos escrever  $h(x) = f(x) \times g(x)$  pelo que a aplicação  $h$  pode ser notada  $f \times g$ , sem risco de confusão, e a fórmula obtida para a derivada por ser reescrita com os aspeto mais familiar

$$D(f \times g)_{x_0}(w) = Df_{x_0}(w) \times g(x_0) + f(x_0) \times Dg_{x_0}(w).$$

Do mesmo modo que a regra de Leibniz nos apareceu como uma consequência da fórmula para o diferencial numa aplicação bilinear contínua, através do resultado sobre a diferenciabilidade da aplicação composta, outras “regras de derivação” podem ser obtidas a partir do conhecimento dos diferenciais de aplicações convenientes, que incluem por exemplo várias funções reais de variável real estudadas em cursos básicos de Análise Real (inversão, raízes, exponencial, logaritmo, funções trigonométricas, etc...). No contexto das aplicações com valores em  $\mathbb{C}$ , para além de aplicações da regra de Leibniz e do referido na alínea c) de 3.1.20 (por exemplo com a aplicação linear real de conjugação  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$ ), importa examinar a diferenciabilidade da inversão  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^{-1}$ . Essa diferenciabilidade poderia ser obtida de forma análoga à utilizada no contexto de  $\mathbb{R}$ , mas pode ser interessante encará-la como um caso particular da inversão numa álgebra de Banach que examinamos no próximo resultado e que admite outras aplicações importantes.

<sup>246</sup>Convirá ter o cuidado de só utilizar esta notação multiplicativa no contexto de uma aplicação bilinear.

**3.1.28 (Diferenciabilidade da inversão numa álgebra de Banach)** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach sobre  $\mathbb{K}$  (cf. 2.3.29) e consideremos o aberto  $\mathcal{E}_{inv}$  de  $\mathcal{E}$  constituído pelos elementos invertíveis e a aplicação contínua  $inv: \mathcal{E}_{inv} \rightarrow \mathcal{E}$ , definida por  $inv(x) = x^{-1}$  (cf. 2.3.34). Tem-se então que  $inv$  é diferenciável em cada  $x_0 \in \mathcal{E}_{inv}$  e com

$$Dinv_{x_0}(u) = -x_0^{-1}ux_0^{-1}.$$

**Dem:** Começemos por notar que tem lugar uma aplicação linear  $\lambda: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $\lambda(u) = -x_0^{-1}ux_0^{-1}$ , a qual é contínua uma vez que se tem

$$\|\lambda(u)\| \leq \|x_0^{-1}\| \|u\| \|x_0^{-1}\| = \|x_0^{-1}\|^2 \|u\|.$$

Vemos agora que

$$\begin{aligned} \|\operatorname{inv}(x) - \operatorname{inv}(x_0) - \lambda(x - x_0)\| &= \|x^{-1} - x_0^{-1} + x_0^{-1}(x - x_0)x_0^{-1}\| = \\ &= \|x_0^{-1}x_0x^{-1}x_0x_0^{-1} - x_0^{-1}xx^{-1}x_0x_0^{-1} + x_0^{-1}(x - x_0)x_0^{-1}\| = \\ &= \|x_0^{-1}(x_0 - x)x^{-1}x_0x_0^{-1} + x_0^{-1}(x - x_0)x_0^{-1}\| = \\ &= \|x_0^{-1}(x_0 - x)(x^{-1}x_0 - 1)x_0^{-1}\| \leq \|x_0^{-1}\| \|x_0 - x\| \|x^{-1}x_0 - 1\| \|x_0^{-1}\| \end{aligned}$$

e portanto

$$0 \leq \frac{\|\operatorname{inv}(x) - \operatorname{inv}(x_0) - \lambda(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \|x_0^{-1}\|^2 \|x^{-1}x_0 - 1\|$$

onde, tendo em conta a continuidade de  $inv: \mathcal{E}_{inv} \rightarrow \mathcal{E}$ ,

$$\|x_0^{-1}\|^2 \|x^{-1}x_0 - 1\| \longrightarrow \|x_0^{-1}\|^2 \|x_0^{-1}x_0 - 1\| = 0$$

quando  $x \rightarrow x_0$ . Podemos assim concluir, por enquadramento, que se tem também

$$\frac{\|\operatorname{inv}(x) - \operatorname{inv}(x_0) - \lambda(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \longrightarrow 0$$

quando  $x \rightarrow x_0$ , o que prova que  $inv$  é diferenciável no ponto  $x_0$  e com diferencial  $\lambda$ .  $\square$

**3.1.29 (Casos particulares) a)** Sendo  $\mathbb{K}$  igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , é diferenciável em cada  $t_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  a aplicação  $inv: \mathbb{K} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}$  definida por  $inv(t) = \frac{1}{t}$ , tendo-se  $Dinv_{t_0}(a) = -\frac{a}{t_0^2}$ , e portanto  $inv'(t_0) = -\frac{1}{t_0^2}$ .

**b)** Se  $E$  é um espaço de Banach então o conjunto  $\mathcal{L}_{iso}(E; E) \subset \mathcal{L}(E; E)$  dos isomorfismos topológicos é aberto e a aplicação  $inv: \mathcal{L}_{iso}(E; E) \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$  definida por  $inv(\xi) = \xi^{-1}$  é diferenciável em cada  $\xi_0$  e com

$$Dinv_{\xi_0}(\eta) = -\xi_0^{-1} \circ \eta \circ \xi_0^{-1}.$$

O resultado 3.1.25, que esteve na base da justificação da regra de Leibnitz da derivação de um produto admite a seguinte generalização com aplicações multilineares a substituir as aplicações bilineares.

**3.1.30 (Diferenciabilidade das aplicações multilineares contínuas)** Sejam  $n \geq 2$ ,  $F_1, \dots, F_n$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $H$  um espaço vectorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . Seja

$$\gamma: F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow H$$

uma aplicação multilinear contínua. Considerando em  $F_1 \times \dots \times F_n$  qualquer das normas que define a topologia produto, por exemplo a norma do máximo definida por

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\| = \max\{\|u_1\|_1, \|u_2\|_2, \dots, \|u_n\|_n\},$$

(cf. 2.1.12), tem-se então que  $\gamma$  é diferenciável em cada  $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$  e com

$$D\gamma_{(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \gamma(u_1, y_{20}, \dots, y_{n0}) + \gamma(y_{10}, u_2, \dots, y_{n0}) + \dots + \gamma(y_{10}, y_{20}, \dots, u_n).$$

**Dem:** Vamos demonstrar o resultado por indução no número  $n$  de variáveis da aplicação multilinear, começando por reparar que o caso em que  $n = 2$  é precisamente o resultado 3.1.25 que pretendemos generalizar. Suponhamos então que o resultado é válido no caso em que temos  $n$  variáveis e consideremos uma aplicação multilinear contínua

$$\gamma: F_1 \times \dots \times F_n \times F_{n+1} \rightarrow H$$

com  $n + 1$  variáveis. Para cada  $(y_1, \dots, y_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ , podemos considerar a aplicação linear

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n): F_{n+1} &\rightarrow H, \\ \hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n)(y_{n+1}) &= \gamma(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}), \end{aligned}$$

a qual é contínua e com

$$(1) \quad \|\hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n)\| \leq \|\gamma\| \|y_1\| \cdots \|y_n\|,$$

uma vez que se tem

$$\|\hat{\gamma}(y_1, \dots, y_n)(y_{n+1})\| = \|\gamma(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})\| \leq \|\gamma\| \|y_1\| \cdots \|y_n\| \|y_{n+1}\|.$$

Podemos assim considerar uma aplicação

$$\hat{\gamma}: F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow \mathcal{L}(F_{n+1}; H)$$

que é naturalmente multilinear (com  $n$  variáveis) e é contínua tendo em conta a desigualdade (1). Considerando a aplicação bilinear contínua de avaliação  $\Phi: \mathcal{L}(F_{n+1}; H) \times F_{n+1} \rightarrow H$  (cf. 2.1.34) vemos agora a partir da identidade

$$\gamma(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = \Phi(\widehat{\gamma}(y_1, \dots, y_n), y_{n+1}),$$

tendo em conta a hipótese de indução, a regra de Leibnitz e o facto de termos aplicações lineares contínuas (projeções) que a  $(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$  associam  $(y_1, \dots, y_n)$  e  $y_{n+1}$  respetivamente, que  $\gamma$  é efetivamente diferenciável em  $(y_{10}, \dots, y_{n0}, y_{n+10})$  e com

$$\begin{aligned} D\gamma_{(y_{10}, \dots, y_{n0}, y_{n+10})}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) &= \\ &= \Phi\left(D\widehat{\gamma}_{(y_{10}, \dots, y_{n0})}(u_1, \dots, u_n), y_{n+10}\right) + \Phi(\widehat{\gamma}(y_{10}, \dots, y_{n0}), u_{n+1}) = \\ &= \Phi\left(\widehat{\gamma}(u_1, \dots, y_{n0}) + \dots + \widehat{\gamma}(y_{10}, \dots, u_n), y_{n+10}\right) + \Phi(\widehat{\gamma}(y_{10}, \dots, y_{n0}), u_{n+1}) = \\ &= \gamma(u_1, \dots, y_{n0}, y_{n+10}) + \dots + \gamma(y_{10}, \dots, u_n, y_{n+10}) + \gamma(y_{10}, \dots, y_{n0}, u_{n+1}), \end{aligned}$$

o que termina a demonstração por indução.  $\square$

## Exercícios

**Ex. 3.1.1 a)** Sejam  $A = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação definida por  $f(x) = x$ . Verificar que a unidade imaginária  $i$  pertence ao cone de derivabilidade de  $A$  em 0 no sentido complexo e que existe a derivada dirigida de  $f$  em 0 segundo  $i$  no sentido complexo, e é igual a  $i$ . Mostrar, no entanto, que  $i$  não pertence ao cone de derivabilidade de  $A$  em 0 no sentido real pelo que não existe derivada dirigida de  $f$  em 0 segundo  $i$  no sentido real.

**b)** Seja  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação de conjugação, definida por  $g(z) = \bar{z}$ . Verificar que  $f$  não tem derivada dirigida em 0 segundo 1 no sentido complexo mas que  $f$  já tem derivada dirigida em 0 segundo 1 no sentido real, igual a 1.

**Ex. 3.1.2 (Homogeneidade da derivada dirigida)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in A \subset E$  e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação derivável em  $x_0$  segundo um vetor  $w \in \mathfrak{t}_{x_0}(A)$ . Mostrar que para cada  $t \in \mathbb{K}$  a aplicação  $f$  é também derivável em  $x_0$  segundo o vetor  $tw$  e que se tem  $D_{tw}f(x_0) = tD_wf(x_0)$ .

**Ex. 3.1.3** Sejam  $F$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $t_0 \in A \subset \mathbb{K}$  um ponto não isolado e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Mostrar que  $f$  é derivável no ponto  $t_0$ , no sentido referido em 3.1.1, se, e só se,  $f$  for derivável em  $x_0$  segundo 1 em  $\mathbb{K}$  e que, nesse caso, tem-se  $f'(x_0) = D_1f(x_0)$ .

**Ex. 3.1.4** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

**a)** Mostrar que a aplicação  $f$  é contínua. **Sugestão:** Mostrar que  $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|$ .

**b)** Verificar que  $f$  é derivável em  $(0, 0)$  segundo qualquer vetor  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  e com

$$D_{(a,b)}f(0, 0) = \begin{cases} \frac{a^3}{a^2+b^2}, & \text{se } (a, b) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (a, b) = (0, 0) \end{cases}$$

por outras palavras  $D_{(a,b)}f(0, 0) = f(a, b)$ .

c) Mostrar que  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ . **Sugestão:** Reparar que, por exemplo,

$$D_{(1,1)}f(0, 0) \neq D_{(1,0)}f(0, 0) + D_{(0,1)}f(0, 0).$$

**Ex. 3.1.5 a)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados complexos,  $A \subset E$ ,  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação e  $x_0 \in A$  um ponto de diferenciabilidade de  $f$  no sentido real, e portanto também no sentido complexo (cf. a alínea g) de 3.1.8). Mostrar que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  no sentido complexo se, e só se,  $f$  for diferenciável em  $x_0$  no sentido real e com  $Df_{x_0}(iw) = iDf_{x_0}(w)$  para cada  $w \in E$ .

b) No caso particular em que  $E = F = \mathbb{C}$  e em que  $A$  é um conjunto aberto, verificar que a conclusão de a) constitui uma reformulação das “condições de Cauchy-Riemann” para a holomorfia.

**Ex. 3.1.6** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\xi: E \times E \rightarrow F$  uma aplicação bilinear contínua. Seja  $f: E \rightarrow F$  a aplicação definida por  $f(x) = \xi(x, x)$ . Mostrar que  $f$  é diferenciável em todos os pontos e que

$$Df_x(w) = \xi(w, x) + \xi(x, w).$$

**Ex. 3.1.7** Sejam  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ . Verificar que se  $\Phi: J \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$  e  $f: J \rightarrow E$  são duas aplicações diferenciáveis em  $t_0 \in J$  então é diferenciável em  $t_0$  a aplicação  $g: J \rightarrow E$  definida por  $g(t) = \Phi(t)(f(t))$  e apresentar uma caracterização de  $g'(t_0)$ .

**Ex. 3.1.8** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano real. Mostrar que é diferenciável em todos os pontos a aplicação  $h: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = \|x\|$  e calcular  $Dh_x(w)$ .

**Ex. 3.1.9** Seja  $E$  um espaço vetorial normado distinto de  $\{0\}$ . Mostrar que a aplicação  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \|x\|$ , não é diferenciável em  $0$ .

**Sugestão:** Determinar as respectivas derivadas dirigidas.

**Ex. 3.1.10** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado real,  $F$  um espaço pre-hilbertiano real,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação diferenciável em  $x_0$  e tal que a função  $\|f(x)\|$  seja constante. Mostrar que, para cada  $w \in E$ ,  $Df_{x_0}(w)$  é ortogonal a  $f(x_0)$ .

**Ex. 3.1.11** Sejam  $E$  um espaço vetorial real,  $A \subset E$  e  $x_0 \in A$ .

a) Tendo em conta a alínea d) de 1.2.10, mostrar que  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$  é a união de dois subconjuntos, não necessariamente disjuntos,

$$\mathbf{t}_{x_0}(A) = \mathbf{t}_{x_0}^+(A) \cup \mathbf{t}_{x_0}^-(A),$$

onde  $\mathbf{t}_{x_0}^+(A)$  é constituído pelos  $w \in E$  tais que  $0$  é aderente ao conjunto

$$\{s \in ]0, +\infty[ \mid x_0 + sw \in A\}$$

e  $\mathbf{t}_{x_0}^-(A)$  pelos  $w \in E$  tais que  $0$  é aderente ao conjunto

$$\{s \in ]-\infty, 0[ \mid x_0 + sw \in A\}.$$

b) Nos exemplos ilustrados em 3.1.4 verificar quais os vetores representados que pertencem a  $\mathbf{t}_{x_0}^+(A)$  e a  $\mathbf{t}_{x_0}^-(A)$ .

c) Verificar que se tem  $w \in \mathbf{t}_{x_0}^-(A)$  se, e só se,  $-w \in \mathbf{t}_{x_0}^+(A)$ .



**d)** Adaptar as propriedades elementares examinadas em 3.1.5 de modo a obter resultados análogos envolvendo  $\mathbf{t}_{x_0}^+(A)$  e  $\mathbf{t}_{x_0}^-(A)$ .

**Ex. 3.1.12 a)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado real,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação diferenciável no ponto  $x_0$  e atingindo nesse ponto um máximo relativo (isto é, tal que existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x_0$  em  $A$  tal que  $f(x) \leq f(x_0)$ , para cada  $x \in V$ ). Mostrar que se tem então  $Df_{x_0}(w) \leq 0$  para cada  $\mathbf{t}_{x_0}^+(A)$  e deduzir que se tem  $Df_{x_0}(w) = 0$  para cada  $w \in \mathbf{t}_{x_0}^+(A) \cap \mathbf{t}_{x_0}^-(A)$ .

**b)** Enunciar e justificar a conclusão correspondente para pontos onde uma função atinja um mínimo relativo.

**c)** Concluir que no caso em  $x_0$  é interior a  $A \subset E$  e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $x_0$  e atinge nesse ponto um máximo relativo ou um mínimo relativo então tem-se  $Df_{x_0} = 0$ .

**Ex. 3.1.13** Sejam  $E$  um espaço de Hilbert sobre  $\mathbb{K}$ ,  $F$  um subespaço vetorial fechado,  $x \in E$  e  $y_0 \in F$  tais que  $\|x - y_0\| = d(x, F)$ , isto é, tal que  $\|x - y\| \geq \|x - y_0\|$ , para todo  $y \in F$ . Utilizar o exercício anterior para reobter o resultado que  $x - y_0$  é ortogonal a  $F$ , e portanto que  $y_0$  é a projecção ortogonal de  $x$  sobre  $F$ . Reparar que se trata de apresentar uma justificação distinta, e porventura mais natural do que a que foi feita na demonstração de 2.5.24. **Sugestão:** Começar por examinar o caso mais simples em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Ex. 3.1.14** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado real,  $F$  um espaço de Hilbert real,  $x_0 \in A \subset E$  um ponto de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$  uma aplicação diferenciável em  $x_0$  tal que, para cada  $x \in A$ , o elemento  $f_x$  de  $\mathcal{L}(F; F)$  seja a projecção ortogonal de  $F$  sobre um subespaço vetorial fechado  $F_x$ . Reparar que isso implica, em particular, que para cada  $x \in A$  a aplicação linear  $f_x$  é autoadjunta (cf. o exercício 2.5.12) e verifica  $f_x \circ f_x = f_x$ .

**a)** Mostrar que, para cada  $w \in E$ , a derivada direccional  $Df_{x_0}(w) \in \mathcal{L}(F; F)$  é uma aplicação linear autoadjunta que verifica  $Df_{x_0}(w) \circ f_{x_0} = (I_F - f_{x_0}) \circ Df_{x_0}(w)$ .

**b)** Mostrar, mais geralmente, que, se  $\eta \in \mathcal{L}(F; F)$  é uma aplicação linear tal que  $\eta \circ f_{x_0} = (I_F - f_{x_0}) \circ \eta$ , então a aplicação linear  $\eta$  aplica o subespaço  $F_{x_0}$  em  $F_{x_0}^\perp$  e aplica o subespaço  $F_{x_0}^\perp$  em  $F_{x_0}$ .

## §2. Diferenciais de ordem superior.

Vamos estudar nesta secção aplicações que são diferenciáveis em todos os pontos do seu domínio, condição que naturalmente só faz sentido quando todos os pontos do domínio são pontos de diferenciabilidade. É assim natural apresentar a seguinte definição.

**3.2.1** Se  $E$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , dizemos que um conjunto  $A \subset E$  é um *domínio de diferenciabilidade* se cada  $x_0 \in A$  for um ponto de diferenciabilidade. Repare-se que os domínios de diferenciabilidade incluem muitos dos domínios de aplicações que nos aparecem na prática, nomeadamente:

**a)** Se  $A \subset \mathbb{K}$  então  $A$  é domínio de diferenciabilidade se, e só se,  $A$  não tem pontos isolados (cf. a alínea f) de 3.1.8). Em particular, se  $J \subset \mathbb{R}$  é um intervalo não trivial então  $J$  é um domínio de diferenciabilidade, tanto como parte do espaço vetorial real  $\mathbb{R}$  como como parte do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}$ <sup>247</sup>.

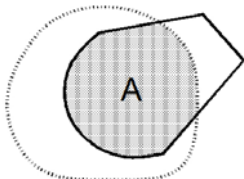
**b)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $U \subset E$  é um conjunto aberto então  $U$  é um domínio de diferenciabilidade (cf. a alínea c) de 3.1.8).

**c)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  é um domínio de diferenciabilidade e  $U \subset A$  é aberto em  $A$  então  $U$  é um domínio de diferenciabilidade (cf. a alínea e) de 3.1.8).

**d)** Se  $I$  é um conjunto finito não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $E_i$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $A_i \subset E_i$  é um domínio de diferenciabilidade então o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} E_i$  é um domínio de diferenciabilidade (cf. 3.1.9).

**e)** Se  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\lambda: E \rightarrow F$  é um isomorfismo e  $A \subset E$  é um domínio de diferenciabilidade então  $\lambda(A) \subset F$  é também um domínio de diferenciabilidade (cf. a alínea g) de 3.1.8)

A figura a seguir sugere um exemplo de domínio de diferenciabilidade em  $\mathbb{R}^2$  que não se insere no contexto das alíneas precedentes.



**3.2.2** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Vamos dizer que  $f$  é *diferenciável* se for diferenciável em todos os pontos  $x \in A$ . Quando isso acontecer notamos  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  a aplicação que a cada  $x \in A$  associa o diferencial  $Df_x$  de  $f$  em  $x$ .

Quando quisermos sublinhar qual o corpo dos escalares que estamos a considerar falamos de aplicações diferenciáveis no sentido real no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e de aplicações diferenciáveis no sentido complexo no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Note-se que às aplicações diferenciáveis no sentido complexo é usual dar também o nome de *aplicações holomorfas* no caso em que o domínio é um conjunto aberto mas preferimos não utilizar por agora esta última designação para sublinhar que as propriedades mais profundas das aplicações holomorfas, sobre as quais nos debruçaremos adiante na secção 3.7, não serão em geral válidas no contexto dos domínios mais gerais que estamos a considerar (lembrar, por exemplo, que, tendo em conta o referido em 3.1.2, toda a aplicação diferenciável no sentido real  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é

<sup>247</sup>Mas não, evidentemente, como parte do espaço vetorial real  $\mathbb{C}$ .

também diferenciável no sentido complexo quando se considera  $[a, b]$  como parte de  $\mathbb{C}$ ).

**3.2.3** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Vamos definir recursivamente quando é que a aplicação  $f$  é de classe  $C^k$  e, para cada aplicação nessas condições, o seu *diferencial de ordem  $k$* ,  $D^k f$ , que vai ser uma aplicação contínua de  $A$  no espaço vetorial normado  $\mathcal{L}^k(E; F)$  (cf. 2.1.37), do seguinte modo:

**a)** Diz-se que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^0$  se  $f$  é uma aplicação contínua. Para uma tal aplicação considera-se  $D^0 f$  como sinónimo de  $f$  (relembrar o que se disse na nota de pé de página 160 na página 282).

**b)** Diz-se que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^1$  se  $f$  é diferenciável e a aplicação  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é contínua. Toma-se, neste caso,  $D^1 f$  como sinónimo de  $Df$ .<sup>248</sup>

**c)** Diz-se que  $f$  é de classe  $C^{k+1}$ , onde  $k \geq 1$ , se  $f$  é diferenciável e a aplicação  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é de classe  $C^k$ . Podemos considerar, nesse caso, uma aplicação contínua

$$D^k(Df): A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; \mathcal{L}(E; F))$$

e definimos a aplicação contínua  $D^{k+1}f: A \rightarrow \mathcal{L}^{k+1}(E; F)$  como sendo a composição daquela com a isometria linear canónica

$$\Upsilon_k^{-1}: \mathcal{L}^k(E; \mathcal{L}(E; F)) \rightarrow \mathcal{L}^{k+1}(E; F)$$

referida em 2.1.43. Por outras palavras, tem-se

$$D^{k+1}f_x(u_1, \dots, u_{k+1}) = D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}).$$

Observe-se desde já que, tendo em conta a continuidade de qualquer aplicação diferenciável, verifica-se imediatamente por indução que se  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^k$  então  $f$  é também de classe  $C^j$  para todo o  $0 \leq j \leq k$ .

**3.2.4** Dados os espaços vetoriais normados  $E$  e  $F$  sobre  $\mathbb{K}$ , o domínio de diferenciabilidade  $A \subset E$  e a aplicação  $f: A \rightarrow F$ , dizemos que  $f$  é de classe  $C^\infty$ , ou que é *suave*, se for de classe  $C^k$  para todo o  $k \in \mathbb{N}$ .

Examinamos em seguida alguns exemplos de aplicações de classe  $C^\infty$ , assim como uma caracterização das respetivas derivadas.

<sup>248</sup>Formalmente, este passo b) é desnecessário, por poder ser considerado como um caso particular do passo recursivo descrito em c). Apresentamo-lo por razões pedagógicas e para permitir àqueles que não gostaram muito do que dissémos em a) começar a recursão com  $k = 1$ .

**3.2.5** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  é uma aplicação constante. Então  $f$  é de classe  $C^\infty$  e tem-se  $D^k f = 0$ , para cada  $k \geq 1$ .

**Dem:** Já sabemos que  $f$  é diferenciável e com  $Df_x = 0$  para cada  $x \in A$  pelo que, em particular,  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é constante e daqui decorre, por indução em  $k$ , que  $f$  é de classe  $C^k$  para todo o  $k \geq 1$  e com  $D^k f = 0$ .  $\square$

**3.2.6** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\lambda: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Tem-se então que  $\lambda$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  e  $D^k \lambda = 0$ , para cada  $k \geq 2$ .

**Dem:** Sabemos que  $\lambda$  é diferenciável em todos os pontos  $x \in E$  e com  $D\lambda_x = \lambda$ , pelo que a aplicação  $D\lambda: E \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é constante.  $\square$

**3.2.7** Sejam  $F$ ,  $G$  e  $H$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: F \times G \rightarrow H$  uma aplicação bilinear contínua. Tem-se então que  $\gamma$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  e  $D^k \gamma = 0$ , para cada  $k \geq 3$ .

**Dem:** Já vimos que  $\gamma$  é diferenciável e com

$$D\gamma_{(y,z)}(u, v) = \gamma(u, z) + \gamma(y, v).$$

Resulta daqui facilmente que  $D\gamma: F \times G \rightarrow \mathcal{L}(F \times G, H)$  é uma aplicação linear pelo que tudo o que temos que ver é que esta aplicação linear é contínua. Ora, tem-se

$$\begin{aligned} \|D\gamma_{(y,z)}(u, v)\| &\leq \|\gamma(u, z)\| + \|\gamma(y, v)\| \leq \\ &\leq \|\gamma\| \|u\| \|z\| + \|\gamma\| \|y\| \|v\| \leq \\ &\leq 2\|\gamma\| \|(y, z)\| \|(u, v)\|, \end{aligned}$$

o que mostra que  $\|D\gamma_{(y,z)}\| \leq 2\|\gamma\| \|(y, z)\|$  e portanto que a aplicação linear  $D\gamma$  é contínua.  $\square$

Analogamente ao que sucedia no estudo da diferenciabilidade, para além dos resultados precedentes que apontam exemplos de aplicações de classe  $C^k$ , será cómodo dispormos de resultados que garantam que certas aplicações são de classe  $C^k$  a partir do facto de outras o serem.

**3.2.8 (Propriedades de linearidade das aplicações de classe  $C^k$ )** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade. Tem-se então:

**a)** Se  $f, g: A \rightarrow F$  são duas aplicações de classe  $C^k$  então a aplicação  $f + g: A \rightarrow F$  é também de classe  $C^k$  e para cada  $x \in A$

$$D^k(f + g)_x = D^k f_x + D^k g_x.$$

Como habitualmente deduz-se naturalmente, por indução, um resultado análogo sobre a soma de um número finito de aplicações de classe  $C^k$  e sobre o respetivo diferencial de ordem  $k$ .

**b)** Se  $f: A \rightarrow F$  é uma aplicação de classe  $C^k$  e  $a \in \mathbb{K}$  então é também de classe  $C^k$  a aplicação  $af: A \rightarrow F$  e para cada  $x \in A$

$$D^k(af)_x = aD^k f_x.$$

**c)** Mais geralmente, se  $f: A \rightarrow F$  é uma aplicação de classe  $C^k$  e  $\xi: F \rightarrow G$  é uma aplicação linear contínua, onde  $G$  é outro espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ , então  $\xi \circ f: A \rightarrow G$  é uma aplicação de classe  $C^k$  e para cada  $x \in A$

$$D^k(\xi \circ f)_x = \xi \circ D^k f_x.$$

**Dem:** **a)** O caso em que  $k = 0$  resulta de que a soma de aplicações contínuas é contínua e o caso em que  $k = 1$  resulta deste mesmo facto e da propriedade na alínea a) de 3.1.20. Supondo o resultado verdadeiro para um certo  $k \geq 1$  e que  $f, g: A \rightarrow F$  são de classe  $C^{k+1}$  então  $Df, Dg: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  são de classe  $C^k$  e o facto de  $f + g: A \rightarrow F$  ser diferenciável e com

$$D(f + g)_x = Df_x + Dg_x$$

implica pela hipótese de indução que  $D(f + g): A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é de classe  $C^k$ , isto é, que  $f + g$  é de classe  $C^{k+1}$  e que

$$\begin{aligned} D^{k+1}(f + g)_x(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) &= D^k(D(f + g))_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \\ &= D^k(Df + Dg)_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \\ &= (D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k) + D^k(Dg)_x(u_1, \dots, u_k))(u_{k+1}) = \\ &= D^{k+1}f_x(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) + D^{k+1}g_x(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}). \end{aligned}$$

**c)** Consideremos agora para cada  $k \geq 1$  a aplicação linear contínua

$$\xi_* = \mathcal{L}^k(Id_E; \xi): \mathcal{L}^k(E; F) \rightarrow \mathcal{L}^k(E; G)$$

definida por  $\lambda \mapsto \xi \circ \lambda$  (cf. 2.1.44). Para  $k = 0$  tudo o que há a ter em conta é o facto de a soma de a composta de aplicações contínuas ser contínua. O caso em que  $k = 1$  resulta do mesmo facto e da propriedade na alínea c) de 3.1.20. Supondo o resultado verdadeiro para um certo  $k \geq 1$  e que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+1}$  atendemos a que para cada  $x \in A$

$$D(\xi \circ f)_x = \xi \circ Df_x = \xi_*(Df_x)$$

para, aplicando a hipótese de indução, deduzir que  $D(\xi \circ f): A \rightarrow \mathcal{L}(E; G)$  é de classe  $C^k$ , ou seja,  $\xi \circ f: A \rightarrow G$  é de classe  $C^{k+1}$ , e que

$$\begin{aligned} D^{k+1}(\xi \circ f)_x(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) &= D^k(D(\xi \circ f))_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \\ &= D^k(\xi_* \circ Df)_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \xi_* (D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k))(u_{k+1}) = \\ &= \xi(D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1})) = \xi(D^{k+1}f_x(u_1, \dots, u_k, u_{k+1})). \end{aligned}$$

**b)** Trata-se do caso particular de c) em que consideramos a aplicação linear contínua  $\xi: F \rightarrow F$  definida por  $\xi(y) = ay$ .  $\square$

**3.2.9 (Alteração do espaço de chegada)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Se  $F' \subset F$  é um subespaço vetorial **fechado** tal que  $f(A) \subset F'$  então  $f$  é de classe  $C^k$  como aplicação  $A \rightarrow F$  se, e só se, for de classe  $C^k$  como aplicação  $A \rightarrow F'$  e, nesse caso, o diferencial  $D^k f$  é o mesmo nos dois contextos (em particular  $D^k f_x: E^k \rightarrow F$  toma valores em  $F'$ ).

**Dem:** O facto de, no caso em que  $f$  é de classe  $C^k$  como aplicação  $A \rightarrow F'$  também o ser como aplicação  $A \rightarrow F$  e, nesse caso, com o diferencial  $D^k f$  a ser o mesmo nos dois contextos, é uma consequência de aplicar a alínea c) de 3.2.8 à aplicação linear contínua inclusão  $\iota: F' \rightarrow F$ . Fazemos a demonstração da recíproca por indução em  $k$ , o caso em que  $k = 0$  resultando de 1.4.14, mesmo sem a hipótese de  $F'$  ser fechado. Admitindo o resultado verdadeiro para um certo  $k$  e que  $f$  é de classe  $C^{k+1}$  como aplicação  $A \rightarrow F$ , resulta de 3.1.17 que  $f$  é diferenciável como aplicação  $A \rightarrow F'$  e que a aplicação de classe  $C^k$ ,  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ , que é a mesma nos dois contextos, toma valores no subespaço vetorial fechado  $\mathcal{L}(E; F')$  de  $\mathcal{L}(E; F)$  (cf. a alínea b) de 2.1.35) e portanto, pela hipótese de indução, é também de classe  $C^k$  como aplicação  $A \rightarrow \mathcal{L}(E; F')$ , o que mostra que  $f$  é de classe  $C^k$  como aplicação  $A \rightarrow F$ .  $\square$

**3.2.10 (Mudança de escalares)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados complexos  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade de  $E$  enquanto espaço vetorial real (e portanto também enquanto espaço vetorial complexo) e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$ . Tem-se então que  $f$  é também de classe  $C^k$  quando se consideram  $E$  e  $F$  como espaços vetoriais normados reais e cada  $D^k f_x$  é a mesma aplicação multilinear nos dois sentidos.

**Dem:** O caso em que  $k = 0$  é trivial e o caso em que  $k = 1$  decorre de 3.1.18 e do facto de a continuidade de  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  implicar a continuidade de  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$ . Suponhamos, por indução, que o resultado é válido para um certo  $k \geq 1$  e que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+1}$ . Tem-se então que  $f$  é diferenciável em cada  $x \in A$  no sentido complexo, e portanto no sentido real, e a aplicação  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  é de classe  $C^k$  no sentido complexo e portanto, pela hipótese de indução, também no sentido real e com o diferencial  $D^k(Df): A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^k(E; \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F))$  sendo o mesmo nos dois sentidos. Tendo em conta 3.2.9, lembrando que  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  é um subespaço vetorial fechado de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  (cf. a alínea a) de 2.1.35), concluímos que  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  é também de classe  $C^k$  no sentido real e com o diferencial de ordem  $k$  igual ao diferencial de ordem  $k$  de  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  e portanto que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+1}$  no sentido real. Por fim lembrando que, por definição

$$D^{k+1} f_x(u_1, \dots, u_{k+1}) = D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}),$$

concluímos que a aplicação multilinear  $D^{k+1} f_x$  é a mesma no sentido complexo e no sentido real.  $\square$

Veremos em breve que a composta de aplicações de classe  $C^k$  é ainda de classe  $C^k$  mas o resultado 3.2.8 já inclui o caso particular em que a aplicação que opera em segundo lugar é linear contínua. Antes de obter o resultado geral será conveniente examinar também o caso particular em que a aplicação que opera em primeiro lugar é linear contínua, sendo conveniente generalizar um pouco e considerar o caso em que esta é afim e contínua. Este segundo caso particular, tal como sucedia com o primeiro, apresenta sobre o caso geral da composição de aplicações de classe  $C^k$  arbitrárias a vantagem de podermos explicitar facilmente fórmulas para os diferenciais de ordem  $k$ .

**3.2.11 (Aplicações afins)** Lembremos que, se  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ , diz-se que uma aplicação  $\tilde{\lambda}: E \rightarrow F$  é *afim* se existe uma aplicação linear  $\lambda: E \rightarrow F$  e um elemento  $y_0 \in F$  tais que  $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x) + y_0$  ( $\tilde{\lambda}$  é a composta de uma aplicação linear com uma translação). Note-se que tanto o vetor  $y_0$  como a aplicação linear  $\lambda$  ficam bem determinadas por  $\tilde{\lambda}$ , visto que se tem  $y_0 = \tilde{\lambda}(0)$  e  $\lambda(x) = \tilde{\lambda}(x) - y_0$ ; diz-se que  $\lambda$  é a *aplicação linear associada* à aplicação afim  $\tilde{\lambda}$ .

Repare-se que, no caso em que  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , as fórmulas  $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x) + y_0$  e  $\lambda(x) = \tilde{\lambda}(x) - y_0$  mostram que uma aplicação afim é contínua se, e só se, a aplicação linear associada for contínua e que, quando isso suceder, a aplicação afim é diferenciável em cada  $x \in E$  e com  $D\tilde{\lambda}_x = \lambda$ .

**3.2.12 (Composição com uma aplicação afim)** Sejam  $E$ ,  $F$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\tilde{\lambda}: E \rightarrow F$  uma aplicação afim contínua, de aplicação linear associada  $\lambda: E \rightarrow F$ ,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  domínios de diferenciabilidade tais que  $\tilde{\lambda}(A) \subset B$  e  $f: B \rightarrow G$  uma aplicação de classe  $C^k$ . Tem-se então que  $f \circ \tilde{\lambda}|_A: A \rightarrow G$  é de classe  $C^k$  e, se  $k \geq 1$ ,

$$D^k(f \circ \tilde{\lambda}|_A)_x(u_1, \dots, u_k) = D^k f_{\tilde{\lambda}(x)}(\lambda(u_1), \dots, \lambda(u_k)).$$

**Dem:** Mais uma vez, fazemos uma prova por indução em  $k$ , o caso em que  $k = 0$  sendo trivial. Notemos

$$\lambda^* = \mathcal{L}(\lambda; Id_F): \mathcal{L}(F; G) \rightarrow \mathcal{L}(E; G),$$

que sabemos ser uma aplicação linear contínua. Supondo que  $f$  é diferenciável, o teorema da diferenciação da aplicação composta garante que  $f \circ \tilde{\lambda}|_A: A \rightarrow G$  é diferenciável em cada  $x \in A$  e com

$$(1) \quad D(f \circ \tilde{\lambda}|_A)_x = Df_{\tilde{\lambda}(x)} \circ D\tilde{\lambda}_x = Df_{\tilde{\lambda}(x)} \circ \lambda = \lambda^*(Df_{\tilde{\lambda}(x)}),$$

em particular

$$D(f \circ \tilde{\lambda}|_A)_x(u) = Df_{\tilde{\lambda}(x)}(\lambda(u)).$$

No caso em que  $k = 1$ , a continuidade de  $D(f \circ \tilde{\lambda}|_A): A \rightarrow \mathcal{L}(E; G)$  resulta

de que, por (1), temos a composta das três aplicações contínuas  $\tilde{\lambda}_{/A}: A \rightarrow B$ ,  $Df: B \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$  e  $\lambda^*: \mathcal{L}(F; G) \rightarrow \mathcal{L}(E; G)$ . Suponhamos que o resultado é verdadeiro para um certo  $k \geq 1$  e que  $f: B \rightarrow G$  é de classe  $C^{k+1}$ . Como já referimos,  $f \circ \tilde{\lambda}_{/A}: A \rightarrow G$  é diferenciável em cada  $x$  e com  $D(f \circ \tilde{\lambda}_{/A})_x$  dado por (1). O facto de  $Df: B \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$  ser de classe  $C^k$  implica pela hipótese de indução que é de classe  $C^k$  a aplicação

$$(Df) \circ \tilde{\lambda}_{/A}: A \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$$

e portanto, pela alínea c) de 3.2.8, o mesmo acontece a

$$D(f \circ \tilde{\lambda}_{/A}) = \lambda^* \circ (Df) \circ \tilde{\lambda}_{/A}: A \rightarrow \mathcal{L}(E; G),$$

o que mostra que  $f \circ \tilde{\lambda}_{/A}: A \rightarrow G$  é de classe  $C^{k+1}$ . Vemos enfim que

$$\begin{aligned} D^{k+1}(f \circ \tilde{\lambda}_{/U})_x(u_1, \dots, u_{k+1}) &= \\ &= D^k(D(f \circ \tilde{\lambda}_{/U}))_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \\ &= D^k(\lambda^* \circ Df \circ \tilde{\lambda}_{/U})_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \\ &= \lambda^*(D^k(Df \circ \tilde{\lambda}_{/U})_x(u_1, \dots, u_k))(u_{k+1}) = \\ &= D^k(Df \circ \tilde{\lambda}_{/U})_x(u_1, \dots, u_k)(\lambda(u_{k+1})) = \\ &= D^k(Df)_{\tilde{\lambda}(x)}(\lambda(u_1), \dots, \lambda(u_k))(\lambda(u_{k+1})) = \\ &= D^{k+1}f_{\tilde{\lambda}(x)}(\lambda(u_1), \dots, \lambda(u_{k+1})). \quad \square \end{aligned}$$

**3.2.13 (Corolário)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset B \subset E$  domínios de diferenciabilidade e  $f: B \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$ . Tem-se então que  $f_{/A}: A \rightarrow F$  é também de classe  $C^k$  e  $D^k(f_{/A}) = (D^k f)_{/A}$ .

**Dem:** Embora este resultado tenha uma demonstração directa muito simples, por indução em  $k$ , é também interessante reparar que ele pode ser considerado como o caso particular de 3.2.12, em que tomamos para  $\tilde{\lambda}$  a aplicação identidade de  $E$ .  $\square$

**3.2.14 (A noção de aplicação de classe  $C^k$  é local)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação tal que, para cada  $x_0 \in A$ , exista um aberto  $V$  de  $A$  tal que  $x_0 \in V$  e que  $f_{/V}: V \rightarrow F$  seja de classe  $C^k$  (lembrar que  $V$  é também domínio de diferenciabilidade pela alínea c) de 3.2.1). Tem-se então que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^k$ .

**Dem:** Mais uma vez a demonstração é feita por indução em  $k$ , o caso em que  $k = 0$  sendo uma consequência de 1.4.27. Supondo o resultado verdadeiro para um certo  $k$  e que a aplicação  $f$  verifica a condição do enunciado relativamente à classe  $C^{k+1}$ , vemos, tendo em conta o carácter local da diferenciabilidade (cf. 3.1.16), que  $f$  é diferenciável em todos os pontos e que a aplicação  $Df$  verifica a condição do enunciado para a classe  $C^k$ , o



que, pela hipótese de indução, implica que  $Df$  é de classe  $C^k$ , ou seja, que  $f$  é de classe  $C^{k+1}$ .  $\square$

**3.2.15 (Aplicações com valores num produto cartesiano finito)** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $F_i$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e consideremos sobre o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} F_i$  uma das normas que define a topologia produto, por exemplo a norma do máximo, definida por

$$\|(v_i)_{i \in I}\| = \max_{i \in I} \|v_i\|.$$

Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e, para cada  $i \in I$ ,  $f_i: A \rightarrow F_i$  uma aplicação e consideremos a correspondente aplicação  $f: A \rightarrow \prod_{i \in I} F_i$ , definida por

$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}.$$

Tem-se então que  $f$  é de classe  $C^k$  se, e só se, cada  $f_i: A \rightarrow F_i$  é de classe  $C^k$  e nesse caso se  $k \geq 1$  e  $u_1, \dots, u_k \in E$  vem

$$D^k f_{x_0}(u_1, \dots, u_k) = (D^k f_{i, x_0}(u_1, \dots, u_k))_{i \in I}.$$

**Dem:** Tal como fizémos em 3.1.24, temos uma consequência das alíneas a) e c) de 3.2.8 se considerarmos para cada  $j \in I$  a projecção  $\pi_j: \prod_{i \in I} F_i \rightarrow F_j$  e a injeção  $\iota_j: F_j \rightarrow \prod_{i \in I} F_i$  que são aplicações lineares contínuas para as quais vem

$$f_j = \pi_j \circ f, \quad f = \sum_j \iota_j \circ f_j. \quad \square$$

**3.2.16 (Mudança de normas)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$ . Tem-se então que  $f$  continua a ser de classe  $C^k$  se se trocarem as normas de  $E$  e de  $F$  por normas equivalentes, o valor da derivada de ordem  $k$ ,  $D^k f$  continuando ainda a ser o mesmo.

**Dem:** Embora este resultado admita uma demonstração directa sem dificuldade, também podemos reparar que ele é uma consequência de 3.2.8 e de 3.2.12, já que substituir uma norma por outra equivalente pode ser encarado como compor com a identidade do espaço vetorial, considerada como aplicação linear contínua com uma das normas no domínio e a outro no codomínio.  $\square$

O resultado que apresentamos em seguida, e que poderá ser considerado como não prioritário numa primeira leitura, é uma generalização para as aplicações multilineares do resultado obtido em 3.2.7 para as aplicações

bilineares. Repare-se que na demonstração que apresentamos aplicamos os resultados parciais sobre a diferenciação da aplicação composta obtidos na alínea c) de 3.2.8 e em 3.2.12.

**3.2.17 (Suavidade das aplicações multilineares contínuas)** Sejam  $F_1, \dots, F_n$  e  $H$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  (onde  $n \geq 1$ ) e

$$\gamma: F_1 \times \cdots \times F_n \rightarrow H$$

uma aplicação multilinear contínua. Considerando em  $F_1 \times \cdots \times F_n$  qualquer das normas que define a topologia produto, por exemplo a norma do máximo, tem-se então que  $\gamma$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  e com  $D^k \gamma = 0$  para cada  $k \geq n + 1$ .

**Dem:** Começemos por reparar que os casos particulares em que  $n = 1$  e em que  $n = 2$  já foram estabelecidos em 3.2.6 e 3.2.7 respetivamente. Demonstramos o caso geral por indução, supondo que o resultado vale para aplicações multilineares com  $n$  variáveis e examinando um aplicação multilinear contínua

$$\gamma: F_1 \times \cdots \times F_n \times F_{n+1} \rightarrow H.$$

Este exame será dividido em várias alíneas para uma melhor sistematização.

**1)** Para cada  $1 \leq j \leq n + 1$  tem lugar uma aplicação multilinear contínua, com  $n$  variáveis,

$$\gamma_j: F_1 \times \cdots \times F_{j-1} \times F_{j+1} \times \cdots \times F_{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(F_j; H)$$

definida por

$$\gamma_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})(x_j) = \gamma(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}).$$

**Subdem:** É imediato constatar que, dados  $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}$  a aplicação  $\gamma_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$  definida por

$$x_j \mapsto \gamma(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$$

é linear e a desigualdade

$$\|\gamma(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})\| \leq \|\gamma\| \|x_1\| \cdots \|x_j\| \cdots \|x_{n+1}\|$$

mostra que ela é contínua e com norma

$$\|\gamma_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})\| \leq \|\gamma\| \|x_1\| \cdots \|x_{j-1}\| \|x_{j+1}\| \cdots \|x_{n+1}\|.$$

Uma vez que a aplicação

$$\gamma_j: F_1 \times \cdots \times F_{j-1} \times F_{j+1} \times \cdots \times F_{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(F_j; H)$$

assim definida é trivialmente multilinear, a desigualdade precedente mostra que ela é contínua.

**2)** Para cada  $1 \leq j \leq n + 1$ , notemos

$$\begin{aligned}\pi_j: F_1 \times \cdots \times F_{n+1} &\rightarrow F_j, \\ \widehat{\pi}_j: F_1 \times \cdots \times F_{n+1} &\rightarrow F_1 \times \cdots \times F_{j-1} \times F_{j+1} \times \cdots \times F_{n+1}\end{aligned}$$

as aplicações lineares contínuas naturais, a primeira uma projeção e a segunda com as restantes  $n$  projeções como coordenadas. Notemos ainda

$$\pi_j^*: \mathcal{L}(F_j; H) \rightarrow \mathcal{L}(F_1 \times \cdots \times F_{n+1}; H)$$

a aplicação linear contínua  $\mathcal{L}(\pi_j; Id_H)$  (cf. 2.1.44).

**3)** Notando  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})$  e  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n+1})$ , sabemos por 3.1.30 que  $\gamma$  é diferenciável em cada  $\mathbf{x} \in F_1 \times \cdots \times F_{n+1}$  e com

$$\begin{aligned}D\gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) &= \sum_{1 \leq j \leq n+1} \gamma(x_1, \dots, x_{j-1}, u_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) = \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n+1} \gamma_j(\widehat{\pi}_j(\mathbf{x}))(\pi_j(\mathbf{u})) = \sum_{1 \leq j \leq n+1} \pi_j^*(\gamma_j(\widehat{\pi}_j(\mathbf{x}))) (\mathbf{u}),\end{aligned}$$

por outras palavras

$$D\gamma_{\mathbf{x}} = \sum_{1 \leq j \leq n+1} \pi_j^*(\gamma_j(\widehat{\pi}_j(\mathbf{x}))) \in \mathcal{L}(F_1 \times \cdots \times F_{n+1}; H).$$

Uma vez que, pela hipótese de indução, cada  $\gamma_j$  é de classe  $C^k$  para todo o  $k$ , concluímos das alíneas a) e c) de 3.2.8 e de 3.2.12 que

$$D\gamma: F_1 \times \cdots \times F_{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(F_1 \times \cdots \times F_{n+1}; H)$$

é de classe  $C^k$  para todo o  $k$ , portanto que  $\gamma: F_1 \times \cdots \times F_{n+1} \rightarrow H$  é de classe  $C^{k+1}$  para todo o  $k$  e portanto é de classe  $C^\infty$ . Além disso, pelos mesmo resultados, podemos garantir que se  $k \geq n+2$ , e portanto  $k-1 \geq n+1$ , vem, para cada sistema de  $k$  elementos  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k$  de  $F_1 \times \cdots \times F_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned}D^k \gamma_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^k) &= D^{k-1}(D\gamma)_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{k-1})(\mathbf{u}^k) = \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n+1} \pi_j^*(D^{k-1} \gamma_{j, \widehat{\pi}_j(\mathbf{x})}(\widehat{\pi}_j(\mathbf{u}^1), \dots, \widehat{\pi}_j(\mathbf{u}^{k-1})))(\mathbf{u}^k) = 0,\end{aligned}$$

o que termina a prova por indução. □

**3.2.18 (Aplicações com valores num espaço  $\mathcal{L}(F_1, \dots, F_p; G)$ )** Sejam  $p \geq 1$ ,  $F_1, \dots, F_p$  espaços vetoriais normados de dimensão finita sobre  $\mathbb{K}$ ,  $E$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(F_1, \dots, F_p; G)$  uma aplicação. Tem-se então:<sup>249</sup>

**a)** Se  $x_0 \in A$  é um ponto de diferenciabilidade então  $f$  é diferenciável em  $x_0$  se, e só se, quaisquer que sejam  $v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p$  a aplicação

<sup>249</sup>Comparar com 2.1.57.

$$f_{v_1, \dots, v_p}: A \rightarrow G, \quad f_{v_1, \dots, v_p}(x) = f(x)(v_1, \dots, v_p),$$

for diferenciável em  $x_0$  tendo-se, nesse caso, para cada  $u \in E$

$$(1) \quad Df_{x_0}(u)(v_1, \dots, v_p) = Df_{v_1, \dots, v_p, x_0}(u).$$

**b)** Se  $A$  for um domínio de diferenciabilidade então  $f$  é de classe  $C^j$  ( $j \geq 1$ ) se, e só se, quaisquer que sejam  $v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p$  a aplicação

$$f_{v_1, \dots, v_p}: A \rightarrow G, \quad f_{v_1, \dots, v_p}(x) = f(x)(v_1, \dots, v_p),$$

for de classe  $C^j$ , tendo-se então

$$(2) \quad D^j f_x(u_1, \dots, u_j)(v_1, \dots, v_p) = Df_{v_1, \dots, v_p, x}(u_1, \dots, u_j).^{250}$$

**Dem:** Comecemos por notar que quaisquer que sejam  $v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p$  tem lugar uma aplicação linear  $\xi: \mathcal{L}(F_1, \dots, F_p; G) \rightarrow G$  definida por  $\xi(\lambda) = \lambda(v_1, \dots, v_p)$ , a qual é contínua tendo em conta a desigualdade

$$\|\xi(\lambda)\| = \|\lambda(v_1, \dots, v_p)\| \leq \|v_1\| \cdots \|v_p\| \|\lambda\|.$$

Uma vez que  $f_{v_1, \dots, v_p} = \xi \circ f$  concluímos das alíneas c) de 3.1.20 e de 3.2.8, respetivamente, que se  $f$  é derivável em  $x_0$  então cada  $f_{v_1, \dots, v_p}$  é diferenciável em  $x_0$  e com derivada dada por (1) e que se  $f$  é de classe  $C^j$  então cada  $f_{v_1, \dots, v_p}$  é de classe  $C^j$  e com derivada de ordem  $j$  dada por (2). Vamos agora demonstrar as implicações recíprocas em a) e em b) por indução em  $p$ . Comecemos por supor que  $p = 1$ . Consideremos uma base  $w_1, \dots, w_n$  de  $F_1$  e lembremos que, como se viu na alínea a) de 2.1.56, tem lugar um isomorfismo topológico

$$\Theta: \mathcal{L}(F_1; G) \rightarrow G^n, \quad \Theta(\lambda) = (\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_n)).$$

Supondo que para cada  $v \in F_1$  a aplicação  $f_v: A \rightarrow G$  é diferenciável em  $x_0$  (respetivamente é de classe  $C^j$ ) concluímos de 3.1.24 (respetivamente 3.2.15) que é diferenciável em  $x_0$  (respetivamente é de classe  $C^j$ ) a aplicação  $A \rightarrow G^n$  definida por

$$x \mapsto (f_{w_1}(x), \dots, f_{w_n}(x)) = (f(x)(w_1), \dots, f(x)(w_n)) = \Theta(f(x))$$

pelo que  $f = \Theta^{-1} \circ (\Theta \circ f)$  é diferenciável em  $x_0$  (respetivamente é de classe  $C^j$ ), o que termina a prova do caso em que  $p = 1$ . Suponhamos que o resultado é verdadeiro para um certo  $p \geq 1$ . Consideremos uma aplicação  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(F_1, \dots, F_p, F_{p+1}; G)$  tal que quaisquer que sejam

$$v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p, v_{p+1} \in F_{p+1}$$

<sup>250</sup>Note-se que, como a demonstração a seguir mostra, para uma das implicações tanto em b) como em c) é desnecessária a hipótese de os  $F_j$  terem dimensão finita.

venha diferenciável em  $x_0$  (respetivamente de classe  $C^j$ ) a aplicação

$$f_{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}}: A \rightarrow G, \quad f_{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}}(x) = f(x)(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}).$$

Por composição com a isometria linear, em particular isomorfismo topológico,

$$\Upsilon_p: \mathcal{L}(F_1, \dots, F_p, F_{p+1}; G) \rightarrow \mathcal{L}(F_1, \dots, F_p; \mathcal{L}(F_{p+1}; G))$$

referido em 2.1.43, obtemos uma aplicação

$$\Upsilon_p \circ f: A \rightarrow \mathcal{L}(F_1, \dots, F_p; \mathcal{L}(F_{p+1}; G))$$

que, pela hipótese de indução e pelo caso  $p = 1$  já provado, vai ser diferenciável em  $x_0$  (respetivamente de classe  $C^j$ ) visto que quaisquer que sejam  $v_1 \in F_1, \dots, v_p \in F_p$  isso acontece à aplicação

$$(\Upsilon_p \circ f)_{v_1, \dots, v_p}: A \rightarrow \mathcal{L}(F_{p+1}; G),$$

isto porque para cada  $v_{p+1} \in F_{p+1}$  o mesmo acontece à aplicação

$$((\Upsilon_p \circ f)_{v_1, \dots, v_p})_{v_{p+1}}: A \rightarrow G,$$

que não é mais do que a aplicação  $f_{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}}$ . A continuidade da aplicação linear  $\Upsilon_p^{-1}$  implica por fim que é diferenciável em  $x_0$  (respetivamente é de classe  $C^j$ ) a aplicação  $f = \Upsilon_p^{-1} \circ (\Upsilon_p \circ f)$ , o que termina a demonstração por indução.  $\square$

**3.2.19 (Resultado geral sobre a composta de aplicações de classe  $C^k$ )** Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  domínios de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  e  $g: B \rightarrow G$  duas aplicações de classe  $C^k$  com  $f(A) \subset B$ . Tem-se então que  $g \circ f: A \rightarrow G$  é também uma aplicação de classe  $C^k$ .<sup>251</sup>

**Dem:** Vamos fazer a demonstração por indução em  $k$ , reparando que o caso  $k = 0$  é simplesmente a asserção de que a composta de duas aplicações contínuas é ainda uma aplicação contínua. Reparemos que quando  $f$  e  $g$  são diferenciáveis o teorema da diferenciação da aplicação composta diz-nos que  $g \circ f: A \rightarrow G$  é diferenciável em cada  $x \in A$  e com

$$D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x$$

Suponhamos então que o resultado é verdadeiro para um certo  $k$  e que  $f$  e  $g$  são aplicações de classe  $C^{k+1}$ . Pelo teorema da derivação da função composta,  $g \circ f: A \rightarrow G$  é diferenciável em todos os pontos  $x \in A$ , e com  $D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x$ . Uma vez que  $Dg$  e  $Df$  são aplicações de classe  $C^k$  e que  $f$  é uma aplicação de classe  $C^k$ , podemos usar a hipótese de

<sup>251</sup>Não explicitamos, no entanto, nenhuma fórmula para a derivada de ordem  $k$  de  $g \circ f$ , ao contrário do que sucedia no caso em que  $g$  é linear contínua ou  $f$  é afim contínua.

indução e 3.2.15 para concluir que é de classe  $C^k$  a aplicação de  $A$  em  $\mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F)$ , que a  $x$  associa  $(Dg_{f(x)}, Df_x)$ . Composto esta última aplicação com a aplicação bilinear contínua de  $\mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F)$  em  $\mathcal{L}(E; G)$ , que a  $(\beta, \alpha)$  associa  $\beta \circ \alpha$ , a qual é, em particular, de classe  $C^k$ , obtemos, mais uma vez pela hipótese de indução, uma aplicação de classe  $C^k$  de  $A$  em  $\mathcal{L}(E; G)$ , que a  $x$  associa  $Dg_{f(x)} \circ Df_x = D(g \circ f)_x$ , o que prova que  $g \circ f$  é uma aplicação de classe  $C^{k+1}$ .  $\square$

**3.2.20 (Suavidade da inversão numa álgebra de Banach)** Consideremos uma álgebra de Banach  $\mathcal{E}$  sobre  $\mathbb{K}$ , o aberto  $\mathcal{E}_{inv} \subset \mathcal{E}$  constituído pelos elementos invertíveis e a aplicação diferenciável  $inv: \mathcal{E}_{inv} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $inv(x) = x^{-1}$  que, como se verificou em 3.1.28, verifica

$$Dinv_x(u) = -x^{-1}ux^{-1}.$$

Tem-se então que esta aplicação é mesmo de classe  $C^\infty$ .

**Dem:** Começemos por notar que, dados  $y, z \in \mathcal{E}$ , podemos considerar uma aplicação linear  $\gamma(y, z): \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $\gamma(y, z)(u) = yuz$ , a qual é contínua e com

$$(1) \quad \|\gamma(y, z)\| \leq \|y\| \|z\|$$

tendo em conta a desigualdade

$$\|\gamma(y, z)(u)\| = \|yuz\| \leq \|y\| \|u\| \|z\|.$$

A desigualdade (1) mostra também que a aplicação  $\gamma: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ , que a  $(y, z)$  associa  $\gamma(y, z)$ , que é trivialmente bilinear, é contínua. Passemos agora à prova, por indução, que  $inv: \mathcal{E}_{inv} \rightarrow \mathcal{E}$  é de classe  $C^k$  para todo o  $k \geq 0$ . Que esta aplicação é contínua, e portanto de classe  $C^0$ , já foi provado em 2.3.34. Supondo que a aplicação é de classe  $C^k$  para um certo  $k \geq 0$ , sabemos, por 3.1.28 que ela é diferenciável e com

$$Dinv_x = -\gamma(inv(x), inv(x))$$

pelo que, tendo em conta o facto de  $\gamma$  ser de classe  $C^k$  e a hipótese de indução, concluímos por 3.2.19 e 3.2.15 que  $Dinv: \mathcal{E}_{inv} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E})$  é de classe  $C^k$ , e portanto  $inv: \mathcal{E}_{inv} \rightarrow \mathcal{E}$  é de classe  $C^{k+1}$ .  $\square$

**3.2.21 (Corolário)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$  e lembremos que, como referido em 2.3.35, o subconjunto  $\mathcal{L}_{iso}(E; F)$  do espaço de Banach  $\mathcal{L}(E; F)$  é aberto e tem lugar uma aplicação contínua

$$inv: \mathcal{L}_{iso}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(F; E)$$

definida por  $inv(\xi) = \xi^{-1}$ . Podemos agora acrescentar que essa aplicação é mesmo de classe  $C^\infty$  e com

$$Dinv_\xi(\alpha) = -\xi^{-1} \circ \alpha \circ \xi^{-1}.$$

**Dem:** No caso em que  $E = F$  temos uma consequência de aplicar 3.2.20 à álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$ . No caso geral podemos já afastar o caso trivial em que  $\mathcal{L}_{iso}(E; F)$  é vazio e então escolhemos  $\xi_0 \in \mathcal{L}_{iso}(E; F)$  e atendemos a que se tem

$$\text{inv}(\xi) = \xi^{-1} = \text{inv}(\xi_0^{-1} \circ \xi) \circ \xi_0^{-1}$$

onde a aplicação  $\text{inv}$  no segundo membro é a correspondente à álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$ , o que mostra que a aplicação  $\text{inv}$  no primeiro membro é a composta de aplicações de classe  $C^\infty$  e que se tem

$$\begin{aligned} D\text{inv}_\xi(\alpha) &= D\text{inv}_{\xi_0^{-1} \circ \xi}(\xi_0^{-1} \circ \alpha) \circ \xi_0^{-1} = \\ &= -(\xi_0^{-1} \circ \xi)^{-1} \circ (\xi_0^{-1} \circ \alpha) \circ (\xi_0^{-1} \circ \xi)^{-1} \circ \xi_0^{-1} = \\ &= -\xi^{-1} \circ \xi_0 \circ \xi_0^{-1} \circ \alpha \circ \xi^{-1} \circ \xi_0 \circ \xi_0^{-1} = \\ &= \xi^{-1} \circ \alpha \circ \xi^{-1}. \end{aligned} \quad \square$$

Os dois resultados a seguir mostram que outros modos que se poderiam considerar como naturais para definir recursivamente as aplicações de classe  $C^k$  são de facto equivalentes àquele que escolhemos.

**3.2.22** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$ . Para cada  $0 < j < k$  tem-se então que  $D^j f: A \rightarrow \mathcal{L}^j(E; F)$  é de classe  $C^{k-j}$  e

$$D^k f_x(u_1, \dots, u_k) = D^{k-j}(D^j f)_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_k),$$

por outras palavras,  $D^{k-j}(D^j f)_x = \Upsilon_{k-j}(D^k f_x)$ , onde  $\Upsilon_{k-j}$  é o isomorfismo topológico referido em 2.1.43.<sup>252</sup>

**Dem:** Comecemos por notar que o caso  $j = 1$  não é mais do que a definição. Vamos fazer a prova por indução em  $k$ . O caso em que  $k = 2$ , e portanto  $j = 1$ , resulta da observação precedente. Suponhamos então o resultado verdadeiro para um certo  $k \geq 2$  e que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+1}$ . Sabemos que  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é uma aplicação de classe  $C^k$  pelo que, pela hipótese de indução, para cada  $0 < j < k$  vem  $D^j(Df)$  de classe  $C^{k-j}$  e com

$$\begin{aligned} D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k) &= \\ &= D^{k-j}(D^j(Df))_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_k). \end{aligned}$$

Uma vez que, por definição,  $D^{j+1} f_x = \Upsilon_j^{-1}(D^j(Df)_x)$ , com  $\Upsilon_j^{-1}$  aplicação linear contínua, concluímos de 3.2.8 que  $D^{j+1} f$  é de classe  $C^{k-j}$ , ou seja,  $C^{(k+1)-(j+1)}$ , e que

<sup>252</sup>Quem tiver gosto por casos limites, que podem ser delicados do ponto de vista lógico, verificará que o resultado é ainda válido, e trivial, nos casos em que  $j = 0$  e  $j = k$ , através da identificação de  $\mathcal{L}^0(E; F)$  com  $F$ .

$$\begin{aligned}
& D^{(k+1)-(j+1)}(D^{j+1}f)_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_{k+1}) = \\
& = \Upsilon_j^{-1}(D^{k-j}(D^j(Df)))_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_{k+1}) = \\
& = D^{k-j}(D^j(Df))_x(u_1, \dots, u_{k-j})(u_{k-j+1}, \dots, u_k)(u_{k+1}) = \\
& = D^k(Df)_x(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}) = D^{k+1}f_x(u_1, \dots, u_{k+1}),
\end{aligned}$$

pelo que a prova por indução está terminada.  $\square$

**3.2.23** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), tal que a aplicação  $D^k f: A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$  seja de classe  $C^j$  ( $j \geq 1$ ). Tem-se então que  $f$  é de classe  $C^{j+k}$  e

$$D^{j+k}f_x(u_1, \dots, u_{k+j}) = D^j(D^k f)_x(u_1, \dots, u_j)(u_{j+1}, \dots, u_{j+k}).$$

**Dem:** Mais uma vez a prova será feita por indução em  $k$ . O caso  $k = 1$  é simplesmente a definição. Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo  $k \geq 1$  e que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+1}$  e com  $D^{k+1}f: A \rightarrow \mathcal{L}^{k+1}(E; F)$  de classe  $C^j$ . Tem-se então que  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é de classe  $C^k$  e o facto de se ter  $D^k(Df) = \Upsilon_k \circ D^{k+1}f$  implica, por 3.2.8, que  $D^k(Df)$  é de classe  $C^j$ , donde, pela hipótese de indução, que  $Df$  é de classe  $C^{j+k}$ , ou seja, por definição, que  $f$  é de classe  $C^{j+k+1}$ . O resultado está assim demonstrado, visto que a igualdade do enunciado não é mais do que a obtida no resultado precedente.  $\square$

Repare-se que a utilização da definição ou, por exemplo, de 3.2.23 para a determinação de diferenciais de ordem superior passa pelo cálculo de diferenciais de aplicações com valores num espaço  $\mathcal{L}(E; F)$  ou, mais geralmente, num espaço  $\mathcal{L}^k(E; F)$ . Apresentamos a seguir uma caracterização alternativa frequentemente utilizada que tem a vantagem de as funções cujo diferencial se calcula tomarem valores no espaço  $F$ .

### 3.2.24 (Método alternativo para calcular diferenciais de ordem superior)

Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) tal que a aplicação  $D^k f: A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$  seja de classe  $C^j$  ( $j \geq 1$ ), e portanto  $f: A \rightarrow F$  seja de classe  $C^{k+j}$ . Quaisquer que sejam os vetores  $u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+k} \in E$  é então de classe  $C^j$  a aplicação

$$g: A \rightarrow F, \quad g(x) = D^k f_x(u_{j+1}, \dots, u_{j+k}),$$

e vem

$$D^{j+k}f_x(u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+k}) = D^j g_x(u_1, \dots, u_j).$$

**Dem:** Considerando os vetores  $u_{j+1}, \dots, u_{j+k}$  fixados, podemos considerar uma aplicação linear



$$\xi: \mathcal{L}^k(E; F) \rightarrow F, \quad \xi(\lambda) = \lambda(u_{j+1}, \dots, u_{j+k}),$$

a qual é contínua, tendo em conta a desigualdade

$$\|\xi(\lambda)\| \leq \|u_{j+1}\| \cdots \|u_{j+k}\| \|\lambda\|.$$

Uma vez que  $g(x) = \xi(D^k f_x)$ , concluímos, tendo em conta 3.2.23 e a alínea c) de 3.2.8, que  $g: A \rightarrow F$  é de classe  $C^j$  e

$$\begin{aligned} D^j g_x(u_1, \dots, u_j) &= \xi(D^j(D^k f_x)(u_1, \dots, u_j)) = \\ &= D^j(D^k f_x)(u_1, \dots, u_j)(u_{j+1}, \dots, u_{j+k}) = \\ &= D^{j+k} f_x(u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{k+j}). \end{aligned} \quad \square$$

Note-se que no resultado precedente não afirmamos que do facto de  $f: A \rightarrow F$  ser de classe  $C^k$  e de quaisquer que sejam  $u_{j+1}, \dots, u_{j+k} \in E$  ser de classe  $C^j$  a aplicação  $A \rightarrow F$ ,  $x \mapsto D^k f_x(u_{j+1}, \dots, u_{j+k})$  se possa inferir que  $D^k f: A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$  seja de classe  $C^j$  (e portanto que  $f$  seja de classe  $C^{k+j}$ ). Como referimos em seguida, essa inferência já é possível no caso em que  $E$  tem dimensão finita.

**3.2.25 (O caso em que o domínio tem dimensão finita)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o primeiro dos quais de dimensão finita,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) tal que quaisquer que sejam  $u_{j+1}, \dots, u_{j+k} \in E$  ( $j \geq 1$ ) a aplicação

$$g: A \rightarrow F, \quad g(x) = D^k f_x(u_{j+1}, \dots, u_{j+k}),$$

seja de classe  $C^j$ . Tem-se então que  $D^k f: A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$  é de classe  $C^j$ , e portanto  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+j}$  e com

$$D^{j+k} f_x(u_1, \dots, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{k+j}) = D^j g_x(u_1, \dots, u_j).$$

**Dem:** Temos simplesmente um caso particular do resultado 3.2.18 que examinámos atrás.  $\square$

Um caso particular importante da situação em que o espaço vectorial normado ambiente do domínio tem dimensão finita é aquele em que esse espaço é o próprio corpo  $\mathbb{K}$  dos escalares. Nesse caso e analogamente ao facto de, como referido em 3.1.14, as derivadas  $f'(t_0)$  constituírem uma forma mais elementar de caracterizar os diferenciais  $Df_{t_0}$ , vamos ver que se podem definir derivadas de ordem superior que caracterizam os diferenciais de ordem superior.

**3.2.26 (Derivadas de ordem superior de funções de variável escalar)** Sejam  $F$  um espaço vectorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset \mathbb{K}$  um domínio de diferencia-

bilidade (ou, o que é o mesmo, um conjunto sem pontos isolados, cf. a alínea a) de 3.2.1). Se  $f: A \rightarrow F$  é uma aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) define-se a sua *derivada de ordem  $k$*  como sendo a aplicação  $f^{(k)}: A \rightarrow F$  definida por

$$f^{(k)}(t) = D^k f_t(1, \dots, 1),$$

aplicação que é contínua tendo em conta o facto de a igualdade anterior poder ser reescrita na forma

$$f^{(k)}(t) = \Upsilon(D^k f_t),$$

onde  $\Upsilon: \mathcal{L}^k(\mathbb{K}; F) \rightarrow F$  é a isometria linear definida em 2.1.42. Por extensão, se  $f: A \rightarrow F$  é uma aplicação de classe  $C^0$ , isto é contínua, define-se  $f^{(0)}$  como sinónimo de  $f$ .

Repare-se que, tendo em conta 3.1.14, vemos que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^1$  se, e só se for derivável em cada  $t$  e com a aplicação  $f': A \rightarrow F$  contínua e que, nesse caso,  $f^{(1)}(t) = f'(t)$  (o resultado referido garante que se tem  $f'(t) = \Upsilon(Df_t)$  e  $Df_t = \Upsilon^{-1}(f'(t))$ ).

**3.2.27 (Visão alternativa de 3.2.22 e 3.2.23)** Sejam  $F$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset \mathbb{K}$  um domínio de diferenciabilidade. Dados  $j > 1$  e  $k > 1$ , uma aplicação  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^{j+k}$  se, e só se, for de classe  $C^k$  e com  $f^{(k)}: A \rightarrow F$  de classe  $C^j$  tendo-se nesse caso

$$f^{(j+k)}(t) = (f^{(k)})^{(j)}(t).$$

**Dem:** Suponhamos que  $f$  é de classe  $C^{j+k}$ . Sabemos que  $f$  é de classe  $C^k$  e, tendo em conta 3.2.22, que  $D^k f: A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$  é de classe  $C^j$ , donde, tendo em conta a igualdade  $f^{(k)}(t) = \Upsilon(D^k f_t)$  com  $\Upsilon: \mathcal{L}^k(E; F) \rightarrow F$  aplicação linear contínua,  $f^{(k)}: A \rightarrow F$  é de classe  $C^j$  e, além disso, lembrando a alínea c) de 3.2.8,

$$\begin{aligned} (f^{(k)})^{(j)}(t) &= D^j (f^{(k)})_t(1, \dots, 1) = \Upsilon(D^j (D^k f)_t)(1, \dots, 1) = \\ &= D^j (D^k f)_t(1, \dots, 1)(1, \dots, 1) = \\ &= D^{j+k} f_t(1, \dots, 1) = f^{(j+k)}(t). \end{aligned}$$

Suponhamos reciprocamente que  $f$  é de classe  $C^k$  e que  $f^{(k)}: A \rightarrow F$  é de classe  $C^j$ . A igualdade  $D^k f_t = \Upsilon^{-1}(f^{(k)}(t))$ , com  $\Upsilon^{-1}: F \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$  linear contínua, implica, pela alínea c) de 3.2.8, que  $D^k f: A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$  é de classe  $C^j$  e portanto, por 3.2.23, que  $f$  é de classe  $C^{j+k}$ .  $\square$

**3.2.28 (Corolário — complemento da observação em 3.1.2)** Sejam  $F$  um espaço vetorial normado complexo,  $A \subset \mathbb{R}$  um conjunto sem pontos isolados (condição equivalente tanto à de  $A$  ser domínio de diferenciabilidade como parte do espaço vetorial real  $\mathbb{R}$  como à de  $A$  ser domínio de diferenciabilidade como parte do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}$ ) e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Tem-se então que  $f$  é de classe  $C^k$  no sentido real se, e só se, for

de classe  $C^k$  no sentido complexo (no segundo caso considerando  $A$  como parte de  $\mathbb{C}$ ), as derivadas  $f^{(k)}: A \rightarrow F$  sendo então as mesmas nos dois sentidos.

**Dem:** Já referimos em 3.1.14 que  $f$  é diferenciável num ponto  $t_0$  no sentido real se, e só se o for no sentido complexo por ambas as condições serem equivalentes à derivabilidade de  $f$  em  $t_0$  e, como referido em 3.1.2, a derivada  $f'(t_0)$  é então a mesma nos dois sentidos. O facto de  $f$  ser de classe  $C^1$  no sentido real se, e só se, o for no sentido complexo resulta de, em ambos os casos isso ser equivalente a termos uma aplicação contínua  $f': A \rightarrow F$ . A mesma equivalência para a classe  $C^k$  com  $k$  finito (e portanto também para a classe  $C^\infty$ ) resulta agora por indução, se nos atendermos a que  $f$  é de classe  $C^{k+1}$  se, e só se for de classe  $C^1$  e com  $f': A \rightarrow F$  de classe  $C^k$ , tendo-se então  $f^{(k+1)}(t) = f'^{(k)}(t)$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex. 3.2.1** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ . Diz-se que uma aplicação  $f: E \rightarrow F$  é *positivamente  $n$ -homogénea* (onde  $n \geq 0$  é um inteiro) se, para cada  $x \in E$  e  $t > 0$ , tem-se

$$f(tx) = t^n f(x).$$

**a)** Mostrar que, se  $n \geq 1$  e se  $f: E \rightarrow F$  é uma aplicação de classe  $C^1$  positivamente  $n$ -homogénea, então a aplicação  $Df: E \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é positivamente  $(n-1)$ -homogénea.

**b)** Mostrar que, se  $n \geq 1$  e  $f: E \rightarrow F$  é uma aplicação de classe  $C^1$  positivamente  $n$ -homogénea, então

$$Df_x(x) = n f(x)$$

(*identidade de Euler*).

**c)** Mostrar que, se  $f: E \rightarrow F$  é de classe  $C^0$  e positivamente 0-homogénea, então  $f$  é constante.

**d)** Mostrar que, se  $f: E \rightarrow F$  é de classe  $C^1$  e positivamente 1-homogénea, então  $f$  é uma aplicação linear.

**e)** Mostrar, por indução, que, se  $n \geq 1$  e  $f: E \rightarrow F$  é de classe  $C^n$  e positivamente  $n$ -homogénea, então existe uma aplicação multilinear contínua  $\xi: E^n \rightarrow F$  tal que  $f(x) = \xi(x, \dots, x)$ .

**Ex. 3.2.2** Sejam  $E$ ,  $F$  e  $G$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\xi: E \times F \rightarrow G$  uma aplicação bilinear contínua. Determinar uma caracterização da derivada de segunda ordem

$$D^2\xi_{(x,y)}: (E \times F) \times (E \times F) \rightarrow G$$

e reparar que se trata de uma aplicação bilinear simétrica, a mesma para todos os  $(x, y) \in E \times F$ .

**Sugestão:** Poderá ser cómodo utilizar 3.2.24.

**Ex. 3.2.3** Sejam  $E, F, G$  e  $H$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\xi: E \times F \times G \rightarrow H$  uma aplicação trilinear contínua. Caracterizar a derivada de terceira ordem  $D^3\xi_{(x,y,z)}$ .

**Ex. 3.2.4** Sejam  $E$  um espaço pre-hilbertiano sobre  $\mathbb{K}$  e  $f: E \rightarrow E$  a aplicação definida por  $f(x) = \langle x, x \rangle x$ . Determinar  $D^2f_x(x, x)$ . **Atenção:** Este exercício, com o seu aspecto inocente, pode conter uma casca de banana. Determinar, mais geralmente,  $D^2f_x(u, v)$ , substituir no resultado  $u$  e  $v$  por  $x$  e, no caso de o resultado obtido não coincidir com a primeira resposta, tentar descobrir qual o erro que foi feito.

**Ex. 3.2.5** Dada uma álgebra de Banach  $\mathcal{E}$ , e considerando a aplicação suave  $\text{inv}: \mathcal{E}_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{E}$ , definida por  $\text{inv}(x) = x^{-1}$  (cf. 3.2.20), determinar  $D^2\text{inv}_1(u, v)$ .

**Ex. 3.2.6** Notemos  $\mathcal{M}_n$  o espaço vetorial das matrizes do tipo  $n \times n$ , com entradas no corpo  $\mathbb{K}$  e seja  $GL_n$  o subconjunto constituído pelas matrizes invertíveis. Mostrar que  $GL_n$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{M}_n$  e que tem lugar uma aplicação suave  $\text{inv}: GL_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ , que a cada matriz invertível associa a respectiva matriz inversa. **Sugestão:** Considerar um isomorfismo entre  $\mathcal{M}_n$  e a álgebra de Banach  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ .

**Ex. 3.2.7** Notemos  $\mathcal{M}_n$  o espaço vetorial das matrizes do tipo  $n \times n$ , com entradas no corpo  $\mathbb{K}$ . Sejam  $\det: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{K}$  e  $\text{Tr}: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{K}$  as aplicações que a cada matriz associam respectivamente o seu determinante e o seu traço.

a) Mostrar que  $\det$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  e que, sendo  $I$  a matriz identidade, tem-se

$$D\det_I(A) = \text{Tr}(A).$$

**Sugestão:** Considerar o isomorfismo  $\xi: (\mathbb{K}^n)^n \rightarrow \mathcal{M}_n$ , que a cada sistema de  $n$  vetores de  $\mathbb{K}^n$  associa a matriz que tem aqueles vetores como colunas, e reparar que a composição  $\det \circ \xi$  é multilinear contínua.

b) Deduzir de a) que, para cada matriz invertível  $X$ , tem-se

$$D\det_X(A) = \text{Tr}(A \times X^{-1})\det(X).$$

**Sugestão:** Fixado  $X$  atender a que, para cada  $Y$ , tem-se

$$\det(Y) = \det(Y \times X^{-1})\det(X).$$

c) Mostrar que se tem

$$D^2\det_I(A, B) = \text{Tr}(B)\text{Tr}(A) - \text{Tr}(B \times A).$$

d) Se ainda restarem algumas forças, mostrar que

$$\begin{aligned} D^3\det_I(A, B, C) = & \\ & \text{Tr}(C \times A \times B) + \text{Tr}(C \times B \times A) - \text{Tr}(C \times B)\text{Tr}(A) - \\ & - \text{Tr}(C \times A)\text{Tr}(B) - \text{Tr}(B \times A)\text{Tr}(C) + \text{Tr}(C)\text{Tr}(B)\text{Tr}(A). \end{aligned}$$

**Ex. 3.2.8** Sejam os espaços vetoriais normados  $E, F$  e  $G$  sobre  $\mathbb{K}$ , os domínios de diferenciabilidade  $A \subset E$  e  $B \subset F$  e as aplicações de classe  $C^2$   $f: A \rightarrow F$  e  $g: B \rightarrow G$ , com  $f(A) \subset B$ . Mostrar que

$$D^2(g \circ f)_x(u, v) = D^2g_{f(x)}(Df_x(u), Df_x(v)) + Dg_{f(x)}(D^2f_x(u, v)).$$

No caso em que  $f$  e  $g$  são de classe  $C^3$ , obter uma fórmula análoga para  $D^3(g \circ f)_x(u, v, w)$ .

**Ex. 3.2.9** Seja  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e seja  $\Psi: \mathcal{L}^2(E; E) \times E \rightarrow E$  a aplicação definida por  $\Psi(\xi, x) = \xi(x, x)$ . Mostrar que  $\Psi$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  e determinar  $D\Psi_{(\xi, x)}(\eta, u)$ .

**Ex. 3.2.10** Seja  $E$  um espaço pre-hilbertiano real e notemos, para cada  $n \geq 1$ ,  $\Omega_n(E)$  o subconjunto de  $E^n$  constituído pelos sistemas linearmente independentes  $(x_1, \dots, x_n)$ . Mostrar, por indução em  $n$ , que a aplicação ortogonalizadora de Gram-Schmidt  $f_n: \Omega_n(E) \rightarrow E$  (cf. 2.5.49 e 2.5.50) é de classe  $C^\infty$ . Por que razão impusémos que o corpo dos escalares fosse o dos reais?

**Ex. 3.2.11 (Diferenciabilidade e complexificado)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado real e consideremos o respetivo espaço vetorial normado complexo  $E_{\mathbb{C}}$ , complexificado do primeiro, e a aplicação linear real  $\iota: E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ , definidos no exercício 2.1.33.

**a)** Sendo  $x_0 \in A \subset E$  com o respetivo cone de derivabilidade  $\mathbf{t}_{x_0}(A)$  (cf. 3.1.3), mostrar que o cone de derivabilidade de  $\iota(A)$  no ponto  $\iota(x_0)$  é  $\iota(\mathbf{t}_{x_0}(A))$  e deduzir que  $x_0 \in A$  é um ponto de diferenciabilidade de  $A$  (cf. 3.1.8) se, e só se  $\iota(x_0)$  for um ponto de diferenciabilidade de  $\iota(A)$ .

**b)** Sendo  $x_0$  um ponto de diferenciabilidade de  $A \subset E$ ,  $F$  um espaço vetorial normado complexo e  $f: \iota(A) \rightarrow F$  uma aplicação, mostrar que  $f$  é diferenciável em  $\iota(x_0)$  no sentido complexo se, e só se,  $f \circ \iota: A \rightarrow F$  for diferenciável em  $A$  no sentido real e que, quando isso acontecer  $D(f \circ \iota)_{x_0} = Df_{\iota(x_0)} \circ \iota$  (comparar com o referido em 3.1.14 no caso particular em que  $E = \mathbb{R}$ ).

**c)** Tendo em conta o referido em b), um conjunto  $A \subset E$  é um domínio de diferenciabilidade se, e só se,  $\iota(A) \subset \iota(E)$  for um domínio de diferenciabilidade. Mostrar que, se  $F$  é um espaço vetorial normado complexo e  $f: \iota(A) \rightarrow F$  é uma aplicação então  $f$  é de classe  $C^k$  no sentido complexo (cf. 3.2.3) se, e só se,  $f \circ \iota: A \rightarrow F$  for de classe  $C^k$  no sentido real e que, quando isso acontecer tem-se

$$D^k(f \circ \iota)_{x_0}(u_1, \dots, u_k) = D^k f_{\iota(x_0)}(\iota(u_1), \dots, \iota(u_k)).$$

**Ex. 3.2.12** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^{k-1}$ , onde  $k \geq 1$ . Vamos dizer que  $f$  tem num ponto  $x_0 \in A$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$  se, para cada  $j \leq k-1$ ,  $D^j f_{x_0} = 0$  (em particular,  $f(x_0) = D^0 f_{x_0} = 0$ ). Por extensão, consideramos que qualquer aplicação tem, em qualquer ponto, um zero de ordem maior ou igual a 0.

**a)** Mostrar que, se  $k \geq 1$ , uma aplicação  $f: A \rightarrow F$  de classe  $C^k$  tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k+1$  se, e só se,  $f(x_0) = 0$  e  $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$ .

**b)** Mostrar que, se  $f: A \rightarrow F$  tem no ponto  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$  e se  $\xi: F \rightarrow G$  é uma aplicação linear contínua, então  $\xi \circ f: A \rightarrow G$  tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$ . Do mesmo modo, verificar que, se  $f, g: A \rightarrow F$  têm em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$ , então  $f+g: A \rightarrow F$  e, para cada  $c \in \mathbb{K}$ ,  $cf: A \rightarrow F$  têm em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$ .

**c)** Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$  uma aplicação de classe  $C^{k-1}$ , onde  $k \geq 1$ . Mostrar que  $f$  tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$  se, e só se, para cada  $u \in F$ , a aplicação  $f_u: A \rightarrow G$ , definida por  $f_u(x) = f(x)(u)$ , tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$ .

**d)** Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade,  $\gamma: F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow G$  uma aplicação multilinear contínua e, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,  $f_j: A \rightarrow F_j$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ , tendo no ponto  $x_0 \in A$  um zero de ordem maior ou igual a  $p_j$ . Mostrar

que a aplicação de classe  $C^\infty$   $g: A \rightarrow G$ , definida por

$$g(x) = \gamma(f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $p_1 + \dots + p_n$ . **Sugestão:** Fazer a demonstração por indução em  $p_1 + \dots + p_n$  e atender a uma generalização da regra de Leibnitz para aplicações multilineares baseada em 3.1.30. **Nota:** Nesta alínea, como nas seguintes, pedimos que as aplicações sejam de classe  $C^\infty$ , a fim de simplificar o enunciado. É fácil de ver que bastaria pedir que ambas as aplicações fossem de classe  $C^k$ , com  $k = p_1 + \dots + p_n - 1$ .

**e)** Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços vetoriais normados,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  domínios de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  e  $g: B \rightarrow G$  aplicações de classe  $C^\infty$ , com  $f(A) \subset B$  tais que  $g$  tem em  $f(x_0)$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$ . Mostrar que  $g \circ f: U \rightarrow G$  tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k$ .

**f)** Mais geralmente, sejam  $E, F$  e  $G$  espaços vetoriais normados,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  domínios de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  e  $g: B \rightarrow G$  aplicações de classe  $C^\infty$ , com  $f(A) \subset B$  tais que  $g$  tem em  $f(x_0)$  um zero de ordem maior ou igual a  $q$  e que  $f - f(x_0)$  tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $p$ . Mostrar que  $g \circ f: A \rightarrow G$  tem em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $pq$ . **Sugestão:** Fazer a demonstração por indução em  $q$ , reparando que o caso  $q = 0$  é trivial.

### §3. As fórmulas da média e aplicações. Domínios localmente convexos.

**3.3.1 (Primeiro teorema da média)** Sejam  $a < b$  dois números reais,  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $M \geq 0$  e  $f: [a, b] \rightarrow E$  uma aplicação contínua que seja derivável em todos os pontos  $t \in ]a, b[$  e com  $\|f'(t)\| \leq M$ . Tem-se então

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).^{253}$$

**Dem:** Seja  $a' \in ]a, b[$  arbitrário. Fixemos  $r > 0$  arbitrário. Notemos  $J$  o conjunto dos elementos  $t \in [a', b]$  tais que

$$\|f(t) - f(a')\| \leq (M + r)(t - a').$$

Trata-se de um subconjunto fechado de  $[a', b]$ , tendo em conta a continuidade de  $f$ , que não é vazio, uma vez que  $a' \in J$ . Podemos assim considerar o supremo  $c$  de  $J$ , o qual vai ser mesmo um máximo, por  $J$  ser fechado. Vamos provar que se tem  $c = b$ , supondo, por absurdo, que se tinha  $c < b$ . Tinha-se portanto

<sup>253</sup>No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  lembramos que, como referido em 3.1.2, é indiferente considerar  $E$  como espaço vetorial real e  $[a, b]$  como parte de  $\mathbb{R}$  ou  $E$  como espaço vetorial complexo e  $[a, b]$  como parte de  $\mathbb{C}$ . Análoga observação se pode fazer no contexto dos resultados a seguir.

$$\|f(c) - f(a')\| \leq (M + r)(c - a')$$

e o facto de se ter

$$\lim_{t \rightarrow c} \left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| = \|f'(c)\| \leq M < M + r$$

implicava a existência de  $t$ , tal que  $c < t < b$  e que

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| < M + r,$$

donde

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(a')\| &\leq \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a')\| \leq \\ &\leq (M + r)(t - c) + (M + r)(c - a') = (M + r)(t - a'), \end{aligned}$$

ou seja,  $t \in J$ , o que era absurdo por termos suposto que  $c$  era o supremo de  $J$ . Concluimos assim que se tem

$$\|f(b) - f(a')\| \leq (M + r)(b - a').$$

Podemos agora substituir  $a'$  pelos termos de uma sucessão de elementos  $a_n \in ]a, b[$ , a convergir para  $a$ , e  $r$  pelos termos de uma sucessão de números reais  $r_n > 0$ , a convergir para 0, e passar ao limite a desigualdade

$$\|f(b) - f(a_n)\| \leq (M + r_n)(b - a_n)$$

para obter  $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$ . □

**3.3.2 (Corolário)** Sejam  $a < b$  dois números reais,  $E$  um espaço vetorial normado e  $f: [a, b] \rightarrow E$  uma aplicação contínua que seja derivável em todos os pontos  $t \in ]a, b[$  e com  $f'(t) = 0$ . Tem-se então que  $f$  é uma aplicação constante.

**Dem:** Tomando  $M = 0$  no resultado anterior, deduzimos que  $f(a) = f(b)$ . Quaisquer que sejam  $s, t \in [a, b]$ , com  $s < t$ , a restrição de  $f$  a  $[s, t]$  está ainda nas mesmas condições que  $f$ , pelo que  $f(s) = f(t)$ . □

**3.3.3 (Primeiro teorema da média — versão mais geral<sup>254</sup>)** Sejam  $a < b$  dois números reais,  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $w \in E$ ,  $\delta \geq 0$  e  $f: [a, b] \rightarrow E$  uma aplicação contínua que seja derivável em cada  $t \in ]a, b[$  e com

$$\|f'(t) - w\| \leq \delta.$$

<sup>254</sup>Repare-se que a versão do primeiro teorema da média em 3.3.1 não é mais do que o caso particular deste resultado em que  $w = 0$ . A razão porque utilizamos  $\delta$  onde então se usava  $M$  reside nas aplicações típicas de cada um destes resultado: Neste  $\delta$  é tipicamente um real estritamente positivo “tão pequeno quanto se queira” e naquele  $M$  é uma constante conveniente.

Tem-se então

$$\|f(b) - g(a) - (b - a)w\| \leq \delta(b - a).$$

**Dem:** Podemos considerar uma nova aplicação  $g: [a, b] \rightarrow E$  definida por

$$g(t) = f(t) - tw,$$

a qual é contínua diferenciável em cada  $t \in ]a, b[$  e com

$$\|g'(t)\| = \|f'(t) - w\| \leq \delta.$$

Aplicando o primeiro teorema da média em 3.1.1 à aplicação  $g$ , deduzimos então que

$$\|f(b) - g(a) - (b - a)w\| = \|g(b) - g(a)\| \leq \delta(b - a). \quad \square$$

**3.3.4 (Segundo teorema da média)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação. Sejam  $C \subset A$  um conjunto estrelado relativamente a um certo  $x_0 \in C$ ,  $\xi \in \mathcal{L}(E; F)$  e  $\delta \geq 0$  tais que  $f|_C$  seja contínua e que, para cada  $x \in C \setminus \{x_0\}$ ,  $f$  seja diferenciável em  $x$  e com  $\|Df_x - \xi\| \leq \delta$ . Qualquer que seja  $x \in C$ , tem-se então

$$\|f(x) - f(x_0) - \xi(x - x_0)\| \leq \delta\|x - x_0\|.$$

Em particular, se  $M \geq 0$  é tal que  $\|Df_x\| \leq M$  para cada  $x \in C \setminus \{x_0\}$  então, qualquer que seja  $x \in C$ ,

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq M\|x - x_0\|.$$

**Dem:** Podemos afastar já o caso trivial em que  $x = x_0$ . Seja  $\varphi: [0, 1] \rightarrow C$  a aplicação derivável definida por

$$\varphi(t) = (1 - t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0),$$

aplicação que é soma de uma constante com a restrição de uma aplicação linear contínua  $\mathbb{R} \rightarrow E$ , pelo que é uma aplicação contínua, diferenciável em todos os pontos  $t \in ]0, 1[$  e com  $\varphi'(t) = D\varphi_t(1) = x - x_0$ . Concluimos daqui que  $f \circ \varphi: [0, 1] \rightarrow F$  é contínua, diferenciável em todos os pontos  $t \in ]0, 1[$  e com

$$\begin{aligned} \|(f \circ \varphi)'(t) - \xi(x - x_0)\| &= \|Df_{(1-t)x_0+tx}(x - x_0) - \xi(x - x_0)\| \leq \\ &\leq \|Df_{(1-t)x_0+tx} - \xi\|\|x - x_0\| \leq \delta\|x - x_0\|, \end{aligned}$$

pelo que, por 3.3.3,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0) - \xi(x - x_0)\| &= \|f \circ \varphi(1) - f \circ \varphi(0) - \xi(x - x_0)\| \leq \\ &\leq \delta\|x - x_0\|(1 - 0) = \delta\|x - x_0\|. \end{aligned}$$



A segunda afirmação é o caso particular da primeira em que tomamos  $\xi = 0$  e, por conveniência para as aplicações, usamos  $M$  no lugar de  $\delta$ .  $\square$

**3.3.5 (Corolário)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade,  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação e  $C \subset A$  um conjunto estrelado relativamente a um certo  $x_0 \in C$  tal que  $f|_C$  seja contínua e que, para cada  $x \in C \setminus \{x_0\}$ ,  $f$  seja diferenciável em  $x$  e com  $Df_x = 0$ . Tem-se então que a restrição de  $f$  a  $C$  é constante.

**Dem:** Basta tomar  $M = 0$  no resultado precedente para deduzir que  $f(x) = f(x_0)$  para cada  $x \in C$ .  $\square$

Os teoremas da média que examinámos atrás vão ser um instrumento básico para estabelecer algumas propriedades mais profundas da diferenciabilidade que vamos estudar nesta secção. Para possibilitar a aplicação destes teoremas seremos obrigados a fazer uma restrição sobre os domínios das aplicações que consideramos.

**3.3.6 (Domínios de diferenciabilidade localmente convexos)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  vamos dizer que um domínio de diferenciabilidade  $A \subset E$  é *localmente convexo* se para cada  $x_0 \in A$  existir uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  em  $A$  que seja um conjunto convexo.

Repare-se que quando o domínio de diferenciabilidade  $A$  é localmente convexo então para cada  $x_0 \in A$  podemos considerar  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para uma certa vizinhança convexa  $V$  de  $x_0$  em  $A$ , a bola aberta  $B_{\varepsilon_0}(x_0)$  verifique

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A \subset V$$

e então para cada  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  a interseção  $B_\varepsilon(x_0) \cap A$  é uma vizinhança convexa de  $x_0$  em  $A$  (por ser a interseção dos convexos  $B_\varepsilon(x_0)$  e  $V$ ), o que mostra que  $x_0$  tem mesmo um sistema fundamental de vizinhanças convexas em  $A$ .

**3.3.7 (Propriedade de uniformidade sobre os compactos)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo. Para cada compacto  $K \subset A$  existe então  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x) \cap A$  seja convexo para cada  $x \in K$  e  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

**Dem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $K = \emptyset$ . O que referimos em 3.3.6 garante-nos que para cada  $x \in K$  existe  $\varepsilon_x > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x) \cap A$  seja convexo sempre que  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_x$ . Tendo em conta a propriedade das coberturas em 1.6.36, podemos considerar pontos  $x_1, \dots, x_n$  em  $K$  tais que

$$K \subset B_{\frac{\varepsilon_1}{2}}(x_1) \cup \dots \cup B_{\frac{\varepsilon_n}{2}}(x_n).$$

Seja  $\varepsilon_0$  o menor dos  $n$  números  $\frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{2}$ . Sempre que  $x \in K$  e  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  vai existir  $1 \leq j \leq n$  tal que  $x \in B_{\frac{\varepsilon_j}{2}}(x_j)$  e então, por ser  $\varepsilon + \frac{\varepsilon_j}{2} \leq \varepsilon_j$ ,

$$B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_j}(x_j),$$

o que implica que

$$B_\varepsilon(x) \cap A = B_\varepsilon(x) \cap (B_{\varepsilon_j}(x_j) \cap A)$$

é convexo □

Os próximos resultados exibem exemplos de domínios de diferenciabilidade localmente convexos bem como modos de construir tais domínios de diferenciabilidade a partir de outros.

**3.3.8** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $A \subset E$  é um domínio de diferenciabilidade convexo, então  $A$  é um domínio de diferenciabilidade localmente convexo. Em particular, se  $J \subset \mathbb{R}$  é um intervalo não trivial então  $J$  é um domínio de diferenciabilidade localmente convexo, tanto como parte do espaço vetorial real  $\mathbb{R}$  como como parte do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}$ .

**Dem:** Para a afirmação geral basta atender a que para cada  $x_0 \in A$ , o conjunto  $A$  é uma vizinhança convexa de  $x_0$  em  $A$ . Quanto ao caso particular dos intervalos basta lembrar o referido na alínea a) de 3.2.1. □

**3.3.9 (Conjuntos totais)** Se  $E$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  vamos dizer que um conjunto  $A \subset E$  é *total* (ou *afinmente gerador*) se o subespaço vetorial gerado pelo conjunto  $A - A$  dos vetores da forma  $y - x$  com  $x, y \in A$  for  $E$ . Se  $A \subset E$  é um conjunto total então para cada  $x_0 \in E$  o subespaço vetorial gerado pelo conjunto  $A - x_0$  dos vetores da forma  $y - x_0$  com  $y \in A$  é  $E$ . Em particular, fazendo  $x_0 = 0$ , vemos que o subespaço vetorial gerado por  $A$  é  $E$ .<sup>255</sup>

**Dem:** Uma vez que se tem

$$y - x = (y - x_0) - (x - x_0)$$

sempre que  $x, y \in A$ , podemos concluir que qualquer subespaço vetorial que contenha  $A - x_0$  contém também  $A - A$  sendo assim igual a  $E$ . □

**3.3.10 (Exemplo)** Se  $E$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $A \subset E$  possuir um ponto de diferenciabilidade  $x_0 \in A$ , então  $A$  é um conjunto total. Em particular, se  $A \subset E$  tiver interior não vazio então  $A$  é um conjunto total.

**Dem: a)** Seja  $F \subset E$  um subespaço vetorial contendo  $A \setminus A$  e consideremos um ponto de diferenciabilidade  $x_0 \in A$ . Para cada  $w \in \mathfrak{t}_{x_0}(A)$  existe  $s \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tal que  $x_0 + sw \in A$  ( $0$  é aderente ao conjunto desses  $s$ ) e então

$$sw = (x_0 + sw) - x_0 \in A - A \subset F$$

e portanto também  $w = \frac{1}{s}(sw) \in F$ . Provámos assim que  $\mathfrak{t}_{x_0}(A) \subset F$  o que,

<sup>255</sup>Pelo contrário, um conjunto  $A \subset E$  pode ter  $E$  como subespaço vetorial gerado sem ser total (cf. o exercício 3.3.5 adiante).

por  $x_0$  ser um ponto de diferenciabilidade, implica que  $F = E$ . Ficou assim provado que o subespaço vetorial gerado por  $A - A$  é  $E$ , o que mostra que  $A$  é efetivamente um conjunto total.  $\square$

**3.3.11 (Lema geométrico)** Sejam  $E$  um espaço vetorial,  $A \subset E$  um conjunto convexo e  $x_0 \in A$ . Tem-se então:

**a)** Se  $w \in E$  é tal que  $x_0 + w \in A$  então tem-se também  $x_0 + tw \in A$  para cada  $t \in [0, 1]$ .

**b)** Se  $u, v \in E$  são tais que  $x_0 + u, x_0 + v \in A$  então quaisquer que sejam  $s, t \in [0, \frac{1}{2}]$  tem-se  $x_0 + su + tv \in A$ .

**Dem:** **a)** Temos uma consequência de que se pode escrever

$$x_0 + tw = (1 - t)x_0 + t(x_0 + w).$$

**b)** Podemos já afastar o caso trivial em que  $s = t = 0$ . Reparamos agora que, por ser  $s + t \in [0, 1]$ , a conclusão de **a)** implica que  $x_0 + (s + t)u \in A$  e  $x_0 + (s + t)v \in A$  e temos então uma consequência da igualdade

$$x_0 + su + tv = \frac{s}{s+t}(x_0 + (s+t)u) + \frac{t}{s+t}(x_0 + (s+t)v),$$

onde  $\frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t} = 1$ .  $\square$

**3.3.12 (Conjuntos convexos totais)** Se  $E$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $A \subset E$  é um conjunto convexo total então  $A$  é um domínio de diferenciabilidade localmente convexo. Em particular o próprio  $E$  e, para cada  $x_0 \in E$  e  $r > 0$ , a bola aberta  $B_r(x_0)$  e a bola fechada  $\overline{B}_r(x_0)$ , sendo conjuntos convexos totais (têm interior não vazio), são domínios de diferenciabilidade localmente convexos.

**Dem:** Se  $w \in A - x_0$ , portanto  $x_0 + w \in A$  então o lema 3.3.11 implica que para cada  $t \in [0, 1]$  vem  $x_0 + tw \in A$  pelo que  $0$  é aderente ao conjunto dos  $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tais que  $x_0 + tw \in A$  e portanto  $w \in \mathfrak{t}_{x_0}(A)$ . Resulta daqui que o subespaço vetorial gerado por cada  $\mathfrak{t}_{x_0}(A)$  é  $E$ , o que mostra que  $A$  é um domínio de diferenciabilidade. O facto de, no caso em que  $E$  é normado,  $A$  ser localmente convexo já foi referido em 3.3.8.  $\square$

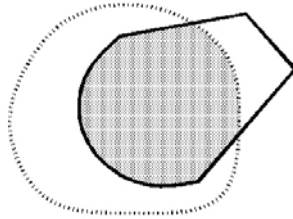
**3.3.13** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $U \subset A$  um conjunto aberto em  $A$ . Tem-se então que  $U$  é também um domínio de diferenciabilidade localmente convexo. Em particular, se  $U \subset E$  é um conjunto aberto ou, mais geralmente,  $U$  é aberto nalgum convexo total  $A \subset E$ , então  $U$  é um domínio de diferenciabilidade localmente convexo.<sup>256</sup>

**Dem:** Já vimos na alínea **c)** de 3.2.1 que  $U$  é um domínio de

<sup>256</sup>Foi com dificuldade que resistimos à tentação de propor a designação de *abexos* para os conjuntos que são abertos num convexo total. Note-se, a propósito, que este tipo de conjuntos não esgota os domínios de diferenciabilidade localmente convexos; como contraexemplo pensar em  $\mathbb{R} \setminus ]0, 1[ = ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[ \subset \mathbb{R}$ .

diferenciabilidade. Se  $x_0 \in A$  já referimos em 3.3.6 a existência de  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $A \cap B_\varepsilon(x_0)$  seja convexo para cada  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , sendo  $\varepsilon_1 > 0$  tal que  $B_{\varepsilon_1}(x_0) \subset U$  vemos que, tomando  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ , o conjunto  $A \cap B_\varepsilon(x_0)$  é uma vizinhança convexa de  $x_0$  em  $A$ , e portanto em  $U$ .  $\square$

**3.3.14 (Exemplo)** A figura a seguir sugere um exemplo de um domínio de diferenciabilidade localmente convexo em  $\mathbb{R}^2$  que foi construído a partir do resultado precedente.



**3.3.15 (Produtos cartesianos finitos)** Se  $I$  é um conjunto finito não vazio de índices e, para cada  $i \in I$ ,  $E_i$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $A_i \subset E_i$  é um domínio de diferenciabilidade localmente convexo então o produto cartesiano  $\prod_{i \in I} A_i \subset \prod_{i \in I} E_i$  é também um domínio de diferenciabilidade localmente convexo.

**Dem:** Tendo em conta a alínea d) de 3.2.1 sabemos  $\prod_{i \in I} A_i$  é um domínio de diferenciabilidade. Sendo agora  $(x_{i0})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ , podemos considerar para cada  $i \in I$  uma vizinhança convexa  $V_i$  de  $x_{i0}$  em  $A_{i0}$  e então  $\prod_{i \in I} V_i$  é uma vizinhança de  $(x_{i0})_{i \in I}$  em  $\prod_{i \in I} A_i$  que se verifica imediatamente ser um conjunto convexo.  $\square$

**3.3.16 (Invariância por isomorfismo topológico)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\lambda: E \rightarrow F$  um isomorfismo topológico. Se  $A \subset E$  é um domínio de diferenciabilidade localmente convexo então  $\lambda(A) \subset F$  é também um domínio de diferenciabilidade localmente convexo.

**Dem:** Já referimos na alínea e) de 3.2.1 que  $\lambda(A)$  é um domínio de diferenciabilidade. Basta agora notarmos que para cada  $y_0 = \lambda(x_0) \in \lambda(A)$ , sendo  $V$  uma vizinhança convexa de  $x_0$  em  $A$ , o facto de  $\lambda$  ser um homeomorfismo implica que  $\lambda(V)$  é uma vizinhança de  $y_0$  em  $\lambda(A)$ , sendo também um conjunto convexo.  $\square$

Como referimos vamos agora examinar algumas propriedades no contexto da diferenciabilidade que pressupõem que os domínios envolvidos são domínios de diferenciabilidade localmente convexos.

**3.3.17 (Aplicações de diferencial nulo)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e conexo e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação diferenciável e com  $Df_x = 0$  para cada  $x \in A$ . Tem-se então que  $f$  é constante.

**Dem:** Afastando já o caso trivial em que  $A = \emptyset$ , fixemos  $x_0 \in A$  e consideremos o conjunto

$$B = \{x \in A \mid f(x) = f(x_0)\},$$

conjunto que é fechado, por  $f$  ser contínua e é não vazio por conter  $x_0$ . Se mostrarmos que  $B$  também é aberto em  $A$  o facto de  $A$  ser conexo implicará que  $B = A$ , ou seja  $f(x) = f(x_0)$  para cada  $x \in A$ , o que implica que  $f$  é constante. Consideremos então  $x_1 \in B$  arbitrário. Sendo  $V$  uma vizinhança convexa de  $x_1$  em  $A$ , resulta de 3.3.5 que a restrição de  $f$  a  $V$  é constante e portanto para cada  $x \in V$

$$f(x) = f(x_1) = f(x_0).$$

Concluimos que  $V \subset B$ , o que mostra que  $B$  é efetivamente aberto em  $A$ .  $\square$

**3.3.18 (Limite de diferencial ainda é diferencial)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Sejam  $x_0 \in A$  e  $\xi \in \mathcal{L}(E; F)$  tais que a aplicação  $f$  seja diferenciável em todos os pontos de  $A$  distintos de  $x_0$  e que se tenha  $\lim_{x \rightarrow x_0} Df_x = \xi$ . Então  $f$  é também diferenciável em  $x_0$  e com  $Df_{x_0} = \xi$ .

**Dem:** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Consideremos  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_0) \cap A$  seja convexo e que para cada  $x$  nesta interseção se tenha  $\|Df_x - \xi\| \leq \delta$ . Tendo em conta o segundo teorema da média em 3.3.4 tem-se para cada  $x$  naquela interseção

$$\|f(x) - f(x_0) - \xi(x - x_0)\| \leq \delta \|x - x_0\|,$$

o que implica que  $f$  é efetivamente diferenciável em  $x_0$  e com diferencial igual a  $\xi$  (cf. 3.1.12).  $\square$

**3.3.19 (Simetria do diferencial de segunda ordem)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo,  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação diferenciável e tal que a aplicação  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  seja diferenciável num ponto  $x_0$ . Tem-se então

$$D(Df)_{x_0}(u)(v) = D(Df)_{x_0}(v)(u)$$

quaisquer que sejam  $u, v \in E$ . Em particular, no caso em que  $f$  é de classe  $C^2$  podemos dizer que se tem

$$D^2 f_{x_0}(u, v) = D^2 f_{x_0}(v, u)$$

quaisquer que sejam  $x_0 \in A$  e  $u, v \in E$ , por outras palavras que as apli-

cações bilineares  $D^2 f_{x_0}: E \times E \rightarrow F$  são simétricas.<sup>257</sup>

**Dem:**<sup>258</sup> Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

**a)** Seja  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A$  seja convexo, e portanto também  $B_\varepsilon(x_0) \cap A$  seja convexo para cada  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Até observação em contrário, vamos fixar  $u, v \in E$  tais que  $x_0 + u$  e  $x_0 + v$  pertençam a  $B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A$ , em particular  $\|u\| < \varepsilon_0$  e  $\|v\| < \varepsilon_0$ .

**b)** Vamos mostrar que, para os vetores  $u, v$  que considerámos em a), tem-se

$$D(Df)_{x_0}(u)(v) = D(Df)_{x_0}(v)(u).$$

**Subdem:** Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Seja  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  tal que para cada  $w \in E$  com  $x_0 + w \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$  se tenha

$$(1) \quad \|Df_{x_0+w} - Df_{x_0} - D(Df)_{x_0}(w)\| \leq \delta\|w\|.$$

Notemos  $a = \varepsilon/\varepsilon_0 \in ]0, 1]$ , e notemos que, pelo lema geométrico em 3.3.11  $x_0 + au$  e  $x_0 + av$  pertencem a  $B_\varepsilon(x_0) \cap A$  e, para  $s, t \in [0, \frac{1}{2}]$  também

$$x_0 + sau + tav \in B_\varepsilon(x_0) \cap A.$$

Reparemos agora que, como casos particulares de (1), temos, para cada  $s \in [0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\begin{aligned} \|Df_{x_0+sau+\frac{1}{2}av} - Df_{x_0} - D(Df)_{x_0}(sau + \frac{1}{2}av)\| &\leq \delta\|sau + \frac{1}{2}av\|, \\ \|Df_{x_0+sau} - Df_{x_0} - D(Df)_{x_0}(sau)\| &\leq \delta\|sau\| \end{aligned}$$

donde deduzimos que

$$\begin{aligned} (2) \quad &\|Df_{x_0+sau+\frac{1}{2}av} - Df_{x_0+sau} - D(Df)_{x_0}(\frac{1}{2}av)\| = \\ &= \left\| \left( Df_{x_0+sau+\frac{1}{2}av} - Df_{x_0} - D(Df)_{x_0}(sau + \frac{1}{2}av) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( Df_{x_0+sau} - Df_{x_0} - D(Df)_{x_0}(sau) \right) \right\| \leq \\ &\leq \delta\|sau + \frac{1}{2}av\| + \delta\|sau\| \leq \delta a(\|u\| + \|v\|). \end{aligned}$$

Reparando agora que para a aplicação diferenciável  $g: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow F$  definida por

$$g(s) = f(x_0 + sau + \frac{1}{2}av) - f(x_0 + sau)$$

se tem

<sup>257</sup>Neste caso particular a exigência de  $f$  ser de classe  $C^2$  resulta apenas de que, por comodidade, apenas definimos o diferencial de segunda ordem como aplicação bilinear contínua no caso das aplicações de classe  $C^2$  (a comodidade acaba sempre por ter o seu preço...).

<sup>258</sup>Esta demonstração é uma adaptação simples da que se encontra em Dieudonné [6].

$$g'(s) = Df_{x_0+sau+\frac{1}{2}av}(au) - Df_{x_0+sau}(au)$$

donde, por (2),

$$\|g'(s) - D(Df)_{x_0}(\frac{1}{2}av)(au)\| \leq \delta a^2(\|u\| + \|v\|)\|u\|,$$

deduzimos da versão do primeiro teorema da média em 3.3.3 que

$$\begin{aligned} & \left\| f(x_0 + \frac{1}{2}au + \frac{1}{2}av) - f(x_0 + \frac{1}{2}au) - f(x_0 + \frac{1}{2}av) + f(x_0) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}D(Df)_{x_0}(\frac{1}{2}av)(au) \right\| = \\ & = \left\| g(\frac{1}{2}) - g(0) - \frac{1}{2}D(Df)_{x_0}(\frac{1}{2}av)(au) \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{2}\delta a^2(\|u\| + \|v\|)\|u\|. \end{aligned}$$

Trocando os papéis de  $u$  e  $v$  deduzimos que se tem também

$$\begin{aligned} & \left\| f(x_0 + \frac{1}{2}au + \frac{1}{2}av) - f(x_0 + \frac{1}{2}au) - f(x_0 + \frac{1}{2}av) + f(x_0) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}D(Df)_{x_0}(\frac{1}{2}au)(av) \right\| \leq \frac{1}{2}\delta a^2(\|u\| + \|v\|)\|v\| \end{aligned}$$

e destas duas fórmulas decorre que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}a^2 \left\| D(Df)_{x_0}(u)(v) - D(Df)_{x_0}(v)(u) \right\| = \\ & = \left\| \left( f(x_0 + \frac{1}{2}au + \frac{1}{2}av) - f(x_0 + \frac{1}{2}au) - f(x_0 + \frac{1}{2}av) + f(x_0) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2}D(Df)_{x_0}(\frac{1}{2}av)(au) \right) - \left( f(x_0 + \frac{1}{2}au + \frac{1}{2}av) - f(x_0 + \frac{1}{2}au) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - f(x_0 + \frac{1}{2}av) + f(x_0) - \frac{1}{2}D(Df)_{x_0}(\frac{1}{2}au)(av) \right) \right\| \leq \\ & \leq \frac{1}{2}\delta a^2(\|u\| + \|v\|)\|u\| + \frac{1}{2}\delta a^2(\|u\| + \|v\|)\|v\| = \frac{1}{2}\delta a^2(\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

donde

$$\left\| D(Df)_{x_0}(u)(v) - D(Df)_{x_0}(v)(u) \right\| \leq 2\delta(\|u\| + \|v\|)^2,$$

o que implica, tendo em conta a arbitrariedade de  $\delta > 0$ , que

$$\left\| D(Df)_{x_0}(u)(v) - D(Df)_{x_0}(v)(u) \right\| = 0,$$

o que implica a igualdade pretendida.

c) Consideremos agora  $u \in E$  fixado tal que  $x_0 + u \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A$ . O que provámos em b) mostra que o conjunto dos vetores  $v \in E$  tais que

$$(3) \quad D(Df)_{x_0}(u)(v) = D(Df)_{x_0}(v)(u),$$

que é trivialmente um subespaço vetorial de  $E$ , contém o conjunto dos  $v \in E$  tais que  $x_0 + v \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A$ . Uma vez que o subespaço vetorial gerado por este último conjunto é  $E$  (cf. 3.3.9, 3.3.10 e a alínea c) de 3.2.1), concluímos que o subespaço vetorial referido é  $E$ . Por outras palavras, provámos que se  $u \in E$  é tal que  $x_0 + u \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A$  e se  $v \in E$  é arbitrário então verifica-se a igualdade (3).

d) Repetimos agora, de certo modo, o raciocínio em c). Fixamos  $v \in E$  arbitrário e notamos que o que mostrámos em c) implica que o conjunto dos  $u \in E$  tais que se verifica a igualdade (3), que é trivialmente um subespaço vetorial de  $E$ , contém o conjunto dos  $u \in E$  tais que  $x_0 + u \in B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A$ . Uma vez que o subespaço vetorial gerado por este último conjunto é  $E$ , concluímos que o subespaço vetorial referido é  $E$ . Ficou assim provado que a igualdade (3) é verificada quaisquer que sejam  $u, v \in E$ .  $\square$

Como primeira aplicação da simetria do diferencial de segunda ordem obtemos em seguida uma generalização envolvendo a simetria dos diferenciais de ordem  $k \geq 2$ . Começamos por lembrar que, do mesmo modo que uma aplicação bilinear  $\xi: E \times E \rightarrow F$  se diz simétrica quando se tem  $\xi(v, u) = \xi(u, v)$  quaisquer que sejam  $u, v \in E$ , isto é cujo valor não se altera quando se trocam as duas variáveis, diz-se, mais geralmente, para  $k \geq 2$ , que uma aplicação multilinear  $\xi: E^k \rightarrow F$  é *simétrica* se o seu valor não se altera quando se trocam duas variáveis quaisquer, por outras palavras, se, fixando arbitrariamente os valores de  $k - 2$  das variáveis, a aplicação bilinear  $E \times E \rightarrow F$  que se obtém é simétrica.

**3.3.20 (Simetria do diferencial de ordem  $k$ )** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo,  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) e  $x_0 \in A$ . Tem-se então que a derivada de ordem  $k$ ,  $D^k f_{x_0}: E^k \rightarrow F$  é uma aplicação multilinear simétrica.

**Dem:** Vamos fazer a demonstração por indução em  $k$ , começando por notar que o caso em que  $k = 2$  não é mais do que a conclusão de 3.3.19. Suponhamos então que a conclusão é válida para um certo  $k \geq 2$  e que  $f: A \rightarrow F$  é uma aplicação de classe  $C^{k+1}$ . Vamos dividir a prova da simetria do diferencial de ordem  $k + 1$ ,  $D^{k+1} f_{x_0}: E^{k+1} \rightarrow F$  em três partes.

1) Vamos começar por verificar que o diferencial  $D^{k+1} f_{x_0}$  é simétrico nas primeiras  $k$  variáveis, isto é que quando se fixa o valor da última variável a aplicação multilinear  $E^k \rightarrow F$  que se obtém é simétrica.

**Subdem:** Pela definição recursiva na alínea c) de 3.2.3, sabemos que a aplicação  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é de classe  $C^k$  e que se tem



$$D^{k+1}f_{x_0}(u_1, \dots, u_{k+1}) = D^k(Df)_{x_0}(u_1, \dots, u_k)(u_{k+1}).$$

A nossa asserção é então uma consequência de que, pela hipótese de indução, a aplicação multilinear  $D^k(Df)_{x_0}: E^k \rightarrow F$  é simétrica.

2) Vamos agora verificar que o diferencial  $D^{k+1}f_{x_0}$  é simétrico nas últimas  $k$  variáveis, isto é que quando se fixa o valor da primeira variável a aplicação multilinear  $E^k \rightarrow F$  que se obtém é simétrica.

**Dem:** Pela hipótese de indução, sabemos que para cada  $x \in A$  a derivada de ordem  $k$ ,  $D^k f_x: E^k \rightarrow F$ , é uma aplicação multilinear simétrica, isto é pertence ao subconjunto  $\mathcal{L}_{\text{sim}}^k(E; F)$  de  $\mathcal{L}^k(E; F)$  constituídos pelas aplicações multilineares simétricas, subconjunto que é um subespaço vetorial fechado por ser a interseção de  $\frac{k(k-1)}{2}$  subespaços vetoriais fechados, nomeadamente os que se obtêm considerando para cada  $i < j$  entre 1 e  $k$  o kernel da aplicação linear contínua de  $\mathcal{L}^k(E; F)$  para  $\mathcal{L}^k(E; F)$  que a  $\xi$  associa  $\widehat{\xi}$  definido por

$$\widehat{\xi}(u_1, \dots, u_k) = \xi(u_1, \dots, u_k) - \xi(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, \dots, u_k)$$

(verifica-se facilmente que  $\|\widehat{\xi}\| \leq 2\|\xi\|$  ou, alternativamente, que temos a diferença entre a identidade e uma isometria linear). Tendo em conta 3.2.22 a aplicação  $D^k f: A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$  é de classe  $C^1$  e

$$D^{k+1}f_{x_0}(u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) = D(D^k f)_{x_0}(u_1)(u_2, \dots, u_{k+1})$$

pelo que a simetria de  $D^{k+1}f_{x_0}$  nas últimas  $k$  variáveis resulta de que, por 3.2.9,  $D(D^k f)_{x_0}(u_1)$  pertence a  $\mathcal{L}_{\text{sim}}^k(E; F)$ .

3) Tendo em conta o que vimos nas duas alíneas precedentes, para mostrar que a aplicação multilinear  $D^{k+1}f_{x_0}$  é simétrica falta-nos apenas mostrar que o seu valor fica inalterado quando se troca a primeira com a última variável. Ora, isso resulta de que, aplicando sucessivamente o que verificámos em 2), em 1) e de novo em 2), pode-se escrever

$$\begin{aligned} D^{k+1}f_{x_0}(u_{k+1}, u_2, \dots, u_k, u_1) &= D^{k+1}f_{x_0}(u_{k+1}, u_1, u_2, \dots, u_k) = \\ &= D^{k+1}f_{x_0}(u_1, u_{k+1}, u_2, \dots, u_k) = D^{k+1}f_{x_0}(u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}). \quad \square \end{aligned}$$

Como segunda aplicação da simetria do diferencial de ordem 2, temos o seguinte resultado que exhibe uma condição suficiente, porventura mais fraca do que se estaria à espera para que uma aplicação de classe  $C^k$  no sentido real seja mesmo de classe  $C^k$  no sentido complexo. Esse resultado pode ser comparado com a implicação de certo modo recíproca que examinámos em 3.2.10.

**3.3.21 (Condição para a classe  $C^k$  no sentido complexo)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normado complexos,  $A \subset E$  um domínio de

diferenciabilidade localmente convexo de  $E$  enquanto espaço vetorial normado real (e portanto também enquanto espaço vetorial normado complexo) e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$  no sentido real tal que para cada  $x \in A$  a aplicação linear real  $Df_x: E \rightarrow F$  seja uma aplicação linear complexa. Tem-se então que  $f$  é mesmo uma aplicação de classe  $C^k$  no sentido complexo, para cada  $x \in A$  a derivada de ordem  $k$ ,  $D^k f_x$  sendo então, por 3.2.10, a mesma nos dois sentidos.

**Dem:** O caso em que  $k = 0$  não tem nada a demonstrar, uma vez que a classe  $C^0$  corresponde simplesmente à continuidade e o caso em que  $k = 1$  decorre de 3.1.18. Suponhamos, por indução, que o resultado é válido para um certo  $k \geq 1$  e que  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+1}$  no sentido real e com cada  $Df_x: E \rightarrow F$  aplicação linear complexa. Sabemos então que  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  é uma aplicação de classe  $C^k$  no sentido real que toma valores no subespaço vetorial fechado  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$  (cf. a alínea a) de 2.1.35) pelo que é também de classe  $C^k$  no sentido real como aplicação  $A \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$  (cf. 3.2.9). Tendo em conta a hipótese de indução, a aplicação  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  será também de classe  $C^k$  no sentido complexo (e portanto  $f$  será de classe  $C^{k+1}$  nesse sentido) se verificarmos que cada aplicação linear real  $D(Df)_x: E \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é mesmo uma aplicação linear complexa. Ora, isso resulta da simetria da derivada de segunda ordem  $D^2 f_x: E \times E \rightarrow F$  visto que, para  $u, v \in E$  e  $a \in \mathbb{C}$ , vem

$$\begin{aligned} D(Df)_x(au)(v) &= D^2 f_x(au, v) = D^2 f_x(v, au) = D(Df)_x(v)(au) = \\ &= aD(Df)_x(v)(u) = aD^2 f_x(v, u) = \\ &= aD^2 f_x(u, v) = aD(Df)_x(u)(v) \end{aligned}$$

portanto também  $D(Df)_x(au) = aD(Df)_x(u)$ . □

Vamos agora examinar a diferenciabilidade de aplicações definidas num produto cartesiano, nomeadamente a sua relação com a diferenciabilidade em cada variável separadamente. Repare-se que só para o resultado menos trivial 3.3.25, que deduz a diferenciabilidade a partir da diferenciabilidade parcial, é que teremos necessidade de assumir que os domínios de diferenciabilidade envolvidos são localmente convexos.

**3.3.22 (Diferenciais parciais)** Sejam  $E$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $B$  um conjunto. Diz-se que uma aplicação  $f: A \times B \rightarrow G$  é *parcialmente diferenciável* num ponto  $(x_0, y_0) \in A \times B$  relativamente à primeira variável se for diferenciável em  $x_0$  a aplicação  $A \rightarrow G$  definida por  $x \mapsto f(x, y_0)$  e então ao diferencial desta aplicação no ponto  $x_0$  dá-se o nome de *diferencial parcial* de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  relativamente à primeira variável, sendo notado  $D_1 f_{(x_0, y_0)}$ , um elemento de  $\mathcal{L}(E; G)$ . A definição anterior estende-se naturalmente a diferenciais de ordem superior: Se a aplicação  $A \rightarrow G$  definida por  $x \mapsto f(x, y_0)$  for de classe  $C^k$  usaremos a notação  $D_1^k f_{(x_0, y_0)}$  para designar o

diferencial de ordem  $k$  no ponto  $x_0$  desta aplicação, um elemento de  $\mathcal{L}^k(E; G)$ .

Analogamente, sendo  $F$  e  $G$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A$  um conjunto e  $B \subset F$  um domínio de diferenciabilidade, diz-se que uma aplicação  $f: A \times B \rightarrow G$  é *parcialmente diferenciável* num ponto  $(x_0, y_0) \in A \times B$  relativamente à segunda variável se for diferenciável em  $y_0$  a aplicação  $B \rightarrow G$  definida por  $y \mapsto f(x_0, y)$  e então ao diferencial desta aplicação no ponto  $y_0$  dá-se o nome de *diferencial parcial* de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  relativamente à segunda variável, sendo notado  $D_2 f_{(x_0, y_0)}$ , um elemento de  $\mathcal{L}(F; G)$ . Como antes, esta definição estende-se naturalmente a diferenciais de ordem superior: Se a aplicação  $B \rightarrow G$  definida por  $y \mapsto f(x_0, y)$  for de classe  $C^k$  usaremos a notação  $D_2^k f_{(x_0, y_0)}$  para designar o diferencial de ordem  $k$  no ponto  $y_0$  desta aplicação, um elemento de  $\mathcal{L}^k(F; G)$ .

Apesar de a definição precedente admitir uma maior generalidade, que nos será útil na próxima secção, nos resultados que vamos estabelecer em seguida, examinaremos aplicações  $f: A \times B \rightarrow G$  onde tanto  $A$  como  $B$  são domínios de diferenciabilidade em espaços vectoriais normados.

**3.3.23 (Da diferenciabilidade para a diferenciabilidade parcial)** Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  dois domínios de diferenciabilidade e  $f: A \times B \rightarrow G$  uma aplicação diferenciável num ponto  $(x_0, y_0)$ , onde consideramos implicitamente no produto cartesiano  $E \times F$  uma das normas que define a topologia produto, para fixar ideias a norma do máximo, definida por

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Tem-se então que  $f$  é parcialmente diferenciável em  $(x_0, y_0)$  relativamente a ambas as variáveis e têm lugar as seguintes relações entre o diferencial e os diferenciais parciais:

$$\begin{aligned} D_1 f_{(x_0, y_0)}(u) &= Df_{(x_0, y_0)}(u, 0), \\ D_2 f_{(x_0, y_0)}(v) &= Df_{(x_0, y_0)}(0, v), \\ Df_{(x_0, y_0)}(u, v) &= D_1 f_{(x_0, y_0)}(u) + D_2 f_{(x_0, y_0)}(v). \end{aligned}$$

No caso em que  $f$  é de classe  $C^k$ , onde  $k \geq 1$ , então para cada  $y_0 \in B$  é de classe  $C^k$  a aplicação  $A \rightarrow G$ ,  $x \mapsto f(x, y_0)$  e com

$$D_1^k f_{(x_0, y_0)}(u_1, \dots, u_k) = D^k f_{(x_0, y_0)}((u_1, 0), \dots, (u_k, 0))$$

e para cada  $x_0 \in A$  é de classe  $C^k$  a aplicação  $B \rightarrow G$ ,  $y \mapsto f(x_0, y)$  e com

$$D_2^k f_{(x_0, y_0)}(v_1, \dots, v_k) = D^k f_{(x_0, y_0)}((0, v_1), \dots, (0, v_k)).$$

**Dem:** O facto de  $f$  ser parcialmente diferenciável em relação a ambas as

variáveis e as caracterizações de  $D_1f_{(x_0,y_0)}(u)$  e  $D_2f_{(x_0,y_0)}(v)$  no enunciado são consequências do teorema de diferenciação da aplicação composta (cf. 3.1.21), tendo em conta o facto de ser afim e contínua, em particular diferenciável em  $x_0$ , a aplicação  $E \rightarrow E \times F$ ,

$$x \mapsto (x, y_0) = (x, 0) + (0, y_0),$$

com diferencial definido por  $u \mapsto (u, 0)$  e de ser afim e contínua, em particular diferenciável em  $y_0$ , a aplicação  $F \rightarrow E \times F$ ,

$$y \mapsto (x_0, y) = (0, y) + (x_0, 0),$$

com diferencial definido por  $v \mapsto (0, v)$ . A terceira fórmula destacada resulta das duas primeiras, tendo em conta a linearidade de  $Df_{(x_0,y_0)}$  e o facto de se ter  $(u, v) = (u, 0) + (0, v)$ . As afirmações para o caso em que  $f$  é de classe  $C^k$  resultam pelo mesmo argumento, tendo em conta 3.2.12.  $\square$

**3.3.24** Nas condições anteriores, se a aplicação  $f: A \times B \rightarrow G$  for de classe  $C^{k+1}$  (onde  $k \geq 0$ ) então as aplicações

$$D_1f: A \times B \rightarrow \mathcal{L}(E; G), \quad D_2f: A \times B \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$$

são de classe  $C^k$ .

**Dem:** Por definição a aplicação  $Df: A \times B \rightarrow \mathcal{L}(E \times F; G)$  é de classe  $C^k$  pelo que tudo o que temos que notar é que, sendo  $\iota_1: E \rightarrow E \times F$  e  $\iota_2: F \rightarrow E \times F$  as aplicações lineares contínuas definidas por  $\iota_1(u) = (u, 0)$  e  $\iota_2(v) = (0, v)$  e considerando as correspondentes aplicações lineares contínuas

$$\begin{aligned} \iota_1^* &= \mathcal{L}(\iota_1; Id): \mathcal{L}(E \times F; G) \rightarrow \mathcal{L}(E; G), \\ \iota_2^* &= \mathcal{L}(\iota_2; Id): \mathcal{L}(E \times F; G) \rightarrow \mathcal{L}(F; G), \end{aligned}$$

as fórmulas obtidas no resultado precedente garantem que se tem

$$D_1f_{(x,y)} = \iota_1^*(Df_{(x,y)}), \quad D_2f_{(x,y)} = \iota_2^*(Df_{(x,y)}). \quad \square$$

**3.3.25 (Da diferenciabilidade parcial para a diferenciabilidade)** Sejam  $E, F$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  dois domínios de diferenciabilidade localmente convexos e  $f: A \times B \rightarrow G$  uma aplicação admitindo em cada  $(x, y) \in A \times B$  diferenciais parciais  $D_1f_{(x,y)}$  e  $D_2f_{(x,y)}$  e tal que as aplicações

$$(1) \quad D_1f: A \times B \rightarrow \mathcal{L}(E; G), \quad D_2f: A \times B \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$$

sejam contínuas. Tem-se então que a aplicação  $f: A \times B \rightarrow G$  é de classe  $C^1$ . Mais geralmente, se suposermos que as aplicações em (1) são de classe  $C^k$  então a aplicação  $f$  é mesmo de classe  $C^{k+1}$ .<sup>259</sup>

<sup>259</sup>A mesma conclusão pode ser tirada com hipóteses ligeiramente mais fracas (ver o exercício 3.3.10 no fim da secção). Sacrificámos assim a generalidade à concisão.

**Dem:** Vamos provar a diferenciabilidade de  $f$  num ponto  $(x_0, y_0)$  arbitrário. Seja  $\lambda: E \times F \rightarrow G$  a aplicação linear contínua definida por

$$\lambda(u, v) = D_1 f_{(x_0, y_0)}(u) + D_2 f_{(x_0, y_0)}(v),$$

reparando desde já que, sendo  $\pi_1: E \times F \rightarrow E$  e  $\pi_2: E \times F \rightarrow F$  as projeções canónicas e considerando as correspondentes aplicações lineares contínuas

$$\begin{aligned}\pi_1^* &= \mathcal{L}(\pi_1; Id): \mathcal{L}(E; G) \rightarrow \mathcal{L}(E \times F; G), \\ \pi_2^* &= \mathcal{L}(\pi_2; Id): \mathcal{L}(F; G) \rightarrow \mathcal{L}(E \times F; G),\end{aligned}$$

tem-se

$$\lambda = \pi_1^*(D_1 f_{(x_0, y_0)}) + \pi_2^*(D_2 f_{(x_0, y_0)}).$$

Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Tendo em conta a diferenciabilidade em  $x_0$  da aplicação  $A \rightarrow G$ ,  $x \mapsto f(x, y_0)$ , podemos considerar  $\varepsilon_1 > 0$  tal que sempre que  $\|x - x_0\| < \varepsilon_1$  venha

$$\|f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - D_1 f_{(x_0, y_0)}(x - x_0)\| \leq \frac{\delta}{2} \|x - x_0\|$$

(cf. 3.1.12). Tendo em conta a continuidade de  $D_2 f: A \times B \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$  e o facto de o domínio de diferenciabilidade  $B$  ser localmente convexo, podemos escolher  $\varepsilon_2 > 0$  tal que  $B_{\varepsilon_2}(y_0) \cap B$  seja convexo e que sempre que  $(x, y) \in A \times B$  verifica  $\|x - x_0\| < \varepsilon_2$  e  $\|y - y_0\| < \varepsilon_2$  venha

$$\|D_2 f_{(x, y)} - D_2 f_{(x_0, y_0)}\| \leq \frac{\delta}{2}$$

e portanto, tendo em conta o segundo teorema da média em 3.3.4,

$$\|f(x, y) - f(x, y_0) - D_2 f_{(x_0, y_0)}(y - y_0)\| \leq \frac{\delta}{2} \|y - y_0\|.$$

Sendo  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$  vemos agora que, sempre que  $(x, y) \in A \times B$  verifica  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon$  tem-se

$$\begin{aligned}\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - \lambda(x - x_0, y - y_0)\| &= \\ &= \|f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - D_1 f_{(x_0, y_0)}(x - x_0) + D_2 f_{(x_0, y_0)}(y - y_0)\| \leq \\ &\leq \|f(x, y) - f(x, y_0) - D_2 f_{(x_0, y_0)}(y - y_0)\| + \\ &+ \|f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - D_1 f_{(x_0, y_0)}(x - x_0)\| \leq \\ &\leq \frac{\delta}{2} \|y - y_0\| + \frac{\delta}{2} \|x - x_0\| \leq \delta \|(x, y) - (x_0, y_0)\|\end{aligned}$$

o que, tendo em conta a observação em 3.1.12, implica que  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  e com  $Df_{(x_0, y_0)} = \lambda$ . Uma vez que o ponto  $(x_0, y_0)$  é arbitrário, o que verificámos mostra que  $f$  é diferenciável e, como observámos no início, com

$$Df_{(x,y)} = \pi_1^*(D_1f_{(x,y)}) + \pi_2^*(D_2f_{(x,y)})$$

para cada  $(x, y) \in A \times B$ . Tendo em conta a continuidade das aplicações  $D_1f$  e  $D_2f$  concluímos que  $Df: A \times B \rightarrow \mathcal{L}(E \times F; G)$  é contínua, isto é que  $f$  é de classe  $C^1$ . A mesma igualdade mostra que  $f$  é de classe  $C^{k+1}$  desde que  $D_1f$  e  $D_2f$  sejam de classe  $C^k$ .  $\square$

As considerações precedentes envolvendo os diferenciais parciais de aplicações de duas variáveis podem ser estendidos facilmente a outro número de variáveis. Para simplificar as notações vamos agora supor que todos os conjuntos envolvidos são domínios de diferenciabilidade em espaços vetoriais normados, e ao contrário do que fizemos noutras situações, examinamos os resultados apenas no contexto de famílias indexadas em  $\{1, 2, \dots, n\}$ , portanto no dos produtos de espaços vetoriais normados do tipo  $E_1 \times \dots \times E_n$ . Os resultados correspondentes para produtos do tipo  $\prod_{i \in I} E_i$ , com  $I$  conjunto de índices finito com  $n$  elementos podem ser obtidos facilmente a partir dos que vamos estabelecer.

**3.3.26 (Generalização de 3.3.22)** Sejam  $n \geq 2$ ,  $E_1, \dots, E_n, F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ ,  $A_i \subset E_i$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow F$  uma aplicação. Dizemos que  $f$  é *parcialmente diferenciável* num ponto  $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in A_1 \times \dots \times A_n$  relativamente a uma variável  $1 \leq i \leq n$  se for diferenciável em  $x_{0i}$  a aplicação  $A_i \rightarrow F$  definida por

$$x_i \mapsto f(x_{01}, \dots, x_{0i-1}, x_i, x_{0i+1}, \dots, x_{0n})$$

e então ao diferencial em  $x_{0i}$  desta aplicação dá-se o nome de diferencial parcial de  $f$  no ponto  $(x_{01}, \dots, x_{0n})$  relativamente à variável  $i$ , sendo notado  $D_i f_{(x_{01}, \dots, x_{0n})}$ , um elemento de  $\mathcal{L}(E_i; F)$ .

**3.3.27 (Generalização de 3.3.23)** Sejam  $n \geq 2$ ,  $E_1, \dots, E_n, F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ ,  $A_i \subset E_i$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow F$  uma aplicação diferenciável num ponto  $(x_{01}, \dots, x_{0n})$ , onde consideramos implicitamente no produto cartesiano  $E_1 \times \dots \times E_n$  uma das normas que define a topologia produto, para fixar ideias a norma do máximo, definida por

$$\|(u_1, \dots, u_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|u_i\|.$$

Tem-se então que  $f$  é parcialmente diferenciável em  $(x_{01}, \dots, x_{0n})$  relativamente a cada variável e têm lugar as seguintes relações entre o diferencial e os diferenciais parciais:

$$D_i f_{(x_0, \dots, x_0)}(u_i) = Df_{(x_0, \dots, x_0)}(0, \dots, u_i, \dots, 0),$$

$$Df_{(x_0, \dots, x_0)}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} D_i f_{(x_0, \dots, x_0)}(u_i)$$

(onde no segundo membro da primeira igualdade  $u_i$  ocupa, naturalmente, a posição  $i$ ).

**Dem:** A demonstração é uma adaptação evidente da que apresentámos para 3.3.23.  $\square$

**3.3.28 (Generalização de 3.3.24)** Nas condições anteriores, se a aplicação  $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow F$  for de classe  $C^{k+1}$  (onde  $k \geq 0$ ) então cada uma das aplicações

$$D_i f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathcal{L}(E_i; F)$$

é de classe  $C^k$ .

**Dem:** A demonstração é, mais uma vez, uma adaptação evidente da que apresentámos para 3.3.24.  $\square$

**3.3.29 (Generalização de 3.3.25)** Sejam  $n \geq 2$ ,  $E_1, \dots, E_n, F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ ,  $A_i \subset E_i$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow F$  uma aplicação parcialmente diferenciável em cada ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  relativamente a cada uma das variáveis e tal que cada uma das aplicações

$$(1) \quad D_i f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathcal{L}(E_i; F)$$

seja contínua. Tem-se então que a aplicação  $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow F$  é de classe  $C^1$ . Mais geralmente, se supusermos que as aplicações em (1) são de classe  $C^k$  então a aplicação  $f$  é mesmo de classe  $C^{k+1}$ .

**Dem:** Ao contrário dos resultados precedentes, preferimos não fazer uma adaptação da demonstração apresentada no caso do produto de dois factores, porque essa adaptação seria menos directa. Fazemos, em vez disso, uma demonstração por indução em  $n$ , começando por reparar que o caso em que  $n = 2$  não é mais do que o resultado 3.3.25. Suponhamos então que o resultado é válido para um certo  $n \geq 2$  e examinemos o que se passa com uma aplicação de  $n + 1$  variáveis  $f: A_1 \times \dots \times A_{n+1} \rightarrow F$  nas condições do enunciado.

Para cada  $x_{n+1} \in A_{n+1}$ , consideremos a aplicação

$$f_{(x_{n+1})}: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow F,$$

$$f_{(x_{n+1})}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

a qual, por hipótese, vai admitir em cada ponto  $(x_1, \dots, x_n)$  diferenciais parciais relativamente a cada uma das variáveis  $1 \leq i \leq n$  dadas por

$$D_i f_{(x_{n+1})}(x_1, \dots, x_n) = D_i f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

fórmula que, tendo em conta a hipótese (1) (com  $n + 1$  no lugar de  $n$ ) implica em particular a continuidade de cada

$$D_i f_{(x_{n+1})}: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathcal{L}(E_i; F).$$

Podemos agora aplicar a hipótese de indução para deduzir que cada  $f_{(x_{n+1})}$  é de classe  $C^1$  tendo-se, por 3.3.27, que o diferencial de  $f_{(x_{n+1})}$  está definido por

$$(2) \quad \begin{aligned} Df_{(x_{n+1})}(x_1, \dots, x_n)(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{1 \leq i \leq n} D_i f_{(x_{n+1})}(x_1, \dots, x_n)(u_i) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} D_i f_{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})}(u_i), \end{aligned}$$

fórmula que implica que é contínua a aplicação

$$\begin{aligned} (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1} &\rightarrow \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_n; F), \\ ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) &\mapsto Df_{(x_{n+1})}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

e que esta aplicação é mesmo de classe  $C^k$  quando se supõe que as aplicações em (1) são de classe  $C^k$  260. Dito de outro modo, notando

$$\widehat{f}: (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1} \rightarrow F$$

a composta de  $f$  com a bijeção natural

$$(3) \quad (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1} \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n \times A_{n+1},$$

provamos que é contínua (respetivamente de classe  $C^k$ ) a aplicação

$$D_1 \widehat{f}: (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_n; F).$$

Por outro lado, tendo em conta (1) (com  $n + 1$  no lugar de  $n$ ), vemos que  $\widehat{f}$  é parcialmente diferenciável relativamente à segunda variável em cada ponto e com

$$D_2 \widehat{f}_{((x_1, \dots, x_n), x_{n+1})} = D_{n+1} f_{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})},$$

pelo que a aplicação

---

<sup>260</sup>Reparar que, notando  $\pi_i: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow E_i$  as projeções canónicas, a fórmula em (2) traduz que

$$Df_{(x_{n+1})}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathcal{L}(\pi_i, Id)(D_i f_{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})})$$

e que tem lugar uma aplicação natural de classe  $C^\infty$ ,

$$(A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1} \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n \times A_{n+1},$$

restrição de uma isometria linear.



$$D_2\widehat{f}: (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(E_{n+1}; F)$$

é também contínua (respetivamente de classe  $C^k$ ). Podemos, enfim, aplicar 3.3.25 para garantir que  $\widehat{f}: (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1} \rightarrow F$  é de classe  $C^1$  (respetivamente de classe  $C^{k+1}$ ) e portanto o mesmo vai acontecer a  $f$ , que é a composta de  $\widehat{f}$  com a aplicação de classe  $C^\infty$  natural inversa da referida em (3) (restrição de uma isometria linear).  $\square$

**3.3.30 (Derivadas parciais)** Sejam  $n \geq 2$ ,  $E_1, \dots, E_n, F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ ,  $A_i \subset E_i$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A_1 \times \cdots \times A_n \rightarrow F$  uma aplicação. Se  $f$  for parcialmente diferenciável num ponto  $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in A_1 \times \cdots \times A_n$  relativamente a uma variável  $1 \leq i \leq n$  tal que  $E_i = \mathbb{K}$  define-se a *derivada parcial* de  $f$  relativamente à variável  $i$  como sendo o vetor

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, \dots, x_{0n}) = D_i f_{(x_{01}, \dots, x_{0n})}(1) \in F,$$

imagem de  $D_i f_{(x_{01}, \dots, x_{0n})}$  pela isometria linear natural  $\Upsilon: \mathcal{L}(\mathbb{K}; F) \rightarrow F$  (cf. 2.1.42). Relembremos que, como referido no resultado referido, tem-se então, para cada  $a_i \in \mathbb{K}$ ,

$$D_i f_{(x_{01}, \dots, x_{0n})}(a_i) = a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, \dots, x_{0n}),$$

igualdade que permite reescrever uma fórmula obtida em 3.3.27, no caso em que  $f$  é diferenciável no ponto  $(x_{01}, \dots, x_{0n})$  e todos os  $E_i$  são iguais a  $\mathbb{K}$ , com o aspeto mais familiar,

$$Df_{(x_{01}, \dots, x_{0n})}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{01}, \dots, x_{0n}).$$

**3.3.31 (Igualdade das derivadas parciais cruzadas)** Sejam  $F$  um espaço vectorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset \mathbb{K}$  e  $B \subset \mathbb{K}$  dois domínios de diferenciabilidade localmente convexos e  $f: A \times B \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^2$ . São então de classe  $C^1$  as aplicações  $\frac{\partial f}{\partial x}: A \times B \rightarrow F$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}: A \times B \rightarrow F$ <sup>261</sup> e, notando  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  as derivadas parciais da primeira relativamente à segunda variável e da segunda relativamente à primeira, tem-se, para cada  $(x, y) \in A \times B$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

<sup>261</sup> Sinónimos de  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  respetivamente que se utilizam habitualmente no caso de duas variáveis.

Note-se que vale também um resultado análogo para a igualdade das derivadas cruzadas de funções de mais variáveis mas abstenho-lo de o enunciar porque ele é essencialmente uma consequência direta do caso das duas variáveis.

**Dem:** Tendo em conta 3.3.23, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = D_1 f_{(x,y)}(1) = Df_{(x,y)}(1, 0),$$

em particular  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é de classe  $C^1$  por isso acontecer a  $D_1 f$ , e portanto, tendo em conta mais uma vez o mesmo resultado,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = D(Df)_{(x,y)}(0, 1)(1, 0) = D^2 f_{(x,y)}((0, 1), (1, 0)).$$

Analogamente, de se ter

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = D_2 f_{(x,y)}(1) = Df_{(x,y)}(0, 1),$$

o que implica em particular que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é de classe  $C^1$  por isso acontecer a  $D_2 f$ , deduzimos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = D(Df)_{(x,y)}(1, 0)(0, 1) = D^2 f_{(x,y)}((1, 0), (0, 1)).$$

A igualdade no enunciado é agora uma consequência de a aplicação bilinear

$$D^2 f_{(x,y)}: (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \times (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \rightarrow F$$

ser simétrica, tendo em conta 3.3.19. □

**3.3.32 (Diferenciabilidade e passagem ao limite)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e não vazio,  $Y$  um espaço topológico,  $B \subset Y$  e  $y_0 \in Y$  aderente a  $B$ . Seja  $\Phi: A \times B \rightarrow F$  uma aplicação tal que:

1) Para cada  $y \in B$  a aplicação  $f_{(y)}: A \rightarrow F$  definida por

$$f_{(y)}(x) = \Phi(x, y)$$

é de classe  $C^1$ .

2) Existe uma aplicação  $f: A \rightarrow F$  tal que para cada  $x \in A$  se tenha

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f_{(y)}(x) = f(x),$$

por outras palavras,  $f_{(y)} \rightarrow f$  quando  $y \rightarrow y_0$ , para a topologia da convergência simples de  $Ap(A, F)$  (cf. 1.2.82).

3) Existe uma aplicação  $\lambda = (\lambda_x)_{x \in A}: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  tal que

$$\lim_{y \rightarrow y_0} Df(y) = \lambda$$

para a topologia da convergência uniforme de  $Ap(A, \mathcal{L}(E; F))$  (cf. 1.2.76).

Tem-se então que a aplicação  $f: A \rightarrow F$  em 2) é de classe  $C^1$  e com  $Df_x = \lambda_x$  para cada  $x \in A$ .

**Dem:** Começemos por notar que o facto de cada  $Df(y): A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  ser uma aplicação contínua implica, por 3), tendo em conta 1.4.32 e 1.2.40 que a aplicação  $\lambda: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é contínua. Seja agora  $x_0 \in A$  fixado. Dado  $\delta > 0$  arbitrário, deduzimos, de 3), a existência de uma vizinhança  $V$  de  $y_0$  em  $Y$  tal que para cada  $y \in V \cap B$  e cada  $x \in A$  se tenha

$$\|Df(y)_x - \lambda_x\| \leq \frac{\delta}{2}$$

e, da continuidade de  $\lambda$  em  $x_0$  e do facto de o domínio de diferenciabilidade  $A$  ser localmente convexo, a existência de  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_0) \cap A$  seja convexo e que para cada  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$

$$\|\lambda_x - \lambda_{x_0}\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Deduzimos daqui que para cada  $y \in V \cap B$  e  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$

$$\|Df(y)_x - \lambda_{x_0}\| \leq \|Df(y)_x - \lambda_x\| + \|\lambda_x - \lambda_{x_0}\| \leq \delta$$

e portanto pelo segundo teorema da média em 3.3.4 para cada  $y \in V \cap B$  e  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$

$$\|f(y)(x) - f(y)(x_0) - \lambda_{x_0}(x - x_0)\| \leq \delta \|x - x_0\|$$

o que, tendo em conta 2) e a arbitrariedade de  $y \in V \cap B$ , implica, considerando o limite quando  $y \rightarrow y_0$ , que para cada  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$

$$\|f(x) - f(x_0) - \lambda_{x_0}(x - x_0)\| \leq \delta \|x - x_0\|.$$

Ficou assim provado que  $f$  é diferenciável em  $x_0$  e com  $Df_{x_0} = \lambda_{x_0}$ . O facto de  $f$  ser de classe  $C^1$  resulta agora da arbitrariedade de  $x_0$  e da continuidade da aplicação  $\lambda: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ .  $\square$

**3.3.33 (Corolário)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e não vazio e  $(f_j)_{j \in J}$  uma sucessão generalizada de aplicações  $f_j: A \rightarrow F$  de classe  $C^1$  tais que exista uma aplicação  $f: A \rightarrow F$  e uma aplicação  $\lambda: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  tais que  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  para cada  $x \in A$  e que a sucessão generalizada dos  $Df_j: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  convirja para  $\lambda$  para a topologia da convergência uniforme de  $Ap(A, \mathcal{L}(E; F))$ . Tem-se então que  $f$  é uma aplicação de classe  $C^1$  e com  $Df_x = \lambda_x$  para cada  $x \in A$ .

**Dem:** Trata-se do caso particular do resultado precedente em que definimos

$\Phi: A \times J \rightarrow F$  por  $\Phi(x, j) = f_j(x)$  e lembramos que o limite de uma sucessão generalizada indexada em  $J$  não é mais do que o limite quando  $j \rightarrow +\infty$  para uma topologia de  $\bar{J} = J \cup \{+\infty\}$  (cf. 1.2.61 e 1.2.62).  $\square$

**3.3.34 (Corolário)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $(f_i)_{i \in I}$  uma família de aplicações  $f_i: A \rightarrow F$  de classe  $C^1$ . Suponhamos que para cada  $x \in A$  a família dos vetores  $f_i(x) \in F$  é somável e que a família das aplicações  $Df_i: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é normalmente somável, isto é que existem constantes  $a_i \in [0, +\infty[$  tais que  $\sum_{i \in I} a_i < +\infty$  e que para cada  $x \in A$  se tenha  $\|Df_{i_x}\| \leq a_i$  (cf. 2.1.24). Sendo então  $f: A \rightarrow F$  a aplicação definida por

$$f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x),$$

tem-se que  $f$  é uma aplicação de classe  $C^1$  e para cada  $x \in A$

$$Df_x = \sum_{i \in I} Df_{i_x} \in \mathcal{L}(E; F).$$

**Dem:** Começamos por notar que o facto de, para cada  $x \in A$  a família dos  $Df_{i_x}$  ser somável resulta de termos uma família normalmente somável de aplicações  $Df_i$ . Sendo, para cada parte finita  $K$  de  $I$ ,  $f_K(x) = \sum_{i \in K} f_i(x)$ ,

tem-se que os  $f_K: A \rightarrow F$  são aplicações de classe  $C^1$ , que a sucessão generalizada dos  $f_K(x)$  converge para  $f(x)$ , para cada  $x \in A$ , e que  $Df_{K_x} = \sum_{i \in K} Df_{i_x}$ , vai convergir, para cada  $x \in U$ , para  $\sum_{i \in I} Df_{i_x}$ . Tendo em

conta o resultado anterior, tudo o que temos que ver é que temos mesmo uma convergência da sucessão generalizada de aplicações  $Df_K: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  para a aplicação que a  $x$  associa  $\sum_{i \in I} Df_{i_x}$  na topologia da convergência uniforme de  $\mathcal{A}p(A; \mathcal{L}(E; F))$ . Ora, dado  $\delta > 0$ , podemos escolher uma parte finita  $K_0$  de  $I$ , tal que, qualquer que seja a parte finita  $K$  de  $I$ , contendo  $K_0$ , tem-se

$$\sum_{i \notin K} a_i = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) - \left( \sum_{i \in K} a_i \right) < \delta,$$

donde

$$\left\| \left( \sum_{i \in I} Df_{i_x} \right) - Df_{K_x} \right\| = \left\| \sum_{i \notin K} Df_{i_x} \right\| \leq \sum_{i \notin K} \|Df_{i_x}\| < \delta,$$

o que mostra que temos realmente uma convergência para a topologia da convergência uniforme.  $\square$

Como exemplo de aplicação do resultado precedente podemos estabelecer um resultado que permite construir várias aplicações importantes de classe  $C^\infty$  e que o leitor decerto já encontrou no contexto das séries de números reais.

**3.3.35 (Diferenciabilidade da soma de uma série de potências)** Sejam  $F$  um espaço de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $(w_k)_{k \geq 0}$  uma família de vetores de  $F$  e  $0 < R < +\infty$  tal que, qualquer que seja  $0 < r < R$ ,

$$(1) \quad \sum_{k \geq 0} \|w_k\| r^k < +\infty$$

(podemos então dizer que  $R$  é um *raio de convergência* associado à família dos vetores  $w_k$ ). Qualquer que seja  $0 < r < R$  tem-se então também

$$(2) \quad \sum_{k \geq 1} k \|w_k\| r^{k-1} < +\infty$$

e, considerando a bola aberta  $B_R(0) \subset \mathbb{K}$ , fica definida uma aplicação  $f: B_R(0) \rightarrow F$  de classe  $C^\infty$  por

$$(3) \quad f(t) = \sum_{k \geq 0} t^k w_k = w_0 + t w_1 + t^2 w_2 + \dots$$

para a qual se tem

$$(4) \quad f'(t) = \sum_{k \geq 1} k t^{k-1} w_k$$

e, para cada  $p \geq 0$ ,

$$(5) \quad f^{(p)}(0) = p! w_p.$$

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes:

**a)** Vamos começar por mostrar que se se tem (1) para todo o  $0 < r < R$  então também se tem (2) para todo o  $0 < r < R$ .<sup>262</sup>

**Subdem:** Dado  $0 < r < R$ , fixemos  $r'$  com  $r < r' < R$ . O facto de se ter  $\frac{r'}{r} > 1$  e de  $\frac{k+1}{k}$  ter limite 1 quando  $k \rightarrow +\infty$ , permite-nos escolher  $k_0 \geq 1$  tal que se tenha  $\frac{k+1}{k} < \frac{r'}{r}$ , isto é  $k+1 \leq k \frac{r'}{r}$ , para cada  $k \geq k_0$ . Para cada  $k \geq k_0$  vem então, por indução em  $k$ ,

$$k \leq k_0 \left(\frac{r'}{r}\right)^{k-k_0}$$

donde

<sup>262</sup>Não afirmamos, de modo nenhum, que se (1) é válido para um certo  $r$  (2) tenha que ser válido para o mesmo  $r$ .

$$k \|w_k\| r^{k-1} \leq k_0 \left(\frac{r'}{r}\right)^{k-k_0} \|w_k\| r^{k-1} \leq k_0 \|w_k\| \left(\frac{r'}{r}\right)^{k-1} r^{k-1} = \frac{k_0}{r'} \|w_k\| r'^k$$

pelo que

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} k \|w_k\| r^{k-1} &= \sum_{k=1}^{k_0-1} k \|w_k\| r^{k-1} + \sum_{k \geq k_0} k \|w_k\| r^{k-1} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0-1} k \|w_k\| r^{k-1} + \frac{k_0}{r'} \sum_{k \geq k_0} \|w_k\| r'^k < +\infty. \end{aligned}$$

**b)** Vamos agora mostrar que se pode definir uma aplicação  $f: B_R(0) \rightarrow F$  de classe  $C^1$  pela igualdade (3) e que a derivada  $f': B_R(0) \rightarrow F$  é a definida pela igualdade (4).

**Subdem:** O facto de  $f$  estar bem definida resulta de que para cada  $t \in B_R(0)$  vem  $|t| < R$  e portanto, por hipótese,  $\sum_{k \geq 0} \|w_k\| |t|^k < +\infty$  ou seja, a soma

em (3) é a de uma família absolutamente somável de vetores de  $F$ , em particular de uma família somável. Para cada  $0 < r < R$  as aplicações  $f_k: B_r(0) \rightarrow F$  definidas por  $f_k(t) = t^k w_k$  são de classe  $C^1$  e com  $f'_k(t) = 0$  se  $k = 0$  e  $f'_k(t) = k t^{k-1} w_k$  se  $k \geq 1$ , neste último caso com

$$\|f'_k(t)\| = k |t|^{k-1} \|w_k\| \leq k \|w_k\| r^{k-1}.$$

Tendo em conta (2) e tendo presente a isometria linear  $\Upsilon: \mathcal{L}(\mathbb{K}; F) \rightarrow F$  que aplica  $Df_{k,t}$  em  $f'_k(t)$ , concluímos que a família dos diferenciais  $Df_k: B_r(0) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$  é normalmente somável e portanto, por 3.3.34 que a restrição de  $f$  a  $B_r(0)$  é de classe  $C^1$  e com  $f'(t)$  determinado por (4). Tendo em conta o facto de ser local a noção de aplicação de classe  $C^1$  (cf. 3.2.14), concluímos que  $f: B_R(0) \rightarrow F$  é de classe  $C^1$  e com  $f'$  determinada por (4).

**c)** As conclusões a que já chegámos mostram em particular que  $f^{(0)}(0) = w_0$  e que  $f'(0) = w_1$ . Para terminar, vamos mostrar, por indução em  $p$  que  $f: B_R(0) \rightarrow F$  é de classe  $C^p$  e que  $f^{(p)}(0) = p! w_p$ , conclusão a que já chegámos para os valores 0 e 1 de  $p$ . Suponhamos então, pela hipótese de indução, que o resultado é verdadeiro para um certo  $p \geq 1$ . Reparamos que a fórmula (4) pode ser reescrita

$$f'(t) = \sum_{k \geq 0} (k+1) t^k w_{k+1} = \sum_{k \geq 0} t^k z_k,$$

onde  $z_k = (k+1) w_{k+1}$ . Uma vez que para cada  $0 < r < R$

$$\sum_{k \geq 0} \|z_k\| r^k = \sum_{k \geq 0} (k+1) \|w_{k+1}\| r^k = \sum_{k \geq 1} k \|w_k\| r^{k-1} < +\infty,$$

podemos aplicar a hipótese de indução a  $f'$  para concluir que  $f'$  é de classe

$C^p$ , portanto que  $f$  é de classe  $C^{p+1}$  e que

$$f^{(p+1)}(0) = f^{(p)}(0) = p!z_p = (p+1)!w_{p+1}. \quad \square$$

## Exercícios

**Ex. 3.3.1** Mostrar que as versões do primeiro teorema da média em 3.3.1 e 3.3.3 e o corolário 3.3.2 continuam a ser válidos se se admitir um número finito de excepções para os pontos  $t \in ]a, b[$  em que  $f$  é diferenciável (mas continuando a admitir que  $f$  é contínua em todos os pontos). **Sugestão:** Fazer uma demonstração de 3.3.1 por indução no número de excepções, reparando que no caso em que há uma única excepção basta aplicar o resultado estabelecido separadamente a cada um de dois subintervalos.

**Ex. 3.3.2** Mostrar que o segundo teorema da média, referido em 3.3.4, continua a ser válido se admitirmos que entre os pontos do convexo  $C$  possa haver um número finito de excepções em que a aplicação  $f$  não seja diferenciável, embora se deva exigir que nesses pontos a aplicação  $f$  seja ainda contínua. A mesma observação se pode evidentemente fazer em relação ao corolário 3.3.5.

**Ex. 3.3.3 (Generalização do primeiro teorema da média — cf. [6])** Sejam  $a < b$  dois números reais,  $E$  um espaço vetorial normado,  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação contínua, derivável em cada  $t \in ]a, b[$  e com  $\varphi'(t) \geq 0$  e  $f: [a, b] \rightarrow E$  uma aplicação contínua, derivável em cada  $t \in ]a, b[$  e com  $\|f'(t)\| \leq \varphi'(t)$ . Adaptar a prova do primeiro teorema da média em 3.3.1 de modo a concluir que se tem

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Que aplicação  $\varphi$  poderia utilizar de modo a obter o resultado original em 3.3.1?

**Sugestão:** Fixados  $a' \in ]a, b[$  e  $r > 0$  arbitrários, considerar o máximo  $c$  dos  $t \in [a', b]$  tais que

$$\|f(t) - f(a')\| \leq \varphi(t) - \varphi(a') + r(t - a')$$

e supondo que se tinha  $c < b$  chegar a um absurdo reparando que se tinha

$$\lim_{\substack{t \rightarrow c \\ t \neq c}} \left\| \frac{f(t) - f(c)}{\varphi(t) - \varphi(c) + r(t - c)} \right\| = \left\| \frac{f'(c)}{\varphi'(c) + r} \right\| < 1.$$

**Ex. 3.3.4 (A regra de Cauchy para levantamento de indeterminações no contexto vetorial)** a) Sejam  $a < b$  dois números reais,  $E$  um espaço vetorial normado e  $g: [a, b] \rightarrow E$  e  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas aplicações contínuas, deriváveis em cada  $t \in [a, b]$  e com  $\psi'(t) > 0$ ,  $\psi(a) = 0$  e  $g(a) = 0$ . Supondo que se tem

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{g'(t)}{\psi'(t)} = w \in E,$$

mostrar que se tem também

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{g(t)}{\psi(t)} = w.$$

**Sugestão:** Dado  $\delta > 0$  arbitrário, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $a + \varepsilon \leq b$  e que para cada  $t \in [a, a + \varepsilon[$

$$\left\| \frac{g'(t)}{\psi'(t)} - w \right\| \leq \delta$$

e aplicar então a conclusão do exercício 3.3.3, com  $f(t) = g(t) - \varphi(t)w$  e  $\varphi(t) = \delta\psi(t)$ , para concluir que para cada  $t \in [a, a + \varepsilon[$

$$\left\| \frac{g(t)}{\psi(t)} - w \right\| \leq \delta.$$

**b)** Utilizar a conclusão de a) para obter conclusões análogas no caso em que se tem  $\psi'(t) < 0$ , em vez de  $\psi'(t) > 0$ , e naquele em que temos limites à esquerda em vez de limites à direita.

**Ex. 3.3.5 (Um conjunto gerador não total)** Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  sobre  $\mathbb{K}$ , com uma base  $w_1, \dots, w_n$ . Verificar que  $A = \{w_1, \dots, w_n\}$  tem  $E$  como subespaço vetorial gerado mas que este conjunto não é total. Mais precisamente, mostrar que o subespaço vetorial gerado por  $A - A$  é constituído pelos vetores de  $E$  cujas coordenadas na base referida têm soma igual a 0.

**Ex. 3.3.6** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $\xi: E^p \rightarrow F$  uma aplicação multilinear contínua que seja simétrica. Seja  $x_0 \in E$  fixado e seja  $f: E \rightarrow F$  a aplicação de classe  $C^\infty$  definida por

$$f(x) = \xi(x - x_0, x - x_0, \dots, x - x_0).$$

Mostrar, por indução, que, para cada  $0 \leq k \leq p$ , se tem

$$D^k f_x(u_1, \dots, u_k) = \frac{p!}{(p-k)!} \xi(u_1, \dots, u_k, x - x_0, \dots, x - x_0)$$

e deduzir, em particular, que, em  $x_0$ ,  $D^k f_{x_0} = 0$ , para cada  $k \neq p$ , e  $D^p f_{x_0} = p! \xi$ .

**Ex. 3.3.7** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^{k+1}$ , onde  $k \geq 0$ . Sejam  $C \subset A$  um conjunto convexo e  $M \geq 0$  tais que, para cada  $x \in C$ ,  $\|D^{k+1} f_x\| \leq M$ .

**a)** Sendo  $x_0 \in C$  tal que  $f$  tenha em  $x_0$  um zero de ordem maior ou igual a  $k + 1$  (cf. o exercício 3.2.12), mostrar que se tem, para cada  $x \in C$ ,  $\|f(x)\| \leq M \|x - x_0\|^{k+1}$ .

**b)** Deduzir de a) a seguinte versão da *fórmula de Taylor*: Escrevendo

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 f_{x_0}(x - x_0, x - x_0) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f_{x_0}(x - x_0, \dots, x - x_0) + r(x),$$

tem-se, para  $x_0, x \in C$ ,  $\|r(x)\| \leq M \|x - x_0\|^{k+1}$ .

**Ex. 3.3.8** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  uma aplicação sesquilinear hermitica contínua (cf. 2.5.3 e 2.5.4). Diz-se que  $\gamma$  é *topologicamente definida positiva* se existe  $\varepsilon > 0$  tal que, qualquer que seja  $x \in E$ ,  $\gamma(x, x) \geq \varepsilon \|x\|^2$



(em particular  $\gamma(x, x) > 0$  para cada  $x \in E \setminus \{0\}$ , por outras palavras,  $\gamma$  é definida positiva).

**a)** Mostrar que o subconjunto  $\mathcal{L}_{her}(E, \overline{E}; \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}(E, \overline{E}; \mathbb{K})$  constituído pelas aplicações sesquilineares hermiticas contínuas é um subespaço vetorial **real** e que o subconjunto  $\mathcal{L}_{her+}(E, \overline{E}; \mathbb{K})$  de  $\mathcal{L}_{her}(E, \overline{E}; \mathbb{K})$ , constituído por aquelas que são topologicamente definidas e positivas, é aberto.

**b)** Mostrar que, no caso em que  $E$  tem dimensão finita, uma aplicação sesquilinear hermitica é topologicamente definida e positiva se, e só se, for definida positiva (cf. 2.5.5). **Sugestão:** Afastado o caso trivial em que  $E = \{0\}$ , atender a que a superfície esférica de centro 0 e raio 1 de  $E$  é um conjunto compacto não vazio.

**Ex. 3.3.9** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado real,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^2$ . Seja  $x_0 \in A$  tal que  $Df_{x_0} = 0$  e que  $D^2f_{x_0}$  seja topologicamente definida positiva. Mostrar que  $f$  admite no ponto  $x_0$  um *mínimo local estrito*, isto é, que existe um aberto  $U'$  de  $A$ , com  $x_0 \in U'$ , tal que, para cada  $x \in U'$ , com  $x \neq x_0$ ,  $f(x) > f(x_0)$ .

**Sugestão:** Tomar  $U' = A \cap B_\varepsilon(0)$ , onde  $\varepsilon > 0$  é escolhido de forma que  $U'$  seja convexo e que para cada  $x \in U'$  a aplicação bilinear  $D^2f_x$  seja definida e positiva. Mostrar que para cada  $x \in U'$ , com  $x \neq x_0$ , a aplicação  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$  tem derivada nula em 0 e derivada de segunda ordem estritamente positiva em todos os pontos.

**Ex. 3.3.10 (Complementos sobre a diferenciação parcial)** **a)** Reexaminando a demonstração de 3.3.25, verificar que a conclusão continua a ser válida sem ser necessário exigir que o domínio de diferenciabilidade  $A \subset E$  seja localmente convexo (continuando, no entanto, a exigir que  $B$  seja um domínio de diferenciabilidade localmente convexo).

**b)** Verificar que a assimetria dos papéis das variáveis é apenas aparente, mostrando que o resultado é também válido sem exigir que o domínio de diferenciabilidade  $B$  seja localmente convexo mas exigindo que o domínio de diferenciabilidade  $A$  o seja.

**Sugestão:** Poderá adaptar convenientemente a demonstração apresentada ou considerar a composição de  $f$  com a aplicação natural  $B \times A \rightarrow A \times B$ .

**c)** Se se pretender apenas concluir em 3.3.25 a diferenciabilidade de  $f$  num ponto  $(x_0, y_0)$ , verificar que se pode apenas exigir que  $A$  seja domínio de diferenciabilidade e que exista o diferencial parcial  $D_1f_{(x_0, y_0)}$ , continuando no entanto a exigir a existência em todos os pontos do diferencial parcial relativamente à segunda variável e a continuidade de  $D_2f: A \times B \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$ .

**d)** Enunciar e justificar um resultado que desfaza a aparente assimetria dos papéis das variáveis em c).

**Ex. 3.3.11** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach e consideremos a aplicação exponencial  $\exp: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , definida no exercício 2.3.11.

**a)** Mostrar que a aplicação  $\exp$  é de classe  $C^1$ .

**b)** Mostrar que se,  $x, u \in X$  são tais que  $xu = ux$ , então

$$D\exp_x(u) = \exp(x)u = u\exp(x).$$

Deduzir, em particular, que  $D\exp_0(u) = u$ .

**c)** Dado  $x \in X$ , mostrar que existe uma, e uma só, aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ , verificando  $f(0) = 1$  e que seja diferenciável em todos os pontos e com  $f'(t) = f(t)x$ , a saber a definida por  $f(t) = \exp(tx)$ . Mostrar que essa aplicação  $f$  é mesmo de classe  $C^\infty$ .

**Sugestão:** Para provar a unicidade derivar a função  $g(t) = f(t)\exp(-tx)$ .

**Ex. 3.3.12 (As séries de polinómios homogéneos como generalização das séries de potências)** Dados os espaços vetoriais normados  $E$  e  $F$ , vamos dizer que uma aplicação  $f: E \rightarrow F$  é um *polinómio homogéneo de grau 0* se ela é uma aplicação constante e que ela é um *polinómio homogéneo de grau  $k \geq 1$*  se existe uma aplicação multilinear contínua  $\xi: E^k \rightarrow F$  tal que  $f(x) = \xi(x, \dots, x)$ .<sup>263</sup> No caso em que  $k = 0$ , definimos norma do polinómio de grau zero como sendo a norma do respectivo valor constante e no caso em que  $k \geq 1$ , dizemos que o polinómio homogéneo de grau  $k$  tem norma menor ou igual a  $M$  se for possível escolher uma aplicação multilinear contínua  $\xi$ , nas condições da definição, com  $\|\xi\| \leq M$ .<sup>264</sup>

**a)** Verificar que, no caso em que  $E = \mathbb{K}$ , os polinómios homogéneos de grau  $k$   $f: \mathbb{K} \rightarrow F$  são as funções do tipo  $f(t) = t^k y$ , com  $y \in F$  (tomamos, por convenção,  $0^0 = 1$ ). O que serão os polinómios homogéneos de grau  $k$   $f: \mathbb{K}^2 \rightarrow F$ ?

**b)** Verificar que, se  $f: E \rightarrow F$  é um polinómio homogéneo de grau  $k$ , então  $f$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$  positivamente homogénea de grau  $k$ , no sentido do exercício 3.2.1.

**c)** Verificar que, se  $f: E \rightarrow F$  é um polinómio homogéneo de grau  $k + 1$  e de norma menor ou igual a  $M$ , então a aplicação  $Df: E \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é um polinómio homogéneo de grau  $k$  e de norma menor ou igual a  $(k + 1)M$ .

**d)** Seja  $(M_k)_{k \geq 0}$  uma família de elementos de  $[0, +\infty[$  e seja  $0 < R \leq +\infty$  tal que, qualquer que seja  $0 < r < R$ ,  $\sum_{k \geq 0} M_k r^k < +\infty$ . Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais

normados e, para cada  $k \geq 0$ ,  $f_k: E \rightarrow F$  um polinómio homogéneo de grau  $k$  com norma menor ou igual a  $M_k$ . Sendo  $B_R(0)$  a bola aberta de  $E$  com centro 0 e raio  $R$  (por convenção igual a  $E$  no caso em que  $R = +\infty$ ), mostrar que tem lugar uma aplicação de classe  $C^\infty$   $f: B_R(0) \rightarrow F$  definida por  $f(x) = \sum_{k \geq 0} f_k(x)$ , vindo, para

cada  $n \geq 0$ ,

$$D^n f_x = \sum_{k \geq n} D^n f_{kx}.$$

**Sugestão:** Atender a que, pelo que se verificou em 3.3.35, para cada  $0 < r < R$  tem-se

$$\sum_{k \geq 1} k M_k r^{k-1} < +\infty.$$

**Ex. 3.3.13** Utilizar o exercício anterior para mostrar que, se  $\mathcal{E}$  é uma álgebra de Banach, a aplicação exponencial  $\exp: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ .

**Ex. 3.3.14** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $f: E \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^n$  que seja positivamente  $n$ -homogénea (cf. o exercício 3.2.1).

**a)** Mostrar que, para cada  $k < n$ ,  $D^k f_0 = 0$  e que a aplicação  $D^n f: E \rightarrow \mathcal{L}^n(E; F)$  é constante.

**b)** Utilizar a versão da fórmula de Taylor estudada no exercício 3.3.7 para deduzir

<sup>263</sup>Não afirmamos que a aplicação multilinear  $\xi$  seja única; pode-se provar que existe uma única que seja simétrica mas, para não nos alongarmos, vamos evitar, de momento, metermo-nos nessas questões, que serão examinadas adiante, no exercício 3.3.15

<sup>264</sup>Poder-se-ia definir norma do polinómio homogéneo mas, mais uma vez, não o fazemos para já, examinando essa questão adiante no exercício 3.3.15.

que  $f$  é um polinómio homogéneo de grau  $n$  e que uma das aplicações multilineares contínuas  $\xi: E^n \rightarrow F$  que definem  $f$  é a aplicação  $\frac{1}{n!}D^n f_0$ .

**Ex. 3.3.15** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $f: E \rightarrow F$  um polinómio homogéneo de grau  $n$  com norma menor ou igual a  $M$ . Mostrar que existe uma, e uma só, aplicação multilinear contínua *simétrica*  $\xi: E^n \rightarrow F$  tal que  $f(x) = \xi(x, \dots, x)$ , a saber  $\xi = \frac{1}{n!}D^n f_0$  e que se tem  $\|\xi\| \leq M$ . Não entramos assim em contradição se definirmos norma de um polinómio homogéneo de grau  $n$  como sendo a norma da única aplicação multilinear contínua simétrica que o define. **Sugestão:** Utilizar a alínea b) do exercício 3.3.14, a alínea c) do exercício 3.3.12 e o exercício 3.3.6.

**Ex. 3.3.16 (Os espaços de Banach  $C^1(A, F)$  — Comparar com o exercício 2.1.7)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo e  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e compacto. Seja  $C^1(A, F)$  o conjunto das aplicações  $f: A \rightarrow F$  de classe  $C^1$ .

a) Mostrar que  $C^1(A, F)$  é um subespaço vectorial do espaço  $\mathcal{C}(A, F)$  das aplicações contínuas  $f: A \rightarrow F$  (cf. 2.1.26) e que se pode definir uma norma  $\|\cdot\|_{C^1}$  neste espaço por

$$\|f\|_{C^1} = \max\{\|f\|_\infty, \|Df\|_\infty\},$$

onde  $Df \in \mathcal{C}(A, \mathcal{L}(E; F))$ .

b) Verificar que  $C^1(A, F)$ , com a norma  $\|\cdot\|_{C^1}$ , é um espaço de Banach. Verificar que tem lugar uma isometria de  $C^1(A, F)$  sobre um subespaço vectorial do espaço de Banach  $\mathcal{C}(A, F) \times \mathcal{C}(A, \mathcal{L}(E; F))$  que a  $f$  associa  $(f, Df)$  e utilizar 3.3.32 (ou o seu primeiro corolário) para mostrar que esse subespaço vectorial é fechado.

c) Generalizar o que foi feito nas alíneas precedentes para obter, para cada  $1 \leq k < +\infty$ , um estrutura de espaço de Banach no espaço  $C^k(A, F)$  das aplicações  $f: A \rightarrow F$  de classe  $C^k$ ?

## §4. Os teoremas da função implícita e da função inversa.

**3.4.1 (Existência e continuidade da função implícita)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $F$  e  $G$  dois espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $V \subset F$  um conjunto aberto e  $f: X \times V \rightarrow G$  uma aplicação contínua<sup>265</sup>, parcialmente diferenciável relativamente à segunda variável em cada  $(x, y) \in X \times V$  e tal que o diferencial parcial

$$D_2 f: X \times V \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$$

seja contínuo. Sejam  $(x_0, y_0) \in X \times V$  e  $z_0 \in G$  tais que  $f(x_0, y_0) = z_0$  e que o diferencial parcial  $D_2 f_{(x_0, y_0)} \in \mathcal{L}(F; G)$  seja um isomorfismo topo-

<sup>265</sup>De facto, como a demonstração que apresentamos mostra, bastaria pedir a continuidade de  $f$  na primeira variável, isto é, a continuidade, para cada  $y \in V$  da aplicação de  $X$  para  $G$  que a  $x$  associa  $f(x, y)$ . Como em outras ocasiões, preferimos aqui a concisão à generalidade.

lógico. Existem então abertos  $U'$  de  $X$ , com  $x_0 \in U'$ , e  $V'$  de  $F$ , com  $y_0 \in V' \subset V$  tais que:

**a)** Para cada  $x \in U'$  e  $y \in V'$  o diferencial parcial  $D_2 f_{(x,y)} \in \mathcal{L}(F; G)$  é um isomorfismo topológico.

**b)** Para cada  $x \in U'$  existe um, e um só,  $y \in V'$  tal que  $f(x, y) = z_0$ ;

**c)** A aplicação  $g: U' \rightarrow V'$  definida por  $f(x, g(x)) = z_0$  é contínua<sup>266</sup>.

**Dem:** Notemos

$$(1) \quad \xi = D_2 f_{(x_0, y_0)}^{-1}: G \rightarrow F$$

e  $h: X \times V \rightarrow F$  a aplicação contínua definida por

$$(2) \quad h(x, y) = y - \xi(f(x, y)) + \xi(z_0),$$

a qual é diferenciável relativamente à segunda variável e com

$$(3) \quad D_2 h_{(x,y)} = Id_F - \xi \circ D_2 f_{(x,y)},$$

fórmula que implica que  $D_2 h_{(x_0, y_0)} = 0$  e que  $D_2 h: X \times V \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$  é contínua. Tendo em conta a continuidade de  $D_2 h$  e da aplicação

$$X \times V \rightarrow F, \quad (x, y) \mapsto \xi \circ D_2 f_{(x,y)}$$

assim como o facto de o conjunto dos isomorfismos topológicos ser aberto na álgebra de Banach  $\mathcal{L}(F; F)$  (cf. 2.3.34), consideremos um aberto  $U$  de  $X$  com  $x_0 \in U$  e  $R > 0$  tal que para cada  $x \in U$  e  $y$  na bola fechada  $\overline{B}_R(y_0)$  se tenha  $\|D_2 h_{(x,y)}\| \leq \frac{1}{2}$  e portanto, pelo segundo teorema da média em 3.3.4, para cada  $x \in U$  e  $y, y' \in \overline{B}_R(y_0)$ ,

$$(4) \quad \|h(x, y) - h(x, y')\| \leq \frac{1}{2} \|y - y'\|$$

e, por outro lado  $\xi \circ D_2 f_{(x,y)}$  seja um isomorfismo topológico, condição que implica que

$$D_2 f_{(x,y)} = D_2 f_{(x_0, y_0)} \circ D_2 f_{x, y} \in \mathcal{L}(F; G)$$

é também um isomorfismo topológico. Tendo em conta a continuidade de  $f$ , consideremos um aberto  $U'$  de  $X$  com  $x_0 \in U' \subset U$  tal que para cada  $x \in U'$

$$(5) \quad \|\xi(f(x, y_0)) - \xi(f(x_0, y_0))\| < \frac{R}{2}.$$

Reparemos agora que, se  $x \in U'$  e  $y \in \overline{B}_R(y_0)$  deduzimos de (2), (4) e (5) que

<sup>266</sup>Costuma dizer-se que a aplicação  $g$  está definida implicitamente por esta igualdade.

$$\begin{aligned}
\|h(x, y) - y_0\| &= \|h(x, y) - h(x, y_0) + h(x, y_0) - y_0\| = \\
&= \|h(x, y) - h(x, y_0) + \xi(z_0) - \xi(f(x, y_0))\| \leq \\
&\leq \|h(x, y) - h(x, y_0)\| + \|\xi(f(x_0, y_0)) - \xi(f(x, y_0))\| < \\
&< \frac{1}{2}\|y - y_0\| + \frac{R}{2} \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R,
\end{aligned}$$

o que mostra que, para cada  $x \in U'$  a aplicação  $y \mapsto h(x, y)$ , que por (4) admite a constante de Lipschitz  $\frac{1}{2}$ , aplica  $\overline{B}_R(y_0)$  em  $B_R(y_0) \subset \overline{B}_R(y_0)$ . Uma vez que  $\overline{B}_R(y_0)$ , sendo fechado no espaço de Banach  $F$ , é um espaço métrico completo e não vazio, podemos agora aplicar o teorema do ponto fixo em 1.7.16 e o seu complemento paramétrico em 1.7.17 para garantir a existência, para cada  $x \in U'$ , de um único  $y \in \overline{B}_R(y_0)$  tal que

$$h(x, y) = y,$$

condição que implica que se tem mesmo  $y \in B_R(y_0)$ , assim como a continuidade da aplicação  $g: U' \rightarrow B_R(y_0)$  definida pela condição de se ter  $h(x, g(x)) = g(x)$ . Para terminar a demonstração basta agora tomar  $V' = B_R(y_0)$  reparar que, para cada  $x \in U'$  e  $y \in V'$  tem-se, pela definição de  $h$  em (2),

$$h(x, y) = y \Leftrightarrow \xi(f(x, y)) = \xi(z_0) \Leftrightarrow f(x, y) = z_0. \quad \square$$

**3.4.2 (Diferenciabilidade da função implícita)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $F$  e  $G$  espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  domínios de diferenciabilidade localmente convexos,  $f: A \times B \rightarrow G$  uma aplicação de classe  $C^k$  (onde  $1 \leq k \leq +\infty$ ),  $g: A \rightarrow B$  uma aplicação contínua e  $z_0 \in G$  tais que para cada  $x \in A$  se tenha  $f(x, g(x)) = z_0$  e  $D_2f_{(x, g(x))} \in \mathcal{L}(F; G)$  seja um isomorfismo topológico. Tem-se então que  $g$  é de classe  $C^k$  e para cada  $x \in A$

$$(1) \quad Dg_x = -D_2f_{(x, g(x))}^{-1} \circ D_1f_{(x, g(x))} \in \mathcal{L}(E; F). \quad 267$$

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes:

**1)** Começemos por notar que será suficiente mostrar que  $g$  é diferenciável num ponto  $x \in A$  arbitrário e com o diferencial  $Dg_x$  determinado por (1).

**Subdem:** A fórmula (1) implicará que a aplicação  $Dg: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é contínua, tendo em conta a continuidade da inversão referida em 2.3.35 e a da aplicação bilinear “composição”  $\mathcal{L}(G; F) \times \mathcal{L}(E; G) \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ . No caso em que  $f$  é de classe  $C^k$ , com  $1 \leq k < +\infty$ , deduziremos por indução

---

<sup>267</sup>Repare-se que ao contrário do resultado que assegura a existência e a continuidade da função implícita, para o qual foi necessário supor que o subconjunto de  $F$  que se considera é aberto, para assegurar que a função implícita é de classe  $C^k$ , suposta a sua existência e continuidade, podemos considerar subconjuntos de  $F$  que são apenas domínios de diferenciabilidade localmente convexos.

que para  $1 \leq p \leq k$  a aplicação  $g$  é de classe  $C^p$ , a passagem de  $p$  para  $p + 1$  resultando da fórmula (1), tendo em conta o facto de a inversão ser de classe  $C^\infty$  (cf. 3.2.21) tal como a aplicação bilinear contínua “composição” atrás referida. O caso  $k = \infty$  resultará simplesmente de que as aplicações de classe  $C^\infty$  são simplesmente as que são de classe  $C^k$  para todo o  $k$ .

2) Para atingir o objetivo apontado em 1) vamos fixar um ponto  $x_1 \in A$  arbitrário, com o objetivo de provar a diferenciabilidade de  $g$  no ponto  $x_1$  com o diferencial dado por

$$(2) \quad Dg_{x_1} = -D_2f_{(x_1, g(x_1))}^{-1} \circ D_1f_{(x_1, g(x_1))} \in \mathcal{L}(E; F).$$

Vamos provar nesta alínea a existência de  $r > 0$  e de  $M \geq 0$  tais que  $B_r(x_1) \cap A$  seja convexo e que

$$(3) \quad \|g(x) - g(x_1)\| \leq M\|x - x_1\|$$

para cada  $x \in B_r(x_1) \cap A$ .

**Subdem:** Notemos

$$(4) \quad \xi = D_2f_{(x_1, g(x_1))}^{-1} \in \mathcal{L}(G; F)$$

e fixemos  $\delta > 0$  tal que  $\delta\|\xi\| < 1$ . Tendo em conta a continuidade dos diferenciais parciais, consideremos  $r' > 0$  e  $r'' > 0$  tais que  $B_{r'}(x_1) \cap A$  e  $B_{r''}(g(x_1)) \cap B$  sejam convexos e que sempre que  $x \in B_{r'}(x_1) \cap A$  e  $y \in B_{r''}(g(x_1)) \cap B$  venha

$$(5) \quad \begin{aligned} \|D_1f_{(x, y)} - D_1f_{(x_1, g(x_1))}\| &\leq \delta, \\ \|D_2f_{(x, y)} - D_2f_{(x_1, g(x_1))}\| &\leq \delta, \end{aligned}$$

e reparemos que a primeira destas fórmulas implica que

$$(6) \quad \begin{aligned} \|D_1f_{(x, y)}\| &\leq \|D_1f_{(x, y)} - D_1f_{(x_1, g(x_1))}\| + \|D_1f_{(x_1, g(x_1))}\| \leq \\ &\leq \|D_1f_{(x_1, g(x_1))}\| + \delta. \end{aligned}$$

Pela continuidade de  $g$  no ponto  $x_1$ , consideremos  $r$  com  $0 < r \leq r'$  tal que se tenha  $\|g(x) - g(x_1)\| < r''$  sempre que  $x$  pertence ao convexo  $B_r(x_1) \cap A$ .

Tendo em conta o segundo teorema da média, com a segunda desigualdade em (5), e o primeiro teorema da média, com a desigualdade (6), vemos agora que para cada  $x \in B_r(x_1) \cap A$ ,

$$\begin{aligned} \|f(x_1, g(x)) - z_0 - D_2f_{(x_1, g(x_1))}(g(x) - g(x_1))\| &= \\ = \|f(x_1, g(x)) - f(x_1, g(x_1)) - D_2f_{(x_1, g(x_1))}(g(x) - g(x_1))\| &\leq \\ \leq \delta\|g(x) - g(x_1)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|z_0 - f(x_1, g(x))\| &= \|f(x, g(x)) - f(x_1, g(x))\| \leq \\ &\leq (\|D_1 f_{(x_1, g(x_1))}\| + \delta) \|x - x_1\| \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(x_1)\| &= \|\xi(D_2 f_{(x_1, g(x_1))}(g(x) - g(x_1)))\| \leq \\ &\leq \|\xi\| \|D_2 f_{(x_1, g(x_1))}(g(x) - g(x_1))\| \leq \\ &\leq \|\xi\| \|D_2 f_{(x_1, g(x_1))}(g(x) - g(x_1)) - f(x_1, g(x)) + z_0\| + \\ &\quad + \|\xi\| \|f(x_1, g(x)) - z_0\| \leq \\ &\leq \delta \|\xi\| \|g(x) - g(x_1)\| + \|\xi\| (\|D_1 f_{(x_1, g(x_1))}\| + \delta) \|x - x_1\|, \end{aligned}$$

o que implica que

$$(1 - \delta \|\xi\|) \|g(x) - g(x_1)\| \leq \|\xi\| (\|D_1 f_{(x_1, g(x_1))}\| + \delta) \|x - x_1\|,$$

de onde deduzimos a desigualdade (3) pretendida, com

$$M = \frac{\|\xi\| (\|D_1 f_{(x_1, g(x_1))}\| + \delta)}{1 - \delta \|\xi\|}.$$

**3)** Vamos, para terminar, mostrar que  $g$  é efetivamente diferenciável em  $x_1$  e com o diferencial definido por (2).

**Subdem:** Consideremos  $r > 0$  e  $M \geq 0$  nas condições de 2), o que implica que, se  $\|x - x_1\| < r$  então, considerando em  $E \times F$  a norma do máximo, vem

$$\|(x, g(x)) - (x_1, g(x_1))\| \leq (M + 1) \|x - x_1\|.$$

Como antes, notemos

$$\xi = D_2 f_{(x_1, g(x_1))}^{-1} \in \mathcal{L}(G; F)$$

e seja

$$\lambda = -D_2 f_{(x_1, g(x_1))}^{-1} \circ D_1 f_{(x_1, g(x_1))} = -\xi \circ D_1 f_{(x_1, g(x_1))}$$

o candidato a diferencial de  $g$  no ponto  $x_1$ . Seja  $\delta > 0$  arbitrário.

Escolhamos  $\delta' > 0$  tal que

$$\delta'(M + 1) \|\xi\| \leq \delta.$$

Fixemos  $r' > 0$  com  $r' \leq r$  e  $B_{r'}(g(x_1)) \cap B$  convexo tais que se tenha

$$\|Df_{(x, y)} - Df_{(x_1, g(x_1))}\| \leq \delta'$$

sempre que  $\|x - x_1\| < r'$  e  $\|g(x) - g(x_1)\| < r'$  e seja  $0 < \varepsilon \leq r'$  tal que  $M\varepsilon < r'$ . Suponhamos que  $\|x - x_1\| < \varepsilon$ , o que implica que  $\|x - x_1\| < r'$

e

$$\|g(x) - g(x_1)\| \leq M\|x - x_1\| \leq M\varepsilon < r',$$

e portanto que  $(x, g(x))$  pertence ao convexo

$$(B_{r'}(x_1) \cap A) \times (B_{r'}(g(x_1)) \cap B)$$

que contém  $(x_1, g(x_1))$ . Tendo em conta o segundo teorema da média e o facto de se ter  $f(x, g(x)) = z_0 = f(x_1, g(x_1))$ , tem-se então

$$\begin{aligned} & \|D_1 f_{(x_1, g(x_1))}(x - x_1) + D_2 f_{(x_1, g(x_1))}(g(x) - g(x_1))\| = \\ & = \|f(x, g(x)) - f(x_1, g(x_1)) - Df_{(x_1, g(x_1))}(x - x_1, g(x) - g(x_1))\| \leq \\ & \leq \delta' \|(x - x_1, g(x) - g(x_1))\| \leq \delta'(M + 1)\|x - x_1\| \end{aligned}$$

de onde deduzimos que

$$\begin{aligned} & \|g(x) - g(x_1) - \lambda(x - x_1)\| = \\ & = \|\xi(D_1 f_{(x_1, g(x_1))}(x - x_1) + D_2 f_{(x_1, g(x_1))}(g(x) - g(x_1)))\| \leq \\ & \leq \|\xi\| \|D_1 f_{(x_1, g(x_1))}(x - x_1) + D_2 f_{(x_1, g(x_1))}(g(x) - g(x_1))\| \leq \\ & \leq \|\xi\| \delta'(M + 1)\|x - x_1\| \leq \delta\|x - x_1\|. \end{aligned}$$

Ficou assim provado que  $g$  é diferenciável em  $x_1$  e com diferencial  $\lambda$  nesse ponto.  $\square$

**3.4.3 (Corolário — Teorema da função implícita)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $F$  e  $G$  espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo,  $V \subset F$  um aberto,  $f: A \times V \rightarrow G$  uma aplicação de classe  $C^k$  (onde  $1 \leq k \leq +\infty$ ). Sejam  $(x_0, y_0) \in A \times V$  e  $z_0 \in G$  tais que  $f(x_0, y_0) = z_0$  e que o diferencial parcial  $D_2 f_{(x_0, y_0)} \in \mathcal{L}(F; G)$  seja um isomorfismo topológico. Existem então abertos  $U'$  de  $A$ , com  $x_0 \in U'$ , e  $V'$  de  $F$ , com  $y_0 \in V' \subset V$  tais que:

**a)** Para cada  $x \in U'$  e  $y \in V'$  o diferencial parcial  $D_2 f_{(x, y)} \in \mathcal{L}(F; G)$  é um isomorfismo topológico.

**b)** Para cada  $x \in U'$  existe um, e um só,  $y \in V'$  tal que  $f(x, y) = z_0$ ;

**c)** A aplicação  $g: U' \rightarrow V'$  definida por  $f(x, g(x)) = z_0$  é de classe  $C^k$ .

**Dem:** Começamos por aplicar 3.4.1 para garantir a existência de  $U'$  e  $V'$  nas condições de a), b) e c), no caso de c) apenas com a conclusão de  $g$  ser contínua. Aplicamos então 3.4.2 para garantir que a aplicação  $g$  é mesmo de classe  $C^k$ .  $\square$

Vamos agora utilizar o que acabamos de estudar para obter resultados envolvendo a noção de difeomorfismo.

**3.4.4** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  dois domínios de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow B$  uma aplicação bijetiva. Diz-se que  $f$  é um *difeomorfismo de classe  $C^k$*  (onde  $1 \leq k \leq +\infty$ ) se tanto  $f: A \rightarrow B$  como  $f^{-1}: B \rightarrow A$  são aplicações de classe  $C^k$ . Chamamos



simplesmente *difeomorfismos* aos difeomorfismos de classe  $C^\infty$ .

Uma vez que toda a aplicação diferenciável é contínua, podemos garantir que qualquer difeomorfismo de classe  $C^k$  é um homeomorfismo.

**3.4.5** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  dois domínios de diferenciabilidade e  $f: A \rightarrow B$  um difeomorfismo de classe  $C^k$  (onde  $1 \leq k \leq +\infty$ ). Para cada  $x \in A$  a aplicação linear  $Df_x: E \rightarrow F$  é então um isomorfismo topológico, tendo como inverso  $D(f^{-1})_{f(x)}: F \rightarrow E$ .

**Dem:** Uma vez que  $f^{-1} \circ f = Id_A$  e que  $f \circ f^{-1} = Id_B$ , podemos aplicar o teorema de diferenciação da aplicação composta para deduzir que  $D(f^{-1})_{f(x)} \circ Df_x = Id_E$  e que  $Df_x \circ D(f^{-1})_{f(x)} = Id_F$ . A primeira destas igualdades implica que a aplicação linear contínua  $Df_x$  é injectiva e a segunda implica que ela é sobrejectiva e podemos então deduzir de qualquer delas que a aplicação inversa é  $D(f^{-1})_{f(x)}$ , em particular que esta é também uma aplicação linear contínua.  $\square$

**3.4.6 (Diferenciabilidade da aplicação inversa)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $A \subset E$  e  $B \subset F$  domínios de diferenciabilidade localmente convexos e  $f: A \rightarrow B$  um aplicação de classe  $C^k$  (onde  $1 \leq k \leq +\infty$ ) que seja um homeomorfismo e tal que o diferencial  $Df_x: E \rightarrow F$  seja um isomorfismo topológico para cada  $x \in A$ . Tem-se então que  $f^{-1}: B \rightarrow A$  é também de classe  $C^k$ , por outras palavras  $f$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

**Dem:** Seja  $\varphi: B \times A \rightarrow F$  a aplicação de classe  $C^k$  definida por

$$\varphi(y, x) = f(x) - y,$$

para a qual  $D_2\varphi_{(y,x)} = Df_x: E \rightarrow F$  é um isomorfismo topológico para cada  $(y, x) \in B \times A$ . Uma vez que  $f^{-1}: B \rightarrow A$  é uma aplicação contínua tal que

$$\varphi(y, f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) - y = 0$$

para cada  $y \in B$ , deduzimos de 3.4.2 que  $f^{-1}: B \rightarrow A$  é uma aplicação de classe  $C^k$ .  $\square$

**3.4.7 (Teorema da função inversa)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $U \subset E$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$ , onde  $1 \leq k \leq +\infty$ . Seja  $x_0 \in U$  tal que  $Df_{x_0}: E \rightarrow F$  seja um isomorfismo topológico. Existe então um aberto  $U'$  de  $E$ , com  $x_0 \in U' \subset U$  tal que  $V' = f(U')$  seja um aberto de  $F$  e que a restrição  $f|_{U'}: U' \rightarrow V'$  seja um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

**Dem:** Sejam  $y_0 = f(x_0)$  e  $\varphi: F \times U \rightarrow F$  a aplicação de classe  $C^k$  definida por

$$\varphi(y, x) = f(x) - y$$

para a qual  $\varphi(y_0, x_0) = 0$  e  $D_2\varphi_{(y_0, x_0)} = Df_{x_0}$  é um isomorfismo topológico de  $E$  para  $F$ . Aplicando o corolário 3.4.3 concluímos a existência de um aberto  $V'$  de  $F$ , com  $y_0 \in V'$ , e de um aberto  $U''$  de  $E$ , com  $x_0 \in U'' \subset U$

tal que para cada  $y \in V'$  exista um, e um só,  $x \in U''$  tal que  $\varphi(y, x) = 0$ , ou seja tal que  $y = f(x)$  e que seja de classe  $C^k$  a aplicação  $g: V' \rightarrow U''$  definida por  $\varphi(y, g(y)) = 0$ , ou seja por  $f(g(y)) = y$ . Sendo agora  $U'$  o conjunto dos  $x \in U''$  tais que  $f(x) \in V'$ ,  $U'$  vai ser um aberto de  $E$  com  $x_0 \in U' \subset U$  e a restrição de  $f$  a  $U'$  vai ser uma bijecção de  $U'$  sobre  $V'$ , que é de classe  $C^k$  assim como a sua inversa, uma vez que esta não é mais do que a aplicação  $g$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex. 3.4.1** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $F$  e  $G$  dois espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $V \subset F$  um conjunto aberto e  $f: X \times V \rightarrow G$  uma aplicação contínua, diferenciável relativamente à segunda variável em cada  $(x, y) \in X \times V$  e tal que o diferencial

$$D_2f: X \times V \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$$

seja contínuo. Seja  $z_0 \in G$  tal que, para cada  $x \in X$  exista um único  $y \in V$  tal que  $f(x, y) = z_0$ . Sendo, para cada  $x \in X$ ,  $g(x) \in V$  o definido por  $f(x, g(x)) = z_0$  e supondo que cada  $D_2f_{(x, g(x))} \in \mathcal{L}(F; G)$  é um isomorfismo topológico, mostrar que a aplicação  $g: X \rightarrow V$  é contínua. **Sugestão:** Utilizar a conclusão de 3.4.1 e ter em conta o facto de a continuidade ser uma noção local.

**Ex. 3.4.2** Nas condições do resultado 3.4.2 sobre a diferenciabilidade das funções implícitas, utilizar a identidade  $f(x, g(x)) = z_0$  para demonstrar directamente a fórmula para o diferencial de  $g$

$$Dg_x = -D_2f_{(x, g(x))}^{-1} \circ D_1f_{(x, g(x))},$$

desde que se suponha a respetiva diferenciabilidade.

**Ex. 3.4.3** Seja  $E$  um espaço de Banach real e seja  $\mathcal{L}_{sim}^2(E; \mathbb{R})$  o conjunto das aplicações bilineares simétricas  $\xi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $PI(E)$  o subconjunto de  $\mathcal{L}_{sim}^2(E; \mathbb{R})$  constituído pelos produtos internos cuja norma associada seja equivalente à norma de  $E$ .

**a)** Mostrar que  $\mathcal{L}_{sim}^2(E; \mathbb{R})$  é um subespaço vetorial fechado do espaço de Banach  $\mathcal{L}^2(E; \mathbb{K})$  das aplicações bilineares contínuas de  $E \times E$  em  $\mathbb{R}$ .

**b)** Mostrar que  $PI(E)$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{L}_{sim}^2(E; \mathbb{R})$ .

**c)** Seja  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado e seja, para cada  $\xi \in PI(E)$ ,  $\gamma(\xi) \in \mathcal{L}(E; F)$  a projecção ortogonal de  $E$  sobre  $F$ , relativamente ao produto interno  $\xi$ . Mostrar que a aplicação  $\gamma: PI(E) \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é de classe  $C^\infty$ .

**Sugestão:** Aplicar os resultados 3.4.1 e 3.4.2 sobre existência e diferenciabilidade das funções implícitas à aplicação

$$\Psi: PI(E) \times \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E, F; \mathbb{R}),$$

definida por  $\Psi(\xi, \alpha)(x, y) = \xi(x - \alpha(x), y)$ , por outras palavras por

$$\Psi(\xi, \alpha) = \xi \circ ((Id_E - \alpha) \times \iota),$$

onde notamos  $\iota: F \rightarrow E$  a inclusão; Se quisermos seguir um atalho, poderemos substituir 3.4.1 pela conclusão do exercício 3.4.1. Para provar que

$$D_2\Psi_{(\xi,\alpha)}: \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E, F; \mathbb{R})$$

é um isomorfismo bicontínuo, lembrar o teorema de Riesz em 2.5.29.

**Ex. 3.4.4** Sejam  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach sobre  $\mathbb{K}$ . Utilizar o teorema da função inversa para mostrar a existência de um aberto  $V$  de  $\mathcal{E}$  com  $1 \in V$  tal que cada  $y \in V$  admita pelo menos uma “raiz quadrada”, isto é um elemento  $x \in \mathcal{E}$  tal que  $x \times x = y$ .

**Ex. 3.4.5** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach sobre  $\mathbb{K}$  e consideremos a aplicação exponencial  $\exp: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , definida no exercício 2.3.11, que se verificou no exercício 3.3.11 ser de classe  $C^1$  e no exercício 3.3.13 ser mesmo de classe  $C^\infty$ . Utilizar o teorema da função inversa para mostrar a existência de um aberto  $V$  de  $\mathcal{E}$  com  $1 \in V$  e de uma aplicação  $\log: V \rightarrow \mathcal{E}$  de classe  $C^\infty$  tal que  $\exp(\log(y)) = y$  para cada  $y \in V$ .

**Ex. 3.4.6** Mostrar que a aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^3$ , é de classe  $C^\infty$  e é um homeomorfismo mas não é um difeomorfismo de classe  $C^1$ .

**Ex. 3.4.7** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $U \subset E$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$  (onde  $1 \leq k \leq +\infty$ ) tal que  $Df_x: E \rightarrow F$  seja um isomorfismo topológico para cada  $x \in U$ . Mostrar que  $f(U)$  é um aberto de  $F$  e que, no caso em que  $f$  é injetiva,  $f$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .

**Ex. 3.4.8** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $U \subset E$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$ , onde  $1 \leq k \leq +\infty$ . Seja  $K \subset U$  um conjunto compacto tal que, a restrição  $f|_K: K \rightarrow F$  seja injetiva e que, para cada  $x \in K$ ,  $Df_x: E \rightarrow F$  seja um isomorfismo topológico. Mostrar que existe um aberto  $U'$  de  $E$ , com  $K \subset U' \subset U$ , tal que  $f(U')$  seja aberto em  $F$  e que a restrição  $f|_{U'}: U' \rightarrow f(U')$  seja um difeomorfismo de classe  $C^k$ . **Sugestão:** Ter em conta o teorema da função inversa e os exercícios 1.6.24 e 3.4.7 assim como 2.3.35.

## §5. O integral das aplicações vetoriais contínuas de variável real.

**3.5.1** Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais com  $a \leq b$ . Chama-se *partição* do intervalo  $[a, b]$  a um subconjunto finito  $P$  de  $[a, b]$ , que contenha  $a$  e  $b$ . Um tal subconjunto pode sempre escrever-se, de uma única maneira, na forma  $P = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ , com  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ , tendo-se evidentemente  $N = 0$  se, e só se,  $a = b$ . Quando  $a < b$ , dá-se o nome de *diâmetro* da partição ao maior dos números  $a_j - a_{j-1}$ . Diz-se que uma partição  $P'$  é *mais fina* que uma partição  $P$  ( $P' \succeq P$ ) se se tem  $P' \supset P$ ; o conjunto das partições de  $[a, b]$ , com esta relação, fica a ser um conjunto dirigido, em particular um bom candidato a conjunto de índices de uma sucessão generalizada.

**3.5.2** Sejam  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $E$  um espaço de Banach<sup>268</sup> e  $f: [a, b] \rightarrow E$  uma aplicação contínua. Para cada partição  $P = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$  de  $[a, b]$ , com

<sup>268</sup>O corpo dos escalares pode ser  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  mas mesmo que seja  $\mathbb{C}$  é apenas a estrutura de espaço de Banach real que é utilizada na definição.

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b,$$

defina-se um elemento  $S_P(f) \in E$  por

$$S_P(f) = \sum_{1 \leq j \leq N} (a_j - a_{j-1})f(a_j).$$

Tem-se então que a família dos  $S_P(f)$  é uma sucessão generalizada de Cauchy de elementos de  $E$ , e portanto convergente para um elemento de  $E$ , a que se dá o nome de *integral* de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , e que se nota

$$\int_a^b f(t) dt.$$

**Dem:** Afastemos já o caso trivial em que  $a = b$ , caso em que existe um único  $S_P(f)$ , que é igual a 0. Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Uma vez que  $f$  é contínua e de domínio compacto,  $f$  vai ser uniformemente contínua (cf. 1.7.26), pelo que podemos considerar  $\varepsilon > 0$  tal que, sempre que  $|x - y| \leq \varepsilon$ , venha  $\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{\delta}{2(b-a)}$ . Suponhamos que  $P$  é uma partição de diâmetro menor ou igual a  $\varepsilon$  e que  $P'$  é uma partição mais fina que  $P$ . Sendo  $P = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ , com  $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ , sejam, para cada  $1 \leq i \leq N$ ,  $a_{i-1} = a_{i,0} < a_{i,1} < \cdots < a_{i,N_i} = a_i$  os elementos da partição  $P'$  que estão no intervalo  $[a_{i-1}, a_i]$ . Vemos então que se tem

$$\begin{aligned} \|S_{P'}(f) - S_P(f)\| &= \\ &= \left\| \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N_i} (a_{i,j} - a_{i,j-1})f(a_{i,j}) - \sum_{1 \leq i \leq N} (a_i - a_{i-1})f(a_i) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N_i} (a_{i,j} - a_{i,j-1})(f(a_{i,j}) - f(a_i)) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N_i} (a_{i,j} - a_{i,j-1}) \|f(a_{i,j}) - f(a_i)\| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N_i} (a_{i,j} - a_{i,j-1}) \frac{\delta}{2(b-a)} = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq N} (a_i - a_{i-1}) \frac{\delta}{2(b-a)} = \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Fixemos então uma partição  $P_0$  de diâmetro menor ou igual a  $\varepsilon$ ; por exemplo, consideremos  $N$  tal que  $\frac{(b-a)}{N} \leq \varepsilon$  e tomemos a partição definida pelos pontos  $a + i \frac{(b-a)}{N}$ , com  $0 \leq i \leq N$ . Quaisquer que sejam as partições  $P$  e  $P'$  mais finas que  $P_0$  vem, tendo em conta o que vimos atrás,

$$\begin{aligned} \|S_P(f) - S_{P'}(f)\| &\leq \|S_P(f) - S_{P_0}(f)\| + \|S_{P_0}(f) - S_{P'}(f)\| \leq \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que temos realmente uma sucessão generalizada de Cauchy.  $\square$

**3.5.3** Sejam  $E$  um espaço de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $f, g: [a, b] \rightarrow E$  duas aplicações contínuas e  $c \in \mathbb{K}$ . Tem-se então

$$\int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt,$$

$$\int_a^b cf(t) dt = c \int_a^b f(t) dt.$$

**Dem:** Se repararmos que, para cada partição  $P$ , tem-se

$$S_P(f + g) = S_P(f) + S_P(g), \quad S_P(cf) = cS_P(f),$$

temos uma consequência das propriedades dos limites em 2.1.20 e 2.1.24.  $\square$

**3.5.4** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $\xi: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua. Se  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$  e  $f: [a, b] \rightarrow E$  é uma aplicação contínua, tem-se então

$$\int_a^b \xi(f(t)) dt = \xi\left(\int_a^b f(t) dt\right).$$

**Dem:** Trata-se, mais uma vez, de uma propriedade geral dos limites, se repararmos que, para cada partição  $P$ , tem-se  $S_P(\xi \circ f) = \xi(S_P(f))$ .  $\square$

**3.5.5** Sejam  $I$  um conjunto finito não vazio de índices e  $E_i$  um espaço de Banach para cada  $i \in I$  e consideremos no produto cartesiano  $\prod E_i$  uma das normas que define a topologia produto, por exemplo a norma do máximo, que sabemos definir aquele produto cartesiano como espaço de Banach (cf. 2.2.9). Sejam  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$  e  $f_i: [a, b] \rightarrow E_i$  uma aplicação contínua para cada  $i \in I$  e consideremos a correspondente aplicação contínua  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = (f_i(t))_{t \in I}.$$

Tem-se então

$$\int_a^b f(t) dt = \left( \int_a^b f_i(t) dt \right)_{i \in I}.$$

**Dem:** Embora se pudesse apresentar uma demonstração directa, do tipo das duas anteriores, é talvez mais fácil aplicar 3.5.4 às projeções canónicas  $\pi_i: \prod E_i \rightarrow E_i$ , que são aplicações lineares contínuas.  $\square$

**3.5.6** Sejam  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $E$  um espaço de Banach e  $x_0 \in E$  um vetor fixado. Tem-se então

$$\int_a^b x_0 dt = (b - a)x_0.$$

**Dem:** Atender a que, para cada partição  $P$ , tem-se  $S_P(x_0) = (b - a)x_0$ .  $\square$

**3.5.7** Sejam  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $E$  um espaço de Banach e  $f: [a, b] \rightarrow E$  uma aplicação contínua. Se  $a = b$ , então

$$\int_a^b f(t) dt = 0.$$

Se  $c \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

**Dem:** A primeira afirmação é evidente e, em particular, a segunda é-o também no caso em que  $a = c$  ou  $c = b$ . Suponhamos portanto  $a < c < b$ . Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Consideremos uma partição  $P_{10}$  de  $[a, c]$  tal que, qualquer que seja a partição  $P_1$  de  $[a, c]$ , mais fina que  $P_{10}$ , se tenha

$$\left\| \int_a^c f(t) dt - S_{P_1}(f|_{[a,c]}) \right\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Consideremos, do mesmo modo, uma partição  $P_{20}$  de  $[c, b]$  tal que, qualquer que seja a partição  $P_2$  de  $[c, b]$ , mais fina que  $P_{20}$ , se tenha

$$\left\| \int_c^b f(t) dt - S_{P_2}(f|_{[c,b]}) \right\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Consideremos  $P_0 = P_{10} \cup P_{20}$ , que é uma partição de  $[a, b]$ . Dada uma partição  $P$  de  $[a, b]$ , que seja mais fina que  $P_0$ , podemos escrever  $P = P_1 \cup P_2$ , com  $P_1$  partição de  $[a, c]$ , mais fina que  $P_{10}$ , e  $P_2$  partição de  $[c, b]$ , mais fina que  $P_{20}$ , e tem-se trivialmente

$$S_P(f) = S_{P_1}(f|_{[a,c]}) + S_{P_2}(f|_{[c,b]}),$$

donde

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt - S_P(f) \right\| &\leq \left\| \int_a^c f(t) dt - S_{P_1}(f|_{[a,c]}) \right\| + \\ &+ \left\| \int_c^b f(t) dt - S_{P_2}(f|_{[c,b]}) \right\| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que

$$\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

é o limite da sucessão generalizada dos  $S_P(f)$ , e portanto igual ao integral de  $f$  em  $[a, b]$ .  $\square$

**3.5.8** Sejam  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$  e  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas aplicações contínuas tais que, para cada  $t$ ,  $f(t) \leq g(t)$ . Tem-se então

$$(1) \quad \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt \quad 269$$

e, se for  $a < b$  e  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$  tem-se necessariamente  $f(t) = g(t)$  para cada  $t$ .

**Dem:** Para a desigualdade (1), basta atender a 1.2.53 uma vez que para cada partição  $P$  tem-se  $S_P(f) \leq S_P(g)$ . Suponhamos agora que  $a < b$  e que existia  $t_0 \in [a, b]$  tal que  $f(t_0) < g(t_0)$ . Sendo  $\delta = g(t_0) - f(t_0) > 0$ , podemos considerar  $\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $t \in [a, b]$  verifica  $|t - t_0| < \varepsilon$  venha  $g(t) - f(t) > \frac{\delta}{2}$ . Podemos então considerar  $c < d$  em  $[a, b]$  tal que  $g(t) - f(t) > \frac{\delta}{2}$  para cada  $t \in [c, d]$  (se  $t_0 \neq b$  podemos tomar  $c = t_0$  e  $d \in [a, b]$  com  $c < d < c + \varepsilon$ ; se  $t_0 \neq a$  podemos tomar  $d = t_0$  e  $c \in [a, b]$  com  $d - \varepsilon < c < d$ ). Tem-se então

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^c f(t) dt + \int_c^d f(t) dt + \int_d^b f(t) dt \leq \\ &\leq \int_a^c g(t) dt + \int_c^d g(t) - \frac{\delta}{2} dt + \int_d^b g(t) dt = \\ &= \int_a^c g(t) dt + \int_c^d g(t) dt + \int_d^b g(t) dt - \frac{\delta}{2}(d - c) < \\ &< \int_a^b g(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

**3.5.9** Sejam  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $E$  um espaço de Banach e  $f: [a, b] \rightarrow E$  uma aplicação contínua. Tem-se então

$$(1) \quad \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Além disso, no caso em que a norma de  $E$  é a associada a um produto interno ( $E$  é um espaço de Hilbert), se for

$$(2) \quad \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt$$

então existe  $w \in E$  e uma aplicação contínua  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t) \geq 0$  e  $f(t) = \varphi(t)w$  para cada  $t$ .<sup>270</sup>

**Dem:** Para justificar (1) basta atender a que, sendo  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação

<sup>269</sup>Trata-se evidentemente de um resultado que já conhece. Ele é incluído aqui apenas para tornar a exposição logicamente independente do estudos do integral de funções reais de variável real.

<sup>270</sup>Não afirmamos que esta última propriedade seja válida apenas para o caso da norma de  $E$  ser a associada a um produto interno. Ela não é, no entanto, válida para normas arbitrárias, como se conclui do exercício 3.5.2 adiante.

contínua definida por  $g(t) = \|f(t)\|$ , tem-se, para cada partição  $P$ ,  $\|S_P(f)\| \leq S_P(g)$ , e ter em conta a propriedade geral dos limites de funções reais em 1.2.53 e a continuidade da norma como aplicação  $E \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponhamos agora que a norma de  $E$  é a associada a um produto interno, podendo já supor-se que  $E$  tem  $\mathbb{R}$  com o corpo dos escalares (cf. 2.5.9) e que se verifica a igualdade (2). Afastemos já o caso trivial em que  $a = b$ , caso em que tomamos  $w = f(a)$  e  $\varphi(t) = 1$ , e notemos

$$w = \int_a^b f(t) dt.$$

Reparemos que se  $w = 0$  tem-se  $\int_a^b \|f(t)\| dt = 0$  portanto, por 3.5.8  $\|f(t)\| = 0$  para cada  $t$  e a conclusão vale, por exemplo com  $\varphi(t) = 0$  para cada  $t$ . Suponhamos agora que  $w \neq 0$ . Tem-se então, considerando a aplicação linear contínua  $E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto \langle z, w \rangle$ , e tendo em conta a desigualdade de Cauchy-Schwarz em 2.5.8,

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|^2 &= \left\langle \int_a^b f(t) dt, w \right\rangle = \int_a^b \langle f(t), w \rangle dt \leq \\ &\leq \int_a^b |\langle f(t), w \rangle| dt \leq \int_a^b \|f(t)\| \|w\| dt = \\ &= \|w\| \int_a^b \|f(t)\| dt = \left( \int_a^b \|f(t)\| dt \right)^2 \end{aligned}$$

portanto, pela igualdade (2), vem

$$(3) \quad \int_a^b \langle f(t), w \rangle dt = \int_a^b |\langle f(t), w \rangle| dt = \int_a^b \|f(t)\| \|w\| dt.$$

Destas desigualdades resulta, tendo em conta 3.5.8, que se tem

$$\langle f(t), w \rangle = |\langle f(t), w \rangle| = \|f(t)\| \|w\|$$

para cada  $t$ . A caracterização em 2.5.8 do caso de igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz, implica a existência por cada  $t$  de  $\varphi(t) \in \mathbb{R}$  tal que  $f(t) = \varphi(t)w$  e daqui resulta que

$$\varphi(t)\|w\|^2 = \langle f(t), w \rangle = |\langle f(t), w \rangle| \geq 0,$$

donde  $\varphi(t) \geq 0$  para cada  $t$ . Por fim, a continuidade de  $\varphi$  resulta de se ter

$$\varphi(t) = \frac{\langle f(t), w \rangle}{\|w\|^2}. \quad \square$$

**3.5.10 (Corolário)** Sejam  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $E$  um espaço de Banach,  $f: [a, b] \rightarrow E$  uma aplicação contínua e  $M \geq 0$  tal que, para cada  $t$ ,  $\|f(t)\| \leq M$ , Tem-se então



$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq M(b-a).$$

**Dem:** Tem-se

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a). \quad \square$$

**3.5.11** Tal como no caso das funções reais de variável real, dados um espaço de Banach  $E$ , um intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  e uma aplicação contínua  $f: J \rightarrow E$ , estende-se a definição do integral

$$\int_a^b f(t) dt,$$

com  $a, b \in J$ , ao caso em que  $a > b$ , pondo-se então, por definição

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

É claro que esta última igualdade é ainda trivialmente válida no caso em que  $a = b$  e verifica-se, a partir de 3.5.7, por uma discussão simples de todos os casos possíveis que, quaisquer que sejam  $a, b, c \in J$ ,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Note-se também que a desigualdade em 3.5.9 deixará em geral de ser verdadeira, no caso em que  $a > b$  (o primeiro membro é positivo e o segundo é negativo) pelo que, para obtermos uma desigualdade válida em todos os casos, deveremos escrever

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|f(t)\| dt \right|.$$

**3.5.12 (O integral indefinido)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $f: J \rightarrow E$  uma aplicação contínua. Fixado  $a \in J$ , podemos definir uma nova aplicação  $g: J \rightarrow E$ , a que se dá o nome de *integral indefinido* de  $f$  por

$$g(s) = \int_a^s f(t) dt.$$

Tem-se então que  $g$  é uma aplicação de classe  $C^1$  e, para cada  $s \in J$ ,  $g'(s) = f(s)$  (costuma traduzir-se esta igualdade dizendo que  $g$  é uma *primitiva* de  $f$ ).

**Dem:** Sejam  $s_0 \in J$  e  $\delta > 0$  arbitrários. Pela continuidade de  $f$  em  $s_0$ , existe

$\varepsilon > 0$  tal que, sempre que  $|s - s_0| \leq \varepsilon$ , se tenha  $\|f(s) - f(s_0)\| \leq \delta$ . Para cada  $s \in J$  tal que  $|s - s_0| \leq \varepsilon$ , vemos agora que

$$\begin{aligned} & \|g(s) - g(s_0) - f(s_0)(s - s_0)\| = \\ & = \left\| \int_{s_0}^s f(t) dt - \int_{s_0}^s f(s_0) dt \right\| = \left\| \int_{s_0}^s f(t) - f(s_0) dt \right\| \leq \\ & \leq \left| \int_{s_0}^s \|f(t) - f(s_0)\| dt \right| \leq \delta |s - s_0|, \end{aligned}$$

o que implica que  $g$  é diferenciável em  $s_0$ , e com  $Dg_{s_0}(u) = f(s_0)u$ , isto é,  $g'(s_0) = f(s_0)$ .  $\square$

**3.5.13 (Regra de Barrow)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $f, h: J \rightarrow E$  duas aplicações contínuas tais que, para cada  $s \in J$ ,  $h$  seja diferenciável em  $s$  e com  $h'(s) = f(s)$  ( $h$  é uma primitiva de  $f$ ). Quaisquer que sejam  $a, b \in J$ , tem-se então

$$\int_a^b f(t) dt = h(b) - h(a).$$

**Dem:** Seja  $g: J \rightarrow E$  o integral indefinido, definido por

$$g(s) = \int_a^s f(t) dt.$$

Sabemos que se tem  $g'(s) = f(s)$ , para cada  $s \in J$ , pelo que a aplicação  $g - h$  tem derivada identicamente nula em  $J$  e é portanto constante (cf. 3.3.2). Podemos assim escrever

$$g(b) - h(b) = g(a) - h(a) = -h(a),$$

ou seja,  $g(b) = h(b) - h(a)$ , o que não é mais do que a igualdade do enunciado.  $\square$

**3.5.14 (Integração por mudança de variáveis)** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $I \subset \mathbb{R}$  e  $J \subset \mathbb{R}$  dois intervalos não triviais,  $\varphi: I \rightarrow J$  uma aplicação de classe  $C^1$  e  $g: J \rightarrow E$  uma aplicação contínua. Dados  $a, b \in I$ , tem-se então

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t) dt = \int_a^b g(\varphi(s))\varphi'(s) ds.$$

**Dem:** Sendo  $h: J \rightarrow E$  o integral indefinido, definido por

$$h(v) = \int_{\varphi(a)}^v g(t) dt,$$

sabemos que  $h$  é de classe  $C^1$ , e com  $h'(v) = g(v)$ . Podemos portanto concluir que  $h \circ \varphi: I \rightarrow E$  é uma aplicação de classe  $C^1$  e com

$$(h \circ \varphi)'(u) = h'(\varphi(u))\varphi'(u) = g(\varphi(u))\varphi'(u),$$

pelo que

$$\begin{aligned} \int_a^b g(\varphi(s))\varphi'(s) ds &= h \circ \varphi(b) - h \circ \varphi(a) = \\ &= h(\varphi(b)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

**3.5.15 (Integração por partes)** Sejam  $E$ ,  $F$  e  $G$  espaços de Banach e  $\xi: E \times F \rightarrow G$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $f: J \rightarrow E$  e  $g: J \rightarrow F$  duas aplicações de classe  $C^1$ . Tem-se então, quaisquer que sejam  $a, b \in J$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b \xi(f'(t), g(t)) dt &= \\ &= \xi(f(b), g(b)) - \xi(f(a), g(a)) - \int_a^b \xi(f(t), g'(t)) dt. \end{aligned}$$

**Dem:** Consideremos a aplicação de classe  $C^1$   $h: J \rightarrow G$ , definida por  $h(s) = \xi(f(s), g(s))$ . Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \xi(f(b), g(b)) - \xi(f(a), g(a)) &= h(b) - h(a) = \int_a^b h'(t) dt = \\ &= \int_a^b \xi(f'(t), g(t)) + \xi(f(t), g'(t)) dt = \\ &= \int_a^b \xi(f'(t), g(t)) dt + \int_a^b \xi(f(t), g'(t)) dt, \end{aligned}$$

donde a igualdade do enunciado. □

**3.5.16 (O integral de uma soma infinita)** Sejam  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $F$  um espaço de Banach,  $J$  um conjunto não vazio de índices e para cada  $j \in J$  uma aplicação contínua  $f_j: [a, b] \rightarrow F$ . Suponhamos que a família dos  $f_j$  é normalmente somável, isto é que existe uma família de reais  $(a_j)_{j \in J}$  com  $a_j \geq 0$  e  $\sum_{j \in J} a_j < +\infty$  tal que para cada  $j \in J$  e  $t \in [a, b]$  se tenha  $\|f_j(t)\| \leq a_j$  (cf. 2.3.24). Considerando então a aplicação contínua  $f: [a, b] \rightarrow F$  definida por  $f(t) = \sum_{j \in J} f_j(t)$  (cf. 2.3.26), tem-se

$$(1) \quad \int_a^b f(t) dt = \sum_{j \in J} \int_a^b f_j(t) dt,$$

onde a soma no segundo membro é a de uma família absolutamente somável

de vetores de  $F$ .

**Dem:** Podemos afastar já o caso trivial em que  $a = b$ , caso em que todos os integrais são iguais a 0. Para cada  $j \in J$  tem-se

$$\left\| \int_a^b f_j(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f_j(t)\| dt \leq (b-a)a_j,$$

onde

$$\sum_{j \in J} (b-a)a_j = (b-a) \sum_{j \in J} a_j < +\infty,$$

o que implica que a soma no segundo membro de (1) é a de uma família absolutamente somável de vetores de  $F$ . Seja agora  $\delta > 0$  arbitrário. Seja  $K_0 \subset J$  um conjunto finito tal que

$$\sum_{j \in J \setminus K_0} a_j = \sum_{j \in J} a_j - \sum_{j \in K_0} a_j < \frac{\delta}{b-a}.$$

Para cada parte finita  $K \subset J$  com  $K_0 \subset K$  tem-se então para cada  $t \in [a, b]$

$$\left\| \sum_{j \in J \setminus K} f_j(t) \right\| \leq \sum_{j \in J \setminus K} \|f_j(t)\| \leq \sum_{j \in J \setminus K_0} a_j < \frac{\delta}{b-a}$$

donde

$$\begin{aligned} & \left\| \int_a^b f(t) dt - \sum_{j \in K} \int_a^b f_j(t) dt \right\| = \left\| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b \sum_{j \in K} f_j(t) dt \right\| = \\ & = \left\| \int_a^b f(t) - \sum_{j \in K} f_j(t) dt \right\| = \left\| \int_a^b \sum_{j \in J \setminus K} f_j(t) dt \right\| \leq \\ & \leq \int_a^b \left\| \sum_{j \in J \setminus K} f_j(t) \right\| dt \leq \int_a^b \frac{\delta}{b-a} dt = \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que  $\int_a^b f(t) dt$  é efetivamente a soma da família dos vetores  $\int_a^b f_j(t) dt$  de  $F$ .  $\square$

**3.5.17 (Continuidade do integral paramétrico)** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $F$  um espaço de Banach,  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$  e  $f: X \times [a, b] \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Tem então lugar uma aplicação contínua  $g: X \rightarrow F$ , definida por

$$(1) \quad g(x) = \int_a^b f(x, t) dt.$$

**Dem:** Podemos afastar já o caso trivial em que  $a = b$ , caso em que os integrais são iguais a 0. Começemos por notar que a continuidade de  $f$

implica, em particular, para cada  $x \in X$  a continuidade da aplicação  $t \mapsto f(x, t)$ , o que garante que o segundo membro de (1) faz sentido. Provemos a continuidade de  $g$  num ponto  $x_0 \in X$ . Dado  $\delta > 0$  arbitrário, consideremos  $\delta' = \frac{\delta}{b-a} > 0$ ; tendo em conta a compacidade de  $[a, b]$ , o tipo de continuidade uniforme estabelecido em 1.6.40 garante a existência de uma vizinhança  $U$  de  $x_0$  em  $X$  tal que, sempre que  $x \in U$ , tem-se  $\|f(x, t) - f(x_0, t)\| < \delta'$  para todo o  $t \in [a, b]$  e portanto

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(x_0)\| &= \left\| \int_a^b f(x, t) - f(x_0, t) dt \right\| \leq \\ &\leq \int_a^b \|f(x, t) - f(x_0, t)\| dt \leq \delta'(b-a) = \delta, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade de  $g$  em  $x_0$ . □

**3.5.18 (Diferenciabilidade do integral paramétrico)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ . Seja  $f: A \times [a, b] \rightarrow F$  uma aplicação contínua relativamente à segunda variável (isto é, tal que para cada  $x \in A$  seja contínua a aplicação  $[a, b] \rightarrow F$ ,  $t \mapsto f(x, t)$ ), parcialmente diferenciável relativamente à primeira variável e com  $D_1 f: A \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  contínua. Tem-se então que a aplicação  $g: A \rightarrow F$  definida por

$$(1) \quad g(x) = \int_a^b f(x, t) dt,$$

é de classe  $C^1$ , em particular contínua, e com

$$(2) \quad Dg_x = \int_a^b D_1 f_{(x,t)} dt$$

e portanto, para cada  $u \in E$ ,

$$(3) \quad Dg_x(u) = \int_a^b D_1 f_{(x,t)}(u) dt.$$

**Dem:** Podemos afastar já o caso trivial em que  $a = b$ , caso em que os integrais são iguais a 0. O facto de  $g$  estar bem definida resulta da hipótese de continuidade de  $f$  na segunda variável. Além disso, para cada  $u \in E$ , decorre de 3.5.4, com a aplicação linear contínua  $\mathcal{L}(E; F) \rightarrow F$ ,  $\lambda \mapsto \lambda(u)$ , que

$$\left( \int_a^b D_1 f_{(x,t)} dt \right)(u) = \int_a^b D_1 f_{(x,t)}(u) dt$$

o que, em particular, mostra que a igualdade (3) decorrerá da igualdade (2). Sejam agora  $x_0 \in A$  e  $\delta > 0$  arbitrários. Consideremos  $\delta' = \frac{\delta}{b-a} > 0$ . Tendo

em conta a compacidade de  $[a, b]$ , o tipo de continuidade uniforme estabelecido em 1.6.40 garante a existência de  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_0) \cap A$  seja convexo e que, para cada  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A$  e  $t \in [a, b]$  venha

$$\|D_1 f_{(x,t)} - D_1 f_{(x_0,t)}\| \leq \delta'$$

e portanto, pelo segundo teorema da média em 3.3.4,

$$\|f(x, t) - f(x_0, t) - D_1 f_{(x_0,t)}(x - x_0)\| \leq \delta' \|x - x_0\|,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} & \left\| g(x) - g(x_0) - \left( \int_a^b D_1 f_{(x_0,t)} dt \right) (x - x_0) \right\| = \\ & = \left\| \int_a^b f(x, t) dt - \int_a^b f(x_0, t) dt - \int_a^b D_1 f_{(x_0,t)}(x - x_0) dt \right\| = \\ & = \left\| \int_a^b f(x, t) - f(x_0, t) - D_1 f_{(x_0,t)}(x - x_0) dt \right\| \leq \\ & \leq \int_a^b \|f(x, t) - f(x_0, t) - D_1 f_{(x_0,t)}(x - x_0)\| dt \leq \int_a^b \delta' \|x - x_0\| dt = \\ & = \delta \|x - x_0\|. \end{aligned}$$

Concluimos assim que  $g$  é diferenciável em  $x_0$  e com

$$Dg_{x_0} = \int_a^b D_1 f_{(x_0,t)} dt$$

o que, tendo em conta a arbitrariedade de  $x_0$ , justifica a fórmula em (2), e portanto, como já referido, aquela em (3). O facto de  $Dg: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  ser contínua, e portanto  $g$  ser de classe  $C^1$ , resulta de 3.5.17.  $\square$

Repare-se que no resultado precedente as hipóteses de  $f: A \times [a, b] \rightarrow F$  ser contínua relativamente à segunda variável e ser parcialmente diferenciável relativamente à primeira variável e com  $D_1 f: A \times [a, b] \rightarrow F$  contínua encontra-se verificada, em particular, se exigirmos que  $a < b$  e  $f$  seja de classe  $C^1$ , caso em que, como verificámos em 3.3.23, tem-se

$$D_1 f_{(x,t)}(u) = Df_{(x,t)}(u, 0).$$

Examinamos em seguida uma situação em que podemos garantir que o integral paramétrico é de classe  $C^k$ , situação essa que incluirá analogamente o caso em que a própria aplicação  $f$  é de classe  $C^k$ .

**3.5.19** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach;  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $a \leq b$  em  $\mathbb{R}$ . Seja  $f: A \times [a, b] \rightarrow F$  uma aplicação contínua relativamente à segunda variável tal que para cada  $t \in [a, b]$  seja de classe  $C^k$  a aplicação

$A \rightarrow F$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  (onde  $k \geq 1$ ). Suponhamos ainda que para cada  $1 \leq j \leq k$  é contínua a aplicação  $D_1^j f: A \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}^j(E; F)$  (cf. 3.3.22). É então de classe  $C^k$  a aplicação  $g: A \rightarrow F$  definida por

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

e com

$$D^k g_x = \int_a^b D_1^k f_{(x,t)} dt,$$

em particular, dados  $u_1, \dots, u_k \in E$ , tem-se

$$D^k g_x(u_1, \dots, u_k) = \int_a^b D_1^k f_{(t,x)}(u_1, \dots, u_k) dt.$$

**Dem:** Vamos fazer a demonstração por indução em  $k$ , começando por reparar que o caso em que  $k = 1$  reduz-se a 3.5.18. Suponhamos então que o resultado é verdadeiro para um certo  $k$  e que  $f$  verifica as mesmas hipóteses com  $k + 1$  no lugar de  $k$ . Uma vez que  $D_1 f: A \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é contínua e que para cada  $1 \leq j \leq k$  se tem

$$D_1^j (D_1 f)_{(x,t)}(u_1, \dots, u_j)(u_{j+1}) = D_1^{j+1} f_{(x,t)}(u_1, \dots, u_j, u_{j+1}),$$

isto é, com a notação em 2.1.43,  $D_1^j (D_1 f)_{(x,t)} = \Upsilon_j(D_1^{j+1} f_{(x,t)})$ , o que implica a continuidade de  $D_1^j (D_1 f): A \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}^{j+1}(E; F)$ , podemos aplicar a hipótese de indução, tendo em conta a igualdade

$$Dg_x = \int_a^b D_1 f_{(x,t)} dt,$$

para garantir que  $Dg: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é de classe  $C^k$  e com

$$\begin{aligned} D^k (Dg)_x &= \int_a^b D_1^k (Df)_{(x,t)} dt = \int_a^b \Upsilon_k^{-1}(D_1^{k+1} f_{(x,t)}) dt = \\ &= \Upsilon_k^{-1}\left(\int_a^b D_1^{k+1} f_{(x,t)} dt\right) \end{aligned}$$

ou seja

$$D^{k+1} g_x = \int_a^b D_1^{k+1} f_{(t,x)} dt.$$

A última fórmula do enunciado resulta agora de considerar, para  $u_1, \dots, u_k$  fixados em  $E$ , a aplicação linear contínua  $\mathcal{L}^k(E; F) \rightarrow F$  que a  $\lambda$  associa  $\lambda(u_1, \dots, u_k)$  (cf. a alínea c) de 2.1.37).  $\square$

Como aplicação do resultado sobre a derivação do integral paramétrico, examinamos em seguida um teorema de Fubini envolvendo o “integral duplo” de aplicações de duas variáveis.

**3.5.20 (Teorema de Fubini)** Sejam  $F$  um espaço de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $a \leq b$  e  $c \leq d$  em  $\mathbb{R}$  e  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Podem então considerar-se aplicações contínuas

$$(1) \quad \begin{aligned} [a, b] &\rightarrow F, & s &\mapsto \int_c^d f(s, t) dt, \\ [c, d] &\rightarrow F, & t &\mapsto \int_a^b f(s, t) ds \end{aligned}$$

e tem-se

$$(2) \quad \int_a^b \left( \int_c^d f(s, t) dt \right) ds = \int_c^d \left( \int_a^b f(s, t) ds \right) dt.$$

**Dem:** Podemos afastar já o caso trivial em que  $a = b$ , caso em que a primeira aplicação em (1) é constante e a segunda é constantemente 0 e em que os dois membros de (2) são iguais a 0.

A continuidade da primeira aplicação em (1) resulta do teorema de continuidade do integral paramétrico em 3.5.17 e a continuidade da segunda resulta de aplicar o mesmo resultado à aplicação contínua  $[c, d] \times [a, b] \rightarrow F$  que a  $(t, s)$  associa  $f(s, t)$ . Tendo em conta a propriedade do integral indefinido em 3.5.12, a aplicação  $\varphi: [a, b] \rightarrow F$  definida por

$$\varphi(u) = \int_a^u \left( \int_c^d f(s, t) dt \right) ds$$

é de classe  $C^1$  e com

$$\varphi'(u) = \int_c^d f(u, t) dt.$$

Tendo em conta a mesma propriedade, para cada  $t \in [c, d]$  é derivável a aplicação de  $[a, b]$  para  $F$  que a  $u$  associa  $\int_a^u f(s, t) ds$  e tem derivada em  $u$  igual a  $f(u, t)$  e daqui deduzimos, pelo resultado 3.5.18 sobre a diferenciabilidade do integral paramétrico, que a aplicação  $\psi: [a, b] \rightarrow F$  definida por

$$\psi(u) = \int_c^d \left( \int_a^u f(s, t) ds \right) dt,$$

é de classe  $C^1$  e com



$$\psi'(u) = \int_c^d f(u, t) dt.$$

As aplicações  $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow F$  têm assim a mesma derivada e verificam

$$\varphi(a) = 0 = \psi(a)$$

pelo que, aplicando 3.3.2 à aplicação  $\varphi - \psi$ , concluímos que  $\varphi(u) = \psi(u)$  para cada  $u$ , em particular

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(s, t) dt \right) ds = \varphi(b) = \psi(b) = \int_c^d \left( \int_a^b f(s, t) ds \right) dt. \quad \square$$

Também como aplicação do resultado sobre derivação do integral paramétrico, examinamos agora uma condição para a existência de primitivas no contexto das variáveis vetoriais.

**3.5.21 (Primitivação com variável vetorial)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação diferenciável num ponto  $x_0 \in A$  (também se diz que  $\omega$  é uma *forma diferencial* com valores em  $F$  diferenciável em  $x_0$ ). Tem-se então:

**a)** Se existir uma aplicação diferenciável  $f: A \rightarrow F$  tal que para cada  $x \in A$  se tenha  $Df_x = \omega(x)$  (podemos pensar em  $f$  como sendo uma *primitiva* de  $\omega$ ) então para cada  $u, v \in E$  tem-se

$$D\omega_{x_0}(u)(v) = D\omega_{x_0}(v)(u).$$

**b)** Suponhamos, reciprocamente, que  $A$  é estrelado relativamente a um dos seus pontos  $x_0$  (cf. 1.8.35), e que a forma diferencial  $\omega$  é de classe  $C^1$  e *fechada*, isto é, que para cada  $x \in A$  e  $u, v \in E$  tem-se

$$(1) \quad D\omega_x(u)(v) = D\omega_x(v)(u).$$

Existe então uma aplicação diferenciável  $f: A \rightarrow F$  tal que para cada  $x \in A$  se tenha  $Df_x = \omega(x)$ .<sup>271</sup>

**Dem:** **a)** Se  $f: A \rightarrow F$  é uma aplicação diferenciável nas condições de a) então resulta de 3.3.19 que

$$D\omega_{x_0}(u)(v) = D(Df)_{x_0}(u)(v) = D(Df)_{x_0}(v)(u) = D\omega_{x_0}(v)(u).$$

**b)** Consideremos a aplicação  $f: A \rightarrow F$  definida por

<sup>271</sup>A conclusão de b) é ainda válida no caso mais geral em que não se exige que a forma diferencial  $\omega$  seja de classe  $C^1$  mas apenas que seja diferenciável em cada ponto e verificando (1) nesse ponto. Trata-se da alínea b) do teorema de Goursat, que examinaremos adiante em 3.5.35 e que tem uma demonstração mais delicada.

$$f(x) = \int_0^1 \omega((1-t)x_0 + tx)(x - x_0) dt,$$

Tendo em conta o resultado sobre a derivação do integral paramétrico em 3.5.18, vemos que  $f$  é diferenciável e com

$$\begin{aligned} Df_x(u) &= \int_0^1 D\omega_{(1-t)x_0+tx}(tu)(x - x_0) + \omega((1-t)x_0 + tx)(u) dt = \\ &= \int_0^1 tD\omega_{(1-t)x_0+tx}(x - x_0)(u) + \omega((1-t)x_0 + tx)(u) dt. \end{aligned}$$

Para calcular o integral precedente reparamos que, sendo  $\varphi: [0, 1] \rightarrow F$  a aplicação diferenciável definida por

$$\varphi(t) = t\omega((1-t)x_0 + tx)(u),$$

tem-se

$$\varphi'(t) = tD\omega_{(1-t)x_0+tx}(x - x_0)(u) + \omega((1-t)x_0 + tx)(u)$$

pele que utilizando a regra de Barrow para calcular o integral, vem

$$Df_x(u) = \varphi(1) - \varphi(0) = \omega(x)(u). \quad \square$$

**3.5.22 (Corolário — Primitivação na variável complexa)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $A \subset \mathbb{C}$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e estrelado relativamente a um certo  $x_0 \in A$  e  $g: A \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^1$  no sentido complexo. Tem-se então que a correspondente forma diferencial de classe  $C^1$ ,  $\omega = \Upsilon^{-1} \circ g: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$  (cf. 2.1.42) é fechada e, conseqüentemente, existe uma aplicação diferenciável no sentido complexo  $f: A \rightarrow F$  tal que  $\omega = Df$ , isto é,  $f'(x) = g(x)$  para cada  $x \in A$ .

**Dem:** Temos uma consequência de toda a aplicação bilinear complexa  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow F$  ser simétrica, mais precisamente, de se ter

$$\begin{aligned} D\omega_x(a)(b) &= bD\omega_x(a)(1) = baD\omega_x(1)(1) = \\ &= aD\omega_x(b)(1) = D\omega_x(b)(a). \end{aligned} \quad \square$$

Há situações, como por exemplo o estudo elementar das aplicações holomorfas que abordaremos na secção 3.7, em que é importante obter conclusões semelhantes às de 3.5.21 mas com hipóteses mais fracas (ver o teorema de Goursat adiante em 3.5.35). A obtenção desses resultados mais gerais exige um estudo mais delicado e profundo que inclui a utilização de instrumentos que vamos introduzir em seguida.

**3.5.23 (O integral ao longo dum caminho)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$

uma aplicação contínua (no caso em que  $A$  é um domínio de diferenciabilidade também dizemos que  $\omega$  é uma *forma diferencial* contínua, com valores em  $F$ ).

Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  uma aplicação de classe  $C^1$  (também se diz que  $\gamma$  é um *caminho* de classe  $C^1$  em  $A$ ). Define-se então o *integral* de  $\omega$  sobre  $\gamma$  como sendo

$$\int_{\gamma} \omega(x) dx = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \in F$$

(reparar que a integranda no segundo membro é uma função contínua de  $t$ ).

No caso particular em que  $E = \mathbb{K}$ , também se define o integral sobre  $\gamma$  de uma aplicação contínua  $g: A \rightarrow F$ , notado  $\int_{\gamma} g(x) dx$ , como sendo o integral sobre  $\gamma$  da aplicação contínua  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$  composta de  $g$  com a isometria natural  $F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$ , tendo-se portanto

$$\int_{\gamma} g(x) dx = \int_a^b g(\gamma(t)) \gamma'(t) \in F.$$

Abster-nos-emos frequentemente de explicitar neste último contexto as propriedades que resultem trivialmente das que examinaremos no contexto geral do integral das aplicações com valores em  $\mathcal{L}(E; F)$ .

**3.5.24 (Propriedades de linearidade)** Nas condições de 3.5.23, se  $c \in \mathbb{K}$  e  $\omega_1, \omega_2: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  são aplicações contínuas então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_1(x) + \omega_2(x) dx &= \int_{\gamma} \omega_1(x) dx + \int_{\gamma} \omega_2(x) dx, \\ \int_{\gamma} c\omega_1(x) dx &= c \int_{\gamma} \omega_1(x) dx. \end{aligned}$$

Mais geralmente, se  $\widehat{F}$  é outro espaço de Banach e  $\lambda: F \rightarrow \widehat{F}$  é uma aplicação linear contínua e considerarmos a correspondente aplicação linear contínua  $\mathcal{L}(Id_E; \lambda) \circ \omega_1: A \rightarrow \mathcal{L}(E; \widehat{F})$ , que a  $x$  associa  $\lambda \circ (\omega_1(x))$ , tem-se

$$\int_{\gamma} \lambda \circ (\omega_1(x)) dx = \lambda \left( \int_{\gamma} \omega_1(x) dx \right).$$

Repare-se que, no caso particular em que  $E = \mathbb{K}$  e consideramos uma aplicação contínua  $g: A \rightarrow F$ , a propriedade precedente toma o aspeto mais familiar

$$\int_{\gamma} \lambda(g(x)) dx = \lambda \left( \int_{\gamma} g(x) dx \right).$$

**Dem:** Trata-se de consequências diretas da definição e das correspondentes propriedades sobre o integral de aplicações de variável real em 3.5.3.  $\square$

**3.5.25 (Integrais e subdivisões)** Nas condições de 3.5.23, seja  $c \in ]a, b[$  e notemos

$$\gamma_1 = \gamma_{[a,c]}, \quad \gamma_2 = \gamma_{]c,b]}.$$

Tem-se então

$$\int_{\gamma} \omega(x) dx = \int_{\gamma_1} \omega(x) dx + \int_{\gamma_2} \omega(x) dx.$$

**Dem:** Tendo em conta a definição, temos uma consequência da propriedade de aditividade do integral em 3.5.7.  $\square$

**3.5.26 (O integral numa reparametrização)** Nas condições de 3.5.23, sejam  $c < d$  em  $\mathbb{R}$  e  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma aplicação de classe  $C^1$  e consideremos a aplicação  $\gamma \circ \varphi: [c, d] \rightarrow A$  de classe  $C^1$ . Tem-se então:

a) Se  $\varphi(c) = a$  e  $\varphi(d) = b$  então

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega(x) dx = \int_{\gamma} \omega(x) dx.$$

b) Se  $\varphi(c) = b$  e  $\varphi(d) = a$  então

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega(x) dx = - \int_{\gamma} \omega(x) dx.$$

**Dem:** Reparando que  $(\gamma \circ \varphi)'(s) = \gamma'(\varphi(s)) \times \varphi'(s)$ , vemos que

$$\omega(\gamma \circ \varphi(s))((\gamma \circ \varphi)'(s)) = \varphi'(s) \omega(\gamma \circ \varphi(s))(\gamma'(\varphi(s))).$$

Nas hipóteses de a) a conclusão resulta assim diretamente do resultado sobre integração por mudança de variáveis em 3.5.14 e nas hipóteses de b) temos uma consequência do mesmo resultado se recordarmos que

$$\int_b^a \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = - \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt. \quad \square$$

**3.5.27 (O integral numa aplicação primitivável)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma forma diferencial contínua admitindo uma *primitiva*  $f: A \rightarrow F$ , isto é, uma aplicação diferenciável tal que  $Df_x = \omega(x)$  para cada  $x \in A$ . Se  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  é uma aplicação de classe  $C^1$  então

$$\int_{\gamma} \omega(x) dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

em particular, no caso em que o caminho  $\gamma$  é fechado, isto é verifica  $\gamma(b) = \gamma(a)$ , tem-se  $\int_{\gamma} \omega(x) dx = 0$ .

Repare-se que, no caso em que  $E = \mathbb{K}$  e em que temos uma aplicação contínua  $g: A \rightarrow F$ , com a correspondente forma diferencial  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$ , uma primitiva  $f: A \rightarrow F$  de  $\omega$  é simplesmente uma aplicação tal que  $f'(x) = g(x)$  para cada  $x \in A$ , isto é, uma primitiva no sentido usual da aplicação  $g$ .

**Dem:** A aplicação de  $[a, b]$  para  $F$  que a  $t$  associa  $f(\gamma(t))$  é diferenciável e tem como derivada a aplicação contínua que a  $t$  associa

$$Df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

pelo que, tendo em conta a regra de Barrow em 3.5.13,

$$\int_{\gamma} \omega(x) dx = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad \square$$

Entre os caminhos ao longo dos quais teremos ocasião de integrar há um tipo suficientemente importante para justificar a introdução de uma notação alternativa.

**3.5.28 (O integral sobre um segmento orientado)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um conjunto e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação contínua. Dados  $y, z \in A$  tais que  $[[y, z]] \subset A$  (cf. 1.8.35), podemos considerar a aplicação de classe  $C^1$   $\gamma_{y,z}: [0, 1] \rightarrow A$  definida por

$$\gamma_{y,z}(t) = (1-t)y + tz$$

e notaremos

$$\int_y^z \omega(x) dx = \int_{\gamma_{y,z}} \omega(x) dx = \int_0^1 \omega((1-t)y + tz)(z-y) dt.$$

Repare-se que no caso particular em que  $E = \mathbb{K}$  e em que temos uma aplicação contínua  $g: A \rightarrow F$ , as igualdades precedentes tomam a forma

$$\int_y^z g(x) dx = \int_{\gamma_{y,z}} g(x) dx = \int_0^1 g((1-t)y + tz) \times (z-y) dt.$$

**3.5.29 (O caso em que  $E = \mathbb{R}$ )** Sejam  $F$  um espaço de Banach,  $A \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$  uma forma diferencial contínua e consideremos a correspondente aplicação contínua  $g = \Upsilon \circ \omega: A \rightarrow F$ , definida por  $g(t) = \omega(t)(1)$ . Dados  $a, b \in A$  tem-se então

$$\int_a^b \omega(x) dx = \int_a^b g(t) dt,$$

onde o integral no primeiro membro é o definido em 3.5.28 e o do segundo membro é o integral usual duma aplicação de variável real, por outras palavras, não há risco de confusão sobre qual dos dois significados atribuímos ao segundo membro.

**Dem:** Tendo em conta a fórmula para a integração por mudança de variáveis em 3.5.14, vem

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega(x) dx &= \int_0^1 \omega((1-s)a + sb)(b-a) ds = \\ &= \int_0^1 (b-a) g((1-s)a + sb) ds = \\ &= \int_a^b g(t) dt. \end{aligned} \quad \square$$

**3.5.30 (Majoração do integral num segmento)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um conjunto e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação contínua. Dados  $y, z \in A$  e  $M \geq 0$  tais que  $[[y, z]] \subset A$  e que  $\|\omega(x)\| \leq M$  para cada  $x \in [[y, z]]$ , tem-se

$$\left\| \int_y^z \omega(x) dx \right\| \leq M \|z - y\|.$$

**Dem:** Basta atender a que

$$\begin{aligned} \left\| \int_y^z \omega(x) dx \right\| &= \left\| \int_0^1 \omega((1-t)y + tz)(z-y) dt \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\omega((1-t)y + tz)(z-y)\| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\omega((1-t)y + tz)\| \|z-y\| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 M \|z-y\| dt = M \|z-y\|. \end{aligned}$$

**3.5.31 (Propriedades básicas do integral num segmento)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um conjunto e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação contínua. Tem-se então:

a) Se  $y \in A$  então

$$\int_y^y \omega(x) dx = 0.$$

b) Dados  $y, z \in A$  tais que  $[[y, z]] \subset A$ , tem-se

$$\int_z^y \omega(x) dx = - \int_y^z \omega(x) dx.$$

c) Dados  $y, z \in A$  tais que  $[[y, z]] \subset A$  e  $w \in [[y, z]]$ , tem-se

$$(1) \quad \int_y^z \omega(x) dx = \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx.$$

d) Mais geralmente, suponhamos que  $y, w, z \in A$  são *retilíneos* (isto é que existe  $x_0 \in E$  e um subespaço vetorial **real**  $E_0 \subset E$  de dimensão menor ou igual a 1 com  $y, w, z \in x_0 + E_0$ ) e tais que  $[[y, w]] \subset A$ ,  $[[w, z]] \subset A$  e  $[[y, z]] \subset A$ . Tem-se então ainda

$$(1) \quad \int_y^z \omega(x) dx = \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx.$$

e) Suponhamos agora que  $A$  é um domínio de diferenciabilidade e que existe uma primitiva  $f: A \rightarrow F$  da forma diferencial  $\omega$ , isto é, que  $f$  é diferenciável em cada  $x \in A$  e com  $Df_x = \omega(x)$ . Para cada  $y, z \in A$  com  $[[y, z]] \subset A$  tem-se então

$$\int_y^z \omega(x) dx = f(z) - f(y)$$

e portanto, dados  $y, z, w \in A$  com  $[[y, w]] \subset A$ ,  $[[y, z]] \subset A$  e  $[[w, z]] \subset A$  tem-se

$$(1) \quad \int_y^z \omega(x) dx = \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx.$$

**Dem:** Vamos justificar separadamente cada uma das alíneas:

a) Tem-se

$$\int_y^y \omega(x) dx = \int_0^1 \omega((1-t)y + ty)(y-y) dt = \int_0^1 0 dt = 0. \quad \square$$

b) Temos uma consequência da propriedade na alínea b) de 3.5.26 uma vez que

$$\gamma_{z,y}(s) = (1-s)z + sy = (1-(1-s))y + (1-s)z = \gamma_{y,z}(1-s). \quad \square$$

c) Tendo em conta a conclusão de a), podemos afastar já os casos triviais em que  $w = y$  ou  $w = z$  tendo-se assim  $w = (1-c)y + cz$  para um certo  $c \in ]0, 1[$ . Consideremos as aplicações  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, c]$  e  $\psi: [0, 1] \rightarrow [c, 1]$  definidas por

$$\varphi(t) = tc, \quad \psi(t) = (1-t)c + t,$$

que verificam  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = c$ ,  $\psi(0) = c$  e  $\psi(1) = 1$ . Aplicando 3.5.25 e

a alínea a) de 3.5.26 deduzimos que

$$\int_y^z \omega(x) dx = \int_{\gamma_{y,z}} \omega(x) dx = \int_{\gamma_{y,z}/[0,c]} \omega(x) dx + \int_{\gamma_{y,z}[c,1]} \omega(x) dx$$

com

$$\int_{\gamma_{y,z}/[0,c]} \omega(x) dx = \int_{\gamma_{y,w}} \omega(x) dx,$$

por ser

$$\gamma_{y,w}(t) = (1-t)y + tw = (1-tc)y + tcz = \gamma_{y,z}/[0,c](\varphi(t)),$$

e

$$\int_{\gamma_{y,z}[c,1]} \omega(x) dx = \int_{\gamma_{w,z}} \omega(x) dx,$$

por ser

$$\begin{aligned} \gamma_{w,z}(t) &= (1-t)w + tz = (1-t)(1-c)y + ((1-t)c + t)z \\ &= (1-\psi(t))y + \psi(t)z. \end{aligned} \quad \square$$

**d)** Podemos já afastar o caso em que  $y = z$ , que resulta trivialmente das conclusões de a) e b). Sendo  $y_0$  uma base de  $E_0$ , podemos então considerar  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq b$ , tais que

$$\begin{aligned} y &= x_0 + ay_0, \\ z &= x_0 + by_0, \\ w &= x_0 + cy_0, \end{aligned}$$

de onde deduzimos que

$$\begin{aligned} z - y &= (b - a)y_0 \\ w - y &= (c - a)y_0 \end{aligned}$$

e portanto, com  $t = \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ , tem-se  $w - y = t(z - y)$ , ou seja,

$$(2) \quad w = (1-t)y + tz.$$

No caso em que  $t \in [0, 1]$ , tem-se  $w \in [[y, z]]$  pelo que a igualdade pretendida é a obtida em c). No caso em que  $t > 1$  deduzimos de (2) que

$$z = \left(1 - \frac{1}{t}\right)y + \frac{1}{t}w \in [[y, w]],$$

por ser  $\frac{1}{t} \in [0, 1]$ , donde, pelo que vimos em c) e em b),



$$\int_y^w \omega(x) dx = \int_y^z \omega(x) dx + \int_z^w \omega(x) dx = \int_y^z \omega(x) dx - \int_w^z \omega(x) dx,$$

o que implica a igualdade pretendida e no caso em que  $t < 0$  deduzimos de (2) que

$$y = \frac{1}{1-t}w + \left(1 - \frac{1}{1-t}\right)z \in [[w, z]],$$

por ser  $\frac{1}{1-t} \in [0, 1]$ , donde, pelo que vimos em c) e b),

$$\int_w^z \omega(x) dx = \int_w^y \omega(x) dx + \int_y^z \omega(x) dx = -\int_y^w \omega(x) dx + \int_y^z \omega(x) dx,$$

o que implica, mais uma vez, a igualdade pretendida.  $\square$

e) A primeira afirmação é um caso particular de 3.5.27, uma vez que se tem  $\gamma_{y,z}(0) = y$  e  $\gamma_{y,z}(1) = z$ . A segunda resulta da primeira, uma vez que podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_y^z \omega(x) dx &= f(z) - f(y) = f(z) - f(w) + f(w) - f(y) = \\ &= \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx. \end{aligned} \quad \square$$

Uma questão que se pode pôr é se a igualdade (1) no resultado precedente, com o grau de arbitrariedade dos pontos  $y, z, w$  referido na alínea e) não poderá ser válida sobre hipóteses mais gerais que a existência de primitiva para a aplicação  $\omega$ . O resultado a seguir mostra que, para domínios  $A$  com propriedades naturais, não se devem esperar mais generalizações.

**3.5.32 (Condição para a existência de primitiva)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e estrelado relativamente a um certo  $y_0 \in A$  e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma forma diferencial contínua. Se, quaisquer que sejam  $z, w \in A$  com  $[[z, w]] \subset A$  se tem

$$\int_{y_0}^z \omega(x) dx = \int_{y_0}^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx$$

então obtemos uma aplicação diferenciável  $f: A \rightarrow F$  definida por

$$f(z) = \int_{y_0}^z \omega(x) dx,$$

para a qual se tem  $Df_z = \omega(z)$  para cada  $z \in A$  (uma primitiva de  $\omega$ ).

**Dem:** Dado  $z_0 \in A$  arbitrário, provemos que  $f$  é diferenciável em  $z_0$  e com

$Df_{z_0} = \omega(z_0)$ . Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Consideremos  $\varepsilon > 0$  tal que  $A \cap B_\varepsilon(z_0)$  seja convexo e que para cada  $z \in A \cap B_\varepsilon(z_0)$  se tenha  $\|\omega(z) - \omega(z_0)\| \leq \delta$ . Reparando que a restrição a  $A$  da aplicação linear contínua  $\omega(z_0): E \rightarrow F$  é uma primitiva da aplicação  $A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  de valor constante  $\omega(z_0)$ , vemos que para cada  $z \in A \cap B_\varepsilon(z_0)$  tem-se

$$\int_{z_0}^z \omega(z_0) dx = \omega(z_0)(z) - \omega(z_0)(z_0) = \omega(z_0)(z - z_0)$$

e portanto, tendo em conta 3.5.30,

$$\begin{aligned} & \|f(z) - f(z_0) - \omega(z_0)(z - z_0)\| = \\ & = \left\| \int_{y_0}^z \omega(x) dx - \int_{y_0}^{z_0} \omega(x) dx - \int_{z_0}^z \omega(z_0) dx \right\| = \\ & = \left\| \int_{z_0}^z \omega(x) - \omega(z_0) dx \right\| \leq \delta \|z - z_0\|, \end{aligned}$$

o que prova a diferenciabilidade pretendida. □

Com o objetivo de facilitar a prova do teorema de Goursat, que permite garantir a existência de primitiva com hipóteses mais fracas dos que as que fizemos na alínea b) de 3.5.21 vamos estabelecer dois resultados geométricos envolvendo o envólucro convexo  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  de  $n$  vetores de um espaço vetorial normado (cf. a alínea g) de 1.8.35), no segundo dos quais, que encaremos como um lema, tem-se  $n = 3$ .

**3.5.33 (O diâmetro dum envólucro convexo)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vetores de  $E$  e  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  o respetivo envólucro convexo (cf. a alínea g) de 1.8.35). Tem-se então que este envólucro convexo é um conjunto compacto cujo diâmetro é igual ao máximo dos  $\|x_i - x_j\|$  com  $i$  e  $j$  entre 1 e  $n$ .<sup>272</sup>

**Dem:** Podemos afastar já o caso trivial em que todos os vetores coincidem, caso em que o envólucro convexo é um conjunto com um único elemento. Lembremos que  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  é o conjunto dos vetores de  $E$  da forma  $s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_nx_n$  com  $s_j \geq 0$  e  $\sum s_j = 1$ . Uma vez que o conjunto dos  $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  com  $s_j \geq 0$  e  $\sum s_j = 1$  é fechado e limitado (reparar que se tem necessariamente  $s_j \leq 1$ ) e portanto compacto, vemos que  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  é compacto por ser a imagem daquele compacto pela aplicação contínua  $\mathbb{R}^n \rightarrow E$ ,

$$(s_1, s_2, \dots, s_n) \mapsto s_1x_1 + s_2x_2 + \dots + s_nx_n.$$

Seja  $M > 0$  o máximo dos  $\|x_i - x_j\|$ . O facto de os pontos  $x_1, \dots, x_n$

<sup>272</sup>De facto só vamos utilizar o caso em que  $n = 3$  mas a demonstração geral não apresenta nenhuma dificuldade suplementar.

pertencerem a  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  implica que o diâmetro deste conjunto é maior ou igual a  $M$  pelo que para mostrar que o diâmetro é mesmo  $M$  resta-nos mostrar que se tem  $\|y - z\| \leq M$  quaisquer que sejam  $y, z$  no envólucro convexo. Notemos agora que o conjunto dos  $y \in E$  tais que  $\|y - x_j\| \leq M$  para cada  $j$  é convexo (a interseção das bolas fechadas  $\overline{B}_M(x_j)$  que são conjuntos convexos) e contém cada um dos  $x_i$  pelo que, pela definição do envólucro convexo, esse conjunto contém  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ . Dito de outro modo, fica provado que fixado um elemento arbitrário  $y \in [[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ , tem-se  $\|y - x_j\| \leq M$  para cada  $j$ . Fixado  $y$ , vemos agora que a bola fechada  $\overline{B}_M(y)$ , que é um conjunto convexo, contém cada um dos  $x_j$  e portanto contém o envólucro convexo  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ , por outras palavras, tem-se  $\|y - z\| \leq M$  para cada  $z \in [[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ , o que é precisamente o que nos faltava provar.  $\square$

**3.5.34 (Lema do triângulo)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um conjunto e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação contínua. Sejam  $y, w, z \in A$  tais que  $[[y, w, z]] \subset A$  e que

$$\int_y^z \omega(x) dx \neq \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx,^{273}$$

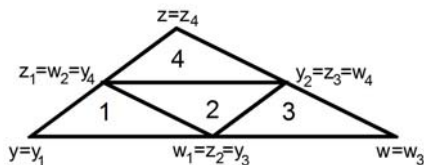
isto é, tendo em conta a alínea b) de 3.5.31, que

$$\int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^y \omega(x) dx \neq 0.$$

Existem então pontos  $y', w', z' \in [[y, w, z]]$  tais que

$$\begin{aligned} \text{diam}([[y', w', z']]) &= \frac{1}{2} \text{diam}([[y, w, z]]), \\ \left\| \int_{y'}^{w'} \omega(x) dx + \int_{w'}^{z'} \omega(x) dx + \int_{z'}^{y'} \omega(x) dx \right\| &\geq \\ &\geq \frac{1}{4} \times \left\| \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^y \omega(x) dx \right\|. \end{aligned}$$

**Dem:** Consideremos os quatro triplos de pontos  $y_j, w_j, z_j$  de  $[[y, w, z]]$ , onde  $1 \leq j \leq 4$ , definidos por



<sup>273</sup>Tendo em conta a alínea d) de 3.5.31 estes três pontos não podem ser retilíneos.

$$\begin{aligned} y_1 &= y, & y_2 &= \frac{w+z}{2}, & y_3 &= \frac{y+w}{2}, & y_4 &= \frac{z+y}{2}, \\ z_1 &= \frac{z+y}{2}, & z_2 &= \frac{y+w}{2}, & z_3 &= \frac{w+z}{2}, & z_4 &= z, \\ w_1 &= \frac{y+w}{2}, & w_2 &= \frac{z+y}{2}, & w_3 &= w, & w_4 &= \frac{w+z}{2}. \end{aligned}$$

Para cada  $1 \leq j \leq 4$  tem-se

$$\|w_j - y_j\| = \frac{1}{2}\|w - y\|, \quad \|z_j - w_j\| = \frac{1}{2}\|z - w\|, \quad \|y_j - z_j\| = \frac{1}{2}\|y - z\|,$$

o que implica, tendo em conta 3.5.33 que o diâmetro de  $[[y_j, w_j, z_j]]$  é metade do diâmetro de  $[[y, w, z]]$ . Notemos

$$I = \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^y \omega(x) dx \in F$$

e, para cada  $1 \leq j \leq 4$ ,

$$I_j = \int_{y_j}^{w_j} \omega(x) dx + \int_{w_j}^{z_j} \omega(x) dx + \int_{z_j}^{y_j} \omega(x) dx \in F.$$

Tendo em conta as conclusões das alíneas b) e c) de 3.5.30 vem

$$\begin{aligned} I &= \left( \int_{y_1}^{w_1} \omega(x) dx + \int_{y_3}^{w_3} \omega(x) dx \right) + \left( \int_{w_3}^{z_3} \omega(x) dx + \int_{w_4}^{z_4} \omega(x) dx \right) + \\ &+ \left( \int_{z_4}^{y_4} \omega(x) dx + \int_{z_1}^{y_1} \omega(x) dx \right) = \\ &= \int_{y_1}^{w_1} \omega(x) dx + \int_{y_3}^{w_3} \omega(x) dx + \int_{w_3}^{z_3} \omega(x) dx + \int_{w_4}^{z_4} \omega(x) dx + \\ &+ \int_{z_4}^{y_4} \omega(x) dx + \int_{z_1}^{y_1} \omega(x) dx + \left( \int_{y_2}^{w_2} \omega(x) dx + \int_{y_4}^{w_4} \omega(x) dx \right) + \\ &+ \left( \int_{w_2}^{z_2} \omega(x) dx + \int_{w_1}^{z_1} \omega(x) dx \right) + \left( \int_{z_2}^{y_2} \omega(x) dx + \int_{z_3}^{y_3} \omega(x) dx \right) = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

e daqui concluímos que

$$\|I\| \leq \|I_1\| + \|I_2\| + \|I_3\| + \|I_4\|,$$

o que implica a existência de  $j$  tal que  $\|I_j\| \geq \frac{1}{4}\|I\|$ . Podemos assim tomar  $y' = y_j$ ,  $w' = w_j$  e  $z' = z_j$ .  $\square$

**3.5.35 (Teorema de Goursat)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma forma diferencial contínua. Tem-se então:

a) Se  $y, w, z \in A$  são tais que  $[[y, w, z]] \subset A$  e que para cada  $x \in [[y, w, z]]$  e

$u, v \in E$  a aplicação  $\omega$  seja diferenciável em  $x$  e com

$$(1) \quad D\omega_x(u)(v) = D\omega_x(v)(u),$$

então

$$\int_y^z \omega(x) dx = \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx.$$

**b)** No caso em que o domínio de diferenciabilidade  $A$  é localmente convexo e estrelado relativamente a um certo  $y_0 \in A$ , e que a forma diferencial  $\omega$  é fechada, isto é, é diferenciável em cada  $x \in A$  e com

$$(1) \quad D\omega_x(u)(v) = D\omega_x(v)(u),$$

quaisquer que sejam  $u, v \in E$ , então  $\omega$  é primitivável, mais precisamente tem-se  $\omega(x) = Df_x$  para cada  $x \in A$ , onde  $f: A \rightarrow F$  é a aplicação definida por

$$f(z) = \int_{y_0}^z \omega(x) dx. \quad 274$$

**Dem:** Começamos por notar que, tendo em conta 3.5.32, a conclusão de b) é uma consequência da de a). Passamos assim a prova de a). Suponhamos, por absurdo que a conclusão de a) não era válida, portanto que se tinha

$$M = \left\| \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^y \omega(x) dx \right\| > 0$$

e seja  $D = \max\{\|w - y\|, \|z - w\|, \|y - z\|\} > 0$  o diâmetro de  $[[y, w, z]]$ . Tendo em conta o lema 3.5.34, podemos construir recursivamente pontos  $y_n, w_n, z_n \in [[y, w, z]] \subset A$  tais que

$$(2) \quad \begin{aligned} & [[y_{n+1}, w_{n+1}, z_{n+1}]] \subset [[y_n, w_n, z_n]], \\ & \text{diam}([[y_n, w_n, z_n]]) = \frac{1}{2^n} D, \\ & \left\| \int_{y_n}^{w_n} \omega(x) dx + \int_{w_n}^{z_n} \omega(x) dx + \int_{z_n}^{y_n} \omega(x) dx \right\| \geq \frac{1}{4^n} M. \end{aligned}$$

Os conjuntos fechados não vazios  $[[y_n, w_n, z_n]]$  contidos no compacto  $[[y, w, z]]$  constituem uma sucessão decrescente pelo que a propriedade do encaixe em 1.6.37 garante a existência de  $x_0 \in [[y, w, z]] \subset A$  tal que  $x_0 \in [[y_n, w_n, z_n]]$  para todo o  $n$ . Escolhamos  $\delta > 0$  tal que  $3\delta D^2 < M$ . Tendo em conta a diferenciabilidade de  $\omega$  no ponto  $x_0$  podemos considerar

<sup>274</sup>Comparar com a alínea b) de 3.5.21, reparando que então se exigia que  $\omega$  fosse de classe  $C^1$  e agora apenas se exige que  $\omega$  seja diferenciável. Poder-se-ia considerar demasiado o trabalho que estamos a ter só para conseguir dispensar a hipótese de continuidade da derivada mas, como veremos na secção 3.7, isso vai ser fundamental para o estudo das aplicações holomorfas.

$\varepsilon > 0$  tal que sempre que  $\|x - x_0\| < \varepsilon$  venha

$$\|\omega(x) - \omega(x_0) - D\omega_{x_0}(x - x_0)\| \leq \delta \|x - x_0\|.$$

Fixemos  $n$  tal que

$$\text{diam}([y_n, w_n, z_n]) = \frac{1}{2^n} D < \varepsilon.$$

Reparemos agora que a aplicação  $f: A \rightarrow F$  definida por

$$f(x) = \omega(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} D\omega_{x_0}(x - x_0)(x - x_0)$$

é diferenciável em cada  $x \in A$  e, tendo em conta a hipótese (1) no enunciado, com

$$\begin{aligned} Df_x(u) &= \omega(x_0)(u) + \frac{1}{2} D\omega_{x_0}(u)(x - x_0) + \frac{1}{2} D\omega_{x_0}(x - x_0)(u) = \\ &= \omega(x_0)(u) + D\omega_{x_0}(x - x_0)(u), \end{aligned}$$

dito de outro modo,

$$Df_x = \omega(x_0) + D\omega_{x_0}(x - x_0),$$

pelo que deduzimos da alínea e) de 3.5.31 que

$$\begin{aligned} &\int_{y_n}^{w_n} \omega(x_0) + D\omega_{x_0}(x - x_0) dx + \int_{w_n}^{z_n} \omega(x_0) + D\omega_{x_0}(x - x_0) dx + \\ &+ \int_{z_n}^{y_n} \omega(x_0) + D\omega_{x_0}(x - x_0) dx = 0. \end{aligned}$$

Concluimos daqui, tendo em conta a propriedade de majoração do integral em 3.5.30 que

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{y_n}^{w_n} \omega(x) dx + \int_{w_n}^{z_n} \omega(x) dx + \int_{z_n}^{y_n} \omega(x) dx \right\| = \\ &= \left\| \int_{y_n}^{w_n} \omega(x) dx - \omega(x_0) - D\omega_{x_0}(x - x_0) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{w_n}^{z_n} \omega(x) dx - \omega(x_0) - D\omega_{x_0}(x - x_0) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{z_n}^{y_n} \omega(x) dx - \omega(x_0) - D\omega_{x_0}(x - x_0) dx \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^n} D\delta \|w_n - y_n\| + \frac{1}{2^n} D\delta \|z_n - w_n\| + \frac{1}{2^n} D\delta \|y_n - z_n\| \leq \\ &\leq \frac{3}{4^n} D^2\delta < \frac{1}{4^n} M, \end{aligned}$$

o que é absurdo por contrariar a terceira condição em (2). □

Na aplicação do resultado precedente ao estudo das aplicações holomorfas teremos necessidade de uma versão um pouco mais geral deste em que se permite a existência de um ponto excepcional  $y_1$  para o qual não se exige a verificação da igualdade (1) nem sequer a diferenciabilidade de  $\omega$ .

**3.5.36 (Teorema de Goursat com requinte)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade,  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma forma diferencial contínua e  $y_1 \in A$  fixado. Tem-se então:

**a)** Se  $y, w, z \in A$  são tais que  $[[y, w, z]] \subset A$  e que para cada  $x \neq y_1$  em  $[[y, w, z]]$  e  $u, v \in E$  a forma diferencial  $\omega$  seja diferenciável em  $x$  e com

$$(1) \quad D\omega_x(u)(v) = D\omega_x(v)(u),$$

então

$$(2) \quad \int_y^z \omega(x) dx = \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx.$$

**b)** No caso em que o domínio de diferenciabilidade  $A$  é localmente convexo e estrelado relativamente a um certo  $y_0 \in A$ , e que a forma diferencial  $\omega$  tem restrição fechada a  $A \setminus \{y_1\}$ , isto é, é diferenciável em cada  $x \in A \setminus \{y_1\}$  e com

$$D\omega_x(u)(v) = D\omega_x(v)(u),$$

quaisquer que sejam  $u, v \in E$  então  $\omega$  é primitivável, mais precisamente tem-se  $\omega(x) = Df_x$  para cada  $x \in A$ , onde  $f: A \rightarrow F$  é a aplicação definida por

$$f(z) = \int_{y_0}^z \omega(x) dx. \quad 275$$

**Dem:** Tal como no resultado precedente, a conclusão de b) resulta da de a), tendo em conta 3.5.32. Passemos então à prova de a), que será dividida em várias partes.

**1)** Começemos por notar que, tendo em conta a alínea b) de de 3.5.31, a igualdade (2) a demonstrar é equivalente a

$$(3) \quad \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^y \omega(x) dx = 0,$$

e que, tendo em conta a alínea d) de 3.5.31, a conclusão de a) é válida, mesmo sem qualquer hipótese de diferenciabilidade, no caso em que  $y, w, z$  são *retilíneos*, isto é quando exista  $x_0 \in E$  e um subespaço vetorial real

<sup>275</sup>A novidade relativamente a 3.5.35 é que estamos a permitir a existência de um ponto excepcional  $y_1$ .

$E_0 \subset E$  de dimensão menor ou igual a 1 com  $y, w, z \in x_0 + E_0$ .

2) Tendo em conta o que referimos em a), vamos supor a partir de agora que  $y, w, z$  não são *retilíneos*. Por conveniência do leitor provamos nesta alínea um resultado bem conhecido de Álgebra Linear que afirma que, com esta hipótese, dados reais  $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$  tais que  $\sum s_j = 1 = \sum t_j$  e que

$$(4) \quad s_1 y + s_2 w + s_3 z = t_1 y + t_2 w + t_3 z$$

então tem-se necessariamente  $s_j = t_j$  para cada  $j$ .

**Subdem:** Podemos escrever (4) na forma

$$(1 - s_2 - s_3)y + s_2 w + s_3 z = (1 - t_2 - t_3)y + t_2 w + t_3 z,$$

que implica que

$$s_2(w - y) + s_3(z - y) = t_2(w - y) + t_3(z - y).$$

Uma vez que os vetores  $w - y$  e  $z - y$  são linearmente independentes, sem o que pertenceriam a um subespaço  $E_0$  de dimensão menor ou igual a 1 e portanto os três vetores pertenceriam a  $y + E_0$ , concluímos que  $s_2 = t_2$  e  $s_3 = t_3$  e portanto também

$$s_1 = 1 - s_2 - s_3 = 1 - t_2 - t_3 = t_1. \quad \square$$

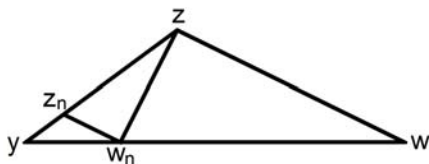
3) Tendo em conta a alínea a) do teorema de Goursat em 3.5.35, a igualdade (2), equivalente a (3), é verificada no caso em que o ponto excepcional  $y_1$  não pertence a  $[[y, w, z]]$ . Vamos mostrar nesta alínea que ela é também válida no caso em que  $y_1$  é um dos pontos  $y, w, z$ .

**Subdem:** Tendo em conta o facto de o primeiro membro de (3) não se alterar quando se faz uma permutação circular de  $y, z, w$ , basta examinar o caso em que, para fixar ideias,  $y_1 = y$ . Notemos

$$D = \max\{\|w - y\|, \|z - w\|, \|y - z\|\} > 0$$

o diâmetro de  $[[y, w, z]]$  e  $M \geq 0$  o máximo da função contínua  $\|\omega(x)\|$  para  $x$  no compacto  $[[y, w, z]]$ . Sejam, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n, z_n \in [[y, w, z]]$  os vetores definidos por

$$(5) \quad w_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)y + \frac{1}{n}w, \quad z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)y + \frac{1}{n}z.$$



Reparemos que  $y_1 = y \notin [[z_n, w_n, z]]$  já que se  $y = s_1 z_n + s_2 w_n + s_3 z$  com  $s_j \geq 0$  e  $s_1 + s_2 + s_3 = 1$  vinha



$$y = (s_1 + s_2)\left(1 - \frac{1}{n}\right)y + \frac{s_2}{n}w + \left(s_3 + \frac{s_1}{n}\right)z,$$

com os coeficientes maiores ou iguais a 0 e de soma 1, o que, por ser também  $y = 1 \cdot y + 0 \cdot w + 0 \cdot z$ , implicava, pela propriedade de unicidade referida em 2), que  $\frac{s_2}{n} = (s_3 + \frac{s_1}{n}) = 0$  e portanto  $s_2 = s_3 = s_1 = 0$ .

Analogamente,  $y_1 = y \notin [[w_n, w, z]]$  já que se  $y = s_1 w_n + s_2 w + s_3 z$  com  $s_j \geq 0$  e  $s_1 + s_2 + s_3 = 1$  vinha

$$y = s_1\left(1 - \frac{1}{n}\right)y + \left(\frac{s_1}{n} + s_2\right)w + s_3 z,$$

com os coeficientes maiores ou iguais a 0 e de soma 1, o que implicava que  $\frac{s_1}{n} + s_2 = s_3 = 0$  e portanto  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ .

Os dois fatos que acabamos de referir implicam, pelo teorema de Goursat em 3.5.35, que

$$\begin{aligned} \int_{z_n}^{w_n} \omega(x) dx + \int_{w_n}^z \omega(x) dx + \int_z^{z_n} \omega(x) dx &= 0, \\ \int_{w_n}^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^{w_n} \omega(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

e daqui deduzimos, tendo em conta as propriedades em 3.5.31, que

$$\begin{aligned} \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^y \omega(x) dx &= \\ = \left( \int_y^{w_n} \omega(x) dx + \int_{w_n}^w \omega(x) dx \right) + \int_w^z \omega(x) dx + \\ + \left( \int_z^{z_n} \omega(x) dx + \int_{z_n}^y \omega(x) dx \right) + \left( \int_{z_n}^{w_n} \omega(x) dx + \int_{w_n}^{z_n} \omega(x) dx \right) + \\ + \left( \int_z^{w_n} \omega(x) dx + \int_{w_n}^z \omega(x) dx \right) &= \\ = \int_y^{w_n} \omega(x) dx + \int_{w_n}^{z_n} \omega(x) dx + \int_{z_n}^y \omega(x) dx. \end{aligned}$$

Uma vez que, por (5),

$$\begin{aligned} \|w_n - y\| &= \frac{1}{n} \|w - y\| \leq \frac{D}{n}, \\ \|z_n - w_n\| &= \frac{1}{n} \|z - w\| \leq \frac{D}{n}, \\ \|y - z_n\| &= \frac{1}{n} \|y - z\| \leq \frac{D}{n}, \end{aligned}$$

podemos agora concluir, tendo em conta 3.5.30 que

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^y \omega(x) dx \right\| = \\
& = \left\| \int_y^{w_n} \omega(x) dx + \int_{w_n}^{z_n} \omega(x) dx + \int_{z_n}^y \omega(x) dx \right\| \leq \\
& \leq \left\| \int_y^{w_n} \omega(x) dx \right\| + \left\| \int_{w_n}^{z_n} \omega(x) dx \right\| + \left\| \int_{z_n}^y \omega(x) dx \right\| \leq \\
& \leq \frac{3DM}{n},
\end{aligned}$$

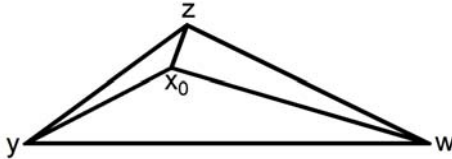
o que, tendo em conta a arbitrariedade de  $n$  e considerando o limite do segundo membro quando  $n \rightarrow +\infty$ , implica que

$$\left\| \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx + \int_z^y \omega(x) dx \right\| = 0$$

e portanto obtemos (3).

4) Resta-nos mostrar que a igualdade (2) é ainda verificada no caso em que o ponto excecional  $y_1$  é um elemento arbitrário de  $[[y, w, z]]$ .

**Subdem:** Aplicando que se verificou em 3) a cada um dos triplos



$(y, y_1, z)$ ,  $(y, w, y_1)$  e  $(w, y_1, z)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_y^z \omega(x) dx &= \int_y^{y_1} \omega(x) dx + \int_{y_1}^z \omega(x) dx = \\
&= \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^{y_1} \omega(x) dx + \int_{y_1}^z \omega(x) dx = \\
&= \int_y^w \omega(x) dx + \int_w^z \omega(x) dx.
\end{aligned}$$

□

**3.5.37 (O teorema de Goursat com requinte quando  $E = \mathbb{C}$ )** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $A \subset \mathbb{C}$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo estrelado relativamente a um certo  $y_0 \in A$ ,  $y_1 \in A$  e  $g: A \rightarrow F$  uma aplicação contínua que seja diferenciável (no sentido complexo) em cada  $z \in A \setminus \{y_1\}$ . Existe então uma aplicação diferenciável  $f: A \rightarrow F$  tal que  $f'(y) = g(y)$  para cada  $y \in A$ , por exemplo a definida por

$$f(y) = \int_{y_0}^y g(z) dz. \quad 276$$

**Dem:** Trata-se de uma consequência de 3.5.36 desde que mostremos que a forma diferencial associada  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$ , isto é, a composta de  $g$  com a isometria natural  $F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$ , tem restrição fechada a  $A \setminus \{y_1\}$ , isto é, tem-se

$$D\omega_z(u)(v) = D\omega_z(v)(u)$$

quaisquer que sejam  $z \in A \setminus \{y_1\}$  e  $u, v \in \mathbb{C}$ . Ora, isso resulta de que ambos os membros são bilineares complexos como função de  $(u, v)$ , o que implica que

$$D\omega_z(u)(v) = uvD\omega_z(1)(1) = vuD\omega_z(1)(1) = D\omega_z(v)(u). \quad \square$$

## Exercícios

**Ex. 3.5.1** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $F \subset E$  um subespaço vetorial fechado e  $f: [a, b] \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Mostrar que o integral de  $f$ , como aplicação com valores no espaço de Banach  $F$ , coincide com o integral de  $f$ , como aplicação com valores no espaço de Banach  $E$ , em particular que este último pertence a  $F$ .  
**Sugestão:** Utilizar 3.5.4.

**Ex. 3.5.2** Consideremos o espaço de Banach  $F = \mathbb{R}^2$ , com a norma do máximo,

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\},$$

e seja  $f: [0, 1] \rightarrow F$  a aplicação contínua definida por  $f(t) = (t, 1)$ . Verificar que se tem

$$\left\| \int_0^1 f(t) dt \right\| = \int_0^1 \|f(t)\| dt,$$

apesar de não se verificar a conclusão de 3.5.9, mais precisamente de  $f$  não ser um vetor fixo de  $F$  multiplicado por uma função com valores reais.

**Ex. 3.5.3 (Misto de integral indefinido e de integral paramétrico — continuidade)**

a) Sejam  $X$  um espaço topológico,  $F$  um espaço de Banach,  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $c \in [a, b]$  fixado e  $f: X \times [a, b] \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Mostrar que é contínua a aplicação  $g: X \times [a, b] \rightarrow F$  definida por

$$g(x, s) = \int_c^s f(x, t) dt.$$

**Sugestão:** Para provar a continuidade de  $g$  em  $(x_0, s_0)$  reparar que se tem

<sup>276</sup>Comparar com 3.5.22.

$$g(x, s) - g(x_0, s_0) = \int_{s_0}^s f(x, t) dt + \int_c^{s_0} f(x, t) - f(x_0, t) dt,$$

ter em conta o tipo de continuidade uniforme examinado em 1.6.40 para garantir a existência de um majorante  $M$  de  $\|f(x, t)\|$  e para “controlar”  $\|f(x, t) - f(x_0, t)\|$ , para  $x$  numa vizinhança conveniente de  $x_0$  e tirar partido da desigualdade

$$\|g(x, s) - g(x_0, s_0)\| \leq M|s - s_0| + \int_a^b \|f(x, t) - f(x_0, t)\| dt.$$

**b) (Generalização de a), com um intervalo não trivial  $J$  no lugar de  $[a, b]$ )** Sejam  $X$  um espaço topológico,  $F$  um espaço de Banach,  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial,  $c \in J$  fixado e  $f: X \times J \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Mostrar que é contínua a aplicação  $g: X \times J \rightarrow F$  definida por

$$g(x, s) = \int_c^s f(x, t) dt.$$

**Sugestão:** Para provar a continuidade de  $g$  em  $(x_0, s_0)$  aplicar a conclusão de a) à restrição de  $f$  a  $X \times [a, b]$ , com  $a$  e  $b$  em  $J$  escolhidos do seguinte modo:  $b$  é o máximo entre  $s_0$  e  $c$  se  $J$  não tiver elementos maiores que esse máximo e é um elemento de  $J$  maior que esse máximo se existir;  $a$  é o mínimo entre  $s_0$  e  $c$  se  $J$  não tiver elementos menores que esse mínimo e é um elemento de  $J$  menor que esse mínimo se existir.

**Ex. 3.5.4 (Misto de integral indefinido e de integral paramétrico — diferenciabilidade)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo,  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $f: A \times J \rightarrow F$  uma aplicação de classe  $C^k$ , onde  $k \geq 1$ . Mostrar que a aplicação  $g: A \times J \rightarrow F$ , definida por

$$g(x, s) = \int_c^s f(x, t) dt,$$

é de classe  $C^k$  e que

$$Dg_{(x,s)}(u, a) = af(x, s) + \int_c^s D_1 f_{(x,t)}(u) dt.$$

**Sugestão:** Determinar os diferenciais parciais da aplicação  $g$ , ter em conta a conclusão da alínea b) do exercício precedente e raciocinar por indução. Reparar que, no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , consideramos  $J$  como parte do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}$ .

**Ex. 3.5.5** Seja  $E$  um espaço de Hilbert real.

**a)** Se  $A \subset E$  é um domínio de diferenciabilidade e se  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação de classe  $C^1$ , mostrar que para cada  $x \in U$ , existe um, e um só, vetor de  $E$ , a que se dá o nome de *gradiente* de  $f$  no ponto  $x$ , e que notaremos  $\text{grad}(f)_x$ , tal que, qualquer que seja  $w \in E$ ,

$$Df_x(w) = \langle \text{grad}(f)_x, w \rangle;$$

Mostrar ainda que a aplicação  $\text{grad}: U \rightarrow E$ , assim obtida, é contínua.

**b)** No caso em que  $E = \mathbb{R}^n$ , com o produto interno usual, e  $A$  é aberto, mostrar que  $\text{grad}(f)_x$  não é mais do que o gradiente da função  $f$ , no sentido que já é conhecido.

c) Sendo  $f: E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação definida por  $f(x) = \|x\|$ , determinar  $\text{grad}(f)_x$ , para cada  $x \in E \setminus \{0\}$ .

d) Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e  $g: A \rightarrow E$  uma aplicação de classe  $C^1$  tal que exista uma aplicação  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $g(x) = \text{grad}(f)_x$ , para cada  $x \in A$ . Mostrar que  $f$  é então de classe  $C^2$  e que, para cada  $x \in A$ , a aplicação linear  $Dg_x: E \rightarrow E$  é autoadjunta.

e) Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e estrelado relativamente a um dos seus pontos  $x_0$  e  $g: A \rightarrow E$  uma aplicação de classe  $C^1$  tal que, para cada  $x \in A$ , a aplicação linear  $Dg_x: E \rightarrow E$  seja autoadjunta. Mostrar que existe uma aplicação  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  tal que, para cada  $x \in A$ ,  $g(x) = \text{grad}(f)_x$ .

**Sugestão:** Aplicar 3.5.21 à composta de  $g$  com o isomorfismo  $\tilde{\gamma}: E \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$  associado ao produto interno.

f) No caso em que  $E = \mathbb{R}^n$  e  $A$  é um aberto estrelado relativamente a  $x_0$ , notar

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$$

e exprimir em termos das derivadas parciais das coordenadas  $g_j: A \rightarrow \mathbb{R}$  a hipótese de  $Dg_x$  ser autoadjunta. Será que a conclusão anterior exprime neste caso um resultado porventura já estudado nesse contexto?

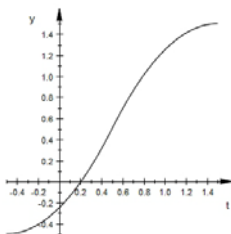
**Ex. 3.5.6 (Um resultado de aproximação de caminhos contínuos por caminhos de classe  $C^1$ )** Sendo  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ , vamos dizer que uma aplicação  $\gamma: [a, b] \rightarrow E$  de classe  $C^1$  é *concatenável* se  $\gamma'(a) = \gamma'(b) = 0$ .

a) **(A importância de se ser concatenável)** Sejam  $a < b < c$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, c] \rightarrow E$  uma aplicação tal que as restrições  $\gamma|_{[a,b]}$  e  $\gamma|_{[b,c]}$  sejam de classe  $C^1$  e concatenáveis. Mostrar que  $\gamma$  é uma aplicação de classe  $C^1$  concatenável. **Sugestão:** Para estudar a derivabilidade no ponto  $b$  examinar os limites à esquerda e à direita da expressão cujo limite define a derivada.

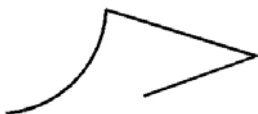
b) Se  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ , verificar que se pode definir uma bijeção de classe  $C^1$  estritamente crescente e concatenável  $\alpha: [a, b] \rightarrow [a, b]$  por

$$\alpha(t) = \begin{cases} a + \frac{2(t-a)^2}{b-a}, & \text{se } t \leq \frac{a+b}{2} \\ b - \frac{2(b-t)^2}{b-a}, & \text{se } t \geq \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

e que se tem  $\alpha(a) = a$  e  $\alpha(b) = b$ .



c) Mostrar que se  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow E$  é uma aplicação de classe  $C^1$  então, sendo  $\alpha: [a, b] \rightarrow [a, b]$  uma aplicação nas condições de b), a composta  $\gamma \circ \alpha: [a, b] \rightarrow E$  é uma aplicação de classe  $C^1$  concatenável com a mesma imagem que  $\gamma$ . Reparar que as conclusões de a) e c) permitem considerar aplicações de classe  $C^1$  tendo como imagem conjuntos como o sugerido a seguir.



**d)** Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo (cf. 3.3.6),  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  uma aplicação contínua. Mostrar que para cada  $\delta > 0$  existe uma aplicação de classe  $C^1$  concatenável  $\hat{\gamma}: [a, b] \rightarrow A$  com  $\hat{\gamma}(a) = \gamma(a)$ ,  $\hat{\gamma}(b) = \gamma(b)$  e  $\|\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)\| < \delta$  para cada  $t \in [a, b]$ .

**Sugestão:** Tendo em conta 3.3.7, considerar  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $B_\varepsilon(f(t)) \cap A$  seja convexo sempre que  $t \in [a, b]$  e  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Pela continuidade uniforme de  $\gamma$  considerar  $r > 0$  tal que

$$\|\gamma(t) - \gamma(t')\| < \min\left\{\frac{\delta}{2}, \varepsilon_0\right\}$$

sempre que  $|t - t'| < r$ . Escolher um inteiro  $n \geq 1$  tal que  $\frac{b-a}{n} < r$  e considerar a subdivisão

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

com  $a_j = a + \frac{j(b-a)}{n}$  e para cada  $1 \leq j \leq n$  uma aplicação de classe  $C^1$  concatenável  $\alpha_j: [a_{j-1}, a_j] \rightarrow [a_{j-1}, a_j]$  com  $\alpha_j(a_{j-1}) = a_{j-1}$  e  $\alpha_j(a_j) = a_j$ . Definir a aplicação  $\hat{\gamma}$  pela condição de se ter

$$\hat{\gamma}_j(t) = \frac{\alpha_j(t) - a_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} \gamma(a_{j-1}) + \frac{a_j - \alpha_j(t)}{a_j - a_{j-1}} \gamma(a_j) \in [[\gamma(a_{j-1}), \gamma(a_j)]]$$

sempre que  $t \in [a_{j-1}, a_j]$ .<sup>277</sup>



### Ex. 3.5.7 (Integral de forma diferencial fechada ao longo de um caminho contínuo)

Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo<sup>278</sup>,  $F$  um espaço de Banach e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma forma diferencial fechada de classe  $C^1$  (cf. a a alínea b) de 3.5.21).

**a)** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow A$  duas aplicações de classe  $C^1$  tais que  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ,  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ <sup>279</sup> e  $[[\gamma_0(t), \gamma_1(t)]] \subset A$  para cada  $t \in [a, b]$ . Mostrar que se tem então

<sup>277</sup>Reparar que na figura a seguir é a linha que parece mais regular que admitimos que possa ser meramente contínua e que é a poligonal que vai corresponder à aproximação de classe  $C^1$ ...

<sup>278</sup>Não necessariamente estrelado relativamente a algum dos seus pontos.

<sup>279</sup>Dois caminhos de classe  $C^1$  com as mesmas extremidades.

$$\int_{\gamma_0} \omega(x) dx = \int_{\gamma_1} \omega(x) dx.$$

**Sugestão:** Considerar, mais geralmente, uma aplicação  $\gamma_s: [a, b] \rightarrow A$  de classe  $C^1$  para cada  $s \in [0, 1]$  definida por

$$\gamma_s(t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) \in [[\gamma_0(t), \gamma_1(t)]]$$

e definir uma aplicação  $\varphi: [0, 1] \rightarrow F$  por

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_{\gamma_s} \omega(x) dx = \int_a^b \omega(\gamma_s(t))(\gamma'_s(t)) dt = \\ &= \int_a^b \omega((1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t))((1-s)\gamma'_0(t) + s\gamma'_1(t)) dt. \end{aligned}$$

Utilizar o teorema de derivação do integral paramétrico para mostrar que

$$\varphi'(s) = \int_a^b D\omega_{\gamma_s(t)}(\gamma_1(t) - \gamma_0(t))(\gamma'_s(t)) + \omega(\gamma_s(t))(\gamma'_1(t) - \gamma'_0(t)) dt$$

e deduzir que se tem  $\varphi'(s) = 0$ , utilizando o facto de  $\omega$  ser fechada para mostrar que para cada  $s \in [0, 1]$  a função integranda admite uma primitiva definida por

$$t \mapsto \omega(\gamma_s(t))(\gamma_1(t) - \gamma_0(t)).$$

**b)** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  uma aplicação contínua. Tendo em conta 3.3.7, considerar  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $B_\varepsilon(\gamma(t)) \cap A$  seja convexo sempre que  $t \in [a, b]$  e  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Verificar que fica bem definida uma noção de integral da forma diferencial fechada  $\omega$  ao longo do caminho  $\gamma$  pela condição de se ter

$$\int_{\gamma} \omega(x) dx = \int_{\hat{\gamma}} \omega(x) dx$$

qualquer que seja o caminho  $\hat{\gamma}: [a, b] \rightarrow A$  de classe  $C^1$  com  $\hat{\gamma}(a) = \gamma(a)$ ,  $\hat{\gamma}(b) = \gamma(b)$  e  $\|\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)\| < \varepsilon_0$  para cada  $t \in [a, b]$ . Mostrar ainda que este integral coincide com o definido anteriormente no caso em que o caminho  $\gamma$  já é de classe  $C^1$ .

**Sugestão:** A existência de  $\hat{\gamma}$  nas condições referidas decorre da alínea d) de exercício 3.5.6. Dados  $\hat{\gamma}_1$  e  $\hat{\gamma}_2$  nessas condições a igualdade  $\int_{\hat{\gamma}_1} \omega(x) dx = \int_{\hat{\gamma}_2} \omega(x) dx$  decorre da alínea a) do corrente exercício e da convexidade de cada  $B_{\varepsilon_0}(\gamma(t)) \cap A$ .

**c) (Subdivisão)** Sejam  $a < b < c$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, c] \rightarrow A$  uma aplicação contínua. Mostrar que

$$\int_{\gamma} \omega(x) dx = \int_{\gamma|_{[a,b]}} \omega(x) dx + \int_{\gamma|_{[b,c]}} \omega(x) dx.$$

**Sugestão:** Fixado  $\varepsilon_0$  nas condições de b), considerar aproximações  $\hat{\gamma}_1$  de  $\gamma|_{[a,b]}$  e  $\hat{\gamma}_2$  de  $\gamma|_{[b,c]}$  de classe  $C^1$  que sejam concatenáveis (cf. a alínea d) de exercício 3.5.6), “concatená-las” para obter uma aproximação  $\hat{\gamma}$  de  $\gamma$ , e ter em conta 3.5.25.

**d) (Invarância por pequenas variações)** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  uma aplicação contínua. Seja  $\varepsilon_0 > 0$  nas condições referidas em b). Sendo  $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow A$  outra aplicação contínua tal que  $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$ ,  $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$  e  $\|\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$  para cada  $t \in [a, b]$ , verificar que se tem

$$\int_{\gamma} \omega(x) dx = \int_{\tilde{\gamma}} \omega(x) dx.$$

**Sugestão:** Reparar que para cada  $t \in [a, b]$  e  $0 < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$  tem-se

$$B_{\varepsilon}(\tilde{\gamma}(t)) \subset B_{\varepsilon_0}(\gamma(t)),$$

em particular  $B_{\varepsilon}(\tilde{\gamma}(t)) \cap A$  é convexo. Sendo  $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow A$  de classe  $C^1$  tal que  $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(a)$ ,  $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(b)$  e  $\|\tilde{\gamma}'(t) - \gamma'(t)\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$  para cada  $t \in [a, b]$ , reparar que

$$\int_{\gamma} \omega(x) dx = \int_{\tilde{\gamma}} \omega(x) dx = \int_{\tilde{\gamma}} \omega(x) dx.$$

**e) (Invariância por homotopia)** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow A$  duas aplicações contínuas com  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ,  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$  e tais que exista uma *A-homotopia com extremidades fixas* da primeira para a segunda, isto é, uma aplicação contínua

$$H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$$

verificando as condições  $H(0, t) = \gamma_0(t)$ ,  $H(1, t) = \gamma_1(t)$ ,  $H(s, a) = \gamma_0(a)$  e  $H(s, b) = \gamma_0(b)$ <sup>280</sup>. Verificar que se tem

$$\int_{\gamma_0} \omega(x) dx = \int_{\gamma_1} \omega(x) dx.$$

**Sugestão:** Considerar para cada  $s \in [0, 1]$  o caminho contínuo  $\gamma_s: [a, b] \rightarrow A$ , com as mesmas extremidades que  $\gamma_0$  e que  $\gamma_1$ , definido por  $\gamma_s(t) = H(s, t)$ ; aplicando 3.3.7, considerar  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para cada  $(s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$  e  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  a interseção  $B_{\varepsilon}(H(s, t)) \cap A$  seja convexa. Utilizando a continuidade uniforme de  $H$  e a conclusão de d), verificar que existe  $r > 0$  tal que sempre que  $|s - s'| < r$  venha

$$\int_{\gamma_s} \omega(x) dx = \int_{\gamma_{s'}} \omega(x) dx.$$

**f) (Reparametrizações  $C^1$ )** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  uma aplicação contínua. Sendo  $a' < b'$  em  $\mathbb{R}$  verificar que existe uma aplicação  $\varphi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  de classe  $C^1$  com  $\varphi(a') = a$  e  $\varphi(b') = b$  e uma aplicação  $\psi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  de classe  $C^1$  com  $\psi(a') = b$  e  $\psi(b') = a$  e que quaisquer que sejam  $\varphi$  e  $\psi$  nessas condições tem-se

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega(x) dx = \int_{\gamma} \omega(x) dx, \quad \int_{\gamma \circ \psi} \omega(x) dx = - \int_{\gamma} \omega(x) dx.$$

**Sugestão:** Definir, por exemplo

$$\varphi(t) = a + \frac{t - a'}{b' - a'}(b - a), \quad \psi(t) = b + \frac{t - a'}{b' - a'}(a - b).$$

Reparar que as duas desigualdades são consequências diretas da definição do integral na alínea b) deste exercício, tendo em conta as conclusões das alíneas a) e b) de 3.5.26.

<sup>280</sup>As duas últimas exprimem que todos os caminhos  $\gamma_s: [a, b] \rightarrow A$ ,  $\gamma_s(t) = H(s, t)$ , têm as mesmas extremidades que  $\gamma_0$  (e que  $\gamma_1$ ).



**g) (Reparametrizações contínuas)** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  uma aplicação contínua. Sejam  $a' < b'$  em  $\mathbb{R}$  e consideremos uma aplicação contínua  $\widehat{\varphi}: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  tal que  $\widehat{\varphi}(a') = a$  e  $\widehat{\varphi}(b') = b$  (respetivamente uma aplicação contínua  $\widehat{\psi}: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  tal que  $\widehat{\psi}(a') = b$  e  $\widehat{\psi}(b') = a$ ). Verificar que se tem então

$$\int_{\gamma \circ \widehat{\varphi}} \omega(x) dx = \int_{\gamma} \omega(x) dx$$

(respetivamente

$$\int_{\gamma \circ \widehat{\psi}} \omega(x) dx = - \int_{\gamma} \omega(x) dx).$$

**Sugestão:** No primeiro caso considerar uma aplicação  $\varphi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  de classe  $C^1$  nas condições referidas em f) e utilizar a  $A$ -homotopia  $H: [0, 1] \times [a', b'] \rightarrow A$  definida por

$$H(s, t) = \gamma((1-s)\varphi(t) + s\widehat{\varphi}(t)).$$

No segundo caso proceder analogamente com as aplicações  $\psi$  e  $\widehat{\psi}$ .

**Ex. 3.5.8 (Invariância por homotopia de caminhos fechados)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo,  $F$  um espaço de Banach e  $\omega: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma forma diferencial fechada de classe  $C^1$ . Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  e  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow A$  duas aplicações contínuas verificando  $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$  e  $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ <sup>281</sup>. Suponhamos que existe uma  $A$ -homotopia de caminhos fechados da primeira para a segunda, isto é uma aplicação contínua

$$H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$$

tal que  $H(0, t) = \gamma_0(t)$ ,  $H(1, t) = \gamma_1(t)$  e  $H(s, a) = H(s, b)$ <sup>282</sup>. Mostrar que, tal como na alínea e) do exercício 3.5.7, tem-se

$$\int_{\gamma_0} \omega(x) dx = \int_{\gamma_1} \omega(x) dx.$$

**Sugestão generosa:** Considerar o caminho contínuo  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow A$  definido por

$$\tilde{\gamma}(s) = H(s, a) = H(s, b),$$

com  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma_0(a) = \gamma_0(b)$  e  $\tilde{\gamma}(1) = \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ , e os caminhos contínuos  $\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1: [a, b+1] \rightarrow A$  com as mesmas extremidades (embora não necessariamente fechados) definidos por

$$\widehat{\gamma}_0(t) = \begin{cases} \gamma_0(t), & \text{se } a \leq t \leq b \\ \tilde{\gamma}(t-b), & \text{se } b \leq t \leq b+1 \end{cases}, \quad \widehat{\gamma}_1(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(t-a), & \text{se } a \leq t \leq a+1 \\ \gamma_1(t-1), & \text{se } a+1 \leq t \leq b+1 \end{cases}.$$

Verificar que existe uma  $A$ -homotopia  $\widehat{H}: [0, 1] \times [a, b+1] \rightarrow A$ , com extremidades fixas, de  $\widehat{\gamma}_0$  para  $\widehat{\gamma}_1$  definida por

<sup>281</sup>Dois caminhos contínuos fechados. Ao contrário do contexto do exercício 3.5.7, não supomos, no entanto que as extremidades comuns do primeiro coincidam com as do segundo.

<sup>282</sup>A última condição exprime que todos os caminhos  $\gamma_s: [a, b] \rightarrow A$ ,  $\gamma_s(t) = H(s, t)$ , são fechados.

$$\widehat{H}(s, t) = \begin{cases} H(t - a, a), & \text{se } a \leq t \leq a + s \\ H(s, t - s), & \text{se } a + s \leq t \leq b + s \\ H(t - b, b), & \text{se } b + s \leq t \leq b + 1 \end{cases}$$

e deduzir da alínea da alínea e) do exercício 3.5.7 que

$$\int_{\gamma_0} \omega(x) dx = \int_{\gamma_1} \omega(x) dx.$$

Reparar que para justificar a continuidade das aplicações envolvidas será cómodo utilizar 1.4.28. Utilizar por fim os resultados sobre subdivisões e reparametrizações nas alíneas c) e f) do exercício 3.5.7 para verificar que se tem

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \omega(x) dx &= \int_{\gamma_0} \omega(x) dx + \int_{\gamma_0/[b, b+1]} \omega(x) dx, \\ \int_{\gamma_1} \omega(x) dx &= \int_{\gamma_1/[a, a+1]} \omega(x) dx + \int_{\gamma_1/[a+1, b+1]} \omega(x) dx, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega(x) dx &= \int_{\gamma_1} \omega(x) dx, \\ \int_{\gamma_0/[b, b+1]} \omega(x) dx &= \int_{\tilde{\gamma}} \omega(x) dx = \int_{\gamma_1/[a, a+1]} \omega(x) dx. \end{aligned}$$

## §6. Equações diferenciais lineares.

**3.6.1** No que se segue vamos situar-nos num contexto em que temos dois espaços vetoriais normados  $G$  e  $F$  sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach, e uma aplicação bilinear contínua  $\rho: G \times F \rightarrow F$  e será cómodo utilizar com frequência a “notação multiplicativa”  $z \times y$ , com  $z \in G$  e  $y \in F$  como alternativa a  $\rho(z, y)$  (comparar com o referido em 3.1.27).

Como concretizações deste contexto que aparecem frequentemente, referimos por exemplo:

- O caso em que  $G = F = \mathbb{K}$  e em que  $\rho$  é a multiplicação usual.
- Mais geralmente, o caso em que  $F$  é um espaço de Banach sobre  $\mathbb{K}$ ,  $G = \mathbb{K}$  e  $\rho$  é a multiplicação de um escalar por um vetor.
- O caso em que  $F$  é um espaço de Banach,  $G = \mathcal{L}(F; F)$  e  $\rho$  é a aplicação de avaliação,  $\rho(\lambda, y) = \lambda(y)$ .
- O caso, em que  $G$  é o espaço das matrizes  $n \times n$  sobre  $\mathbb{K}$ ,  $F = \mathbb{K}^n$ , onde identificamos um elemento deste espaço com uma matriz coluna, e  $\rho$  é a multiplicação de matrizes.

Repare-se que, em teoria, poderíamos dispensar a generalidade da conside-

ração do espaço vetorial normado  $G$  e da aplicação bilinear  $\rho$ , limitando-nos ao caso particular referido em c). Com efeito, no caso geral, tem-se então

$$z \times y = \rho(z, y) = \rho'(z)(y),$$

onde  $\rho': G \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$  é a aplicação linear contínua associada a  $\rho$  (nas notações de 2.1.43,  $\rho' = \Upsilon_1(\rho)$ ). A consideração da situação mais geral será no entanto cómoda em várias situações concretas.

**3.6.2 (Equações diferenciais lineares)** Sejam  $G$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach e  $G \times F \rightarrow F$ ,  $(z, y) \mapsto z \times y$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $\Gamma: J \rightarrow G$  e  $\gamma: J \rightarrow F$  duas aplicações contínuas. Diz-se que uma aplicação  $f: J \rightarrow F$  é uma *solução da equação diferencial linear* definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  se  $f$  for diferenciável em cada  $t \in J$  e com

$$(1) \quad f'(t) = \Gamma(t) \times f(t) + \gamma(t).$$

Quando isso acontecer, sendo  $t_0 \in J$  e  $y_0 = f(t_0)$ , dizemos que a solução tem a *condição inicial*  $(t_0, y_0)$  (ou a condição inicial  $f(t_0) = y_0$ ).

No caso em que a aplicação  $\gamma: J \rightarrow F$  é identicamente 0 diz-se que a equação diferencial linear é *homogénea*.

Repare-se que se  $f: J \rightarrow F$  é solução da equação diferencial linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  então  $f$  é contínua, por ser diferenciável em cada ponto e daqui decorre, por (1), que  $f': J \rightarrow F$  é contínua, ou seja, que  $f$  é de classe  $C^1$ .

**3.6.3** Mais geralmente, nas condições de 3.6.2, se as aplicações  $\Gamma: J \rightarrow G$  e  $\gamma: J \rightarrow F$  forem de classe  $C^k$  (onde  $k \geq 0$ ) então uma solução  $f: J \rightarrow F$  da equação diferencial linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  é de classe  $C^{k+1}$ . Em consequência, se  $\Gamma$  e  $\gamma$  forem de classe  $C^\infty$ , o mesmo acontece a  $f$ .

**Dem:** O caso em que  $k = 0$  já foi justificado na definição. Para o caso geral, demonstramos por indução em  $p$  que  $f$  é de classe  $C^p$  para cada  $p \leq k + 1$ , o passo de indução resultando de que se  $f$  é de classe  $C^p$  para um certo  $p \leq k$  então pela identidade (1) na definição a aplicação  $f': J \rightarrow F$  é de classe  $C^p$  e portanto  $f$  é de classe  $C^{p+1}$ .  $\square$

Em mais que uma situação adiante encontraremos resultados, como o teorema de existência e unicidade de solução, que são mais facilmente demonstrados no caso particular em que o intervalo não trivial  $J$  com que se trabalha é um intervalo fechado e limitado  $[a, b]$  com  $a < b$ . O lema que examinamos em seguida servirá para provar esses resultados na situação mais geral a partir do que for estabelecido previamente para o caso particular referido. Repare-se que esse lema já foi proposto na sugestão de resolução da alínea b) do exercício 3.5.3.

**3.6.4 (Lema)** Sejam  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $a', b'$  em  $J$ . Existem então  $a < b$  em  $J$  tais que  $a'$  e  $b'$  pertençam ao interior de  $[a, b]$  em  $J$ .

**Dem:** Tomamos para  $b$  o máximo entre  $a'$  e  $b'$ , no caso em que esse máximo

seja um máximo do intervalo  $J$ , e um elemento de  $J$  maior que esse máximo, caso contrário. Tomamos para  $a$  o mínimo entre  $a'$  e  $b'$ , no caso em que esse mínimo seja um mínimo do intervalo  $J$  e um elemento de  $J$  menor que esse mínimo, caso contrário.  $\square$

**3.6.5 (Teorema de existência e unicidade)** Sejam  $G$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach e  $G \times F \rightarrow F$ ,  $(z, y) \mapsto z \times y$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial e  $\Gamma: J \rightarrow G$  e  $\gamma: J \rightarrow F$  duas aplicações contínuas. Dados  $t_0 \in J$  e  $y_0 \in F$  existe então uma, e uma só solução  $f$  da equação diferencial linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  verificando a condição inicial  $f(t_0) = y_0$ .

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

**1)** Nesta alínea e nas próximas, até explicitação em contrário, vamos supor que o intervalo não trivial  $J$  é fechado e limitado, isto é, que  $J = [a, b]$  com  $a < b$ . Começemos por estabelecer a existência de  $M \geq 0$  tal que para cada  $t \in [a, b]$  e  $y \in F$  se tenha

$$\|\Gamma(t) \times y\| \leq M\|y\|.$$

**Subdem:** A continuidade da multiplicação  $G \times F \rightarrow F$  garante-nos a existência de  $m \geq 0$  tal que  $\|z \times y\| \leq m\|z\|\|y\|$  para cada  $z \in G$  e  $y \in F$  e, sendo então  $r \geq 0$  o máximo da função contínua do compacto  $[a, b]$  para  $\mathbb{R}$  que a  $t$  associa  $\|\Gamma(t)\|$ , vemos que se tem

$$\|\Gamma(t) \times y\| \leq m\|\Gamma(t)\|\|y\| \leq mr\|y\|.$$

**2)** Consideremos o espaço de Banach  $\mathcal{C}([a, b], F)$  das aplicações contínuas  $f: [a, b] \rightarrow F$  com a norma  $\|\cdot\|_\infty$  (cf. 2.2.8). Podemos definir uma aplicação

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{C}([a, b], F) &\rightarrow \mathcal{C}([a, b], F), \\ \Phi(f)(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t \Gamma(s) \times f(s) + \gamma(s) ds \end{aligned}$$

e então uma aplicação contínua  $f: [a, b] \rightarrow F$  é uma solução da equação diferencial linear com a condição inicial  $f(t_0) = y_0$  se, e só se, for um ponto fixo de  $\Phi$ , isto é, verificar  $\Phi(f) = f$ .<sup>283</sup>

**Subdem:** Começamos por reparar que para cada  $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$  decorre de 3.5.12 que a aplicação  $\Phi(f): [a, b] \rightarrow F$  definida atrás não só pertence a  $\mathcal{C}([a, b], F)$  como é mesmo de classe  $\mathcal{C}^1$  e com

$$\Phi(f)'(t) = \Gamma(t) \times f(t) + \gamma(t),$$

tendo-se também  $\Phi(f)(t_0) = y_0$ . Desta observação decorre já que se  $\Phi(f) = f$  então  $f$  é uma solução da equação diferencial linear com a

<sup>283</sup>Transformámos assim a procura de uma solução da equação diferencial linear com a condição inicial dada na procura de um ponto fixo para uma aplicação  $\Phi$  de um espaço métrico completo não vazio em si mesmo. A razão porque não podemos obter a solução imediatamente está no facto de, em geral, a aplicação  $\Phi$  não ter que ser contratante.

condição inicial  $f(t_0) = y_0$ . Reciprocamente, se  $f$  for uma solução da equação diferencial linear com  $f(t_0) = y_0$ , resulta de regra de Barrow em 3.5.13 que

$$\begin{aligned}\Phi(f)(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t \Gamma(s) \times f(s) + \gamma(s) ds = \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f'(s) ds = y_0 + f(t) - f(t_0) = f(t),\end{aligned}$$

ou seja  $\Phi(f) = f$ .

**3)** Consideremos para cada  $k \geq 1$  a iterada  $\Phi^k: \mathcal{C}([a, b], F) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$  definida por  $\Phi^k = \Phi \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi$  ( $k$  vezes). Vamos verificar, por indução em  $k$ , que quaisquer que sejam  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], F)$ ,  $t \in [a, b]$  e  $k \geq 1$  tem-se

$$\|\Phi^k(f)(t) - \Phi^k(g)(t)\| \leq \frac{M^k}{k!} |t - t_0|^k \|f - g\|_\infty.$$

**Subdem:** Para  $k = 1$ , vem

$$\begin{aligned}\|\Phi(f)(t) - \Phi(g)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \Gamma(s) \times (f(s) - g(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\Gamma(s) \times (f(s) - g(s))\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M \|f - g\|_\infty ds \right| = \\ &= M |t - t_0| \|f - g\|_\infty.\end{aligned}$$

Suponhamos que a desigualdade válida para um certo  $k$ . Tem-se então

$$\begin{aligned}\|\Phi^{k+1}(f)(t) - \Phi^{k+1}(g)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \Gamma(s) \times (\Phi^k(f)(s) - \Phi^k(g)(s)) ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\Gamma(s) \times (\Phi^k(f)(s) - \Phi^k(g)(s))\| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M \|\Phi^k(f)(s) - \Phi^k(g)(s)\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{M^{k+1}}{k!} |s - t_0|^k \|f - g\|_\infty ds \right| = \\ &= \frac{M^{k+1}}{k!} \|f - g\|_\infty \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^k ds \right| = \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1} \|f - g\|_\infty.\end{aligned}$$

onde na última igualdade atendemos a que se  $t \geq t_0$  vem

$$\int_{t_0}^t |s - t_0|^k ds = \int_{t_0}^t (s - t_0)^k ds = \frac{(t - t_0)^{k+1}}{k+1}$$

e se  $t \leq t_0$  vem

$$\int_{t_0}^t |s - t_0|^k ds = \int_{t_0}^t (t_0 - s)^k ds = \frac{(t_0 - t)^{k+1}}{k+1}.$$

4) Uma vez que para cada  $t \in [a, b]$  tem-se  $|t - t_0| \leq b - a$ , o que vimos em 3) mostra que se  $k \geq 1$  e se  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], F)$  tem-se

$$(1) \quad \|\Phi^k(f) - \Phi^k(g)\|_\infty \leq \frac{(M(b-a))^k}{k!} \|f - g\|_\infty.$$

Podemos então fixar  $k \geq 1$  tal que

$$(2) \quad \frac{(M(b-a))^k}{k!} < 1,$$

o que implica, para um tal  $k$ , a existência e unicidade de  $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$  tal que  $\Phi^k(f) = f$ .

**Subdem:** A existência de  $k \geq 1$  verificando (2) é uma consequência de se ter  $\frac{(M(b-a))^k}{k!} \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , facto básico bem conhecido no contexto das sucessões de números reais e facilmente recordado no contexto da convergência da série associada à função exponencial. Para um tal  $k$  a desigualdade (1) mostra que  $\Phi^k: \mathcal{C}([a, b], F) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$  é uma aplicação contratante e portanto a existência e unicidade de  $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$  tal que  $\Phi^k(f) = f$  resulta do teorema do ponto fixo em 1.7.16.

5) Vamos agora verificar que o único  $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$  que verifica  $\Phi^k(f) = f$  é também o único  $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$  que verifica  $\Phi(f) = f$ .

**Subdem:** Quanto à existência, notamos que, sendo  $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$  tal que  $\Phi^k(f) = f$ , vem

$$\Phi(f) = \Phi(\Phi^k(f)) = \Phi^{k+1}(f) = \Phi^k(\Phi(f))$$

pelo que, pela unicidade do ponto fixo de  $\Phi^k$ , vemos que  $\Phi(f) = f$ . Quanto à unicidade, basta reparar que se for  $\Phi(f) = f$  verifica-se por indução que também  $\Phi^k(f) = f$  visto que, sendo  $1 \leq j < k$  com  $\Phi^j(f) = f$  vem também

$$\Phi^{j+1}(f) = \Phi^j(\Phi(f)) = \Phi^j(f) = f.$$

6) Tal como referimos em 2), a conclusão de (5) implica, no caso em que  $J = [a, b]$ , a existência e unicidade de uma solução da equação diferencial linear com a condição inicial  $(t_0, y_0)$ , o que termina a demonstração do teorema no caso particular em que  $J = [a, b]$ . Vamos verificar agora que, no caso geral em que  $J$  é um intervalo não trivial, ainda podemos garantir a existência e unicidade de uma solução definida em  $J$  com aquela condição inicial.

**Subdem:** Começemos por provar a unicidade. Sejam então  $f, g: J \rightarrow F$  duas soluções da equação diferencial linear verificando  $f(t_0) = y_0 = g(t_0)$  e seja  $t \in J$  arbitrário. Tendo em conta o lema 3.6.4, consideremos  $a < b$  em  $J$  tais que  $t_0$  e  $t$  pertençam a  $[a, b]$ . Uma vez que a restrição de uma solução a um subintervalo não trivial do domínio é ainda trivialmente uma solução, vemos que  $f|_{[a,b]}$  e  $g|_{[a,b]}$  são soluções com uma mesma condição inicial o que, tendo em conta o caso particular já demonstrado, implica que aquelas duas

restrições coincidem, em particular

$$f(t) = f_{/[a,b]}(t) = g_{/[a,b]}(t) = g(t).$$

Tendo em conta a arbitrariedade de  $t \in J$  provámos assim que se tem efetivamente  $f = g$ . Provemos agora a existência de solução. Seja  $t \in J$  arbitrário. Mais uma vez pelo lema 3.6.4 consideremos  $a < b$  em  $J$  tais que  $t_0$  e  $t$  pertençam ao interior de  $[a, b]$  em  $J$  e, pelo caso particular já demonstrado, seja  $f_{(a,b)}: [a, b] \rightarrow F$  uma solução da equação diferencial linear com  $f_{(a,b)}(t_0) = y_0$ . Definimos então  $f(t) = f_{(a,b)}(t)$  e reparamos que o valor  $f(t)$  não depende da escolha que fizemos do intervalo  $[a, b]$ . Com efeito, considerando outro intervalo  $[a', b']$  nas mesmas condições com a correspondente solução  $f_{(a',b')}: [a', b'] \rightarrow F$ , tem-se que

$$[a, b] \cap [a', b'] = [a'', b''],$$

com  $a'' = \max\{a, a'\}$  e  $b'' = \min\{b, b'\}$ , ainda e um intervalo do mesmo tipo o que, pela unicidade de solução, implica que as restrições de  $f_{(a,b)}$  e  $f_{(a',b')}$  a  $[a'', b'']$  coincidem, por serem soluções uma mesma equação diferencial linear com a condição inicial  $(t_0, y_0)$ , em particular  $f_{(a,b)}(t) = f_{(a',b')}(t)$ . É claro que, por construção, tem-se  $f(t_0) = y_0$  e, para cada  $t_1 \in J$ , podemos escolher  $[a, b]$  de modo que  $t_0$  e  $t_1$  pertençam ao interior de  $[a, b]$  em  $J$  e o carácter local da diferenciabilidade (cf. 3.1.16) garante que  $f$  é diferenciável em  $t_1$  e que

$$f'(t_1) = f'_{(a,b)}(t_1) = \Gamma(t_1) \times f_{(a,b)}(t_1) + \gamma(t_1) = \Gamma(t_1) \times f(t_1) + \gamma(t_1),$$

o que mostra que  $f: J \rightarrow F$  é uma solução da equação diferencial linear.  $\square$

Vamos estudar em seguida o modo como varia a solução de uma equação diferencial linear quando se modifica a própria equação. Um modo de concretizar este objetivo é introduzir um espaço topológico  $X$  de parâmetros, considerar aplicações contínuas  $\Gamma: X \times J \rightarrow G$  e  $\gamma: X \times J \rightarrow F$  e, dados  $t_0 \in J$  e  $y_0 \in F$ , associar a cada  $x \in X$  a solução  $f_{(x)}: J \rightarrow F$  da equação diferencial linear

$$f'_{(x)}(t) = \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t)$$

com a condição inicial  $f_{(x)}(t_0) = y_0$ , estudando o modo como essa solução depende de  $x$ , mais precisamente, no caso em que  $J = [a, b]$ , estudar a aplicação  $X \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$  que a  $x$  associa  $f_{(x)}$  e, no caso geral, estudar a aplicação  $X \times J \rightarrow F$  que a  $(x, t)$  associa  $f_{(x)}(t)$ . Como instrumento básico de apoio a esse estudo utilizaremos o lema de Gronwall que examinamos em seguida.

**3.6.6 (Lema de Gronwall)** Sejam  $\varphi: J \rightarrow [0, +\infty[$  uma aplicação contínua, onde  $J \subset \mathbb{R}$  é um intervalo não trivial, e  $t_0 \in J$  e  $c, r \geq 0$  duas constantes

tais que para cada  $t \in J$

$$\varphi(t) \leq c + r \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right|.$$

Tem-se então, para cada  $t \in J$ ,

$$\varphi(t) \leq c e^{r|t-t_0|}.$$

**Dem:** Começamos por observar que a desigualdade é trivialmente verdadeira para  $t = t_0$ . Provemos separadamente a desigualdade para valores  $t > t_0$  em  $J$ , caso existam, e para valores  $t < t_0$  em  $J$ , caso existam.

**1)** Suponhamos que existem valores  $t > t_0$  em  $J$  e notemos  $J_+$  o intervalo não trivial constituído pelos elementos de  $J$  maiores ou iguais a  $t_0$ . Para cada  $t \in J_+$  tem-se, por hipótese,

$$\varphi(t) \leq c + r \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| = c + r \int_{t_0}^t \varphi(s) ds,$$

portanto  $\varphi(t) \leq \psi(t)$ , onde  $\psi: J_+ \rightarrow [0, +\infty[$  é a função diferenciável definida por

$$\psi(t) = c + r \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$$

que verifica  $\psi(t_0) = c$  e  $\psi'(t) = r\varphi(t)$ . Sendo enfim  $\theta: J_+ \rightarrow [0, +\infty[$  a aplicação diferenciável definida por

$$\theta(t) = \psi(t)e^{-r(t-t_0)}$$

que verifica  $\theta(t_0) = \psi(t_0) = c$  e

$$\theta'(t) = \psi'(t)e^{-r(t-t_0)} - r\psi(t)e^{-r(t-t_0)} = r(\varphi(t) - \psi(t))e^{-r(t-t_0)} \leq 0,$$

notamos que  $\theta$  é decrescente e portanto para cada  $t \in J_+$

$$\varphi(t) \leq \psi(t) = \theta(t)e^{r(t-t_0)} \leq \theta(t_0)e^{r(t-t_0)} = c e^{r|t-t_0|}.$$

**2)** Suponhamos que existem valores  $t < t_0$  em  $J$  e notemos  $J_-$  o intervalo não trivial constituído pelos elementos de  $J$  menores ou iguais a  $t_0$ . Para cada  $t \in J_-$  tem-se, por hipótese,

$$\varphi(t) \leq c + r \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| = c - r \int_{t_0}^t \varphi(s) ds,$$

portanto  $\varphi(t) \leq \psi(t)$ , onde  $\psi: J_- \rightarrow [0, +\infty[$  é a função diferenciável definida por



$$\psi(t) = c - r \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$$

que verifica  $\psi(t_0) = c$  e  $\psi'(t) = -r\varphi(t)$ . Sendo enfim  $\theta: J_- \rightarrow [0, +\infty[$  a aplicação diferenciável definida por

$$\theta(t) = \psi(t)e^{r(t-t_0)}$$

que verifica  $\theta(t_0) = \psi(t_0) = c$  e

$$\theta'(t) = \psi'(t)e^{r(t-t_0)} + r\psi(t)e^{r(t-t_0)} = r(\psi(t) - \varphi(t))e^{r(t-t_0)} \geq 0,$$

notamos que  $\theta$  é crescente e portanto para cada  $t \in J_-$

$$\varphi(t) \leq \psi(t) = \theta(t)e^{-r(t-t_0)} \leq \theta(t_0)e^{-r(t-t_0)} = ce^{r|t-t_0|}. \quad \square$$

**3.6.7 (Continuidade da solução relativamente ao parâmetro I)** Sejam  $G$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach e  $G \times F \rightarrow F$ ,  $(z, y) \mapsto z \times y$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $X$  um espaço topológico,  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $y_0 \in F$  e

$$\Gamma: X \times [a, b] \rightarrow G, \quad \gamma: X \times [a, b] \rightarrow F$$

duas aplicações contínuas. Considerando para cada  $x \in X$  a aplicação  $f_{(x)}: [a, b] \rightarrow F$  definida pelas condições

$$\begin{aligned} f'_{(x)}(t) &= \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t) \\ f_{(x)}(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

(solução da equação diferencial linear associada ao valor  $x$  do parâmetro, com a condição inicial  $(t_0, y_0)$ ), é então contínua a aplicação  $X \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$  que a  $x$  associa  $f_{(x)}$ , onde consideramos no espaço de chegada a estrutura de espaço de Banach determinada pela norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Dem:** Provemos a continuidade da aplicação referida num ponto  $x_1 \in X$ , para o que fixamos  $\delta > 0$  arbitrário.

Fixemos agora cuidadosamente algumas constantes positivas.

Seja  $m \geq 0$  tal que

$$(1) \quad \|z \times y\| \leq m\|z\|\|y\|$$

quaisquer que sejam  $z \in G$  e  $y \in F$ .

Seja  $r \geq 0$  o máximo dos dois números

$$(2) \quad \max_{t \in [a, b]} \|\Gamma(x_1, t)\|, \quad \max_{t \in [a, b]} \|f_{(x_1)}(t)\|.$$

Seja  $\delta' > 0$  tal que

$$(3) \quad \delta'(1 + mr)(b - a)e^{m(r+1)(b-a)} \leq \delta.$$

Tendo em conta o tipo de continuidade uniforme estabelecido em 1.6.40, consideremos uma vizinhança  $U$  de  $x_1$  em  $X$  tal que quaisquer que sejam  $x \in U$  e  $t \in [a, b]$  venha

$$(4) \quad \begin{aligned} \|\Gamma(x, t) - \Gamma(x_1, t)\| &\leq \min\{1, \delta'\}, \\ \|\gamma(x, t) - \gamma(x_1, t)\| &\leq \delta', \end{aligned}$$

em particular também

$$(5) \quad \|\Gamma(x, t)\| \leq \|\Gamma(x, t) - \Gamma(x_1, t)\| + \|\Gamma(x_1, t)\| \leq r + 1.$$

Uma vez que, para cada  $x \in X$  e  $t \in [a, b]$  a regra de Barrow (cf. 3.5.13) garante que

$$f_{(x)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f'_{(x)}(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t \Gamma(x, s) \times f_{(x)}(s) + \gamma(x, s) ds,$$

deduzimos agora que para cada  $x \in U$  e  $t \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} &\|f_{(x)}(t) - f_{(x_1)}(t)\| = \\ &= \left\| \int_{t_0}^t \Gamma(x, s) \times f_{(x)}(s) - \Gamma(x_1, s) \times f_{(x_1)}(s) + \gamma(x, s) - \gamma(x_1, s) ds \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\Gamma(x, s) \times (f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s)) + (\Gamma(x, s) - \Gamma(x_1, s)) \times f_{(x_1)}(s) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma(x, s) - \gamma(x_1, s)\| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\Gamma(x, s) \times (f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s))\| + \|(\Gamma(x, s) - \Gamma(x_1, s)) \times f_{(x_1)}(s)\| + \right. \\ &\quad \left. + \|\gamma(x, s) - \gamma(x_1, s)\| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t m(r+1) \|f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s)\| + mr\delta' + \delta' ds \right| \leq \\ &\leq \delta'(1+mr)(b-a) + m(r+1) \left| \int_{t_0}^t \|f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s)\| ds \right| \end{aligned}$$

pelo que o lema de Gronwall em 3.6.6 implica que para cada  $x \in U$

$$\begin{aligned} \|f_{(x)}(t) - f_{(x_1)}(t)\| &\leq \delta'(1+mr)(b-a)e^{m(r+1)|t-t_0|} \leq \\ &\leq \delta'(1+mr)(b-a)e^{m(r+1)(b-a)} \leq \delta, \end{aligned}$$

e portanto  $\|f_{(x)} - f_{(x_1)}\|_\infty \leq \delta$ , o que prova a continuidade pretendida.  $\square$

**3.6.8 (Continuidade da solução relativamente ao parâmetro II)** Sejam  $G$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach e  $G \times F \rightarrow F$ ,  $(z, y) \mapsto z \times y$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $X$  um espaço topológico,  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial,  $t_0 \in J$ ,  $y_0 \in F$  e  $\Gamma: X \times J \rightarrow G$  e  $\gamma: X \times J \rightarrow F$  duas aplicações contínuas. Considerando

para cada  $x \in X$  a aplicação  $f_{(x)}: J \rightarrow F$  definida pelas condições

$$\begin{aligned} f'_{(x)}(t) &= \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t) \\ f_{(x)}(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

é então contínua a aplicação  $\Phi: X \times J \rightarrow F$  definida por  $\Phi(x, t) = f_{(x)}(t)$ .

**Dem:** Provemos a continuidade de  $\Phi$  num ponto  $(x_1, t_1) \in X \times J$ . Tendo em conta o lema 3.6.4, consideremos  $a < b$  em  $J$  tais que  $t_0$  e  $t_1$  pertençam ao interior de  $[a, b]$  em  $J$ . Uma vez que  $(x_1, t_1)$  pertence ao interior de  $X \times [a, b]$  em  $X \times J$  bastará provar a continuidade em  $(x_1, t_1)$  da restrição de  $\Phi$  a  $X \times [a, b]$ . Ora, dado  $\delta > 0$  deduzimos de 3.6.7 a existência de uma vizinhança  $U$  de  $x_1$  em  $X$  tal que para cada  $x \in U$  se tenha

$$\|f_{(x)}/_{[a,b]} - f_{(x_1)}/_{[a,b]}\|_{\infty} \leq \frac{\delta}{2}$$

e da continuidade da aplicação  $f_{(x_1)}: J \rightarrow F$  a existência de  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\|f_{(x_1)}(t) - f_{(x_1)}(t_1)\| < \frac{\delta}{2}$$

para cada  $t \in J$  com  $|t - t_1| < \varepsilon$  concluindo-se finalmente que, sempre que  $x \in U$  e  $t \in [a, b]$  verifica  $|t - t_1| < \varepsilon$  vem

$$\begin{aligned} \|\Phi(x, t) - \Phi(x_1, t_1)\| &= \|f_{(x)}(t) - f_{(x_1)}(t) + f_{(x_1)}(t) - f_{(x_1)}(t_1)\| \leq \\ &\leq \|f_{(x)}/_{[a,b]} - f_{(x_1)}/_{[a,b]}\|_{\infty} + \|f_{(x_1)}(t) - f_{(x_1)}(t_1)\| < \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \quad \square \end{aligned}$$

Vamos agora aprofundar o que estabelecemos em 3.6.7 e 3.6.8 encontrando hipóteses sob as quais podemos garantir propriedades de diferenciabilidade para as aplicações contínuas

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathcal{C}([a, b], F), \quad x \mapsto f_{(x)}, \\ \Phi: X \times J &\rightarrow F, \quad \Phi(x, t) = f_{(x)}(t), \end{aligned}$$

supondo naturalmente que  $X$  será agora uma parte dum espaço vetorial normado. Será cómodo utilizar na demonstração que vamos apresentar o lema a seguir, que não tem relação nenhuma com as equações diferenciais que estamos a estudar.

**3.6.9 (Lema)** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$  e  $X$  um espaço topológico compacto não vazio e consideremos nos espaços de aplicações contínuas  $\mathcal{C}(X, F)$  e  $\mathcal{C}(X, \mathcal{L}(E; F))$  as normas  $\|\cdot\|_{\infty}$  (cf. 2.1.26). Tem então lugar uma aplicação linear contínua

$$\Psi: \mathcal{C}(X, \mathcal{L}(E; F)) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{C}(X, F)),$$

com  $\|\Psi\| \leq 1$ , definida por

$$\Psi(f)(u)(x) = f(x)(u).$$

**Dem:** Para cada  $u \in E$  tem lugar uma aplicação linear contínua de  $\mathcal{L}(E; F)$  para  $F$  que a  $\lambda$  associa  $\lambda(u)$ , para a qual se tem  $\|\lambda(u)\| \leq \|u\|\|\lambda\|$ . Para cada  $f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{L}(E; F))$  e  $u \in E$  podemos assim considerar um elemento de  $\mathcal{C}(X, F)$ , composição de  $f$  com a aplicação linear contínua referida, que a  $x$  associa  $f(x)(u)$ , aplicação que estamos a designar  $\Psi(f)(u)$  e que verifica portanto

$$\|\Psi(f)(u)(x)\| \leq \|f(x)\|\|u\| \leq \|f\|_\infty\|u\|,$$

donde

$$\|\Psi(f)(u)\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|u\|.$$

A aplicação  $\Psi(f)$ , que a  $u$  associa  $\Psi(f)(u)$ , que é trivialmente linear, é assim contínua e com  $\|\Psi(f)\| \leq \|f\|_\infty$  e daqui decorre que a aplicação  $\Psi$ , que é trivialmente linear, é contínua e com  $\|\Psi\| \leq 1$ .  $\square$

**3.6.10 (Diferenciabilidade da solução relativamente ao parâmetro I)** Sejam  $G$  e  $F$  dois espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach e  $\rho: G \times F \rightarrow F$ ,  $(z, y) \mapsto z \times y$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $E$  um espaço vectorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $X \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo,  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $y_0 \in F$  e

$$\Gamma: X \times [a, b] \rightarrow G, \quad \gamma: X \times [a, b] \rightarrow F$$

duas aplicações contínuas, parcialmente diferenciáveis relativamente à primeira variável e tais que as aplicações

$$(1) \quad D_1\Gamma: X \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E; G), \quad D_1\gamma: X \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$$

sejam contínuas. Tem-se então que a aplicação contínua  $X \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$  que a  $x \in X$  associa a aplicação  $f_{(x)}: [a, b] \rightarrow F$  definida pelas condições

$$\begin{aligned} f'_{(x)}(t) &= \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t) \\ f_{(x)}(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

(cf. 3.6.7) é mesmo de classe  $C^1$ . Mais precisamente,

1) Podemos considerar aplicações bilineares contínuas

$$\begin{aligned} \hat{\rho}: G \times \mathcal{L}(E; F) &\rightarrow \mathcal{L}(E; F), & \hat{\rho}(z, \lambda)(u) &= \rho(z, \lambda(u)), \\ \tilde{\rho}: \mathcal{L}(E; G) \times F &\rightarrow \mathcal{L}(E; F), & \tilde{\rho}(\mu, y)(u) &= \rho(\mu(u), y), \end{aligned}$$

para as quais utilizaremos, como para  $\rho$ , a notação multiplicativa  $\times$ .

2) Podemos considerar uma aplicação contínua

$$\widehat{\gamma}: X \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E; F), \quad \widehat{\gamma}(x, t) = D_1\Gamma_{(x,t)} \times f_{(x)}(t) + D_1\gamma_{(x,t)}.^{284}$$

**3)** Sendo, para cada  $x \in X$ ,  $\widehat{f}_{(x)}: [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  a aplicação definida pelas condições

$$(2) \quad \begin{aligned} \widehat{f}'_{(x)}(t) &= \Gamma(x, t) \times \widehat{f}_{(x)}(t) + \widehat{\gamma}(x, t)^{285} \\ \widehat{f}_{(x)}(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

o diferencial em  $x$  da aplicação

$$X \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F), \quad x \mapsto f_{(x)},$$

é a aplicação linear contínua  $\lambda_x: E \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$  tal que  $\lambda_x(u)$  é a aplicação contínua  $t \mapsto \widehat{f}_{(x)}(t)(u)$ .

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

**a)** Seja  $m \geq 0$  tal que

$$(3) \quad \|\rho(z, y)\| \leq m\|z\|\|y\|$$

quaisquer que sejam  $z \in G$  e  $y \in F$ . Dados  $z \in G$  e  $\lambda \in \mathcal{L}(E; F)$ , tem-se para cada  $u \in E$

$$\|\rho(z, \lambda(u))\| \leq m\|z\|\|\lambda(u)\| \leq m\|z\|\|\lambda\|\|u\|,$$

o que mostra que a aplicação  $\widehat{\rho}(z, \lambda)$ , que a  $u$  associa  $\rho(z, \lambda(u))$ , que é trivialmente linear, é contínua e com

$$(4) \quad \|\widehat{\rho}(z, \lambda)\| \leq m\|z\|\|\lambda\|$$

e portanto que  $\widehat{\rho}$ , que é trivialmente bilinear, é contínua. Analogamente, dados  $\mu \in \mathcal{L}(E; G)$  e  $y \in F$ , tem-se para cada  $u \in E$

$$\|\rho(\mu(u), y)\| \leq m\|\mu(u)\|\|y\| \leq m\|\mu\|\|u\|\|y\|,$$

o que implica que a aplicação  $\tilde{\rho}(\mu, y)$ , que a  $u$  associa  $\rho(\mu(u), y)$ , que é trivialmente linear, é contínua e com

$$(5) \quad \|\tilde{\rho}(\mu, y)\| \leq m\|\mu\|\|y\|$$

o que mostra que  $\tilde{\rho}$ , que é trivialmente bilinear, é contínua.

**b)** A continuidade da aplicação  $\widehat{\gamma}: X \times [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  definida em 2) resulta da continuidade das aplicações  $D_1\Gamma$  e  $D_1\gamma$  em (1) e da continuidade da aplicação  $\Phi: X \times [a, b] \rightarrow F$ ,  $\Phi(x, t) = f_{(x)}(t)$  (cf. 3.6.8), tendo em conta o facto de  $\tilde{\rho}$  ser uma aplicação bilinear contínua.

**c)** A existência e unicidade para cada  $x \in X$  de uma aplicação derivável  $\widehat{f}_{(x)}: [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  verificando (2) é uma consequência de 3.6.5, onde a

<sup>284</sup>Reparar que aqui o sinal  $\times$  corresponde à aplicação bilinear contínua  $\tilde{\rho}$ .

<sup>285</sup>Reparar que aqui o sinal  $\times$  corresponde à aplicação bilinear contínua  $\widehat{\rho}$ .

aplicação bilinear contínua considerada é  $\widehat{\rho}: G \times \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ .

**d)** Tendo em conta 3.6.7, tem lugar uma aplicação contínua de  $X$  para  $\mathcal{C}([a, b], \mathcal{L}(E; F))$  que a  $x$  associa  $\widehat{f}_{(x)}$  e, por composição com a aplicação linear contínua  $\Psi$  no lema 3.6.9, obtemos uma nova aplicação contínua, de  $X$  para  $\mathcal{L}(E; \mathcal{C}([a, b], F))$ , que a cada  $x \in X$  associa uma aplicação linear contínua  $E \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$  associando a  $u \in E$  a aplicação  $t \mapsto \widehat{f}_{(x)}(t)(u)$ , aplicação linear essa que não é mais do que a que designámos por  $\lambda_x$  no enunciado. Resta-nos mostrar que a aplicação  $X \rightarrow \mathcal{C}([a, b], F)$  que a  $x$  associa  $f_{(x)}$  é diferenciável num ponto  $x_1$  arbitrário e com diferencial igual a  $\lambda_{x_1}$ .

**e)** Seja  $\delta > 0$  arbitrário.

Tal como em 3.6.7, vamos fixar algumas constantes positivas começando por recordar que fixámos em a) uma constante  $m \geq 0$  tal que, nas notações multiplicativas associadas às aplicações bilineares contínuas  $\rho, \widehat{\rho}$  e  $\tilde{\rho}$ ,

$$\|z \times y\| \leq m\|z\|\|y\|, \quad \|z \times \lambda\| \leq \|z\|\|\lambda\|, \quad \|\mu \times y\| \leq m\|\mu\|\|y\|.$$

Seja  $r \geq 0$  o máximo dos três números

$$(6) \quad \max_{t \in [a, b]} \|\Gamma(x_1, t)\|, \quad \max_{t \in [a, b]} \|D_1 \Gamma_{(x_1, t)}\|, \quad \max_{t \in [a, b]} \|f_{(x_1)}(t)\|.$$

Seja  $\delta' > 0$  tal que

$$(7) \quad (m(2r + 1) + 1)\delta'(b - a)e^{mr(b-a)} \leq \delta.$$

Tendo em conta 3.6.7 e o tipo de continuidade uniforme estabelecido em 1.6.40, consideremos  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_1) \cap X$  seja convexo e que para cada  $x \in B_\varepsilon(x_1) \cap X$  e  $t \in [a, b]$  se tenha

$$(8) \quad \begin{aligned} \|D_1 \Gamma_{(x, t)} - D_1 \Gamma_{(x_1, t)}\| &\leq \delta', \\ \|D_1 \gamma_{(x, t)} - D_1 \gamma_{(x_1, t)}\| &\leq \delta', \\ \|f_{(x)}(t) - f_{(x_1)}(t)\| &\leq \min\{1, \delta'\}, \end{aligned}$$

em particular

$$(9) \quad \|f_{(x)}(t)\| \leq \|f_{(x)}(t) - f_{(x_1)}(t)\| + \|f_{(x_1)}(t)\| \leq r + 1.$$

**f)** Tendo em conta a regra de Barrow, podemos escrever

$$\begin{aligned} f_{(x)}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t \Gamma(x, s) \times f_{(x)}(s) + \gamma(x, s) ds, \\ f_{(x_1)}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t \Gamma(x_1, s) \times f_{(x_1)}(s) + \gamma(x_1, s) ds, \\ \widehat{f}_{(x_1)}(t) &= \int_{t_0}^t \Gamma(x_1, s) \times \widehat{f}_{(x_1)}(s) + \widehat{\gamma}(x_1, s) ds \end{aligned}$$

desta última fórmula resultando, a partir da consideração da aplicação linear

contínua  $\mathcal{L}(E; F) \rightarrow F$ ,  $\lambda \mapsto \lambda(x - x_1)$ , que

$$\begin{aligned} \lambda_{(x_1)}(x - x_1)(t) &= \widehat{f}_{(x_1)}(t)(x - x_1) = \\ &= \int_{t_0}^t \Gamma(x_1, s) \times \widehat{f}_{(x_1)}(s)(x - x_1) + \widehat{\gamma}(x_1, s)(x - x_1) ds = \\ &= \int_{t_0}^t \Gamma(x_1, s) \times \lambda_{(x_1)}(x - x_1)(s) + \\ &\quad + D_1\Gamma_{(x_1, s)}(x - x_1) \times f_{(x_1)}(s) + D_1\gamma_{(x_1, s)}(x - x_1) ds, \end{aligned}$$

Deduzimos agora das fórmulas que obtivemos nesta alínea que

$$\begin{aligned} f_{(x)}(t) - f_{(x_1)}(t) - \lambda_{(x_1)}(x - x_1)(t) &= \\ &= \int_{t_0}^t \Gamma(x_1, s) \times (f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s) - \lambda_{x_1}(x - x_1)(s)) + \\ &\quad + (\Gamma(x, s) - \Gamma(x_1, s) - D_1\Gamma_{(x_1, s)}(x - x_1)) \times f_{(x)}(s) - \\ &\quad - D_1\Gamma_{(x_1, s)}(x - x_1) \times (f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s)) + \\ &\quad + \gamma(x, s) - \gamma(x_1, s) - D_1\gamma_{(x_1, s)}(x - x_1) ds \end{aligned}$$

pelo que, se  $x \in B_\varepsilon(x_1) \cap X$  vem, tendo em conta o segundo teorema da média em 3.3.4 e as desigualdades (3), (6), (8) e (9),

$$\begin{aligned} &\|f_{(x)}(t) - f_{(x_1)}(t) - \lambda_{(x_1)}(x - x_1)(t)\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\Gamma(x_1, s) \times (f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s) - \lambda_{x_1}(x - x_1)(s))\| + \right. \\ &\quad + \|\Gamma(x, s) - \Gamma(x_1, s) - D_1\Gamma_{(x_1, s)}(x - x_1)\| \times f_{(x)}(s)\| + \\ &\quad + \|D_1\Gamma_{(x_1, s)}(x - x_1) \times (f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s))\| + \\ &\quad \left. + \|\gamma(x, s) - \gamma(x_1, s) - D_1\gamma_{(x_1, s)}(x - x_1)\| ds \right| \leq \\ &\leq mr \left| \int_{t_0}^t \|f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s) - \lambda_{(x_1)}(x - x_1)(s)\| ds \right| + \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t m\delta' \|x - x_1\| (r + 1) + mr \|x - x_1\| \delta' + \delta' \|x - x_1\| ds \right| \leq \\ &\leq mr \left| \int_{t_0}^t \|f_{(x)}(s) - f_{(x_1)}(s) - \lambda_{(x_1)}(x - x_1)(s)\| ds \right| + \\ &\quad + (m(2r + 1) + 1)\delta'(b - a)\|x - x_1\| \end{aligned}$$

donde, pelo lema de Gronwall em 3.6.6 e pela desigualdade (7),

$$\begin{aligned} &\|f_{(x)}(t) - f_{(x_1)}(t) - \lambda_{(x_1)}(x - x_1)(t)\| \leq \\ &\leq (m(2r + 1) + 1)\delta'(b - a)\|x - x_1\| e^{mr|t-t_0|} \leq \\ &\leq (m(2r + 1) + 1)\delta'(b - a)e^{mr(b-a)}\|x - x_1\| \leq \delta\|x - x_1\|, \end{aligned}$$

e portanto

$$\|f_{(x)} - f_{(x_1)} - \lambda_{(x_1)}(x - x_1)\|_\infty \leq \delta \|x - x_1\|,$$

o que mostra que a aplicação  $x \mapsto f_{(x)}$  é efetivamente diferenciável em  $x_1$  e com diferencial  $\lambda_{(x_1)}$ .  $\square$

**3.6.11 (Diferenciabilidade da solução relativamente ao parâmetro II)** Sejam  $G$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach e  $\rho: G \times F \rightarrow F$ ,  $(z, y) \mapsto z \times y$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $X \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo,  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial,  $t_0 \in J$ ,  $y_0 \in F$  e

$$\Gamma: X \times J \rightarrow G, \quad \gamma: X \times J \rightarrow F$$

duas aplicações contínuas, parcialmente diferenciáveis relativamente à primeira variável e tais que as aplicações

$$D_1\Gamma: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; G), \quad D_1\gamma: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$$

sejam contínuas.

Seja  $\Phi: X \times J \rightarrow F$  a aplicação contínua definida por  $\Phi(x, t) = f_{(x)}(t)$ , onde  $f_{(x)}: J \rightarrow F$  é a aplicação definida pelas condições

$$\begin{aligned} f'_{(x)}(t) &= \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t) \\ f_{(x)}(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

(cf. 3.6.8). Tem-se então que a aplicação  $\Phi$  é mesmo de classe  $C^1$ .<sup>286</sup>

Mais precisamente, e retomando as notações utilizadas em 3.6.10:

1) A derivada parcial relativamente à segunda variável (3.3.30) é dada por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) = \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t).$$

2) Tem lugar uma aplicação contínua

$$\hat{\gamma}: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; F), \quad \hat{\gamma}(x, t) = D_1\Gamma_{(x,t)} \times f_{(x)}(t) + D_1\gamma_{(x,t)}.$$

3) Sendo  $\hat{\Phi}: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  a aplicação contínua (cf. 3.6.8) definida por  $\hat{\Phi}(x, t) = \hat{f}_{(x)}(t)$ , onde  $\hat{f}_{(x)}: J \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \hat{f}'_{(x)}(t) &= \Gamma(x, t) \times \hat{f}_{(x)}(t) + \hat{\gamma}(x, t) \\ \hat{f}_{(x)}(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

o diferencial parcial relativamente à primeira variável é dado por

<sup>286</sup>No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  encaramos  $J$  como parte do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}$  para poder dar sentido à propriedade de diferenciabilidade de  $\Phi$ .



$$D_1\Phi_{(x,t)} = \widehat{\Phi}(x, t).$$

**Dem:** A afirmação em 1) resulta simplesmente de se ter  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x, t) = f'_{(x)}(t)$ . A afirmação em 2) resulta da continuidade das aplicações  $D_1\Gamma$  e  $D_1\gamma$  e da continuidade da aplicação  $\Phi$  definida por  $\Phi(x, t) = f_{(x)}(t)$ . Mostremos que  $\Phi$  é parcialmente diferenciável em relação à primeira variável num ponto arbitrário  $(x_1, t_1)$  e com diferencial parcial nesse ponto dado por  $\widehat{\Phi}(x_1, t_1) = \widehat{f}_{(x_1)}(t_1)$ , isto é, que é diferenciável em  $x_1$ , e com aquele diferencial, a aplicação  $X \rightarrow F$  que a  $x$  associa  $\Phi(x, t_1) = f_{(x)}(t_1)$  e isso resulta de escolher, pelo lema 3.6.4,  $a < b$  em  $J$  tais que  $t_0$  e  $t_1$  pertençam a  $[a, b]$  e aplicar 3.6.7 à restrição de  $\Gamma$  e  $\gamma$  a  $X \times [a, b]$ , tendo em conta a existência de uma aplicação linear contínua de  $\mathcal{C}([a, b], F)$  para  $F$  que a  $g$  associa  $g(t_1)$ . A conclusão em 1) implica a continuidade da aplicação  $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x, t): X \times J \rightarrow F$  e portanto, por composição com a isometria natural  $\Upsilon^{-1}: F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$  a continuidade de  $D_2\Phi: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$ .<sup>287</sup> Uma vez que, pela conclusão de 3), a aplicação  $D_1\Phi: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  também é contínua, resulta agora de 3.3.25 que  $\Phi: X \times J \rightarrow F$  é de classe  $C^1$ .  $\square$

**3.6.12 (Corolário)** Sejam  $G$  e  $F$  dois espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais de Banach e  $\rho: G \times F \rightarrow F$ ,  $(z, y) \mapsto z \times y$  uma aplicação bilinear contínua. Sejam  $E$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$ ,  $X \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo,  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial,  $t_0 \in J$ ,  $y_0 \in F$  e

$$\Gamma: X \times J \rightarrow G, \quad \gamma: X \times J \rightarrow F$$

duas aplicações de classe  $C^k$ , onde  $1 \leq k \leq +\infty$ . A aplicação  $\Phi: X \times J \rightarrow F$  definida por  $\Phi(x, t) = f_{(x)}(t)$ , onde  $f_{(x)}: J \rightarrow F$  é a aplicação definida pelas condições

$$\begin{aligned} f'_{(x)}(t) &= \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t) \\ f_{(x)}(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

é então também de classe  $C^k$ .<sup>288</sup>

**Dem:** Começamos por notar que basta examinar o caso em que  $k < +\infty$ , uma vez que uma aplicação de classe  $C^\infty$  é simplesmente uma aplicação que é de classe  $C^k$  para todo o  $k$  finito. Fazemos então a demonstração por indução em  $k$ , reparando que o caso em que  $k = 1$  é consequência de 3.6.11 e 3.3.28. Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo  $k$  e que  $\Gamma$  e  $\gamma$  são de classe  $C^{k+1}$ . Tendo em conta a hipótese de indução a aplicação

<sup>287</sup>No caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , olhamos para  $J$  como domínio de diferenciabilidade localmente convexo no espaço vetorial normado complexo  $\mathbb{C}$  e temos em conta a observação feita em 3.1.14.

<sup>288</sup>Mais uma vez, no caso em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  encaramos  $J$  como parte do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}$  para poder dar sentido à propriedade de diferenciabilidade de  $\Phi$ .

$$\widehat{\gamma}: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; F), \quad \widehat{\gamma}(x, t) = D_1\Gamma_{(x,t)} \times f_{(x)}(t) + D_1\gamma_{(x,t)},$$

é de classe  $C^k$  o que, mais uma vez pela hipótese de indução, implica que é também de classe  $C^k$  a aplicação  $\widehat{\Phi}: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  definida por  $\widehat{\Phi}(x, t) = \widehat{f}_{(x)}(t)$ , onde

$$\begin{aligned} \widehat{f}'_{(x)}(t) &= \Gamma(x, t) \times \widehat{f}_{(x)}(t) + \widehat{\gamma}(x, t) \\ \widehat{f}_{(x)}(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja que é de classe  $C^k$  a aplicação  $D_1\Phi: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ . Uma vez que a igualdade

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) = \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t)$$

implica, mais uma vez pela hipótese de indução, que  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}: X \times J \rightarrow F$  é de classe  $C^k$  e portanto que o mesmo acontece a  $D_2\Phi: X \times J \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  deduzimos de 3.3.29 que  $\Phi: X \times J \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+1}$ , o que termina a demonstração por indução.  $\square$

Nos resultados precedentes estudamos o modo como a solução duma equação diferencial linear depende de eventuais parâmetros mas deixamos em aberto a dependência relativa às condições iniciais que se consideram. O resultado que examinamos em seguida esclarece essa dependência.

**3.6.13 (Dependência das condições iniciais)** Sejam  $G$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o segundo dos quais completo, e  $\rho: G \times F \rightarrow F$  uma aplicação bilinear contínua, relativamente à qual notaremos, como temos vindo a fazer,  $z \times y$  o elemento  $\rho(z, y)$ . Sejam  $J \subset \mathbb{R}$  um intervalo não trivial,  $t_0 \in J$  e  $\Gamma: J \rightarrow G$  e  $\gamma: J \rightarrow F$  duas aplicações contínuas. Tem-se então:

**a)** Tem lugar uma aplicação bilinear contínua

$$\widehat{\rho}: G \times \mathcal{L}(F; F) \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$$

definida por

$$\widehat{\rho}(z, \alpha)(u) = \rho(z, \alpha(u)),$$

para a qual utilizaremos também a notação multiplicativa  $z \times \alpha = \widehat{\rho}(z, \alpha)$ .

**b)** Ficam bem definidas aplicações de classe  $C^1$

$$f_0: J \rightarrow F, \quad \lambda: J \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$$

pelos condições

$$\begin{aligned} f_0(t_0) &= 0, & \lambda(t_0) &= Id_F \\ f'_0(t) &= \Gamma(t) \times f_0(t) + \gamma(t), & \lambda'(t) &= \Gamma(t) \times \lambda(t), \end{aligned}$$

onde as multiplicações são as associadas a  $\rho$  e a  $\hat{\rho}$  respectivamente

c) Para cada  $y_0 \in F$  a solução  $f: J \rightarrow F$  da equação diferencial

$$f'(t) = \Gamma(t) \times f(t) + \gamma(t)$$

com a condição inicial  $f(t_0) = y_0$  está definida por

$$f(t) = f_0(t) + \lambda(t)(y_0).$$

d) Na notação de b), para cada  $t_1 \in J$  a aplicação linear contínua  $\lambda(t_1) \in \mathcal{L}(F; F)$  é um isomorfismo topológico, com  $\lambda(t_1)^{-1} = \mu(t_0)$ , onde  $\mu: J \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$  é a aplicação de classe  $C^1$  definida pelas condições

$$\mu(t_1) = Id_F, \quad \mu'(t) = \Gamma(t) \times \mu(t).$$

**Dem: a)** Para cada  $z \in G$  e  $\alpha \in \mathcal{L}(F; F)$  podemos considerar uma aplicação linear  $F \rightarrow F$  que a  $u$  associa  $\rho(z, \alpha(u))$  a qual é contínua e com norma menor ou igual a  $\|\rho\| \|z\| \|\alpha\|$  uma vez que

$$\|\rho(z, \alpha(u))\| \leq \|\rho\| \|z\| \|\alpha(u)\| \leq \|\rho\| \|z\| \|\alpha\| \|u\|.$$

Fica assim bem definida uma aplicação  $\hat{\rho}: G \times \mathcal{L}(F; F) \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$  que é evidentemente bilinear e é contínua tendo em conta a desigualdade

$$\|\hat{\rho}(z, \alpha)\| \leq \|\rho\| \|z\| \|\alpha\|,$$

que referimos acima.

b) Trata-se de uma consequência direta do resultado sobre existência e unicidade de solução em 3.6.5.

c) Sendo  $f(t) = f_0(t) + \lambda(t)(y_0)$  verificamos diretamente que

$$f(t_0) = f_0(t_0) + \lambda(t_0)(y_0) = 0 + Id_F(y_0) = y_0$$

e, considerando a aplicação linear contínua  $\mathcal{L}(F; F) \rightarrow F, \alpha \mapsto \alpha(y_0)$ , que

$$\begin{aligned} f'(t) &= f'_0(t) + \lambda'(t)(y_0) = \\ &= \Gamma(t) \times f_0(t) + \gamma(t) + \Gamma(t) \times \lambda(t)(y_0) = \\ &= \Gamma(t) \times f(t) + \gamma(t). \end{aligned}$$

d) Se repararmos que a aplicação  $f_0(t) = 0$  verifica  $f_0(t_0) = 0$  e

$$f'_0(t) = 0 = \Gamma(t) \times f_0(t)$$

o que vimos em c) mostra que a solução  $f: J \rightarrow F$  da equação diferencial

$$f'(t) = \Gamma(t) \times f(t)$$

com a condição inicial  $f(t_0) = y_0$  está definida por  $f(t) = \lambda(t)(y_0)$ . Uma

vez que a solução referida também tem a condição inicial  $f(t_1) = \lambda(t_1)(y_0)$ , a conclusão que acabámos de obter mas utilizando agora  $t_1$  como “instante inicial” mostra que

$$y_0 = f(t_0) = \mu(t_0)(\lambda(t_1)(y_0)).$$

Verificámos assim que a aplicação linear contínua  $\mu(t_0) \in \mathcal{L}(F; F)$  verifica  $\mu(t_0) \circ \lambda(t_1) = Id_F$  e esta mesma conclusão, com os papéis de  $t_0$  e  $t_1$  trocados, implica que se tem também  $\lambda(t_1) \circ \mu(t_0) = Id_F$ , ou seja que  $\lambda(t_1)$  é um isomorfismo topológico com  $\mu(t_0)$  como inverso.  $\square$

Como exemplo importante de aplicação do estudo das equações diferenciais lineares vamos definir a aplicação exponencial no contexto das álgebras de Banach e estabelecer algumas das suas propriedades. Uma definição alternativa desta aplicação já foi sugerida no exercício 2.3.11.

**3.6.14** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach sobre o corpo  $\mathbb{K}$  (cf. 2.3.29). Tem-se então:

**a)** Para cada  $x \in \mathcal{E}$  existe uma única aplicação diferenciável  $f_{(x)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$  tal que

$$(1) \quad f_{(x)}(0) = 1, \quad f'_{(x)}(t) = x \cdot f_{(x)}(t),$$

onde 1 é o elemento um da álgebra de Banach, vindo então também

$$f'_{(x)}(t) = f_{(x)}(t) \cdot x.$$

**b)** Pode definir-se uma aplicação  $\exp: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  de classe  $C^\infty$  (a *aplicação exponencial*) por

$$(2) \quad \exp(x) = f_{(x)}(1),$$

tendo-se  $\exp(0) = 1$  e para cada  $t \in \mathbb{R}$

$$f_{(x)}(t) = \exp(tx).^{289}$$

**c)** Sendo  $x, y \in \mathcal{E}$  tais que  $x \cdot y = y \cdot x$ , tem-se

$$\exp(x) \cdot y = y \cdot \exp(x)$$

e

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Em particular, para cada  $x \in \mathcal{E}$ ,  $\exp(x)$  é invertível,

<sup>289</sup>Tendo em conta o exercício 3.3.11, a conclusão desta alínea permite-nos garantir que a aplicação exponencial aqui definida coincide com a construída no exercício 2.3.11.

$$\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$$

e para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(x)^n = \exp(nx).$$

**d)** Sendo  $x, u \in \mathcal{E}$  tais que  $x \cdot u = u \cdot x$ , tem-se

$$D \exp_x(u) = \exp(x) \cdot u = u \cdot \exp(x).$$

Em particular, para cada  $u \in \mathcal{E}$  tem-se  $D \exp_0(u) = u$ .

**e)** Para cada  $t \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\exp(t \mathbf{1}) = e^t \mathbf{1},$$

onde em ambos os membros  $\mathbf{1}$  é o elemento um da álgebra de Banach e  $e^t$  é a função exponencial usual no contexto de  $\mathbb{R}$ . Em particular a exponencial usual no contexto de  $\mathbb{R}$  coincide com a aplicação exponencial de  $\mathbb{R}$  como álgebra de Banach real.

**Dem: a)** A existência e unicidade de uma aplicação  $f_{(x)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$  verificando (1) é uma consequência do teorema de existência e unicidade de solução em 3.6.5 em que neste caso temos uma equação homogênea com a aplicação de valor constante  $x$  como aplicação  $\Gamma$ . O facto de se ter

$$x \cdot f_{(x)}(t) = f_{(x)}(t) \cdot x$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$  resulta da parte de unicidade do mesmo teorema uma vez que, pondo  $g(t) = x \cdot f_{(x)}(t)$  e  $h(t) = f_{(x)}(t) \cdot x$ , vem  $g(0) = x = h(0)$  e

$$\begin{aligned} g'(t) &= x \cdot f'_{(x)}(t) = x \cdot x \cdot f_{(x)}(t) = x \cdot g(t), \\ h'(t) &= f'_{(x)}(t) \cdot x = x \cdot f_{(x)}(t) \cdot x = x \cdot h(t). \end{aligned}$$

**b)** O facto de a aplicação  $\exp: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por (2) ser de classe  $C^\infty$  é consequência do resultado 3.6.12 sobre a diferenciabilidade da solução relativamente a um parâmetro. Consideremos agora  $t \in \mathbb{R}$  fixado e seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$  a aplicação definida por  $g(s) = f_{(x)}(st)$ , que verifica  $g(0) = \mathbf{1}$  e

$$g'(s) = t f'_{(x)}(st) = tx \cdot f_{(x)}(st) = tx \cdot g(s).$$

Tem-se assim

$$f_{(x)}(st) = g(s) = f_{(tx)}(s),$$

em particular

$$f_{(x)}(t) = f_{(tx)}(\mathbf{1}) = \exp(tx).$$

Pondo  $t = 0$  na igualdade anterior vemos que, com  $x \in \mathcal{E}$  arbitrário,

$$\exp(0) = \exp(0x) = f_{(x)}(0) = \mathbf{1}.$$

c) Sejam  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$  definidas por  $g(t) = f_{(x)}(t) \cdot y$  e  $h(t) = y \cdot f_{(x)}(t)$  e reparemos que  $g(0) = y = h(0)$  e

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'_{(x)}(t) \cdot y = x \cdot f_{(x)}(t) \cdot y = x \cdot g(t), \\ h'(t) &= y \cdot f'_{(x)}(t) = y \cdot x \cdot f_{(x)}(t) = x \cdot y \cdot f_{(x)}(t) = x \cdot h(t) \end{aligned}$$

pelo que o resultado sobre a unicidade de solução garante que para cada  $t \in \mathbb{R}$  se tem

$$f_{(x)}(t) \cdot y = g(t) = h(t) = y \cdot f_{(x)}(t),$$

em particular

$$\exp(x) \cdot y = f_{(x)}(1) \cdot y = y \cdot f_{(x)}(1) = y \cdot \exp(x).$$

Seja agora  $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$  a aplicação definida por

$$k(t) = \exp(tx) \cdot \exp(ty) = f_{(x)}(t) \cdot f_{(y)}(t).$$

Vem  $k(0) = 1$  e, uma vez que

$$(tx) \cdot y = t(x \cdot y) = t(y \cdot x) = y \cdot (tx),$$

tem-se

$$\begin{aligned} k'(t) &= f'_{(x)}(t) \cdot f_{(y)}(t) + f_{(x)}(t) \cdot f'_{(y)}(t) = \\ &= x \cdot f_{(x)}(t) \cdot f_{(y)}(t) + f_{(x)}(t) \cdot y \cdot f_{(y)}(t) = \\ &= x \cdot \exp(tx) \cdot \exp(ty) + \exp(tx) \cdot y \cdot \exp(ty) = \\ &= x \cdot \exp(tx) \cdot \exp(ty) + y \cdot \exp(tx) \cdot \exp(ty) = \\ &= (x + y) \cdot k(t), \end{aligned}$$

de onde deduzimos que  $k(t) = f_{(x+y)}(t)$  e portanto

$$\exp(x + y) = f_{(x+y)}(1) = k(1) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Sendo  $x \in \mathcal{E}$  arbitrário, o facto de se ter  $x \cdot (-x) = -x \cdot x = (-x) \cdot x$  implica que

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \cdot \exp(-x), \\ 1 &= \exp(0) = \exp((-x) + x) = \exp(-x) \cdot \exp(x), \end{aligned}$$

e portanto  $\exp(x)$  é invertível e com  $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$  e a igualdade  $\exp(x)^n = \exp(nx)$  verifica-se naturalmente por indução, tendo em conta a comutabilidade  $(nx) \cdot x = n(x \cdot x) = x \cdot (nx)$ .

d) Uma vez que se tem também  $x \cdot (tu) = (tu) \cdot x$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , a conclusão de c) implica que

$$\exp(x + tu) = \exp(x) \cdot \exp(tu) = \exp(x) \cdot f_{(u)}(t)$$

donde, derivando ambos os membros como funções de  $t$ ,

$$D \exp_{x+tu}(u) = \exp(x) \cdot f'_{(u)}(t) = \exp(x) \cdot u \cdot f_{(u)}(t).$$

Em particular, tomando  $t = 0$ , obtemos  $D \exp_x(u) = \exp(x) \cdot u$  e a igualdade  $\exp(x) \cdot u = u \cdot \exp(x)$  resulta do que vimos em c).

e) Lembrando que a função  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(t) = e^t$  verifica  $\varphi'(t) = e^t$ , vemos que, para a aplicação  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $g(t) = e^t 1$ , tem-se  $g(0) = 1$  e  $g'(t) = e^t 1 = 1 \cdot g(t)$ , o que implica que

$$e^t 1 = g(t) = f_{(1)}(t) = \exp(t 1). \quad \square$$

Examinamos em seguida algumas propriedades da aplicação exponencial quando a álgebra de Banach envolvida é  $\mathbb{C}$ . Essas propriedades envolvem as funções trigonométricas  $\text{sen}$  e  $\text{cos}$  que, para além da sua origem geométrica bem conhecida, admitem definições alternativas puramente analíticas (por exemplo através das respetivas séries de potências), cujas propriedades, que incluem a definição da constante  $\pi$ , são estudadas em cursos básicos de Análise Real. Para quem não tenha ainda encontrado nenhuma dessas definições alternativas propomos no exercício 3.6.1 adiante uma que se baseia no estudo das equações diferenciais lineares.

**3.6.15 (A aplicação exponencial na álgebra de Banach comutativa  $\mathbb{C}$ )** A aplicação exponencial  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tem as seguintes propriedades:

a) Para cada  $t \in \mathbb{R}$  tem-se a *fórmula de Euler*

$$(1) \quad \exp(t i) = \cos(t) + \text{sen}(t) i,$$

em particular  $|\exp(t i)| = 1$ . Além disso, para cada  $z \in \mathbb{C}$  com  $|z| = 1$  existe um único  $t \in [0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}$  (alternativamente, um único  $t \in ]-\pi, \pi]$ ) com  $\exp(t i) = z$ .

b) Para cada  $s \in \mathbb{R}$  tem-se  $\exp(s) = e^s \in \mathbb{R}$ .

c) Sendo  $s, t \in \mathbb{R}$  tem-se

$$(2) \quad \exp(s + t i) = e^s (\cos(t) + \text{sen}(t) i),$$

em particular  $|\exp(s + t i)| = e^s$ ,  $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $\exp(s + t i) = 1$  se, e só se,  $s = 0$  e  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

d) A derivada de  $\exp$  no sentido complexo é dada por  $\exp'(z) = \exp(z)$ .

**Dem:** a) Sendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação definida por  $f(t) = \cos(t) + \text{sen}(t) i$ , as propriedades de diferenciabilidade das funções trigonométricas implicam que

$$f'(t) = -\text{sen}(t) + \cos(t) i = i(\cos(t) + \text{sen}(t) i) = i f(t)$$

o que implica, nas notações de 3.6.14, que  $f(t) = f_{(i)}(t) = \exp(t i)$ . As restantes afirmações em a) resultam da fórmula (1) e das propriedades conhecidas das funções trigonométricas.

**b)** A aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  definida por  $f(s) = e^s$  verifica

$$f'(s) = e^s = 1 \cdot f(s),$$

o que implica que

$$f(s) = f_{(1)}(s) = \exp(s \cdot 1) = \exp(s).$$

**c)** Uma vez que temos uma álgebra comutativa, resulta da alínea c) de 3.6.14 que

$$\exp(s + ti) = \exp(s)\exp(ti) = e^s(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)i)$$

e

$$|\exp(s + ti)| = e^s |\cos(t) + \operatorname{sen}(t)i| = e^s.$$

O facto de se ter  $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  resulta de que se  $z \neq 0$  em  $\mathbb{C}$  vem  $z = |z| \frac{z}{|z|}$  com  $|z| > 0$  e  $|\frac{z}{|z|}| = 1$ , o que implica a existência de  $s, t \in \mathbb{R}$  tais que  $e^s = |z|$  e  $\exp(ti) = \frac{z}{|z|}$ , portanto  $z = \exp(s + ti)$ . Se  $s = 0$  e  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$  as propriedades conhecidas das funções trigonométricas implicam que  $\cos(t) = 1$  e  $\operatorname{sen}(t) = 0$  e portanto

$$\exp(s + ti) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t)i = 1.$$

Reciprocamente, se  $\exp(s + ti) = 1$  vem  $e^s = |\exp(s + ti)| = 1$ , donde  $s = 0$ , e portanto

$$1 = \exp(ti) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t)i,$$

ou seja  $\cos(t) = 1$  e  $\operatorname{sen}(t) = 0$  o que, pelas propriedades conhecidas das funções trigonométricas, implica que  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

**d)** Tendo em conta a alínea d) de 3.6.14, vemos que

$$\exp'(z) = D \exp_z(1) = \exp(z) \cdot 1 = \exp(z). \quad \square$$

Vamos agora voltar aos resultados gerais envolvendo as soluções de equações diferenciais lineares com parâmetros para obter a partir deles um resultado devido a Frobenius sobre a existência de solução para um tipo de equações diferenciais lineares em que a variável independente, em vez de pertencer a  $\mathbb{R}$ , pertence a um espaço vetorial normado  $E$ . Esse resultado, que está naturalmente relacionado com a primitivação com variável vetorial estudada em 3.5.21, vai exigir como hipótese uma “condição de integrabilidade” que corresponde à igualdade (1) no resultado sobre primitivação que acabamos de referir.

**3.6.16 (Equações diferenciais totais lineares)** Sejam  $F, E$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o primeiro dos quais completo e  $\rho: G \times F \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação bilinear contínua, para a qual utiliza-



remos a notação multiplicativa  $z \times y = \rho(z, y) \in \mathcal{L}(E; F)$ . Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade e  $\Gamma: A \rightarrow G$  e  $\gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  duas aplicações contínuas. Diz-se que uma aplicação  $f: A \rightarrow F$  é uma *solução da equação diferencial total linear* definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  se  $f$  for diferenciável em cada  $x \in A$  e com

$$(1) \quad Df_x = \Gamma(x) \times f(x) + \gamma(x) \in \mathcal{L}(E; F).$$

Quando isso acontecer, sendo  $x_0 \in A$  e  $y_0 = f(x_0)$ , dizemos que a solução tem a *condição inicial*  $(x_0, y_0)$  (ou a condição inicial  $f(x_0) = y_0$ ).<sup>290</sup>

No caso em que a aplicação  $\gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é identicamente 0 diz-se que a equação diferencial linear é *homogénea*.

Repare-se que se  $f: A \rightarrow F$  é solução da equação diferencial linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  então  $f$  é contínua, por ser diferenciável em cada ponto e daqui decorre, por (1), que  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é contínua, ou seja, que  $f$  é de classe  $C^1$ .

**3.6.17** Mais geralmente, nas condições de 3.6.16, se as aplicações  $\Gamma: A \rightarrow G$  e  $\gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  forem de classe  $C^k$  (onde  $k \geq 0$ ) então uma solução  $f: A \rightarrow F$  da equação diferencial linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  é de classe  $C^{k+1}$ . Em consequência, se  $\Gamma$  e  $\gamma$  forem de classe  $C^\infty$ , o mesmo acontece a  $f$ .

**Dem:** O caso em que  $k = 0$  já foi justificado na definição. Para o caso geral, demonstramos por indução em  $p$  que  $f$  é de classe  $C^p$  para cada  $p \leq k + 1$ , o passo de indução resultando de que se  $f$  é de classe  $C^p$  para um certo  $p \leq k$  então pela identidade (1) na definição a aplicação  $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é de classe  $C^p$  e portanto  $f$  é de classe  $C^{p+1}$ .  $\square$

A partir de agora, para podermos aplicar resultados estabelecidos na secção 3.3, vamos supor que o domínio de diferenciabilidade  $A$  é localmente convexo. Além disso será conveniente, e nalguns casos essencial, que  $A$  seja estrelado relativamente a um dos seus pontos  $x_0$ .

**3.6.18 (Teorema de unicidade e caracterização das soluções)** Sejam  $F, E$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o primeiro dos quais completo e  $\rho: G \times F \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação bilinear contínua, para a qual utilizaremos a notação multiplicativa  $z \times y = \rho(z, y) \in \mathcal{L}(E; F)$ . Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e estrelado relativamente a um certo  $x_0 \in A$  e  $\Gamma: A \rightarrow G$  e  $\gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  duas aplicações de classe  $C^1$ . Tem-se então:

a) Podemos considerar aplicações de classe  $C^1$

$$\bar{\Gamma}: A \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(F; F), \quad \bar{\gamma}: A \times [0, 1] \rightarrow F,$$

definidas por

<sup>290</sup>Comparar com 3.6.2.

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}(x, t)(y) &= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times y)(x - x_0), \\ \bar{\gamma}(x, t) &= \gamma(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0),\end{aligned}$$

e os diferenciais parciais  $D_1\bar{\Gamma}_{(x,t)}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$  e  $D_1\bar{\gamma}_{(x,t)}: E \rightarrow F$  estão definidos por

$$\begin{aligned}D_1\bar{\Gamma}_{(x,t)}(u)(y) &= (D\Gamma_{x_0+t(x-x_0)}(tu) \times y)(x - x_0) + \\ &\quad + (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times y)(u), \\ D_1\bar{\gamma}_{(x,t)}(u) &= D\gamma_{x_0+t(x-x_0)}(tu)(x - x_0) + \\ &\quad + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u).\end{aligned}$$

**b)** Dado  $y_0 \in F$ , não pode haver mais que uma solução  $f: A \rightarrow F$  da equação diferencial total linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  com a condição inicial  $f(x_0) = y_0$ . Mais precisamente, a existir uma tal solução com aquela condição inicial, vem necessariamente  $f(x) = \varphi_{(x)}(1)$  onde  $\varphi_{(x)}: [0, 1] \rightarrow F$  é a aplicação diferenciável definida pelas condições

$$\varphi_{(x)}(0) = y_0, \quad \varphi'_{(x)}(t) = \bar{\Gamma}(x, t)(\varphi_{(x)}(t)) + \bar{\gamma}(x, t),$$

isto é, é a solução da equação diferencial linear paramétrica definida por  $\bar{\Gamma}$  e por  $\bar{\gamma}$  com a condição inicial  $(0, y_0)$  e o valor  $x$  do parâmetro (cf. 3.6.7, onde a multiplicação considerada é a aplicação de avaliação  $\mathcal{L}(F; F) \times F \rightarrow F$ ).

**Dem: a)** O facto de  $\bar{\gamma}: A \times [0, 1] \rightarrow F$  ser de classe  $C^1$  resulta de isso acontecer à aplicação  $\gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ , tendo em conta os resultados sobre a diferenciabilidade da aplicação composta e o facto de termos uma aplicação bilinear contínua  $\mathcal{L}(E; F) \times E \rightarrow F$  que a  $(\alpha, x)$  associa  $\alpha(x)$ . Deste último facto deduzimos também, pela regra de Leibnitz sobre a derivação de um produto, que

$$\begin{aligned}D_1\bar{\gamma}_{(x,t)}(u) &= D\gamma_{x_0+t(x-x_0)}(tu)(x - x_0) + \\ &\quad + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u).\end{aligned}$$

O facto de  $\bar{\Gamma}: A \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$  ser de classe  $C^1$  resulta também de ser de classe  $C^1$  a aplicação  $\Gamma: A \rightarrow G$  tendo em conta os resultados sobre a diferenciabilidade da aplicação composta, mas convirá sermos um pouco mais explícitos: Começamos por notar que à aplicação bilinear contínua  $\rho: G \times F \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  fica associada uma aplicação linear contínua

$$\rho': G \rightarrow \mathcal{L}(F; \mathcal{L}(E; F)), \quad \rho'(z)(y) = \rho(z, y) \in \mathcal{L}(E; F).$$

Notamos em seguida que tem lugar uma aplicação linear contínua (de facto um isomorfismo topológico)  $\mathcal{L}(F; \mathcal{L}(E; F)) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; F))$  que a cada  $\alpha: F \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  associa  $\tilde{\alpha}: E \rightarrow \mathcal{L}(F; F)$  definido por

$$\tilde{\alpha}(x)(y) = \alpha(y)(x)$$

(reparar que

$$\|\alpha(y)(x)\| \leq \|\alpha(y)\| \|x\| \leq \|\alpha\| \|y\| \|x\|$$

donde  $\|\tilde{\alpha}(x)(y)\| \leq \|\alpha\| \|x\| \|y\|$  e  $\|\tilde{\alpha}(x)\| \leq \|\alpha\| \|x\|$ , portanto  $\|\tilde{\alpha}\| \leq \|\alpha\|$ . Por composição com  $\rho'$  obtemos assim uma aplicação linear contínua

$$\rho'' : G \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; F)), \quad \rho''(z)(x)(y) = \rho'(z)(y)(x) = (z \times y)(x)$$

e o facto de  $\bar{\Gamma}$  ser de classe  $C^1$  resulta agora de se ter

$$\bar{\Gamma}(x, t) = \rho''(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)))(x - x_0).$$

Desta caracterização deduzimos que

$$D_1 \bar{\Gamma}_{(x,t)}(u) = \rho''(D\Gamma_{x_0+t(x-x_0)}(tu))(x - x_0) + \rho''(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)))(u)$$

donde

$$D_1 \bar{\Gamma}_{(x,t)}(u)(y) = (D\Gamma_{x_0+t(x-x_0)}(tu) \times y)(x - x_0) + (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times y)(u).$$

**b)** Suponhamos que  $f: A \rightarrow F$  é uma solução da equação diferencial total linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  com a condição inicial  $f(x_0) = y_0$ , portanto que se tem para cada  $x \in A$  e  $u \in E$

$$Df_x(u) = (\Gamma(x) \times f(x))(u) + \gamma(x)(u)$$

Fixado  $x \in A$  podemos então considerar a aplicação  $\varphi_{(x)}: [0, 1] \rightarrow F$  definida por  $\varphi_{(x)}(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ , que verifica  $\varphi_{(x)}(0) = y_0$  e  $\varphi_{(x)}(1) = f(x)$  e que é diferenciável em cada  $t \in [0, 1]$  e com

$$\begin{aligned} \varphi'_{(x)}(t) &= Df_{x_0+t(x-x_0)}(x - x_0) = \\ &= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times f(x_0 + t(x - x_0)))(x - x_0) + \\ &\quad + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) = \\ &= \bar{\Gamma}(x, t)(\varphi_{(x)}(t)) + \bar{\gamma}(x, t). \end{aligned} \quad \square$$

**3.6.19 (Condições de integrabilidade)** Sejam  $F$ ,  $E$  e  $G$  espaços vectoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o primeiro dos quais completo e  $\rho: G \times F \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação bilinear contínua, para a qual utilizaremos a notação multiplicativa  $z \times y = \rho(z, y) \in \mathcal{L}(E; F)$ . Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e estrelado relativamente a um certo  $x_0 \in A$  e  $\Gamma: A \rightarrow G$  e  $\gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  duas aplicações de classe  $C^1$ . Se para cada  $y_0 \in F$  existir uma solução  $f: A \rightarrow F$  da equação diferencial total linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  com a condição inicial  $f(x_0) = y_0$  então verificam-se as seguintes condições de integrabilidade:

**1)** Para cada  $x \in A$  é simétrica a aplicação bilinear  $\Psi_x: E \times E \rightarrow F$  definida por

$$\Psi_x(u, v) = D\gamma_x(u)(v) + \left( \Gamma(x) \times (\gamma(x)(u)) \right)(v),$$

isto é, verifica-se  $\Psi_x(v, u) = \Psi_x(u, v)$  quaisquer que sejam  $u, v \in E$ .

2) Para cada  $x \in A$  e  $y \in F$  é simétrica a aplicação bilinear  $\Psi_{x,y}: E \times E \rightarrow F$  definida por

$$\Psi_{x,y}(u, v) = (D\Gamma_x(u) \times y)(v) + \left( \Gamma(x) \times ((\Gamma(x) \times y)(u)) \right)(v).$$

**Dem:** Consideremos para cada  $x \in A$  e  $y \in F$  a aplicação bilinear  $\widehat{\Psi}_{x,y}: E \times E \rightarrow F$  definida por

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_{x,y}(u, v) &= (D\Gamma_x(u) \times y)(v) + \left( \Gamma(x) \times ((\Gamma(x) \times y)(u)) \right)(v) + \\ &+ \left( \Gamma(x) \times (\gamma(x)(u)) \right)(v) + D\gamma_x(u)(v). \end{aligned}$$

Como referido em 3.6.17, sabemos que cada solução  $f: A \rightarrow F$  é de classe  $C^2$  o que, tendo em conta 3.3.19, implica que cada derivada de segunda ordem  $D^2 f_x: E \times E \rightarrow F$  é uma aplicação bilinear simétrica. Uma vez que se tem

$$Df_x(v) = (\Gamma(x) \times f(x))(v) + \gamma(x)(v),$$

obtemos por derivação

$$\begin{aligned} D^2 f_x(u, v) &= (D\Gamma_x(u) \times f(x))(v) + (\Gamma(x) \times Df_x(u))(v) + D\gamma_x(u)(v) = \\ &= (D\Gamma_x(u) \times f(x))(v) + \left( \Gamma(x) \times ((\Gamma(x) \times f(x))(u)) \right)(v) + \\ &+ \left( \Gamma(x) \times (\gamma(x)(u)) \right)(v) + D\gamma_x(u)(v) = \widehat{\Psi}_{x,f(x)}(u, v), \end{aligned}$$

o que implica que a aplicação bilinear  $\widehat{\Psi}_{x,f(x)}: E \times E \rightarrow F$  é simétrica. Verifiquemos agora que se pode mesmo garantir, mais geralmente, que para cada  $x \in A$  e  $y \in F$  a aplicação bilinear  $\widehat{\Psi}_{x,y}: E \times E \rightarrow F$  é simétrica. Isso vai resultar do que já provámos se justificarmos que, dados  $x \in A$  e  $y \in F$  podemos escolher  $y_0 \in F$  tal que a solução  $f: A \rightarrow F$  da equação diferencial total linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  com a condição inicial  $f(x_0) = y_0$  verifique  $f(x) = y$ . Ora, tendo em conta a caracterização dessa solução  $f: A \rightarrow F$  na alínea b) de 3.6.18, isso resulta de que, pelas alíneas c) e d) de 3.6.13,  $x$  estando fixado, a aplicação de  $F$  para  $F$  que a  $y_0$  associa  $f(x)$  é uma aplicação afim cuja aplicação linear associada é um isomorfismo, em particular é bijetiva. Uma vez provada a simetria da aplicação bilinear  $\widehat{\Psi}_{x,y}: E \times E \rightarrow F$  para qualquer  $x \in A$  e  $y \in F$  podemos concluir que para cada  $x \in A$  é simétrica a aplicação bilinear  $\widehat{\Psi}_{x,0}: E \times E \rightarrow F$ , que não é mais do que a aplicação notada  $\Psi_x$  no enunciado e daqui deduzimos que também é simétrica para cada  $x \in A$  e  $y \in F$  a aplicação bilinear

$\hat{\Psi}_{x,y} - \Psi_x: E \times E \rightarrow F$ , que não é mais do que a aplicação notada  $\Psi_{x,y}$  no enunciado.  $\square$

**3.6.20 (Teorema de Frobenius linear)** Sejam  $F$ ,  $E$  e  $G$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{K}$ , o primeiro dos quais completo e  $\rho: G \times F \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  uma aplicação bilinear contínua, para a qual utilizaremos a notação multiplicativa  $z \times y = \rho(z, y) \in \mathcal{L}(E; F)$ . Sejam  $A \subset E$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e estrelado relativamente a um certo  $x_0 \in A$  e  $\Gamma: A \rightarrow G$  e  $\gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  duas aplicações de classe  $C^1$  e suponhamos verificadas as condições de integrabilidade referidas em 3.6.19. Para cada  $y_0 \in F$  existe então uma única solução  $f: A \rightarrow F$  da equação diferencial total linear definida por  $\Gamma$  e  $\gamma$  com a condição inicial  $f(x_0) = y_0$ .

**Dem:**<sup>291</sup> Vamos dividir a demonstração em várias partes, começando por notar que a unicidade da solução com aquela condição inicial já foi estabelecida em 3.6.18:

a) Consideremos as aplicações de classe  $C^1$

$$\bar{\Gamma}: A \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(F; F), \quad \bar{\gamma}: A \times [0, 1] \rightarrow F,$$

definidas na alínea a) de 3.6.18. Tendo em conta 3.6.11 (com  $J = [0, 1]$ ,  $G = \mathcal{L}(F; F)$  e a aplicação de avaliação  $\mathcal{L}(F; F) \times F \rightarrow F$  como multiplicação), podemos considerar uma aplicação  $\Phi: A \times [0, 1] \rightarrow F$  de classe  $C^1$  definida pela condição de se ter

$$\Phi(x, t) = \varphi_{(x)}(t),$$

onde  $\varphi_{(x)}: [0, 1] \rightarrow F$  é a aplicação diferenciável definida pelas condições  $\varphi_{(x)}(0) = y_0$  e

$$(1) \quad \varphi'_{(x)}(t) = \bar{\Gamma}(x, t)(\varphi_{(x)}(t)) + \bar{\gamma}(x, t),$$

aplicação cujo diferencial parcial  $D_1\Phi_{(x,t)} \in \mathcal{L}(E; F)$  está definido pela condição de se ter  $D_1\Phi_{(x,t)} = \hat{\varphi}_{(x)}(t)$  com  $\hat{\varphi}_{(x)}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  definido pelas condições de se ter  $\hat{\varphi}_{(x)}(0) = 0$  e, nas notações de 3.6.10,

$$(2) \quad \hat{\varphi}'_{(x)}(t) = \hat{\rho}(\bar{\Gamma}(x, t), \hat{\varphi}_{(x)}(t)) + \hat{\gamma}(x, t)$$

com

$$\hat{\gamma}(x, t) = \hat{\rho}(D_1\bar{\Gamma}_{(x,t)}, \varphi_{(x)}(t)) + D_1\bar{\gamma}_{(x,t)} \in \mathcal{L}(E; F),$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\rho}: \mathcal{L}(F; F) \times \mathcal{L}(E; F) &\rightarrow \mathcal{L}(E; F) \\ \hat{\rho}: \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; F)) \times F &\rightarrow \mathcal{L}(E; F) \end{aligned}$$

<sup>291</sup>A demonstração que apresentamos é baseada na que se encontra, na situação mais geral das equações diferenciais totais não necessariamente lineares, em Dieudonné, [6].

estão definidos por

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}(\alpha, \lambda)(u) &= \alpha(\lambda(u)), \\ \widetilde{\rho}(\beta, w)(u) &= \beta(u)(w).\end{aligned}$$

**b)** Lembrando a caracterização de uma possível solução na alínea b) de 3.6.18, consideremos a aplicação  $f: A \rightarrow F$  de classe  $C^1$  definida por

$$f(x) = \varphi_{(x)}(1) = \Phi(x, 1).$$

Reparando que  $\overline{\Gamma}(x_0, t)(y) = 0$  e  $\overline{\gamma}(x_0, t) = 0$  constatamos que a aplicação de valor constante  $y_0$  é solução da equação diferencial linear (1) para  $x = x_0$  pelo que  $\varphi_{(x_0)}(t) = y_0$  para cada  $t$ , em particular  $f(x_0) = \varphi_{(x_0)}(1) = y_0$ . Resta-nos provar, o que faremos nas próximas alíneas, que se tem

$$Df_x = \Gamma(x) \times f(x) + \gamma(x)$$

para cada  $x \in A$ .

**c)** Consideremos  $x \in A$  e  $u \in E$  fixados e seja  $g: [0, 1] \rightarrow F$  a aplicação de classe  $C^1$  definida por  $g(t) = \widehat{\varphi}_{(x)}(t)(u)$ . Vem  $g(0) = \widehat{\varphi}_{(x)}(0)(u) = 0$  e, tendo em conta (2),

$$g'(t) = \overline{\Gamma}(x, t)(g(t)) + D_1\overline{\Gamma}_{(x,t)}(u)(\varphi_{(x)}(t)) + D_1\overline{\gamma}_{(x,t)}(u).$$

**d)** Consideremos, mais uma vez,  $x \in A$  e  $u \in E$  fixados e seja  $h: [0, 1] \rightarrow F$  a aplicação de classe  $C^1$  definida por

$$h(t) = t(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + t\gamma(x_0 + t(x - x_0))(u).$$

Vem  $h(0) = 0$  e

$$\begin{aligned}h'(t) &= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + t(D\Gamma_{x_0+t(x-x_0)}(x - x_0) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + \\ &\quad + t(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi'_{(x)}(t))(u) + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u) + \\ &\quad + tD\gamma_{x_0+t(x-x_0)}(x - x_0)(u) = \\ &= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + t(D\Gamma_{x_0+t(x-x_0)}(x - x_0) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + \\ &\quad + t(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \overline{\Gamma}(x, t)(\varphi_{(x)}(t)))(u) + \\ &\quad + t(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \overline{\gamma}(x, t))(u) + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u) + \\ &\quad + tD\gamma_{x_0+t(x-x_0)}(x - x_0)(u) = \\ &= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + t(D\Gamma_{x_0+t(x-x_0)}(x - x_0) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + \\ &\quad + t(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times ((\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(x - x_0)))(u) + \\ &\quad + t(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times ((\gamma(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)))(u) + \\ &\quad + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u) + tD\gamma_{x_0+t(x-x_0)}(x - x_0)(u).\end{aligned}$$

Utilizando agora a definição das aplicações bilineares  $\Psi_x$  e  $\Psi_{x,y}$  em 3.6.19, que pelas condições de integrabilidade são simétricas, obtemos

$$\begin{aligned}
h'(t) &= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u) + \\
&\quad + t\Psi_{x_0+t(x-x_0),\varphi_{(x)}(t)}(x - x_0, u) + t\Psi_{x_0+t(x-x_0)}(x - x_0, u) = \\
&= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u) + \\
&\quad + t\Psi_{x_0+t(x-x_0),\varphi_{(x)}(t)}(u, x - x_0) + t\Psi_{x_0+t(x-x_0)}(u, x - x_0) = \\
&= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u) + \\
&\quad + t(D\Gamma_{x_0+t(x-x_0)}(u) \times \varphi_{(x)}(t))(x - x_0) + tD\gamma_{x_0+t(x-x_0)}(u)(x - x_0) + \\
&\quad + \left( \Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times (t(\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u)) \right)(x - x_0) + \\
&\quad + \left( \Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times (t(\gamma(x_0 + t(x - x_0))(u))) \right)(x - x_0)
\end{aligned}$$

ou ainda, lembrando a definição de  $h(t)$  e as caracterizações de  $\bar{\Gamma}$  e de  $\bar{\gamma}$  e dos respectivos diferenciais parciais em 3.6.18,

$$\begin{aligned}
h'(t) &= (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times \varphi_{(x)}(t))(u) + \gamma(x_0 + t(x - x_0))(u) + \\
&\quad + t(D\Gamma_{x_0+t(x-x_0)}(u) \times \varphi_{(x)}(t))(x - x_0) + tD\gamma_{x_0+t(x-x_0)}(u)(x - x_0) + \\
&\quad + (\Gamma(x_0 + t(x - x_0)) \times h(t))(x - x_0) = \\
&= \bar{\Gamma}(x, t)(h(t)) + D_1\bar{\Gamma}_{(x,t)}(u)(\varphi_{(x)}(t)) + D_1\bar{\gamma}_{(x,t)}(u).
\end{aligned}$$

e) Comparando a fórmula para  $g'(t)$  obtida em c) com a última fórmula para  $h'(t)$  obtida em d), vemos que  $g, h: [0, 1] \rightarrow F$  são duas soluções duma mesma equação diferencial linear com a mesma condição inicial  $(0, 0)$  pelo que pela unicidade de solução temos  $h(t) = g(t)$  para cada  $t$ , em particular

$$\begin{aligned}
Df_x(u) &= D_1\Phi_{(x,1)}(u) = \widehat{\varphi}_{(x)}(1)(u) = g(1) = h(1) = \\
&= (\Gamma(x) \times \varphi_{(x)}(1))(u) + \gamma(x)(u) = \\
&= (\Gamma(x) \times f(x))(u) + \gamma(x)(u),
\end{aligned}$$

ou seja  $Df_x = \Gamma(x) \times f(x) + \gamma(x)$ , pelo que atingimos o objetivo apontado em b).  $\square$

### 3.6.21 (Corolário — Equações diferenciais lineares na variável complexa)

Sejam  $F$  e  $G$  espaços vetoriais normados complexos, o primeiro dos quais completo e  $\rho: G \times F \rightarrow F$  uma aplicação bilinear contínua, para a qual utilizaremos a notação multiplicativa  $z \times y = \rho(z, y) \in F$ . Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  um domínio de diferenciabilidade localmente convexo e estrelado relativamente a um certo  $x_0 \in A$  e  $\Gamma: A \rightarrow G$  e  $\gamma: A \rightarrow F$  duas aplicações de classe  $C^1$ . Para cada  $y_0 \in F$  existe então uma única aplicação diferenciável  $f: A \rightarrow F$  tal que  $f(x_0) = y_0$  e  $f'(x) = \Gamma(x) \times f(x) + \gamma(x)$ , aplicação  $f$  essa que é mesmo de classe  $C^{k+1}$  no caso em que  $\Gamma$  e  $\gamma$  são de classe  $C^k$ .

**Dem:** Considerando a isometria linear  $\Upsilon: \mathcal{L}(\mathbb{C}; F) \rightarrow F$  referida em 2.1.42, obtemos uma aplicação de classe  $C^1$  (respetivamente de classe  $C^k$ )

$$\widehat{\gamma} = \Upsilon^{-1} \circ \gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$$

e uma aplicação bilinear contínua

$$\hat{\rho} = \Upsilon^{-1} \circ \rho: G \times F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F),$$

tendo-se então que a equação diferencial linear

$$f'(x) = \Gamma(x) \times f(x) + \gamma(x)$$

fica equivalente à equação diferencial total linear

$$Df_x = \Gamma(x) \times f(x) + \hat{\gamma}(x).$$

Para obtermos a conclusão pretendida basta assim aplicar o teorema de Frobenius linear 3.6.20 desde que se prove a simetria das aplicações bilineares  $\Psi_x: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow F$  e  $\Psi_{x,y}: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow F$  intervenientes nas condições de integrabilidade em 3.6.19 e isso resulta de que, como para qualquer aplicação bilinear (complexa)  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow F$ , tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_x(u, v) &= uv\Psi_x(1, 1) = \Psi_x(v, u), \\ \Psi_{x,y}(u, v) &= uv\Psi_{x,y}(1, 1) = \Psi_{x,y}(v, u). \end{aligned} \quad \square$$

Como aplicação do resultado precedente, podemos construir uma função logaritmo no contexto de  $\mathbb{C}$ , estendendo os logaritmos usuais dos reais maiores que 0, e verificar as propriedades básicas dessa função.

**3.6.22 (Um logaritmo no contexto de  $\mathbb{C}$ ) a)** O subconjunto  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  de  $\mathbb{C}$  é aberto e estrelado relativamente a 1 e existe uma única aplicação diferenciável  $\text{Log}: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  verificando as condições

$$(1) \quad \text{Log}(1) = 0, \quad \text{Log}'(z) = \frac{1}{z},$$

aplicação essa que é mesmo de classe  $C^\infty$ .

**b)** Considerando a aplicação exponencial  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  referida em 3.6.15, tem-se  $\exp(\text{Log}(z)) = z$  para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ .

**c)** No caso em que  $z \in ]0, +\infty[$ , tem-se  $\text{Log}(z) = \ln(z) \in \mathbb{R}$ .

**d)** Mais geralmente, sendo  $z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  tem-se

$$\text{Log}(z) = s + ti,$$

onde  $s \in \mathbb{R}$  e  $t \in ]-\pi, \pi[$  são os definidos por

$$s = \ln(|z|), \quad \cos(t) + \text{sen}(t)i = \frac{z}{|z|},$$

em particular tem-se

$$\text{Log}(\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]) = \mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[.$$

Note-se que ao real  $t = \Im(\text{Log}(z))$  também se dá o nome de *argumento principal* de  $z$ , notado  $\text{Arg}(z)$ , tendo-se assim  $\text{Log}(z) = \ln(|z|) + \text{Arg}(z)i$ .



**Dem: a)** Começemos por mostrar que  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  é estrelado relativamente a 1. Ora, sendo  $z = a + bi$  em  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  e  $s \in ]0, 1[$  então ou  $b = 0$  e  $a > 0$ , caso em que,

$$(1-s)1 + sz = (1-s)1 + sa \in ]0, +\infty[ \subset \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$$

ou  $b \neq 0$ , caso em que  $(1-s)1 + sz$  não pertence a  $]-\infty, 0]$  por ter coeficiente parte imaginária igual a  $sb \neq 0$ . Podemos agora utilizar 3.6.21, com  $\Gamma = 0$  e  $\gamma(z) = \frac{1}{z}$ , para garantir a existência de uma única aplicação diferenciável  $\text{Log}: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  verificando (1), aplicação essa que é mesmo de classe  $C^\infty$ .<sup>292</sup>

**b)** Sejam  $f, g: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  as aplicações diferenciáveis definidas por

$$f(z) = \exp(\text{Log}(z)), \quad g(z) = z.$$

Ven  $f(1) = 1 = g(1)$  e para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$

$$f'(z) = \exp(\text{Log}(z)) \text{Log}'(z) = \frac{1}{z} f(z),$$

$$g'(z) = 1 = \frac{1}{z} g(z)$$

pelo que  $f$  e  $g$  são duas soluções de uma mesma equação diferencial linear com uma mesma condição inicial e portanto  $f(z) = g(z)$  para cada  $z$ .

**c)** Basta atender a que a aplicação  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(z) = \text{Log}(z) - \ln(z)$$

verifica  $f(1) = 0$  e  $f'(z) = 0$ .

**d)** Sejam  $f, g: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  as aplicações de classe  $C^\infty$  definidas por

$$\text{Log}(z) = f(z) + g(z) i.$$

Tendo em conta a alínea c) de 3.6.15, tem-se

$$z = \exp(\text{Log}(z)) = e^{f(z)} (\cos(g(z)) + \text{sen}(g(z)) i),$$

e portanto  $|z| = e^{f(z)}$ , ou seja  $f(z) = \ln(|z|)$ , e  $g(z)$  não toma os valores  $\pi$  e  $-\pi$  (para os quais viria  $z \in ]-\infty, 0]$ ). Uma vez que  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  é conexo, por ser estrelado relativamente a 1, concluímos que  $g(\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0])$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$  que contém  $0 = g(1)$  e não contém  $\pi$  nem  $-\pi$ , o que implica que  $g(z) \in ]-\pi, \pi[$  para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ . Tem-se então

$$\frac{z}{|z|} = \cos(g(z)) + \text{sen}(g(z)) i$$

pelo que as restantes afirmações de d) resultam da propriedade conhecida das

<sup>292</sup>É um luxo, que porventura alguns considerarão de mau gosto, utilizar 3.6.21 para tirar esta conclusão. Trata-se essencialmente de um problema de existência de primitiva que pode ser facilmente resolvido a partir de 3.5.22.

funções trigonométricas que afirma que todo o complexo de módulo 1 pode ser escrito de um único modo na forma  $\cos(t) + \operatorname{sen}(t)i$  com  $t \in ]-\pi, \pi]$ , o complexo sendo  $-1$  quando  $t = \pi$ .  $\square$

## Exercícios

**Ex. 3.6.1 (As funções trigonométricas e a constante  $\pi$  reinventadas)** Neste exercício vamos supor que nunca estudámos as funções trigonométricas e fazer uma construção alternativa destas baseada nas propriedades das equações diferenciais lineares.

**a)** Mostrar que existem funções diferenciáveis  $\operatorname{Sen}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\operatorname{Cos}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  únicas que verifiquem as condições

$$\operatorname{Sen}(0) = 0, \quad \operatorname{Cos}(0) = 1, \quad \operatorname{Sen}'(t) = \operatorname{Cos}(t), \quad \operatorname{Cos}'(t) = -\operatorname{Sen}(t)$$

e que estas aplicações são mesmo de classe  $C^\infty$ .<sup>293</sup> **Sugestão:** Caracterizar a aplicação de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}^2$  que a  $t$  associa  $(\operatorname{Sen}(t), \operatorname{Cos}(t))$  como a solução de uma equação diferencial linear conveniente que para  $t = 0$  toma o valor  $(0, 1)$ .

**b)** Verificar que qualquer que seja  $t \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\operatorname{Sen}^2(t) + \operatorname{Cos}^2(t) = 1,$$

em particular  $\operatorname{Sen}(t)$  e  $\operatorname{Cos}(t)$  pertencem a  $[-1, 1]$ .

**c)** Verificar que qualquer que seja  $t \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\operatorname{Sen}(-t) = -\operatorname{Sen}(t), \quad \operatorname{Cos}(-t) = \operatorname{Cos}(t).$$

**Sugestão:** Verificar que as aplicações de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$  que a  $t$  associam

$$(\operatorname{Sen}(-t), \operatorname{Cos}(-t)) \quad \text{e} \quad (-\operatorname{Sen}(t), \operatorname{Cos}(t))$$

são soluções de uma mesma equação diferencial linear com o mesmo valor para  $t = 0$ .

**d)** Verificar que quaisquer que sejam  $s, t \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Sen}(s+t) &= \operatorname{Sen}(s)\operatorname{Cos}(t) + \operatorname{Cos}(s)\operatorname{Sen}(t), \\ \operatorname{Cos}(s+t) &= \operatorname{Cos}(s)\operatorname{Cos}(t) - \operatorname{Sen}(s)\operatorname{Sen}(t). \end{aligned}$$

**Sugestão:** Análoga à da alínea precedente mas considerando  $s$  fixado e  $t$  como variável.

**e)** Verificar que existe  $a > 0$  tal que para cada  $t \in [0, a]$  se tenha

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{Cos}(t) \leq 1.$$

Notando  $J$  o conjunto dos  $a$  nestas condições, verificar que se  $a \in J$  tem-se

<sup>293</sup>É claro que, conhecendo já as funções trigonométricas  $\operatorname{sen}$  e  $\operatorname{cos}$ , definidas geometricamente, e as suas propriedades fundamentais, concluímos que  $\operatorname{Cos}(t) = \operatorname{cos}(t)$  e  $\operatorname{Sen}(t) = \operatorname{sen}(t)$  e que a constante  $\hat{\pi}$  que definiremos adiante coincide com a constante  $\pi$  definida geometricamente.

$$0 < \text{Sen}(t) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

para cada  $t \in ]0, a[$  e no intervalo  $[0, a]$  a função  $\text{Sen}$  é estritamente crescente e a função  $\text{Cos}$  é estritamente decrescente.

**f)** Nas notações de e), verificar que se  $a \in J$  então  $a < 1$  e deduzir que o conjunto  $J$  admite um máximo  $0 < a_0 < 1$  e que se tem

$$\text{Cos}(a_0) = \text{Sen}(a_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e daqui que  $a_0 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**g)** Definir a constante  $\hat{\pi}$  por  $\hat{\pi} = 4a_0$ , a qual verifica portanto  $2\sqrt{2} < \hat{\pi} < 4$ .<sup>294</sup> Determinar os valores de  $\text{Sen}(t)$  e de  $\text{Cos}(t)$  para os valores  $\frac{\hat{\pi}}{2}$ ,  $\hat{\pi}$  e  $2\hat{\pi}$  de  $t$  e deduzir que as funções  $\text{Sen}$  e  $\text{Cos}$  são periódicas de período  $2\hat{\pi}$ . **Sugestão:** Utilizar as fórmulas para  $\text{Sen}(2t)$  e  $\text{Cos}(2t)$  que se deduzem das igualdades em d).

**h)** Verificar que se tem  $\text{Cos}(t) > 0$  para cada  $t \in [0, \frac{\hat{\pi}}{2}[$ . Deduzir que no intervalo  $[0, \frac{\hat{\pi}}{2}]$  a função  $\text{Sen}$  é estritamente crescente e a função  $\text{Cos}$  é estritamente decrescente. **Sugestão:** Utilizar as desigualdades obtidas em e) e a fórmula para  $\text{Cos}(2t)$  que se deduz da segunda igualdade em d).

**i)** Utilizar as conclusões de h) e c) e as fórmulas

$$\text{Cos}(\hat{\pi} - t) = -\text{Cos}(t), \quad \text{Sen}(\hat{\pi} - t) = \text{Sen}(t),$$

que se justificam facilmente, para mostrar que a aplicação de  $]-\hat{\pi}, \hat{\pi}]$  para  $\mathbb{R}^2$  que a  $t$  associa  $(\text{Cos}(t), \text{Sen}(t))$  é injetiva e tem como imagem

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

**j)** Deduzir de i) que é também injetiva e com imagem  $S$  a aplicação de  $[0, 2\hat{\pi}[$  para  $\mathbb{R}^2$  que a  $t$  associa  $(\text{Cos}(t), \text{Sen}(t))$ .

**Ex. 3.6.2** Sejam  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach e  $J \in \mathcal{E}$  um elemento tal que  $J \cdot J = -1$ . Mostrar que para cada  $t \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\exp(tJ) = \cos(t) \cdot 1 + \text{sen}(t) \cdot J,$$

em particular  $\exp(J) = \cos(1) \cdot 1 + \text{sen}(1) \cdot J$ .

**Ex. 3.6.3 (Equações diferenciais lineares de coeficientes constantes)** Nas notações de 3.6.2, as aplicações  $\Gamma: J \rightarrow G$  e  $\gamma: J \rightarrow F$  podem ser consideradas os coeficientes da equação diferencial linear e, desse ponto de vista, chamam-se *equações diferenciais lineares de coeficientes constantes* àquelas em que as aplicações  $\Gamma$  e  $\gamma$  são constantes, caso em que não há nenhuma razão que leve a não tomar para  $J$  a totalidade de  $\mathbb{R}$ . Neste contexto podemos notar  $\hat{y}_0$  o vetor do espaço de Banach  $F$  que é o valor constante da aplicação  $\gamma$ ,  $\hat{z}_0$  o vetor do espaço vetorial normado  $G$  que é o valor constante da aplicação  $\Gamma$  e  $\lambda \in \mathcal{L}(F; F)$  a aplicação linear contínua definida por  $y \mapsto \hat{z}_0 \times y$ , o que conduz a que a equação diferencial linear de coeficientes

<sup>294</sup>Esta estimativa não se pode considerar muito precisa mas sempre poderá servir nalgumas situações. É claro que, conhecendo já as funções trigonométricas  $\text{sen}$  e  $\text{cos}$  definidas geometricamente e a constante  $\pi$  definida no mesmo contexto, concluímos que  $\hat{\pi} = \pi$ .

constantes possa ser escrita na forma

$$f'(t) = \lambda(f(t)) + \widehat{y}_0,$$

que não necessita referir o espaço  $G$ , onde se procura a aplicação  $f: \mathbb{R} \rightarrow F$  que verifica aquela equação e uma certa condição inicial  $f(t_0) = y_0$ .

**a) (O caso da equação homogénea)** Verificar que a solução da equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes

$$f'(t) = \lambda(f(t))$$

com a condição inicial  $f(t_0) = y_0$  pode ser dada explicitamente por

$$f(t) = \exp((t - t_0)\lambda)(y_0),$$

onde  $\exp$  é a aplicação exponencial da álgebra de Banach  $\mathcal{L}(F; F)$  que examinámos em 3.6.14 e que sabemos coincidir com a aplicação  $\exp$  definida no exercício 2.3.11.

**b) (O caso da equação não necessariamente homogénea)** Verificar que a solução da equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$f'(t) = \lambda(f(t)) + \widehat{y}_0$$

com a condição inicial  $f(t_0) = y_0$  pode ser dada explicitamente por

$$f(t) = \exp((t - t_0)\lambda)(h(t))$$

onde

$$h(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \exp(-(s - s_0)\lambda)(\widehat{y}_0) ds.$$

**c) (Generalização de b))** Verificar que, no caso em que o “coeficiente” correspondente a  $\Gamma$  continua a ser constante mas o correspondente a  $\gamma$  já não o é necessariamente, havendo portanto lugar para considerar um intervalo não trivial  $J$  como domínio de  $\gamma$ , a solução da equação diferencial

$$f'(t) = \lambda(f(t)) + \gamma(t)$$

com a condição inicial  $f(t_0) = y_0$  pode ser dada explicitamente no intervalo  $J$  por

$$f(t) = \exp((t - t_0)\lambda)(h(t))$$

onde

$$h(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \exp(-(s - s_0)\lambda)(\gamma(s)) ds.$$

**Ex. 3.6.4** Seja  $\mathcal{M}_n$  a álgebra das matrizes reais do tipo  $n \times n$ , que se viu no exercício 2.3.9 ser uma álgebra de Banach para uma norma conveniente. Lembrar que, como se viu no exercício 3.2.7, tem lugar uma aplicação de classe  $C^\infty$   $\det: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada matriz associa o seu determinante e que, para cada matriz invertível  $X$ , tem-se

$$D\det_X(A) = \text{Tr}(A \times X^{-1}) \times \det(X),$$

onde se nota  $\text{Tr}(B)$  o traço duma matriz  $B$ .

Mostrar que, para cada matriz  $Y \in \mathcal{M}_n$ , tem-se

$$\det(\exp(Y)) = e^{\text{Tr}(Y)}.$$

**Sugestão:** Mostrar, mais geralmente, que  $\det(\exp(tY)) = e^{t\text{Tr}(Y)}$ , verificando que ambos os membros são soluções de uma mesma equação diferencial linear com a mesma condição inicial.

**Ex. 3.6.5 a)** Sejam  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  duas álgebras de Banach sobre  $\mathbb{K}$  e  $\xi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  um morfismo unitário de álgebras normadas, isto é uma aplicação linear contínua verificando as condições  $\xi(1) = 1$  e  $\xi(x \cdot y) = \xi(x) \cdot \xi(y)$  quaisquer que sejam  $x, y \in \mathcal{E}$ . Verificar que, para as aplicações exponenciais de  $\mathcal{E}$  e de  $\mathcal{F}$ , tem-se

$$\xi(\exp(x)) = \exp(\xi(x))$$

qualquer que seja  $x \in \mathcal{E}$ . **Sugestão:** Na notação utilizada em 3.6.14, mostrar que se tem, mais geralmente,  $\xi(f_x(t)) = f_{\xi(x)}(t)$ .

**b)** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach e consideremos a álgebra de Banach oposta  $\mathcal{E}^*$ , a saber aquela que apenas difere da original por considerarmos uma nova multiplicação  $*$  definida por  $x*y = y \cdot x$ . Mostrar que as aplicações exponenciais  $\exp$  de  $\mathcal{E}$  e de  $\mathcal{E}^*$  coincidem. **Sugestão:** Ter em conta uma das conclusões da alínea a) de 3.6.16.

**c)** Seja  $E$  um espaço de Hilbert e consideremos a correspondente álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$  como álgebra de Banach real assim como a respetiva álgebra de Banach oposta  $\mathcal{L}(E; E)^*$ . Reparar que tem lugar um morfismo unitário de álgebras normadas reais  $\mathcal{L}(E; E) \rightarrow \mathcal{L}(E; E)^*$  que a cada  $\lambda \in \mathcal{L}(E; E)$  associa a aplicação linear adjunta  $\lambda^*$  e deduzir de a) que se tem

$$\exp(\lambda)^* = \exp(\lambda^*).$$

**Ex. 3.6.6** Sejam  $E$  um espaço de Banach sobre  $\mathbb{K}$  e  $\gamma: E \times E \rightarrow E$  uma aplicação bilinear contínua e notemos, como noutras situações já encontradas,  $\gamma(x, y) = x \cdot y$ .<sup>295</sup> Se  $\lambda: E \rightarrow E$  é uma aplicação linear contínua, diz-se que  $\lambda$  é um  $\gamma$ -morfismo se se tem  $\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) \cdot \lambda(y)$  quaisquer que sejam  $x, y \in E$  e que  $\lambda$  é uma  $\gamma$ -derivação se se tem  $\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) \cdot y + x \cdot \lambda(y)$  quaisquer que sejam  $x, y \in E$ . Consideremos a álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$  e a correspondente aplicação exponencial que notaremos  $\exp$ .

**a)** Mostrar que, se  $\lambda$  é uma  $\gamma$ -derivação, então a aplicação linear contínua  $\exp(\lambda): E \rightarrow E$  é um  $\gamma$ -morfismo.

**Sugestão:** Uma ideia que pareceria natural seguir, na sequência do que se tem vindo a fazer, seria tentar mostrar que, nas notações de 3.6.14, viria, mais geralmente, quaisquer que sejam  $x, y \in E$ ,

$$(1) \quad f_{(\lambda)}(t)(x \cdot y) = f_{(\lambda)}(t)(x) \cdot f_{(\lambda)}(t)(y)$$

constatando que ambos os membros seriam soluções de uma mesma equação diferencial linear com uma mesma condição inicial. Esta ideia parece não funcionar diretamente mas já funciona se escrevermos a condição de  $\lambda$  ser  $\gamma$ -derivação na forma

$$\lambda \circ \gamma = \gamma \circ (\lambda \times Id_E) + \gamma \circ (Id_E \times \lambda)$$

(igualdade em  $\mathcal{L}(E, E; E)$ ) e escrevermos a igualdade (1), a estabelecer, na forma

<sup>295</sup>Por exemplo,  $E$  pode ser uma álgebra de Banach e  $\gamma$  a respetiva multiplicação.

$$f_{(\lambda)}(t) \circ \gamma = \gamma \circ (f_{(\lambda)}(t) \times f_{(\lambda)}(t)).$$

**b)** Mostrar que, se  $\lambda \in \mathcal{L}(E; E)$  é tal que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(t\lambda)$  seja um  $\gamma$ -morfismo, então  $\lambda$  é uma  $\gamma$ -derivada (não afirmamos, no entanto, que se  $\exp(\lambda)$  for um  $\gamma$ -morfismo  $\lambda$  tenha que ser uma  $\gamma$ -derivada). **Sugestão:** Reparar que basta derivar como funções de  $t$  ambos os membros da igualdade

$$f_{(\lambda)}(t)(x \cdot y) = f_{(\lambda)}(t)(x) \cdot f_{(\lambda)}(t)(y)$$

e fazer em seguida  $t = 0$ .

**Ex. 3.6.7 (Invertibilidade da aplicação exponencial no espaço das aplicações autoadjuntas)** Seja  $E$  um espaço de Hilbert sobre  $\mathbb{K}$  e notemos  $\mathcal{L}_{sa}(E; E)$  o subespaço vetorial real de  $\mathcal{L}(E; E)$  constituído pelas aplicações lineares contínuas autoadjuntas (cf. 2.5.34).

**a)** Mostrar que se  $\lambda \in \mathcal{L}_{sa}(E; E)$  fica definida uma aplicação sesquilinear hermitica contínua associada  $\alpha: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  (cf. 2.5.3 e 2.5.4) por

$$\alpha(x, y) = \langle x, \lambda(y) \rangle.$$

**b)** Diz-se que uma aplicação linear contínua autoadjunta  $\lambda: E \rightarrow E$  é *topologicamente definida positiva* se a aplicação sesquilinear hermitica associada o for (cf. o exercício 3.3.8) isto é, se existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\langle x, \lambda(x) \rangle \geq \varepsilon \langle x, x \rangle,$$

para cada  $x \in E$ .

**c)** Mostrar que, se  $\lambda \in \mathcal{L}_{sa}(E; E)$  é topologicamente definida positiva, então pode-se definir um novo produto interno em  $E$ , pondo

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = \alpha(x, y) = \langle x, \lambda(y) \rangle,$$

produto interno esse cuja norma associada é equivalente à associada ao produto interno original.

**d)** Mostrar que, se  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  é um outro produto interno de  $E$ , cuja norma associada seja equivalente à associada ao produto interno original, então existe um, e um só,  $\lambda \in \mathcal{L}(E; E)$  tal que se tenha  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle x, \lambda(y) \rangle$  e que  $\lambda$  é então autoadjunta e topologicamente definida positiva. **Sugestão:** Ter em conta o teorema da representação de Riesz em 2.5.29.

**e)** Mostrar que, se  $\lambda: E \rightarrow E$  é uma aplicação linear contínua autoadjunta e topologicamente definida positiva, então  $\lambda$  é um isomorfismo topológico de  $E$  sobre  $E$ . **Sugestão:** Sendo  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle x, \lambda(y) \rangle$ , considerar uma aplicação linear contínua  $\mu: E \rightarrow E$  tal que se tenha  $\langle x, y \rangle = \langle\langle x, \mu(y) \rangle\rangle$ .

**f)** Mostrar que o subconjunto  $\mathcal{L}_{sa+}(E; E)$  de  $\mathcal{L}_{sa}(E; E)$ , constituído pelas aplicações lineares autoadjuntas topologicamente definidas positivas é um aberto convexo daquele espaço, que contém a aplicação identidade  $Id_E$ .

**g)** Mostrar que, se  $\lambda \in \mathcal{L}_{sa}(E; E)$ , então, considerando a aplicação exponencial  $\exp$  da álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$ , a aplicação linear contínua  $\exp(\lambda): E \rightarrow E$  é autoadjunta e definida positiva. **Sugestão:** Reparar que se tem

$$\exp(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda}{2}\right) \circ \exp\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

**h)** Mostrar que se pode definir uma aplicação de classe  $C^\infty$ ,

$$\log: \mathcal{L}_{sa+}(E; E) \rightarrow \mathcal{L}_{sa}(E; E),$$

pondo

$$\log(\mu) = \int_0^1 ((1-t)Id_E + t\mu)^{-1} \circ (\mu - Id_E) dt$$

(dizemos que  $\log(\mu)$  é o logaritmo da aplicação linear contínua autoadjunta e definida positiva  $\mu$ ). **Sugestão:** Ter em conta o resultado sobre a diferenciabilidade do integral paramétrico em 3.5.19 assim como as seguintes propriedades algébricas elementares em  $\mathcal{L}(E; E)$ : **1)** Se  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  e  $\alpha$  é invertível então  $\alpha^{-1} \circ \beta = \beta \circ \alpha^{-1}$ ; **2)** Se  $\alpha$  é invertível então a adjunta  $\alpha^*$  é também invertível e com  $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$ , em particular se  $\alpha$  é autoadjunto o mesmo acontece a  $\alpha^{-1}$ ; **3)** Se  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$  e  $\alpha$  e  $\beta$  são autoadjuntas então  $\alpha \circ \beta$  é autoadjunta.

**i)** Mostrar que  $\log(Id_E) = 0$  e que, para cada  $\mu \in \mathcal{L}_{sa+}(E; E)$  e cada  $\alpha \in \mathcal{L}_{sa}(E; E)$  tais que  $\mu \circ \alpha = \alpha \circ \mu$ , tem-se

$$D\log_\mu(\alpha) = \mu^{-1} \circ \alpha.$$

**Sugestão:** Aplicar o teorema de derivação do integral paramétrico em 3.5.18, aplicando a fórmula para a derivada da inversão em 3.2.20, e reparar que a função integranda admite a primitiva

$$\varphi(t) = t((1-t)Id_E + t\mu)^{-1} \circ \alpha.$$

**j)** Mostrar que, para cada  $\lambda \in \mathcal{L}_{sa}(E; E)$ , tem-se

$$\log(\exp(\lambda)) = \lambda.$$

**Sugestão:** Verificar, mais geralmente, que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\log(\exp(t\lambda)) = t\lambda$ , utilizando a conclusão de i) para derivar o primeiro membro.

**k)** Mostrar que, para cada  $\mu \in \mathcal{L}_{sa+}(E; E)$ , tem-se

$$\exp(\log(\mu)) = \mu$$

(fica assim provado que a restrição de  $\exp$  a  $\mathcal{L}_{sa}(E; E)$  é um difeomorfismo deste espaço de Banach sobre o seu aberto  $\mathcal{L}_{sa+}(E; E)$ , tendo  $\log$  como difeomorfismo inverso). **Sugestão:** Verificar, mais geralmente, que se tem

$$\exp\left(\int_0^s ((1-t)Id_E + t\mu)^{-1} \circ (\mu - Id_E) dt\right) = (1-s)Id_E + s\mu,$$

reparando que ambos os membros tomam o mesmo valor para  $s = 0$  e são soluções de uma mesma equação diferencial linear.

**Ex. 3.6.8 (Outra caracterização da aplicação exponencial)** Seja  $\mathcal{E}$  um álgebra de Banach sobre  $\mathbb{K}$ .

**a)** Mostrar, por indução, que para cada natural  $n \geq 1$  tem lugar uma aplicação  $\varphi_n: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  de classe  $C^\infty$  definida por  $\varphi_n(x) = x^n$  e que se  $x, u \in \mathcal{E}$  verificam  $x \cdot u = u \cdot x$  tem-se (com a convenção  $x^0 = 1$ )

$$D\varphi_{n_x}(u) = nu \cdot x^{n-1}.$$

**b)** Mostrar que para cada  $x \in \mathcal{E}$  tem-se

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

**Sugestão:** Considerar a aplicação diferenciável  $f: [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$  a aplicação diferenciável  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$  definidas por

$$f(t) = \exp(tx), \quad f_n(t) = \left(1 + \frac{tx}{n}\right)^n$$

e, tendo em conta 2.3.33 e 2.3.34, reparar que se  $n > \|x\|$  tem-se

$$f'_n(t) = x \cdot (1 + ty)^{-1} \cdot f_n(t),$$

com  $y = \frac{1}{n}x$ , e

$$f'(t) = x \cdot (1 + ty)^{-1} \cdot f(t),$$

com  $y = 0$ , tendo então em conta o resultado sobre a continuidade relativamente ao parâmetro  $y$  em 3.6.7.

**Ex. 3.6.9 (Um resultado sobre a imagem da aplicação exponencial)** Seja  $\mathcal{E}$  uma álgebra de Banach e consideremos a aplicação exponencial  $\exp: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ . Seja  $y \in \mathcal{E}$  tal que  $\|y\| < 1$  e lembremos que, tendo em conta 2.3.33 e 2.3.34,  $1 - ty$  é invertível para cada  $t \in [0, 1]$  e é contínua a aplicação de  $[0, 1]$  em  $\mathcal{E}$  que a  $t$  associa  $(1 - ty)^{-1}$ .

**a)** Sendo

$$x = \int_0^1 -(1 - ty)^{-1} \cdot y \, dt \in \mathcal{E},$$

verificar que se tem  $\exp(x) = 1 - y$  ( $x$  é um logaritmo de  $1 - y$ ).

**Sugestão:** Sendo  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$  as aplicações de classe  $C^1$  definidas por

$$f(s) = \int_0^s -(1 - ty)^{-1} \cdot y \, dt, \quad g(s) = \exp(f(s)),$$

verificar que se tem

$$g'(s) = -(1 - sy)^{-1} \cdot y \cdot g(s),$$

para o que convirá ter em conta que se  $w \cdot z = z \cdot w$  em  $\mathcal{E}$  e  $z$  é invertível então também

$$w \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z \cdot w \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot w \cdot z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot w.$$

Reparar então que  $g$  e a aplicação  $h: [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $h(s) = 1 - sy$  têm o mesmo valor para  $s = 0$  e verificam uma mesma equação diferencial linear.

**b)** Mostrar que se  $y \in \mathcal{E}$  verifica  $\|y\| < 1$  então o elemento  $x$  definido em a) admite a caracterização alternativa

$$x = -\sum_{n \geq 1} \frac{y^n}{n} = -\left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots\right).$$

**Sugestão:** Utilizar 3.3.34 para mostrar que tem lugar uma aplicação  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}$  de classe  $C^1$  definida por



$$\varphi(t) = -\sum_{n \geq 1} \frac{t^n y^n}{n} = -\left( ty + \frac{t^2 y^2}{2} + \frac{t^3 y^3}{3} + \dots \right)$$

para a qual se tem

$$\varphi'(t) = -\left( y + ty^2 + t^2 y^3 + \dots \right) = -(1 - ty)^{-1} \cdot y$$

e utilizar  $\varphi$  para calcular o integral em a).

**Ex. 3.6.10 (Limites “laterais” da função logaritmo Log em 3.6.22)**

**a) (Outra função logaritmo auxiliar)** Mostrar que se pode definir uma aplicação de classe  $C^\infty$   $\mathcal{L}\text{og}: \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\mathcal{L}\text{og}(z) = \text{Log}(-z) + \pi i$$

para a qual se tem

$$\mathcal{L}\text{og}(-1) = \pi i, \quad \mathcal{L}\text{og}'(z) = \frac{1}{z}, \quad \exp(\mathcal{L}\text{og}(z)) = z.$$

Deduzir que se tem

$$\mathcal{L}\text{og}(z) = s + ti,$$

onde  $s \in \mathbb{R}$  e  $t \in ]0, 2\pi[$  são os definidos por

$$s = \ln(|z|), \quad \cos(t) + \text{sen}(t)i = \frac{z}{|z|},$$

em particular a imagem de  $\mathcal{L}\text{og}$  é  $\mathbb{R} \times ]0, 2\pi[$ .

**b)** Reparar que

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = (\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]) \cap (\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[)$$

é a união de dois abertos conexos  $\mathbb{C}_+$  e  $\mathbb{C}_-$ , constituídos respetivamente pelos complexos com coeficiente da parte imaginária maior que 0 e por aqueles com coeficiente da parte imaginária menor que 0. Verificando que

$$\text{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i = \mathcal{L}\text{og}(i), \quad \text{Log}(-i) = -\frac{\pi}{2}i, \quad \mathcal{L}\text{og}(-i) = \frac{3\pi}{2}i,$$

deduzir que se tem  $\mathcal{L}\text{og}(z) = \text{Log}(z)$  para cada  $z \in \mathbb{C}_+$  e  $\mathcal{L}\text{og}(z) = \text{Log}(z) + 2\pi i$  para cada  $z \in \mathbb{C}_-$ .

**c)** Concluir das alíneas precedentes que para cada  $a \in ]-\infty, 0[$  não existe o limite  $\lim_{z \rightarrow a} \text{Log}(z)$ , mostrando que existem os “limites laterais”

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \mathbb{C}_+}} \text{Log}(z) &= \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \mathbb{C}_+}} \mathcal{L}\text{og}(z) = \ln(-a) + \pi i, \\ \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \mathbb{C}_-}} \text{Log}(z) &= \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \mathbb{C}_+}} \mathcal{L}\text{og}(z) - 2\pi i = \ln(-a) - \pi i. \end{aligned}$$

Mostrando que também não existe o limite de  $\text{Log}(z)$  quando  $z \rightarrow 0$ , concluir que a função  $\text{Log}$  não pode ser prolongada como função contínua a nenhum domínio que contenha estritamente o seu.

**d)** Deduzir de c) que, para a função  $\text{Arg}: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow ]-\pi, \pi[$  referida em 3.6.22,

tem-se, para cada  $a \in ]-\infty, 0[$ ,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \mathbb{C}_+}} \text{Arg}(z) = \pi, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \mathbb{C}_-}} \text{Arg}(z) = -\pi,$$

o que não se poderá considerar um resultado surpreendente.

**Ex. 3.6.11 (Teorema de Frobenius no contexto de  $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^m$ )** Neste exercício propomo-nos exibir a versão original das equações diferenciais totais lineares em que se parte de um domínio de diferenciabilidade localmente convexo  $A \subset \mathbb{K}^n$  (um aberto de  $\mathbb{K}^n$ , se quisermos simplificar), suposto estrelado relativamente a um certo  $x_0 \in A$ , se consideram para  $1 \leq p \leq m$ ,  $1 \leq q \leq m$  e  $1 \leq i \leq n$  funções de classe  $C^1$

$$a_{p,q}^i: A \rightarrow \mathbb{K}$$

e para  $1 \leq p \leq m$  e  $1 \leq i \leq n$  funções de classe  $C^1$

$$b_p^i: A \rightarrow \mathbb{K}$$

e se procuram funções diferenciáveis  $f_1, f_2, \dots, f_m: A \rightarrow \mathbb{K}$  tomando em  $x_0$  valores dados em  $\mathbb{K}$  (as condições iniciais) e verificando o sistema de  $m \times n$  equações diferenciais “parciais” lineares

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) = a_{1,1}^i(x) f_1(x) + \dots + a_{1,m}^i(x) f_m(x) + b_1^i(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) = a_{2,1}^i(x) f_1(x) + \dots + a_{2,m}^i(x) f_m(x) + b_2^i(x) \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) = a_{m,1}^i(x) f_1(x) + \dots + a_{m,m}^i(x) f_m(x) + b_m^i(x) \end{cases},$$

onde cometemos o abuso de, para uma aplicação diferenciável  $g: A \rightarrow \mathbb{K}$ , usar a notação  $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{K}$  para designar o valor  $Dg_x(e_i)$ , sendo  $e_i$  o  $i$ -ésimo elemento da base canónica de  $\mathbb{K}^n$ , mesmo no caso em que não faça sentido considerar as derivadas parciais (no caso em que  $A$  é um produto cartesiano<sup>296</sup> essa notação é compatível com o referido em 3.3.30, tendo em conta 3.3.27).

a) Verificar que, notando  $f: A \rightarrow \mathbb{K}^m$ ,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)),$$

o sistema de equações diferenciais atrás referido é equivalente à equação diferencial total linear

$$Df_x = \Gamma(x) \times f(x) + \gamma(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m),$$

onde, notando  $e_1, \dots, e_n$  e  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$  os vetores das bases canónicas de  $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^m$  respetivamente,  $\gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$  é a aplicação de classe  $C^1$  definida por

$$\gamma(x)(e_i) = \sum_p b_p^i(x) \hat{e}_p,$$

$\Gamma: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^m; \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m))$  é a aplicação de classe  $C^1$  definida por

<sup>296</sup>ou, mais geralmente, contém um tal produto, o que acontece certamente no caso em que  $A$  é aberto.

$$\Gamma(x)(\widehat{e}_q)(e_i) = \sum_p a_{p,q}^i(x) \widehat{e}_p$$

e a multiplicação

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}^m; \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)) \times \mathbb{K}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$$

é a aplicação de avaliação. **Sugestão:** Lembrar que duas aplicações lineares com o mesmo domínio coincidem se coincidirem nos vetores de uma base deste.

**b)** Verificar que as condições de integrabilidade referidas em 3.6.19, para a equação diferencial total linear referida em a) são equivalentes às igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_p^j}{\partial x_i}(x) + \sum_r a_{p,r}^j(x) b_r^i(x) &= \frac{\partial b_p^i}{\partial x_j}(x) + \sum_r a_{p,r}^i(x) b_r^j(x), \\ \frac{\partial a_{p,q}^j}{\partial x_i}(x) + \sum_r a_{p,r}^j(x) a_{r,q}^i(x) &= \frac{\partial a_{p,q}^i}{\partial x_j}(x) + \sum_r a_{p,r}^i(x) a_{r,q}^j(x), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $1 \leq i, j \leq n$  e  $1 \leq p, q \leq m$ . **Sugestão:** Análoga à apontada para a alínea precedente mas incluindo propriedades análogas envolvendo aplicações bilineares e trilineares.

**c) (O caso particular em que  $m = 1$ )** O caso particular das alíneas precedentes em que o espaço de chegada é  $\mathbb{K}$ , em vez de  $\mathbb{K}^m$ , admite alguma simplificação que valerá a pena examinar. Mudando ligeiramente as notações, para tirar partido do desaparecimento dos índices  $p$  e  $q$ , consideramos  $2n$  aplicações  $a_i: A \rightarrow \mathbb{K}$  e  $b_i: A \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $C^1$  (onde  $1 \leq i \leq n$ ) e procuramos uma aplicação diferenciável  $f: A \rightarrow \mathbb{K}$  com um valor dado no ponto  $x_0 \in A$  e verificando o sistema de  $n$  equações diferenciais parciais lineares

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i(x)f(x) + b_i(x)$$

(onde  $1 \leq i \leq n$ ). Verificar que a condição de integrabilidade que garante a existência (e unicidade) de uma tal aplicação  $f$  é equivalente às igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x) + a_j(x)b_i(x) &= \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(x) + a_i(x)b_j(x), \\ \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x). \end{aligned}$$

## §7. Propriedades elementares das aplicações holomorfas.

O nosso objetivo nesta secção é examinar algumas propriedades da diferenciabilidade que são válidas apenas no contexto em que o corpo dos escalares é  $\mathbb{C}$  e em que os domínios que consideramos são conjuntos abertos, contexto em que é usual utilizar a designação de aplicações holomorfas como sinónimo da de aplicações diferenciáveis no sentido complexo. Como instrumentos fundamentais para esse estudo utiliza-

remos os integrais ao longo de caminhos e de segmentos e as propriedades profundas, envolvendo estes, que foram estudadas, num contexto mais geral, na secção 3.5, a partir de 3.5.23. Começamos por estudar as aplicações cujo domínio é um aberto de  $\mathbb{C}$ .

**3.7.1 (Os caminhos circulares normalizados)** Sejam  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$ . Vamos notar  $\gamma_{z_0, r}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação de classe  $C^\infty$  definida por

$$\gamma_{z_0, r}(t) = z_0 + r \exp(2\pi ti)$$

que verifica  $\gamma_{z_0, r}(0) = \gamma_{z_0, r}(1)$  (é um caminho fechado) e tem como imagem a circunferência de centro  $z_0$  e raio  $r$

$$S_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$$

(cf. as propriedades da aplicação exponencial em 3.6.15 e as propriedades usuais das funções trigonométricas). Para este caminho tem-se para todo o  $w \in B_r(z_0)$

$$(1) \quad \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{1}{z - w} dz = 2\pi i.$$

**Dem:** Repare-se que o integral em (1) faz sentido uma vez que a aplicação contínua  $\gamma_{z_0, r}$  toma valores no aberto  $\mathbb{C} \setminus \{w\}$  onde é contínua a função que a  $z$  associa  $\frac{1}{z-w}$ . Consideremos a aplicação  $g: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$g(w) = \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{1}{z - w} dz = \int_0^1 \frac{1}{z_0 + r \exp(2\pi ti) - w} \times 2\pi ri \exp(2\pi ti) dt.$$

Tendo em conta o teorema de diferenciabilidade do integral paramétrico em 3.5.18 a aplicação  $g$  é de classe  $C^1$  e

$$g'(w) = \int_0^1 \frac{1}{(z_0 + r \exp(2\pi ti) - w)^2} \times 2\pi ri \exp(2\pi ti) dt = 0,$$

esta última igualdade resultando de que para cada  $w$  a aplicação  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\varphi(t) = \frac{1}{(z_0 + r \exp(2\pi ti) - w)^2} \times 2\pi ri \exp(2\pi ti)$$

admite a primitiva  $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\psi(t) = \frac{-1}{z_0 + r \exp(2\pi ti) - w},$$

para a qual se tem  $\psi(0) = \psi(1)$ . Uma vez que a bola aberta  $B_r(z_0)$  é convexa, em particular estrelada relativamente a  $z_0$ , deduzimos de 3.3.5 que a

aplicação  $g$  é constante. Para calcular o valor da constante notamos que

$$\begin{aligned} g(z_0) &= \int_0^1 \frac{1}{z_0 + r \exp(2\pi ti) - z_0} \times 2\pi r i \exp(2\pi ti) dt = \\ &= \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i. \end{aligned} \quad \square$$

**3.7.2 (Fórmula integral de Cauchy)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação *holomorfa*, isto é, uma aplicação diferenciável, no sentido complexo, em cada ponto  $z \in U$ . Sejam  $z_0 \in U$  e  $r > 0$  tais que a bola fechada  $\overline{B}_r(z_0)$  esteja contida em  $U$ . Para cada  $w \in B_r(z_0)$  tem-se

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

**Dem:** Comecemos por notar que, tendo em conta 3.7.1 e aplicando 3.5.24, com a aplicação linear contínua  $\mathbb{C} \rightarrow F$ ,  $a \mapsto af(w)$ , tem-se

$$\int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(w)}{z - w} dz = \left( \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{1}{z - w} dz \right) f(w) = 2\pi i f(w).$$

Consideremos agora uma aplicação  $g: U \rightarrow F$  definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & \text{se } z \neq w \\ f'(w), & \text{se } z = w, \end{cases}$$

aplicação que é diferenciável, em particular contínua, em todos os pontos de  $U \setminus \{w\}$  e também é contínua em  $w$ , tendo em conta que a caracterização da derivada  $f'(w)$  garante que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ z \neq w}} g(z) = g(w).$$

Podemos agora aplicar 3.5.37 à restrição de  $g$  ao convexo  $\overline{B}_r(z_0)$  (que, como referido em 3.3.12, é um domínio de diferenciabilidade localmente convexo) para garantir que essa restrição é primitivável e portanto, tendo em conta 3.5.27 e o facto de o caminho  $\gamma_{z_0, r}$  ser fechado

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_{z_0, r}} g(z) dz = \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dz = \\ &= \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z - w} dz - \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(w)}{z - w} dz = \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z - w} dz - 2\pi i f(w), \end{aligned}$$

igualdade que implica a fórmula no enunciado. □

O resultado precedente já contém uma das conclusões “surpreendentes” que vamos encontrar no estudo das aplicações holomorfas, nomeadamente o facto de o valor de  $f$  num ponto de  $B_r(z_0)$  ficar determinado pelos seus valores na fronteira  $S_r(z_0)$ , imagem do caminho  $\gamma_{z_0,r}$ . O próximo resultado examina outra dessas conclusões surpreendentes: Uma aplicação holomorfa que à partida apenas sabemos ser diferenciável, no sentido complexo, em cada ponto do domínio é necessariamente uma aplicação de classe  $C^\infty$ .

**3.7.3 (Fórmula integral de Cauchy para as derivadas)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Tem-se então:

a) A aplicação  $f$  é de classe  $C^\infty$ .

b) Sejam  $z_0 \in U$  e  $r > 0$  tais que  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$ . Para cada  $w \in B_r(z_0)$  as derivadas de ordem  $k \geq 1$  podem ser caracterizadas por

$$(1) \quad f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz,$$

fórmula que, por 3.7.2, também é válida para  $k = 0$ .

**Dem:** Tendo em conta o facto de a noção de aplicação de classe  $C^k$  ser local (cf. 3.2.14), para provar a) basta mostrar que para cada  $z_0 \in U$  existe um aberto de  $U$  contendo  $z_0$  onde a restrição de  $f$  é de classe  $C^\infty$ . Dado um tal  $z_0$ , consideramos  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$ . Vamos mostrar que a restrição de  $f$  ao aberto  $B_r(z_0)$ , que contém  $z_0$ , é de classe  $C^\infty$  e com as derivadas de ordem  $k$  caracterizadas por (1), o que provará, em particular, a conclusão de b). Para isso provamos por indução em  $k$  que a restrição é de classe  $C^k$  e com a derivada de ordem  $k$  caracterizada por (1), sendo cómodo começar com o caso  $k = 0$ , lembrando que  $f^{(0)}$  não é mais do que a aplicação  $f$ . Tendo em conta o facto de uma aplicação diferenciável ser contínua, portanto de classe  $C^0$ , o caso  $k = 0$  resulta da fórmula integral de Cauchy em 3.7.2. Suponhamos então que a conclusão pretendida é verdadeira para um certo  $k \geq 0$ , tendo-se assim para cada  $w \in B_r(z_0)$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(w) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz = \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + r \exp(2\pi ti))}{(z_0 + r \exp(2\pi ti) - w)^{k+1}} \times 2\pi ri \exp(2\pi ti) dt. \end{aligned}$$

Para cada  $t \in [0, 1]$  a aplicação de  $B_r(z_0)$  para  $F$  que a  $w$  associa

$$\frac{f(z_0 + r \exp(2\pi ti))}{(z_0 + r \exp(2\pi ti) - w)^{k+1}} \times 2\pi ri \exp(2\pi ti)$$

é derivável e com derivada igual a

$$(2) \quad \frac{(k+1)f(z_0 + r \exp(2\pi ti))}{(z_0 + r \exp(2\pi ti) - w)^{k+2}} \times 2\pi r i \exp(2\pi ti),$$

sendo contínua a aplicação de  $B_r(z_0) \times [0, 1]$  que a  $(w, t)$  associa (2). Aplicando o teorema de diferenciabilidade do integral paramétrico em 3.5.18, concluímos assim que a aplicação  $f^{(k)}: B_r(z_0) \rightarrow F$  é de classe  $C^1$ , portanto que  $f: B_r(z_0) \rightarrow F$  é de classe  $C^{k+1}$  e que

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(w) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(k+1)f(z_0 + r \exp(2\pi ti))}{(z_0 + r \exp(2\pi ti) - w)^{k+2}} \times 2\pi r i \exp(2\pi ti) dt = \\ &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+2}} dz, \end{aligned}$$

o que termina a demonstração por indução.  $\square$

**3.7.4 (Corolário — Estimacões de Cauchy)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Sejam  $z_0 \in U$ ,  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$  e  $M \geq 0$  tal que  $\|f(z)\| \leq M$  para cada  $z \in S_r(z_0)$  (por exemplo  $M$  igual ao máximo de  $\|f(z)\|$  para  $z$  no compacto  $S_r(z_0) \subset U$ ). Então  $\|f(z_0)\| \leq M$  e, mais geralmente, para cada  $k \geq 0$ ,

$$\|f^{(k)}(z_0)\| \leq \frac{k!M}{r^k}.$$

**Dem:** Tendo em conta 3.7.3, vem

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}(z_0)\| &= \left\| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right\| = \\ &= \left\| \frac{k!}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + r \exp(2\pi ti))}{(z_0 + r \exp(2\pi ti) - z_0)^{k+1}} \times 2\pi r i \exp(2\pi ti) dt \right\| \leq \\ &\leq k! \int_0^1 \frac{\|f(z_0 + r \exp(2\pi ti))\|}{r^{k+1}} \times r dt \leq k! \int_0^1 \frac{M}{r^k} dt = \frac{k!M}{r^k}. \end{aligned}$$

$\square$

**3.7.5 (Corolário)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Sejam  $z_0 \in U$ ,  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$  e  $M \geq 0$  tal que  $\|f(z)\| \leq M$  para cada  $z \in \overline{B}_r(z_0)$ . Tem-se então, quaisquer que sejam  $z, w \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$ :

$$a) \quad \forall_{k \geq 1} \quad \|f^{(k)}(z)\| \leq \frac{2^k k! M}{r^k}.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \|f(z) - f(w)\| \leq \frac{2M}{r} |z - w|, \\ & \|f'(z) - f'(w)\| \leq \frac{8M}{r^2} |z - w|, \end{aligned}$$

c) Sendo  $r' = \max\{\|z - z_0\|, \|w - z_0\|\}$ ,

$$\|f(z) - f(w) - f'(z_0)(z - w)\| \leq \frac{8M}{r^2} r' \|z - w\|,$$

em particular

$$\|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\| \leq \frac{8M}{r^2} |z - z_0|^2.$$

**Dem:** Para cada  $z \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$  tem-se

$$S_{\frac{r}{2}}(z) \subset \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z) \subset \overline{B}_r(z_0)$$

pelo que, tendo em conta as estimações de Cauchy em 3.7.4, tem-se para cada  $k \geq 1$

$$\|f^{(k)}(z)\| \leq \frac{k! M}{\left(\frac{r}{2}\right)^k} = \frac{2^k k! M}{r^k}.$$

Em particular, para cada  $\hat{z} \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$  vem

$$\|f'(\hat{z})\| \leq \frac{2M}{r}, \quad \|f''(\hat{z})\| \leq \frac{8M}{r^2}.$$

Lembrando a isometria natural  $F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$  e o facto de  $\overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$  ser convexo, deduzimos do segundo teorema da média em 3.3.4<sup>297</sup> que para  $z, w \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$  vem

$$\|f(z) - f(w)\| \leq \frac{2M}{r} |z - w|$$

e que para  $\tilde{z}, w \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$  vem

$$\|f'(\tilde{z}) - f'(w)\| \leq \frac{8M}{r^2} |\tilde{z} - w|,$$

em particular

$$\|f'(\tilde{z}) - f'(z_0)\| \leq \frac{8M}{r^2} |\tilde{z} - z_0|.$$

Esta última desigualdade implica que para  $z, w \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$ , tem-se para cada  $\tilde{z}$

<sup>297</sup>Onde  $x_0 = w$ ,  $x = z$ .



em  $[[w, z]] \subset \overline{B}_{r'}(z_0)$ , com  $r' = \max\{\|z - z_0\|, \|w - z_0\|\}$ ,

$$\|f'(\tilde{z}) - f'(z_0)\| \leq \frac{8M}{r^2} |\tilde{z} - z_0| \leq \frac{8M}{r^2} r'$$

e portanto, mais uma vez pelo segundo teorema da média<sup>298</sup>,

$$\|f(z) - f(w) - f'(z_0)(z - w)\| \leq \frac{8M}{r^2} r' |z - w|. \quad \square$$

**3.7.6 (Teorema de Morera)** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $g: U \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Tem-se então:

**a)** Se  $g$  é holomorfa então quaisquer que sejam  $y_0 \in U$ ,  $r > 0$  com  $B_r(y_0) \subset U$  e  $z, w \in B_r(y_0)$ , vem

$$\int_{y_0}^z g(x) dx = \int_{y_0}^w g(x) dx + \int_w^z g(x) dx.$$

**b)** Se qualquer que seja  $y_0 \in U$  existir  $r > 0$  tal que  $B_r(y_0) \subset U$  e que quaisquer que sejam  $z, w \in B_r(y_0)$

$$\int_{y_0}^z g(x) dx = \int_{y_0}^w g(x) dx + \int_w^z g(x) dx$$

então  $g$  é holomorfa.

**Dem:** Suponhamos que  $g$  é holomorfa e sejam  $y_0 \in U$  e  $r > 0$  com  $B_r(y_0) \subset U$ . Aplicando 3.5.37 à restrição de  $g$  a  $B_r(y_0)$ , concluímos a existência de uma aplicação holomorfa  $f: B_r(y_0) \rightarrow F$  tal que  $f'(z) = g(z)$  para cada  $z \in B_r(y_0)$  e portanto, pela alínea e) de 3.5.31, quaisquer que sejam  $z, w \in B_r(y_0)$  vem

$$\int_{y_0}^z g(x) dx = \int_{y_0}^w g(x) dx + \int_w^z g(x) dx.$$

Suponhamos, reciprocamente, que se verifica a hipótese em b). Dado  $y_0 \in U$  arbitrário, podemos escolher  $r > 0$  verificando as condições em b). Aplicando 3.5.32 à aplicação  $\omega: B_r(y_0) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$  associada à restrição de  $g$  a  $B_r(y_0)$ , concluímos a existência de uma aplicação holomorfa  $f: B_r(y_0) \rightarrow F$  com  $Df_x = \omega(x)$ , isto é  $f'(x) = g(x)$ , para cada  $x \in B_r(y_0)$ . Tendo em conta 3.7.3, a aplicação  $f$  é de classe  $C^\infty$ , em particular a restrição de  $g$  a  $B_r(y_0)$ , igual à derivada de  $f$  é holomorfa. Por fim, tendo em conta o facto de a diferenciabilidade ser uma questão local, concluímos que  $g$  é holomorfa.  $\square$

**3.7.7 (A série de Taylor de uma aplicação holomorfa)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Sejam  $z_0 \in U$  e  $R > 0$  tais que  $B_R(z_0) \subset U$ . Para cada  $w \in B_R(z_0)$  tem-se

<sup>298</sup>Onde  $x_0 = w$ ,  $x = z$  e  $\xi$  corresponde a  $f'(z_0)$ .

então

$$\begin{aligned} f(w) &= \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (w - z_0)^k = \\ &= f(z_0) + f'(z_0)(w - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2} (w - z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!} (w - z_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

onde a soma envolvida é a de uma família absolutamente somável de vetores de  $F$ .<sup>299</sup>

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes, afastando já o caso trivial em que  $w = z_0$ :

**a)** Seja  $w \in B_R(z_0)$  fixado. Fixemos  $r > 0$  com  $|w - z_0| < r < R$ . Seja  $0 < s < 1$  o definido por  $s = \frac{|w - z_0|}{r}$  e  $M \geq 0$  o máximo de  $\|f(z)\|$  para  $z$  no compacto  $S_r(z_0) \subset U$ .

**b)** As estimações de Cauchy em 3.7.4 implicam que se tem

$$\left\| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (w - z_0)^k \right\| \leq \frac{M |w - z_0|^k}{r^k} = M s^k,$$

onde  $\sum_{k \geq 0} M s^k = \frac{M}{1-s} < +\infty$ , o que mostra que é absolutamente somável a

família envolvida na soma no enunciado.

**c)** Para cada  $z \in S_r(z_0)$  tem-se

$$\frac{1}{z - w} = \sum_{k \geq 0} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{w - z_0}{(z - z_0)^2} + \frac{(w - z_0)^2}{(z - z_0)^3} + \dots,$$

onde

$$\left| \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} \right| = \frac{1}{r} s^k,$$

em particular, por ser  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{r} s^k = \frac{1}{r(1-s)} < +\infty$ , a soma envolvida é a de uma

família absolutamente somável.

**Subdem:** O facto de termos uma família somável resulta de, como referido acima, termos uma família absolutamente somável. Para verificarmos que a soma é igual a  $\frac{1}{z-w}$  basta agora reparar que

<sup>299</sup>Em particular, considerando, para  $0 < r < R$ ,  $w = z_0 + r \in B_R(z_0)$ , concluímos que, na linguagem referida em 3.3.35 no contexto das séries de potências,  $R$  é um raio de convergência associado à família dos vetores  $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$  de  $F$  e que para cada  $0 < r < R$  a família das restrições a  $B_r(z_0)$  das aplicações  $w \mapsto \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (w - z_0)^k$  é normalmente somável.

$$\begin{aligned}
(z-w) \sum_{k \geq 0} \frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} &= ((z-z_0) - (w-z_0)) \sum_{k \geq 0} \frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} = \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^k} - \sum_{k \geq 0} \frac{(w-z_0)^{k+1}}{(z-z_0)^{k+1}} = \\
&= 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^k} - \sum_{k \geq 1} \frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^k} = 1.
\end{aligned}$$

**d)** Para cada  $t \in [0, 1]$  vem, tomando em **c)**  $z = z_0 + r \exp(2\pi ti)$ ,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0 + r \exp(2\pi ti))}{z_0 + r \exp(2\pi ti) - w} \times r \exp(2\pi ti) = \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{(w-z_0)^k}{(r \exp(2\pi ti))^{k+1}} \times r \exp(2\pi ti) f(z_0 + r \exp(2\pi ti)),
\end{aligned}$$

onde temos a soma de uma família normalmente somável de funções de  $t$  (cf. 2.3.24) uma vez que

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{(w-z_0)^k}{(r \exp(2\pi ti))^{k+1}} \times r \exp(2\pi ti) f(z_0 + r \exp(2\pi ti)) \right\| \leq \\
&\leq M \frac{\|w-z_0\|^k}{r^k} = Ms^k,
\end{aligned}$$

com  $\sum_{k \geq 0} Ms^k = \frac{M}{1-s} < +\infty$ . Tendo em conta a forma integral de Cauchy em

3.7.2 e o resultado sobre a integração da soma de uma família normalmente somável de aplicações em 3.5.16, vemos agora que

$$\begin{aligned}
f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z-w} dz = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + r \exp(2\pi ti))}{z_0 + r \exp(2\pi ti) - w} \times 2\pi r i \exp(2\pi ti) dt = \\
&= \int_0^1 \sum_{k \geq 0} \frac{(w-z_0)^k}{(r \exp(2\pi ti))^{k+1}} \times r \exp(2\pi ti) f(z_0 + r \exp(2\pi ti)) dt = \\
&= \sum_{k \geq 0} \int_0^1 \frac{(w-z_0)^k}{(r \exp(2\pi ti))^{k+1}} \times r \exp(2\pi ti) f(z_0 + r \exp(2\pi ti)) dt
\end{aligned}$$

bastando agora reparar que, tendo em conta as fórmulas integrais de Cauchy

para as derivadas,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{(w - z_0)^k}{(r \exp(2\pi ti))^{k+1}} \times r \exp(2\pi ti) f(z_0 + r \exp(2\pi ti)) dt = \\ & = (w - z_0)^k \times \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = (w - z_0)^k \frac{f^{(k)}(z)}{k!}. \quad \square \end{aligned}$$

Repáre-se mais uma vez no contraste da diferenciabilidade no contexto da variável complexa com a diferenciabilidade no da variável real: Além de uma função diferenciável de variável real não ter de ser de classe  $C^\infty$ , mesmo que o seja não tem que ser a soma da sua série de Taylor centrada num certo ponto do domínio nalguma vizinhança desse ponto nem, muito menos em qualquer bola de centro nesse ponto contida no domínio (por exemplo, para a função  $\frac{1}{1+x^2}$  de domínio  $\mathbb{R}$  e de classe  $C^\infty$  a série de Taylor centrada em 0 apenas converge para  $x \in ]-1, 1[$ . Vamos agora examinar algumas consequências da representação de uma aplicação holomorfa pela sua série de Taylor.

**3.7.8 (Zeros de aplicações holomorfas)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa,  $z_0 \in U$  e  $R > 0$  tais que  $B_R(z_0) \subset U$ . Tem-se então:

- a)** Se  $f^{(k)}(z_0) = 0$  para todo o  $k \geq 0$  então  $f(z) = 0$  para cada  $z \in B_R(z_0)$ .  
**b)** Se  $k_0 \geq 1$  é tal que  $f^{(k)}(z_0) = 0$  para cada  $0 \leq k < k_0$  (em particular  $f(z_0) = 0$ ) pode definir-se uma aplicação holomorfa  $g: U \rightarrow F$  por

$$(1) \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k_0}}, & \text{se } z \neq z_0 \\ \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!}, & \text{se } z = z_0 \end{cases},$$

para a qual se tem portanto  $f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z)$  para cada  $z \in U$ .

- c)** Se existir  $k \geq 0$  tal que  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$  então existe  $0 < r < R$  tal que  $f(z) \neq 0$  para cada  $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  (no caso em que  $f(z_0) = 0$ , podemos dizer que  $z_0$  é um *zero isolado* de  $f$ ).

**Dem:** A conclusão de a) resulta do facto de, por 3.7.7, se ter

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

para cada  $z \in B_R(z_0)$ . Suponhamos agora que se verificam as hipóteses em b). Uma vez que a aplicação  $g$  definida por (1) tem restrição holomorfa a  $U \setminus \{z_0\}$ , para verificar que  $g$  é holomorfa basta verificar que tem restrição holomorfa a  $B_R(z_0)$ . Ora, para cada  $z \in B_R(z_0)$  resulta de 3.7.7 que

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = (z - z_0)^{k_0} \sum_{k \geq k_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-k_0}$$

e portanto

$$(2) \quad g(z) = \sum_{k \geq k_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-k_0} = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k+k_0)}(z_0)}{(k+k_0)!} (z - z_0)^k$$

(esta igualdade é válida, por definição também para  $z = z_0$ ), onde todas as somas envolvidas correspondem a famílias absolutamente somáveis. Em particular, para cada  $0 < r < R$ , podemos considerar  $z = z_0 + r \in B_R(z_0)$  e deduzir que

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\|f^{(k+k_0)}(z_0)\|}{(k+k_0)!} r^k < +\infty,$$

o que, tendo em conta 3.3.35 e o resultado sobre a diferenciabilidade da aplicação composta, garante que a restrição de  $g$  a  $B_R(z_0)$  é efetivamente holomorfa. Nas hipóteses de c), podemos considerar  $k_0 \geq 0$  igual ao mínimo dos  $k$  tais que  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$  e então existe  $0 < r < R$  tal que  $f(z) \neq 0$  para cada  $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ , no caso em que  $k_0 = 0$  pela continuidade de  $f$  e por ser  $f(z_0) \neq 0$  e no caso em que  $k_0 \geq 1$  pela continuidade da aplicação  $g$  em b) e por ser  $g(z_0) \neq 0$ .  $\square$

**3.7.9 (Corolário)** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto conexo e  $A \subset U$  um conjunto admitindo um *ponto de acumulação*  $z_0 \in U$ , isto é, um ponto  $z_0 \in U$  aderente a  $A \setminus \{z_0\}$ . Se  $F$  é um espaço de Banach complexo e  $g, h: U \rightarrow F$  são duas aplicações holomorfas tais que  $g(z) = h(z)$  para cada  $z \in A$  então  $g = h$ .<sup>300</sup> Em particular, se existir um aberto não vazio  $U' \subset U$  tal que  $f|_{U'} = g|_{U'}$  então  $f = g$ .

**Dem:** Seja  $f: U \rightarrow F$  a aplicação definida por  $f(z) = g(z) - h(z)$ , que é holomorfa e verifica  $f(z) = 0$  para cada  $z \in A$ . Tem-se então  $f^{(k)}(z_0) = 0$  para todo o  $k \geq 0$  visto que se para algum  $k$  fosse  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$  a alínea c) de 3.7.8 garantia a existência de  $r > 0$  tal que  $B_r(z_0)$  não continha nenhum elemento de  $A \setminus \{z_0\}$ . Consideremos agora o subconjunto  $B \subset U$  constituído pelos  $z \in U$  tais que  $f^{(k)}(z) = 0$  para todo o  $k$ , conjunto que é fechado em  $U$ , por ser a interseção da família de fechados em  $U$

$$B_k = \{z \in U \mid f^{(k)}(z) = 0\},$$

e é não vazio por conter  $z_0$ . Se  $z_1 \in B$  a alínea a) de 3.7.8 garante que, sendo  $R > 0$  tal que  $B_R(z_1) \subset U$  tem-se  $f(z) = 0$  para todo o  $z \in B_R(z_1)$ , o que

<sup>300</sup>Podemos assim dizer que uma aplicação holomorfa cujo domínio seja um aberto conexo de  $\mathbb{C}$  fica univocamente determinada pelos valores que toma nalgum subconjunto do domínio que admita algum ponto de acumulação no domínio.

implica que  $f^{(k)}(z) = 0$  para todo o  $z \in B_R(z_1)$  e  $k \geq 0$ , portanto  $B_R(z_1) \subset B$ . Concluímos assim que o conjunto  $B$ , além de fechado em  $U$  e não vazio, é também aberto pelo que a hipótese de  $U$  ser conexo implica que  $B = U$  o que traduz o facto de se ter  $g(z) = h(z)$  para todo o  $z \in U$ .  $\square$

**3.7.10 (Singularidades removíveis)** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $z_0 \in U$ ,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa tal que exista  $r > 0$  e  $M \geq 0$  com  $B_r(z_0) \subset U$  e  $\|f(z)\| \leq M$  para cada  $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  ( $f$  é localmente limitada em  $z_0$ ). Existe então uma única aplicação holomorfa  $\bar{f}: U \rightarrow F$  cuja restrição a  $U \setminus \{z_0\}$  seja  $f$ .

**Dem:** A unicidade resulta de que não pode deixar de ser  $\bar{f}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , tendo em conta o facto de uma aplicação holomorfa ser contínua. Consideremos agora a aplicação  $g: U \rightarrow F$  definida por

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & \text{se } z \neq z_0 \\ 0, & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

que tem restrição holomorfa a  $U \setminus \{z_0\}$  e que é derivável em  $z_0$ , e com  $g'(z_0) = 0$  uma vez que para cada  $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  tem-se

$$\left\| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right\| = \|(z - z_0)f(z)\| \leq M\|z - z_0\|,$$

onde  $M\|z - z_0\| \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow z_0$ . O facto de  $g$  ser holomorfa e com  $g(z_0) = g'(z_0) = 0$  implica agora, pela alínea b) de 3.7.8, a existência de uma aplicação holomorfa  $\bar{f}: U \rightarrow F$  que verifica  $g(z) = (z - z_0)^2 \bar{f}(z)$  para cada  $z \in U$ , e portanto  $\bar{f}(z) = f(z)$  para cada  $z \in U \setminus \{z_0\}$ .  $\square$

**3.7.11 (Teorema de Liouville)** Sejam  $F$  um espaço de Banach e  $f: \mathbb{C} \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa<sup>301</sup> limitada. Tem-se então que  $f$  é uma aplicação constante. Em particular, no caso em que  $f: \mathbb{C} \rightarrow F$  é uma aplicação holomorfa tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = u \in F$ , tem-se  $f(z) = u$  para todo o  $z \in \mathbb{C}$ .<sup>302</sup>

**Dem:** Seja  $M \geq 0$  tal que  $\|f(z)\| \leq M$  para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . Tendo em conta uma das estimações de Cauchy em 3.7.4, dado  $z_0 \in \mathbb{C}$  arbitrário vem para todo o  $r > 0$

$$\|f'(z_0)\| \leq \frac{M}{r}$$

o que implica, por ser  $\frac{M}{r} \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow +\infty$ , que  $f'(z_0) = 0$ . O facto de a aplicação  $f$  ter derivada igual a 0 em todos os pontos do seu domínio convexo implica que se trata de uma aplicação constante. No caso em que  $f$

<sup>301</sup>Às aplicações holomorfas cujo domínio é a totalidade de  $\mathbb{C}$  é costume dar o nome de aplicações *inteiras*.

<sup>302</sup>O limite referido é naturalmente o relativo à topologia de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  como compactificado de Alexandroff de  $\mathbb{C}$ .

é uma aplicação holomorfa com limite  $u \in F$  quando  $z \rightarrow \infty$ , obtemos um prolongamento contínuo  $\bar{f}$  de  $f$  ao compacto  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  tomando o valor  $u$  em  $\infty$ , pelo que esse prolongamento é limitado e portanto o mesmo acontece a  $f$ . O que vimos no início mostra que  $f$  é constante e portanto o limite  $u$  tem que ser igual a essa constante.  $\square$

**3.7.12 (Exemplo de aplicação às álgebras de Banach complexas)** Seja  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa com elemento um que notamos  $\varepsilon$  (cf. 2.3.29, com notação diferente). Para cada  $\alpha \in \mathcal{E}$  existe então  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\alpha - z\varepsilon$  não seja invertível (um tal  $z$  diz-se um *valor espectral* de  $\alpha$ ).

**Dem:** Suponhamos, por absurdo, que  $\alpha - z\varepsilon$  era invertível para todo o  $z \in \mathbb{C}$ , em particular  $\alpha = \alpha - 0\varepsilon$  era invertível e, por ser  $\mathcal{E} \neq \{0\}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Tendo em conta 3.1.28, podemos então considerar uma aplicação holomorfa  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por

$$f(z) = (z\varepsilon - \alpha)^{-1}.$$

Tendo em conta 2.3.33, sempre que  $|z| > 2\|\alpha\|$  vem  $\|\frac{\alpha}{z}\| < \frac{1}{2}$  e portanto

$$\|f(z)\| = \left\| \frac{1}{z} \left( \varepsilon - \frac{\alpha}{z} \right)^{-1} \right\| \leq \left| \frac{1}{z} \right| \frac{1}{1 - \|\frac{\alpha}{z}\|} \leq \frac{1}{2\|\alpha\|} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\|\alpha\|},$$

o que mostra que  $f$  é limitada no complementar da bola fechada  $\overline{B}_{2\|\alpha\|}(0)$ . Uma vez que  $f$ , sendo contínua, é também limitada naquela bola fechada, que é compacta, concluímos que  $f$  é limitada e portanto, pelo teorema de Liouville em 3.7.11, que  $f$  é constante. Mas isso implica que também é constante a aplicação de  $\mathbb{C}$  para  $\mathcal{E}$  que a  $z$  associa  $z\varepsilon - \alpha$ , o que é absurdo por esta aplicação ter derivada  $\varepsilon$  em cada  $z$ , onde  $\varepsilon \neq 0$  por ser  $\mathcal{E} \neq \{0\}$ .  $\square$

**3.7.13 (Exemplo de aplicação ao Teorema Fundamental da Álgebra)** Sejam  $n \geq 1$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  e  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação polinomial definida por

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Existe então  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z_0) = 0$ .

**Dem:** Reparemos que  $f$  é uma aplicação holomorfa. Suponhamos, por absurdo, que se tinha  $f(z) \neq 0$  para todo o  $z \in \mathbb{C}$ . Considerando a aplicação holomorfa  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$g(w) = 1 + a_1 w + \dots + a_{n-1} w^{n-1} + a_n w^n$$

que verifica  $1 = g(0) = \lim_{w \rightarrow 0} g(w)$ , podemos considerar  $\varepsilon > 0$  tal que  $|g(w)| \geq \frac{1}{2}$  sempre que  $|w| < \varepsilon$ . Concluímos daqui que para cada  $z \in \mathbb{C}$  com  $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$  vem  $|\frac{1}{z}| < \varepsilon$  donde

$$|f(z)| = \left| z^n g\left(\frac{1}{z}\right) \right| \geq \frac{1}{2\varepsilon^n}.$$

Vemos então que a aplicação holomorfa de  $\mathbb{C}$  para  $\mathbb{C}$  que a  $z$  associa  $\frac{1}{f(z)}$  tem restrição limitada a  $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$  e, por ter também restrição limitada ao compacto  $\overline{B}_{\frac{1}{\varepsilon}}(0)$ , é limitada. Pelo teorema de Liouville em 3.7.11 concluímos que esta aplicação é constante e portanto que  $f$  também é constante e isso é absurdo uma vez que, por exemplo por 3.3.35, tem-se  $f^{(n)}(0) = n! \neq 0$ .  $\square$

**3.7.14 (O teorema do máximo)** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto conexo,  $F$  um espaço de Hilbert complexo (por exemplo  $F = \mathbb{C} \dots$ ) e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa tal que exista  $z_0 \in U$  e  $R > 0$  com  $B_R(z_0) \subset U$  e

$$\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\|$$

para cada  $z \in B_R(z_0)$ . Tem-se então que  $f$  é uma aplicação constante.<sup>303</sup>

**Dem:** Vamos começar por mostrar que se tem  $f(z) = f(z_0)$  para cada  $z \in B_R(z_0)$ , para o que podemos já afastar o caso trivial em que  $f(z_0) = 0$ . Seja  $0 < r < R$  arbitrário. Tendo em conta a fórmula integral de Cauchy em 3.7.2, vem

$$\begin{aligned} \|f(z_0)\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + r \exp(2\pi t i))}{r \exp(2\pi t i)} \times 2\pi r i \exp(2\pi t i) dt \right\| = \\ &= \left\| \int_0^1 f(z_0 + r \exp(2\pi t i)) dt \right\| \leq \int_0^1 \|f(z_0 + r \exp(2\pi t i))\| dt \leq \\ &\leq \int_0^1 \|f(z_0)\| dt = \|f(z_0)\| \end{aligned}$$

o que implica que se tem

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 f(z_0 + r \exp(2\pi t i)) dt \right\| &= \int_0^1 \|f(z_0 + r \exp(2\pi t i))\| dt = \\ &= \int_0^1 \|f(z_0)\| dt. \end{aligned}$$

A segunda igualdade implica, por 3.5.8, que

$$(1) \quad \|f(z_0 + r \exp(2\pi t i))\| = \|f(z_0)\|$$

para cada  $t$  e a primeira, por 3.5.9, que existe  $w \in F$  e uma aplicação contínua  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t) \geq 0$  e

$$(2) \quad f(z_0 + r \exp(2\pi t i)) = \varphi(t)w$$

para cada  $t$  e portanto

<sup>303</sup>Este resultado não é válido para espaços de Banach complexos arbitrários. Para um contraexemplo, ver o exercício 3.7.7 adiante.



$$(3) \quad \|f(z_0)\| = \|f(z_0 + \operatorname{rexp}(2\pi ti))\| = \varphi(t)\|w\|.$$

Deduzimos de (3) que a aplicação  $\varphi$  é constante e portanto, por derivação de (2) como função de  $t$ ,

$$0 = Df_{z_0 + \operatorname{rexp}(2\pi ti)}(2\pi r i \exp(2\pi ti)) = 2\pi r i \exp(2\pi ti) f'(z_0 + \operatorname{rexp}(2\pi ti)),$$

donde  $f'(z_0 + \operatorname{rexp}(2\pi ti)) = 0$ . Tendo em conta a arbitrariedade de  $t \in [0, 1]$  e a arbitrariedade de  $r$  em  $]0, R[$  concluímos que  $f'(z) = 0$  para cada  $z \in B_R(z_0) \setminus \{0\}$  e portanto, por continuidade, para todo o  $z \in B_R(z_0)$ . Concluímos daqui que  $f$  tem restrição constante a  $B_R(z_0)$ , objetivo que anunciámos no início. O facto de  $f$  ser constante no seu domínio  $U$  resulta finalmente do que se verificou em 3.7.9.  $\square$

**3.7.15 (O espaço  $\mathcal{H}(U, F)$  das aplicações holomorfas)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo e  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto não vazio e recordemos que no espaço vetorial  $Ap(U, F)$ , de todas as aplicações  $f: U \rightarrow F$ , está definida uma topologia natural, a saber a da convergência uniforme nos compactos (cf. 1.7.45), topologia essa que é metrizável, uma vez que  $U$  é localmente compacto e de base contável (cf. 1.7.54). É esta a topologia que vamos utilizar implicitamente.

Recordemos ainda que, como se verificou em 1.7.51, o subespaço vetorial  $\mathcal{C}(U, F)$  de  $Ap(U, F)$  é fechado e a topologia induzida em  $\mathcal{C}(U, F)$  é uma topologia vetorial (cf. 2.6.1 e 2.6.36)<sup>304</sup>

As propriedades gerais das aplicações diferenciáveis garantem-nos que o conjunto  $\mathcal{H}(U, F)$  das aplicações holomorfas  $f: U \rightarrow F$  constitui um subespaço vetorial de  $\mathcal{C}(U, F)$ . Este subespaço goza das seguintes propriedades importantes, que não seriam válidas se nos situássemos no contexto de  $\mathbb{R}$  como corpo dos escalares, cuja justificação se baseia nas propriedades especiais das aplicações holomorfas que temos vindo a estudar nesta secção e na versão do teorema de Ascoli examinada em 1.7.55:

**a)**  $\mathcal{H}(U, F)$  é um subespaço vetorial fechado de  $\mathcal{C}(U, F)$ , e portanto de  $Ap(U, F)$ .

**b) (O operador de derivação)** Tem lugar uma aplicação linear contínua

$$D: \mathcal{H}(U, F) \rightarrow \mathcal{H}(U, F)$$

definida por  $D(f) = f'$ .

**c) (Teorema de Montel)** Seja  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(U, F)$  um subconjunto tal que para cada compacto  $K \subset U$  exista  $M_K > 0$  com  $\|f(z)\| \leq M_K$  para cada  $f \in \mathcal{A}$  e  $z \in K$ . Tem-se então que  $\mathcal{A}$  é equicontínuo (cf. 1.7.41). Em consequência, coincidem em  $\mathcal{A}$  as topologias induzidas pela da convergência simples e pela da convergência uniforme nos compactos e a aderência  $\operatorname{ad}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  em  $Ap(U, F)$  para a topologia da convergência simples coincide com a sua aderência para a topologia da convergência uniforme nos compactos, é

<sup>304</sup>Ao contrário da topologia em  $Ap(U, E)$  que não o é necessariamente.

equicontínua e está contida em  $\mathcal{H}(U, F)$ .

**d) (Teorema de Montel)** Nas hipóteses de c), se o espaço de Banach  $F$  for de dimensão finita então o conjunto  $\text{ad}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(U, F)$  com a topologia induzida pela da convergência uniforme nos compactos, que coincide com a induzida pela da convergência simples, é compacto e, naturalmente, metrizável.

**Dem: a)** Seja  $g \in \mathcal{C}(U, F)$  aderente a  $\mathcal{H}(U, F)$  e mostremos que se tem  $g \in \mathcal{H}(U, F)$ . Seja  $z_0 \in U$  arbitrário. Seja  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$ . Sejam  $z_1, z_2 \in B_r(z_0)$  arbitrários. Seja  $\delta > 0$  arbitrário. Considerando a vizinhança de  $g$  em  $\mathcal{C}(U, F)$  constituída pelos  $f$  tais que  $\|f(z) - g(z)\| \leq \delta$  para todo o  $z$  no compacto  $\overline{B}_r(z_0)$  (cf. a alínea c) de 1.7.46), podemos considerar  $f \in \mathcal{H}(U, F)$  nesta vizinhança, tendo-se, pela alínea a) do teorema de Morera em 3.7.6,

$$\int_{z_0}^{z_2} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz.$$

Deduzimos daqui, tendo em conta as desigualdades em 3.5.30, que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{z_0}^{z_2} g(z) dz - \int_{z_0}^{z_1} g(z) dz - \int_{z_1}^{z_2} g(z) dz \right\| = \\ & = \left\| \int_{z_0}^{z_2} g(z) - f(z) dz - \int_{z_0}^{z_1} g(z) - f(z) dz - \int_{z_1}^{z_2} g(z) - f(z) dz \right\| \leq \\ & \leq \left\| \int_{z_0}^{z_2} g(z) - f(z) dz \right\| + \left\| \int_{z_0}^{z_1} g(z) - f(z) dz \right\| + \left\| \int_{z_1}^{z_2} g(z) - f(z) dz \right\| \leq \\ & \leq \delta \|z_2 - z_0\| + \delta \|z_1 - z_0\| + \delta \|z_2 - z_1\|, \end{aligned}$$

donde, tendo em conta a arbitrariedade de  $\delta > 0$ , que

$$\left\| \int_{z_0}^{z_2} g(z) dz - \int_{z_0}^{z_1} g(z) dz - \int_{z_1}^{z_2} g(z) dz \right\| = 0,$$

isto é,

$$\int_{z_0}^{z_2} g(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} g(z) dz + \int_{z_1}^{z_2} g(z) dz.$$

Aplicando agora a alínea b) do teorema de Morera em 3.7.6, deduzimos que  $g$  é efetivamente uma aplicação holomorfa.

**b)** Provemos a continuidade de  $D$  num elemento  $f_0 \in \mathcal{H}(U, F)$  arbitrário, para o que utilizaremos o critério de continuidade para aplicações com valores em  $Ap(U, F)$  na alínea b) de 1.7.46. Fixado um compacto não vazio  $K \subset U$  ficamos assim reduzidos a mostrar que é contínua em  $f_0$  a aplicação de  $\mathcal{H}(U, F)$  para  $Ap(K, F)$ , com a topologia da convergência uniforme, que a cada  $f$  associa a restrição a  $K$  de  $f'$ . No caso em que  $U = \mathbb{C}$  seja  $r > 0$  arbitrário e, caso contrário seja  $r > 0$  menor que o mínimo sobre  $K$  da função contínua estritamente positiva que a  $z$  associa  $d(z, \mathbb{C} \setminus U)$ . Resulta

desta escolha que para cada  $z \in K$  vem  $\overline{B}_r(z) \subset U$ . Pela propriedade das coberturas, podemos considerar um número finito de pontos  $z_1, \dots, z_n \in K$  tais que

$$K \subset B_{\frac{r}{2}}(z_1) \cup \dots \cup B_{\frac{r}{2}}(z_n)$$

e considerar o compacto

$$K' = \overline{B}_r(z_1) \cup \dots \cup \overline{B}_r(z_n) \subset U.$$

Dado  $\delta > 0$  arbitrário podemos agora considerar a vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $f_0$  em  $\mathcal{H}(U, F)$  constituída pelos  $f \in \mathcal{H}(U, F)$  tais que  $\|f(z) - f_0(z)\| < \frac{\delta r}{2}$  para cada  $z \in K'$  (cf. a alínea c) de 1.7.46) e então para cada  $z \in K$  tem-se  $B_{\frac{r}{2}}(z_j)$  para algum  $1 \leq j \leq n$  donde, pela desigualdade na alínea a) de 3.7.5, com  $k = 1$ ,

$$\|f'(z) - f_0'(z)\| = \|(f - f_0)'(z)\| \leq \frac{2}{r} \times \frac{\delta r}{2} = \delta,$$

isto é  $d_\infty(f'_{/K}, f'_0_{/K}) \leq \delta$ , o que prova a continuidade pretendida.

**c)** Provemos a equicontinuidade de  $\mathcal{A}$  num ponto  $z_0 \in U$ , para o que fixamos  $\delta > 0$  arbitrário. Fixemos  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$  e, tendo em conta a compacidade de  $\overline{B}_r(z_0)$ , consideremos  $M \geq 0$  tal que  $\|f(z)\| \leq M$  para cada  $z \in \overline{B}_r(z_0)$  e  $f \in \mathcal{A}$ . Seja  $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$  tal que  $\frac{2M\varepsilon}{r} < \delta$ . Para cada  $f \in \mathcal{A}$  e  $z \in B_\varepsilon(z_0)$  tem-se então, pela alínea b) de 3.7.5,

$$\|f(z) - f(z_0)\| \leq \frac{2M}{r} |z - z_0| < \frac{2M\varepsilon}{r} < \delta,$$

o que prova a equicontinuidade pretendida. O facto de em  $\mathcal{A}$  coincidirem as duas topologias induzidas referidas e o de a aderência  $\text{ad}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  em  $\text{Ap}(U, F)$  para a topologia da convergência simples coincidir com a sua aderência para a topologia da convergência uniforme nos compactos e ser equicontínua resulta diretamente das alíneas a) e b) do teorema de Ascoli em 1.7.55 e o facto de esta aderência estar contida em  $\mathcal{H}(U, F)$  resulta de, como vimos em a), este ser fechado em  $\text{Ap}(U, F)$  para a topologia da convergência uniforme nos compactos.

**d)** Para cada  $z \in U$ , podemos considerar a constante  $M_z$  associada ao compacto  $\{z\} \subset U$ , para a qual se tem assim  $\|f(z)\| \leq M_z$  para cada  $f \in \mathcal{A}$  pelo que o conjunto  $\mathcal{A}(z)$  está contido na bola fechada de centro 0 e raio  $M_z$  que é um compacto de  $F$ . A conclusão decorre agora da alínea c) do teorema de Ascoli em 1.7.55.  $\square$

As aplicações holomorfas que estudámos até agora, apesar de tomarem valores num espaço de Banach complexo arbitrário, tinham como domínio um aberto de  $\mathbb{C}$ . Vamos agora examinar aplicações cujo domínio é um aberto de um espaço vetorial normado complexo começando com um

resultado auxiliar em que este é  $\mathbb{C}^2$ , resultado que poderia ser generalizado ao contexto de  $\mathbb{C}^n$ , à custa de notações um pouco mais pesadas<sup>305</sup>.

**3.7.16 (Aplicações holomorfas de duas variáveis)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  e  $V \subset \mathbb{C}$  dois abertos e  $f: U \times V \rightarrow F$  uma aplicação localmente limitada (cf. 2.6.35) e *separadamente holomorfa* isto é, tal que para cada  $z_0 \in V$  seja holomorfa a aplicação  $U \rightarrow F$ ,  $w \mapsto f(w, z_0)$  e para cada  $w_0 \in U$  seja holomorfa a aplicação  $V \rightarrow F$ ,  $z \mapsto f(w_0, z)$ . Tem-se então que a aplicação  $f$  é de classe  $C^\infty$ , no sentido complexo.<sup>306</sup>

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes, considerando, para fixar ideias a norma do máximo,  $\|(w, z)\| = \max\{|w|, |z|\}$  em  $\mathbb{C}^2$ .

**a)** Vamos começar por mostrar que a aplicação  $f$  é contínua.

**Subdem:** Provemos a continuidade de  $f$  num ponto  $(w_0, z_0) \in U \times V$ , para o que consideramos  $\delta > 0$  arbitrário. Uma vez que a aplicação  $f$  é localmente limitada, consideremos  $r > 0$  e  $M > 0$  tais que

$$\overline{B}_r(w_0, z_0) = \overline{B}_r(w_0) \times \overline{B}_r(z_0) \subset U \times V$$

e que para cada  $(w, z)$  nesta bola se tenha  $\|f(w, z)\| \leq M$ . Para cada  $(w, z)$  na bola

$$\overline{B}_{\frac{r}{2}}(w_0, z_0) = \overline{B}_{\frac{r}{2}}(w_0) \times \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$$

podemos aplicar a conclusão da alínea b) de 3.7.5 a aplicações holomorfas de domínios  $U$  e  $V$ , que se obtêm por fixação da outra variável, para concluir que

$$\begin{aligned} \|f(w, z) - f(w_0, z_0)\| &\leq \|f(w, z) - f(w_0, z)\| + \|f(w_0, z) - f(w_0, z_0)\| \leq \\ &\leq \frac{2M}{r} \|w - w_0\| + \frac{2M}{r} \|z - z_0\| \leq \\ &\leq \frac{4M}{r} \|(w, z) - (w_0, z_0)\|. \end{aligned}$$

Fixando enfim  $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$  tal que  $\frac{4M\varepsilon}{r} < \delta$ , concluímos que se tem

$$\|f(w, z) - f(w_0, z_0)\| < \delta$$

sempre que  $\|(w, z) - (w_0, z_0)\| < \varepsilon$ , o que prova a continuidade pretendida.

**b)** Por definição, a aplicação  $f$  admite em cada ponto do domínio derivadas parciais (no sentido complexo)  $\frac{\partial f}{\partial w}(w, z)$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(w, z)$  e vamos ver que as apli-

<sup>305</sup>Essa generalização ao contexto de  $\mathbb{C}^n$  será proposta adiante no exercício 3.7.11 seguindo um caminho alternativo.

<sup>306</sup>Lembrar que, como referido na alínea a) de 2.6.35, a condição de  $f$  ser localmente limitada verifica-se, em particular, se  $f$  for contínua. Existe um teorema muito mais profundo, devido a Hartogs, que garante que a conclusão de  $f$  ser de classe  $C^\infty$  pode ser obtida sem exigir à partida que a aplicação  $f$  seja localmente limitada. Ver, por exemplo, Mujica [12] para uma abordagem que inclui esse resultado.

cações

$$\frac{\partial f}{\partial w}: U \times V \rightarrow F, \quad \frac{\partial f}{\partial z}: U \times V \rightarrow F$$

são contínuas, o que, tendo em conta 3.3.25 e a isometria natural  $F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$ , mostrará que  $f$  é de classe  $C^1$ .

**Subdem:** Seja  $w_0 \in U$  arbitrário e consideremos  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(w_0) \subset U$ . Tendo em conta a fórmula integral de Cauchy para a derivada em 3.7.3, vemos que para  $w \in B_r(w_0)$  e  $z \in V$  arbitrários tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial w}(w, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{w_0, r}} \frac{f(\hat{w}, z)}{(\hat{w} - w)^2} d\hat{w} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(w_0 + r \exp(2\pi t i), z)}{(w_0 + r \exp(2\pi t i) - w)^2} \times 2\pi r i \exp(2\pi t i) dt. \end{aligned}$$

Tendo em conta a continuidade da aplicação

$$\begin{aligned} (B_r(w_0) \times V) \times [0, 1] &\rightarrow F \\ ((w, z), t) &\mapsto \frac{f(w_0 + r \exp(2\pi t i), z)}{(w_0 + r \exp(2\pi t i) - w)^2} \times 2\pi r i \exp(2\pi t i), \end{aligned}$$

deduzimos do resultado sobre a continuidade do integral paramétrico em 3.5.17 que a restrição de  $\frac{\partial f}{\partial w}$  a  $B_r(w_0) \times V$  é contínua. O facto de a continuidade ser uma questão local permite-nos concluir a continuidade de  $\frac{\partial f}{\partial w}: U \times V \rightarrow F$ . A continuidade de  $\frac{\partial f}{\partial z}: U \times V \rightarrow F$  prova-se de forma análoga ou, alternativamente, resulta de aplicar o que acabámos de mostrar à aplicação  $\hat{f}: V \times U \rightarrow F$  definida por  $\hat{f}(z, w) = f(w, z)$ .

c) Vamos agora verificar que as aplicações contínuas

$$\frac{\partial f}{\partial w}: U \times V \rightarrow F, \quad \frac{\partial f}{\partial z}: U \times V \rightarrow F$$

são também separadamente holomorfas.

**Subdem:** Tal como em b), explicitamos apenas a verificação de que a primeira destas aplicações é separadamente holomorfa. O facto de para cada  $z_0 \in V$  ser holomorfa a aplicação de  $U$  para  $F$  que a  $w$  associa  $\frac{\partial f}{\partial w}(w, z_0)$  resulta de se tratar da derivada de uma aplicação holomorfa (cf. a alínea a) de 3.7.3). Resta-nos mostrar que para cada  $w_0 \in U$  é holomorfa a aplicação de  $V$  para  $F$  que a  $z$  associa  $\frac{\partial f}{\partial w}(w_0, z)$ . Ora, sendo  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(w_0) \subset U$ , a fórmula integral de Cauchy para a derivada em 3.7.3 garante que para cada  $z \in V$  tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial w}(w_0, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{w_0, r}} \frac{f(\hat{w}, z)}{(\hat{w} - w_0)^2} d\hat{w} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(w_0 + r \exp(2\pi t i), z)}{(r \exp(2\pi t i))^2} \times 2\pi r i \exp(2\pi t i) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{f(w_0 + r \exp(2\pi t i), z)}{r \exp(2\pi t i)} dt. \end{aligned}$$

Uma vez que para cada  $t \in [0, 1]$  é diferenciável a aplicação de  $V$  para  $F$  que a  $z$  associa

$$\frac{f(w_0 + r \exp(2\pi t i), z)}{r \exp(2\pi t i)}$$

e que, pelo que verificámos em b), é contínua a aplicação de  $V \times [0, 1]$  para  $F$  que a  $(z, t)$  associa

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(w_0 + r \exp(2\pi t i), z)}{r \exp(2\pi t i)}$$

deduzimos do resultado sobre a diferenciabilidade do integral paramétrico em 3.5.18, tendo em conta a isometria natural  $F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$ , que é efetivamente derivável em cada  $z \in V$  a aplicação que a  $z$  associa  $\frac{\partial f}{\partial w}(w_0, z)$ .

**d)** Vamos provar, por fim, que para cada  $p \geq 1$ , a aplicação  $f$  é de classe  $C^p$ , o que mostrará que temos uma aplicação de classe  $C^\infty$ .

**Subdem:** O que vimos em b) implica que toda a aplicação contínua e separadamente holomorfa é de classe  $C^1$ . Suponhamos, por indução, que toda a aplicação contínua e separadamente holomorfa é de classe  $C^p$ . Uma vez que verificámos em b) e c) que as aplicações

$$\frac{\partial f}{\partial w}: U \times V \rightarrow F, \quad \frac{\partial f}{\partial z}: U \times V \rightarrow F$$

são também contínuas e separadamente holomorfas, a hipótese de indução implica que cada uma destas aplicações é de classe  $C^p$  o que implica, tendo em conta 3.3.25 e a isometria natural  $F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$ , que a aplicação  $f$  é de classe  $C^{p+1}$ .  $\square$

**3.7.17 (Exemplo importante de aplicação)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Considerando então o aberto  $U \times U \subset \mathbb{C}^2$ , fica definida uma aplicação  $g: U \times U \rightarrow F$  de classe  $C^\infty$ , no sentido complexo, por

$$g(w, z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & \text{se } z \neq w \\ f'(w), & \text{se } z = w. \end{cases}$$

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes:

**a)** A continuidade de  $g$  num ponto  $(w_0, z_0)$  com  $w_0 \neq z_0$  resulta de que existe uma vizinhança de um tal ponto em  $U \times U$  onde a restrição de  $g$  é o quociente de duas aplicações contínuas. Em particular, tendo em conta 2.6.35, a aplicação  $g$  é localmente limitada em cada um desses pontos  $(w_0, z_0)$ .

**b)** Vamos provar  $g$  também é localmente limitada num ponto da forma  $(w_0, w_0)$ , portanto que  $g$  é uma aplicação localmente limitada.

**Subdem:** Seja  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(w_0) \subset U$  e, uma vez que  $f'$  é contínua, seja  $M \geq 0$  o máximo de  $\|f'(z)\|$  para  $z$  no convexo compacto  $\overline{B}_r(w_0)$ . Tendo em conta o segundo teorema da média em 3.3.4 e lembrando a isometria usual  $F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$ , vemos que se  $w \neq z$  em  $\overline{B}_r(w_0)$  tem-se

$$\|f(z) - f(w)\| \leq M\|z - w\|$$

donde

$$\|g(w, z)\| = \frac{\|f(z) - f(w)\|}{\|z - w\|} \leq M.$$

Uma vez que se tem também se  $w = z$  em  $\overline{B}_r(w_0)$

$$\|g(w, z)\| = \|f'(w)\| \leq M,$$

concluimos que  $g$  é limitada na vizinhança  $\overline{B}_r(w_0) \times \overline{B}_r(w_0)$  de  $(w_0, w_0)$ .

**c)** Vamos mostrar que  $g$  é holomorfa na segunda variável, isto é, que sendo  $w_0 \in U$  fixado, é holomorfa a aplicação de  $U$  para  $F$  que a  $z$  associa  $g(w_0, z)$ .

**Subdem:** Esta aplicação tem restrição holomorfa a  $U \setminus \{w_0\}$  tendo em conta o facto de para cada  $z$  neste subconjunto se ter

$$g(w_0, z) = \frac{f(z) - f(w_0)}{z - w_0}.$$

Seja  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(w_0) \subset U$  e, uma vez que  $f'$  é contínua, seja  $M \geq 0$  o máximo de  $\|f'(z)\|$  para  $z$  no convexo compacto  $\overline{B}_r(w_0)$ . Tendo em conta o segundo teorema da média em 3.3.4 e lembrando a isometria usual  $F \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}; F)$ , vemos que para cada  $z \in B_r(w_0) \setminus \{w_0\}$  tem-se

$$\|f(z) - f(w_0)\| \leq M\|z - w_0\|,$$

donde

$$\|g(w_0, z)\| = \frac{\|f(z) - f(w_0)\|}{\|z - w_0\|} \leq M.$$

Podemos agora aplicar o resultado sobre singularidades removíveis em 3.7.10 para garantir a existência de uma aplicação holomorfa  $h: U \rightarrow F$  tal que  $h(z) = g(w_0, z)$  para cada  $z \neq w_0$  e vem então

$$h(w_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow w_0 \\ z \neq w_0}} g(w_0, z) = \lim_{z \rightarrow w_0} \frac{f(z) - f(w_0)}{z - w_0} = f'(w_0) = g(w_0, w_0),$$

o que mostra que a aplicação de  $U$  para  $F$  que a  $z$  associa  $g(w_0, z)$  coincide com a aplicação  $h$ , sendo portanto holomorfa.

**d)** Uma vez que para  $w, z \in U$  tem-se trivialmente  $g(w, z) = g(z, w)$ , concluímos que a aplicação  $g$  é também holomorfa na primeira variável. Podemos aplicar agora 3.7.16 para garantir que a aplicação  $g: U \times U \rightarrow F$  é de classe  $C^\infty$  no sentido complexo.  $\square$

Passando ao estudo do caso geral em que o domínio das aplicações holomorfas é um aberto dum espaço vetorial normado complexo  $E$ , será cómodo afastarmo-nos da utilização que tem sido habitual das letras como variáveis: As letras  $s$  e  $t$  que habitualmente têm sido utilizadas como variáveis de domínio contido em  $\mathbb{R}$  passarão a ser utilizadas também para variáveis com domínio contido em  $\mathbb{C}$ ; As letras  $z$  e  $w$  que têm sido utilizadas como variáveis com domínio contido em  $\mathbb{C}$  passarão a ser utilizadas para variáveis com domínio contido no espaço vetorial  $E$ .

**3.7.18 (Aplicações Gâteaux-diferenciáveis)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado complexo,  $\Omega \subset E$  um aberto,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: \Omega \rightarrow F$  uma aplicação. Dizemos que  $f$  é *Gâteaux-diferenciável* se  $f$  admitir em cada  $z \in \Omega$  derivada dirigida  $D_u f(z)$  segundo qualquer vetor  $u \in E$  (cf. 3.1.6).

Repare-se que, como referido em 3.1.11, toda a aplicação diferenciável é também Gâteaux-diferenciável e com  $D_u f(z) = Df_z(u)$ .<sup>307</sup>

**3.7.19** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado complexo,  $\Omega \subset E$  um aberto,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: \Omega \rightarrow F$  uma aplicação Gâteaux-diferenciável. Para cada  $z_0 \in \Omega$  e  $u \in E$ , podemos considerar o aberto  $U$  de  $\mathbb{C}$ ,

$$U = \{s \in \mathbb{C} \mid z_0 + su \in \Omega\}$$

e tem lugar uma aplicação holomorfa  $\varphi: U \rightarrow F$  definida por

$$\varphi(s) = f(z_0 + su),$$

com

$$\varphi'(s) = D_u f(z_0 + su).$$

**Dem:** Considerando o resultado sobre o limite de uma aplicação composta,

<sup>307</sup>Examinou-se no exercício 3.1.4, no contexto de  $\mathbb{R}$  como corpo dos escalares, um exemplo de uma aplicação contínua e Gâteaux-diferenciável de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$  que não é diferenciável. Veremos adiante que um tal exemplo seria impossível no caso de domínios abertos e de  $\mathbb{C}$  como corpo dos escalares.



vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\varphi(s) - \varphi(s_0)}{s - s_0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(s_0 + t) - \varphi(s_0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + s_0 u + t u) - f(z_0 + s_0 u)}{t} = D_u f(z_0 + s_0 u). \quad \square \end{aligned}$$

**3.7.20 (Homogeneidade da derivada dirigida)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado complexo,  $\Omega \subset E$  um aberto,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: \Omega \rightarrow F$  uma aplicação Gâteaux-diferenciável. Para cada  $z \in \Omega$ ,  $u \in E$  e  $a \in \mathbb{C}$  tem-se então

$$D_{au} f(z) = a D_u f(z).$$

**Dem:** O caso em que  $a = 0$  é trivial, tendo em conta a última afirmação em 3.1.6. No caso em que  $a \neq 0$ , temos uma consequência simples do teorema sobre o limite da aplicação composta:

$$\begin{aligned} D_{au} f(z) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z + sau) - f(z)}{s} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + tu) - f(z)}{\frac{t}{a}} = \\ &= a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + tu) - f(z)}{t} = a D_u f(z). \quad \square \end{aligned}$$

**3.7.21 (Lema — Algumas estimações do tipo Cauchy)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado complexo,  $\Omega \subset E$  um aberto,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: \Omega \rightarrow F$  uma aplicação Gâteaux-diferenciável. Sejam  $z_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$  e  $M \geq 0$  tais que  $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$  e que  $\|f(z)\| \leq M$  para cada  $z \in \overline{B}_r(z_0)$ .<sup>308</sup> Tem-se então qualquer que seja  $z \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$  <sup>309</sup>

a) 
$$\|f(z) - f(z_0)\| \leq \frac{2M}{r} \|z - z_0\|,$$

b) 
$$\|f(z) - f(z_0) - D_{z-z_0} f(z_0)\| \leq \frac{8M}{r^2} \|z - z_0\|^2.$$

Tem-se ainda para cada  $u \in E$

c) 
$$\|D_u f(z_0)\| \leq \frac{M}{r} \|u\|$$

e para cada  $z \in \overline{B}_{\frac{r}{3}}(z_0)$  e  $u \in E$

<sup>308</sup>Dado  $z_0 \in \Omega$ , a existência de  $r > 0$  e  $M \geq 0$  nestas condições estará assegurada se exigirmos que  $f$  seja localmente limitada, o que acontece, em particular, se  $f$  for contínua.

<sup>309</sup>Comparar com as alíneas b) e c) de 3.7.5.

$$d) \quad \|D_u f(z) - D_u f(z_0)\| \leq \frac{9M}{r^2} \|z - z_0\| \|u\|. \quad 310$$

**Dem:** Começemos por reparar que para provar as conclusões de a) e b) podemos já afastar o caso trivial em que  $z = z_0$ , caso em que ambos os membros de cada uma das desigualdades são 0. Notemos

$$u = \frac{r(z - z_0)}{2\|z - z_0\|} \in E,$$

para o qual se tem  $\|u\| = \frac{r}{2}$ . Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  o aberto constituído pelos  $s \in \mathbb{C}$  tais que  $z_0 + su \in \Omega$  e reparemos que se  $|s| \leq 2$  vem  $z_0 + su \in \overline{B}_r(z_0)$ , portanto  $\overline{B}_2(0) \subset \Omega$  e que para cada  $s \in \overline{B}_1(0)$  vem  $z_0 + su \in \overline{B}_{\frac{r}{2}}(z_0)$ . Sendo  $\varphi: U \rightarrow F$  a aplicação holomorfa definida por  $\varphi(s) = f(z_0 + su)$  (cf. 3.7.19), tem-se  $\|\varphi(s)\| \leq M$  para cada  $s \in \overline{B}_2(0)$  e  $\varphi'(0) = D_u f(z_0)$  e daqui deduzimos, pelas alíneas b) e c) de 3.7.5 que, por ser  $\frac{2\|z - z_0\|}{r} \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(z_0)\| &= \left\| \varphi\left(\frac{2\|z - z_0\|}{r}\right) - \varphi(0) \right\| \leq \\ &\leq \frac{2M}{2} \times \frac{2\|z - z_0\|}{r} = \frac{2M}{r} \|z - z_0\|, \end{aligned}$$

e, tendo em conta 3.7.20,

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(z_0) - D_{z-z_0} f(z_0)\| &= \left\| f(z) - f(z_0) - \frac{2\|z - z_0\|}{r} D_u f(z_0) \right\| = \\ &= \left\| \varphi\left(\frac{2\|z - z_0\|}{r}\right) - \varphi(0) - \frac{2\|z - z_0\|}{r} \varphi'(0) \right\| \leq \\ &\leq \frac{8M}{4} \left(\frac{2\|z - z_0\|}{r}\right)^2 = \frac{8M}{r^2} \|z - z_0\|^2. \end{aligned}$$

Quanto a c), começamos por afastar o caso trivial em que  $u = 0$ , caso em que ambos os membros da desigualdade são 0. Consideramos, mais uma vez, o aberto  $U \subset \mathbb{C}$  constituído pelos  $s \in \mathbb{C}$  tais que  $z_0 + su \in \Omega$  e a aplicação holomorfa  $\varphi: U \rightarrow F$  definida por  $\varphi(s) = f(z_0 + su)$ . Uma vez que sempre que  $|s| \leq \frac{r}{\|u\|}$  tem-se  $s \in U$  e  $\|\varphi(s)\| \leq M$ , deduzimos de uma das estimações de Cauchy em 3.7.4 que

$$\|D_u f(z_0)\| = \|\varphi'(0)\| \leq \frac{M}{\frac{r}{\|u\|}} = \frac{M}{r} \|u\|.$$

Para justificar d), começamos por fixar  $z_1 \in \overline{B}_{\frac{r}{3}}(z_0)$  arbitrário. Consideremos

<sup>310</sup>Classificamos este resultado como um lema porque temos apenas em vista a sua aplicação de resultado a seguir. Em particular, não tivemos a preocupação de obter as melhores constantes nos segundos membros das majorações enunciadas.

o aberto  $\widehat{\Omega}$  de  $E$  constituído pelos  $z \in \Omega$  tais que  $z + (z_1 - z_0) \in \Omega$  e a aplicação  $g: \widehat{\Omega} \rightarrow F$  definida por

$$g(z) = f(z + (z_1 - z_0)) - f(z),$$

aplicação que é ainda Gâteaux-derivável e com

$$\begin{aligned} D_u g(z) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(z + su) - g(z)}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z + (z_1 - z_0) + su) - f(z + su) - (f(z + (z_1 - z_0)) - f(z))}{s} = \\ &= D_u f(z + (z_1 - z_0)) - D_u f(z). \end{aligned}$$

Para cada  $z \in \overline{B}_{\frac{r}{3}}(z_0)$  tem-se  $\overline{B}_{\frac{2r}{3}}(z) \subset \overline{B}_r(z_0)$  e portanto  $\|f(w)\| \leq M$  para cada  $w \in \overline{B}_{\frac{2r}{3}}(z)$  pelo que, aplicando o que vimos em a), com  $z$  no lugar de  $z_0$  e  $\frac{2r}{3}$  no de  $r$ , e tendo em conta o facto de ser  $z + (z_1 - z_0) \in \overline{B}_{\frac{r}{3}}(z)$  vem

$$\|g(z)\| = \|f(z + (z_1 - z_0)) - f(z)\| \leq \frac{2M}{\frac{2r}{3}} \|z_1 - z_0\| = \frac{3M}{r} \|z_1 - z_0\|$$

e daqui resulta, aplicando o que vimos em c) à aplicação  $g$ , com  $\frac{r}{3}$  no lugar de  $r$  e  $\frac{3M}{r} \|z_1 - z_0\|$  no de  $M$ , que

$$\begin{aligned} \|D_u f(z_1) - D_u f(z_0)\| &= \|D_u g(z_0)\| \leq \frac{\frac{3M}{r} \|z_1 - z_0\|}{\frac{r}{3}} \|u\| = \\ &= \frac{9M}{r^2} \|z_1 - z_0\| \|u\|. \quad \square \end{aligned}$$

**3.7.22 (Teorema de regularidade)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado complexo,  $\Omega \subset E$  um aberto,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: \Omega \rightarrow F$  uma aplicação Gâteaux-diferenciável e localmente limitada, esta última condição sendo verificada, em particular, se  $f$  for contínua (cf. 2.6.35). Tem-se então que a aplicação  $f: \Omega \rightarrow F$  é mesmo de classe  $C^\infty$ .

Repare-se que as duas hipóteses que fizemos são verificadas, em particular, no caso em que  $f$  é uma *aplicação holomorfa* (isto é, diferenciável no sentido complexo)

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes, em cada uma delas associando a cada  $z_0 \in \Omega$  duas constantes  $r > 0$  e  $M \geq 0$  tais que  $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$  e que  $\|f(z)\| \leq M$  para cada  $z \in \overline{B}_r(z_0)$ , o que é possível por estarmos a supor que  $f$  é localmente limitada.

**a)** Vamos verificar que  $f$  é contínua num ponto  $z_0 \in \Omega$  arbitrário.

**Subdem:** Ora, dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar  $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$  tal que  $\frac{2M\varepsilon}{r} < \delta$  e então, tendo em conta a desigualdade na alínea a) do lema 3.7.21, tem-se para cada  $z \in B_\varepsilon(z_0)$

$$\|f(z) - f(z_0)\| \leq \frac{2M}{r} \|z - z_0\| \leq \frac{2M\varepsilon}{r} < \delta,$$

o que prova a continuidade de  $f$  em  $z_0$ .

**b)** Para cada  $z_0 \in \Omega$  tem lugar uma aplicação linear contínua  $\lambda: E \rightarrow F$  definida por  $\lambda(u) = D_u f(z_0)$ .<sup>311</sup>

**Subdem:** Já verificámos em 3.7.20 que se tem  $\lambda(au) = a\lambda(u)$  para cada  $a \in \mathbb{C}$  e  $u \in E$  pelo que, para verificar que a aplicação  $\lambda$  é linear tudo o que temos que verificar é que se tem  $\lambda(u+v) = \lambda(u) + \lambda(v)$  quaisquer que sejam  $u, v \in E$ . Consideremos  $\varepsilon > 0$  tal que  $z_0 + su + tv \in \Omega$  sempre que  $(s, t) \in \mathbb{C}^2$  verifica  $|s| < \varepsilon$  e  $|t| < \varepsilon$  e a aplicação contínua, em particular localmente limitada,  $\varphi: B_\varepsilon(0) \times B_\varepsilon(0) \rightarrow F$  definida por

$$\varphi(s, t) = f(z_0 + su + tv).$$

O facto de  $f$  ser Gâteaux-diferenciável implica, por 3.7.19 que  $\varphi$  é separadamente holomorfa e portanto de classe  $C^\infty$ , em particular diferenciável (cf. 3.7.16). Deduzimos daqui, considerando a aplicação  $\psi: B_\varepsilon(0) \rightarrow F$  definida por  $\psi(s) = \varphi(s, s)$ , que

$$\begin{aligned} \lambda(u+v) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + su + sv) - f(z_0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s, s) - \varphi(0, 0)}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(s) - \psi(0)}{s} = \psi'(0) = D\varphi_{(0,0)}(1, 1) = \\ &= D\varphi_{(0,0)}(1, 0) + D\varphi_{(0,0)}(0, 1) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + su) - f(z_0)}{s} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + tv) - f(z_0)}{t} = \\ &= \lambda(u) + \lambda(v). \end{aligned}$$

Uma vez provada a linearidade de  $\lambda: E \rightarrow F$ , a sua continuidade resulta de que, pela alínea c) de 3.7.21, tem-se  $\|\lambda(u)\| \leq \frac{M}{r} \|u\|$  para cada  $u \in E$ .

**c)** Vamos verificar que  $f$  é diferenciável em cada  $z_0 \in \Omega$  e com  $Df_{z_0} = \lambda$ , por outras palavras, para cada  $u \in E$

$$Df_{z_0}(u) = D_u f(z_0).$$

**Subdem:** Dado  $\delta > 0$  arbitrário, consideremos  $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$  tal que  $\frac{8M\varepsilon}{r^2} < \delta$ . Tem-se então, sempre que  $z \in B_\varepsilon(z_0)$ , pela alínea b) de 3.7.21,

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)\| &\leq \frac{8M}{r^2} \|z - z_0\|^2 \leq \\ &\leq \frac{8M\varepsilon}{r^2} \|z - z_0\| \leq \delta \|z - z_0\|, \end{aligned}$$

<sup>311</sup>Comparar com o exemplo examinado no exercício 3.1.4, no quadro de  $\mathbb{R}$  como corpo dos escalares, em que temos uma aplicação contínua com derivada dirigida segundo qualquer vetor mas em que essa derivada não é linear como função do vetor.

o que prova a diferenciabilidade.

**d)** Vamos agora mostrar que a aplicação diferenciável  $f: \Omega \rightarrow F$  é mesmo de classe  $C^1$ .

**Subdem:** Provemos a continuidade da aplicação  $Df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  num ponto  $z_0 \in \Omega$  arbitrário. Ora, dado  $\delta > 0$  arbitrário, podemos considerar  $0 < \varepsilon < \frac{r}{3}$  tal que  $\frac{9M\varepsilon}{r^2} < \delta$  e então, tendo em conta a alínea d) de 3.7.21, vem, sempre que  $\|z - z_0\| < \varepsilon$ ,

$$\|(Df_z - Df_{z_0})(u)\| = \|D_u f(z) - D_u f(z_0)\| \leq \frac{9M\varepsilon}{r^2} \|u\|,$$

isto é,  $\|Df_z - Df_{z_0}\| \leq \frac{9M\varepsilon}{r^2} < \delta$ , o que prova a continuidade.

**e)** Vamos mostrar que a aplicação contínua  $Df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  admite em cada  $z_0 \in \Omega$  derivada dirigida segundo qualquer vetor  $v \in E$ .

**Subdem:** Consideremos  $\varepsilon > 0$  tal que para cada  $s \in B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}$  e para cada  $z \in B_\varepsilon(z_0) \subset E$  se tenha  $z + sv \in \Omega$  e seja

$$\widehat{f}: B_\varepsilon(z_0) \times B_\varepsilon(0) \rightarrow F$$

a aplicação de classe  $C^1$  definida por

$$\widehat{f}(z, s) = f(z + sv).$$

Começemos por mostrar, como resultado auxiliar, que, dada uma aplicação  $\gamma: [0, 1] \rightarrow B_\varepsilon(0)$  de classe  $C^1$ , vem de classe  $C^1$  a aplicação  $g: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow F$  definida por

$$g(z) = \int_\gamma \widehat{f}(z, s) ds,$$

tendo-se então

$$Dg_z = \int_\gamma D_1 \widehat{f}(z, s) ds.$$

Para isso, notamos que se tem

$$g(z) = \int_0^1 \widehat{f}(z, \gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

onde para cada  $z \in B_\varepsilon(z_0)$  é contínua a aplicação  $t \mapsto \widehat{f}(z, \gamma(t)) \gamma'(t)$ , e para cada  $t \in [0, 1]$  é diferenciável a aplicação  $z \mapsto \widehat{f}(z, \gamma(t)) \gamma'(t)$  e com diferencial em  $z$  igual a  $D_1 \widehat{f}(z, \gamma(t)) \gamma'(t)$ , vindo contínua a aplicação

$$B_\varepsilon(z_0) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}(E; F), (z, t) \mapsto D_1 \widehat{f}(z, \gamma(t)) \gamma'(t).$$

Podemos assim aplicar o teorema de diferenciabilidade do integral paramétrico em 3.5.18 para garantir que  $g$  é efetivamente de classe  $C^1$  e com

$$Dg_z = \int_0^1 D_1 \widehat{f}((z, \gamma(t))) \gamma'(t) dt = \int_\gamma D_1 \widehat{f}(z, s) ds,$$

como enunciado. Dados  $s_1, s_2$  arbitrários em  $B_\varepsilon(0)$ , a alínea a) do teorema de Morera em 3.7.6 diz-nos que se tem

$$\int_0^{s_2} \widehat{f}(z, s) ds = \int_0^{s_1} \widehat{f}(z, s) ds + \int_{s_1}^{s_2} \widehat{f}(z, s) ds$$

pelo que, diferenciando ambos os membros e aplicando o resultado auxiliar acima referido a cada um dos caminhos  $\gamma_{0, s_2}$ ,  $\gamma_{0, s_1}$  e  $\gamma_{s_1, s_2}$  (cf. 3.5.28), obtemos

$$\int_0^{s_2} D_1 \widehat{f}(z, s) ds = \int_0^{s_1} D_1 \widehat{f}(z, s) ds + \int_{s_1}^{s_2} D_1 \widehat{f}(z, s) ds.$$

Tomando  $z = z_0$  e aplicando a alínea b) do teorema de Morera referido, concluímos que é holomorfa a aplicação  $B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  que a  $s$  associa

$$D_1 \widehat{f}(z_0, s) = Df_{z_0 + sv},$$

em particular, considerando a sua derivada em 0, existe o limite

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{Df_{z_0 + sv} - Df_{z_0}}{s} = D_v(Df)_{z_0} \in \mathcal{L}(E; F),$$

que é o que se pretendia provar nesta alínea.

**f)** Vamos provar agora que a aplicação  $f: \Omega \rightarrow F$  é efetivamente de classe  $C^\infty$ , isto é que é de classe  $C^p$  para todo o  $p \geq 1$ . Fazemo-lo por indução em  $p$ , começando por reparar que o caso  $p = 1$  é o que foi provado nas alíneas a) a d) da demonstração. Supondo que a afirmação é verdadeira para um certo  $p \geq 1$ , o que provámos em e) mostra que a aplicação contínua  $Df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  admite derivada dirigida em cada ponto do domínio segundo qualquer vetor de  $E$ , pelo que, pela hipótese de indução, a aplicação  $Df: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$  é de classe  $C^p$ , ou seja,  $f$  é de classe  $C^{p+1}$ .  $\square$

### 3.7.23 (A série de Taylor de uma aplicação holomorfa de variável vetorial)

Sejam  $E$  um espaço vetorial normado complexo,  $\Omega \subset E$  um aberto,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: \Omega \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Sejam  $z_0 \in \Omega$  e  $R > 0$  tais que  $B_R(z_0) \subset \Omega$ . Para cada  $z \in B_R(z_0)$  tem-se então

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D^k f_{z_0}(z - z_0, \dots, z - z_0) = \\ &= f(z_0) + Df_{z_0}(z - z_0) + \frac{1}{2} D^2 f_{z_0}(z - z_0, z - z_0) + \\ &\quad + \frac{1}{3!} D^3 f_{z_0}(z - z_0, z - z_0, z - z_0) + \dots \end{aligned}$$

onde a soma envolvida é a de uma família absolutamente somável de vetores de  $F$ .<sup>312</sup>

**Dem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $z = z_0$ . Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  o aberto

$$U = \{s \in \mathbb{C} \mid z_0 + s(z - z_0) \in \Omega\}$$

e  $\varphi: U \rightarrow F$  a aplicação holomorfa definida por

$$\varphi(s) = f(z_0 + s(z - z_0)),$$

para a qual se tem  $\varphi(0) = f(z_0)$  e, tendo em conta 3.2.12, para cada  $k > 0$

$$\varphi^{(k)}(0) = D^k \varphi_0(1, \dots, 1) = D^k f_{z_0}(z - z_0, \dots, z - z_0).$$

Uma vez que sempre que  $|s| < \frac{R}{\|z - z_0\|}$  vem  $z_0 + s(z - z_0) \in B_R(z_0)$  e que  $1 < \frac{R}{\|z - z_0\|}$ , podemos aplicar a fórmula de Taylor em 3.7.7 para concluir que

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{3!}\varphi'''(0) + \dots = \\ &= f(z_0) + Df_{z_0}(z - z_0) + \frac{1}{2}D^2 f_{z_0}(z - z_0, z - z_0) + \\ &\quad + \frac{1}{3!}D^3 f_{z_0}(z - z_0, z - z_0, z - z_0) + \dots. \quad \square \end{aligned}$$

**3.7.24 (Estimações de Cauchy para aplicações holomorfas de variável vetorial)** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado complexo,  $\Omega \subset E$  um aberto,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: \Omega \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Sejam  $z_0 \in \Omega$ ,  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$  e que, para um certo  $M \geq 0$ , se tenha  $\|f(z)\| \leq M$  para cada  $z \in \overline{B}_r(z_0)$ .<sup>313</sup> Tem-se então, para cada  $k \geq 1$  e  $u \in E$

$$\|D^k f_{z_0}(u, \dots, u)\| \leq \frac{k!M}{r^k} \|u\|^k.$$

**Dem:** Podemos já afastar o caso trivial em que  $u = 0$ . Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  o aberto

$$U = \{s \in \mathbb{C} \mid z_0 + su \in \Omega\}$$

e  $\varphi: U \rightarrow F$  a aplicação holomorfa definida por

<sup>312</sup>Ao contrário do referido na nota de pé de página 299 a propósito do resultado análogo 3.7.7, para  $E = \mathbb{C}$ , não afirmamos que para cada  $0 < r < R$  a família das restrições das parcelas a  $w \in B_r(z_0)$  seja normalmente somável. Se isso acontecesse  $f$  era necessariamente limitada em  $B_r(z_0)$  e um contraexemplo para esta propriedade aparecerá no exercício 3.7.12 no fim da secção.

<sup>313</sup>Ao contrário de 3.7.4, a existência de um tal  $M \geq 0$  é aqui uma hipótese; no resultado referido resultava da compacidade da bola fechada. O que se pode garantir é a existência de  $r > 0$  com  $\overline{B}_r(z_0) \subset \Omega$  para o qual exista um tal  $M$  (toda a aplicação contínua é localmente limitada).

$$\varphi(s) = f(z_0 + su),$$

para a qual se tem  $\varphi(0) = f(z_0)$  e, tendo em conta 3.2.12, para cada  $k > 0$

$$\varphi^{(k)}(0) = D^k \varphi_0(1, \dots, 1) = D^k f_{z_0}(u, \dots, u).$$

Uma vez que sempre que  $|s| \leq \frac{r}{\|u\|}$  vem  $z_0 + su \in \overline{B}_r(z_0)$  e portanto  $\|\varphi(s)\| \leq M$ , deduzimos das estimações de Cauchy em 3.7.4 que

$$\|D^k f_{z_0}(u, \dots, u)\| = \|\varphi^{(k)}(0)\| \leq \frac{k!M}{\left(\frac{r}{\|u\|}\right)^k} = \frac{k!M}{r^k} \|u\|^k. \quad \square$$

Voltamos agora a examinar as aplicações holomorfas cujo domínio é um aberto de  $\mathbb{C}$  de modo a obtermos uma generalização da fórmula integral de Cauchy, onde os domínios de integração não são necessariamente os considerados em 3.7.2. Para caracterizar os domínios de integração que será conveniente utilizar será cómodo trabalhar com “combinações lineares formais” de caminhos de classe  $C^1$ , o que necessita de um instrumento algébrico abstrato bem conhecido que relembramos a seguir.

**3.7.25 (Observação algébrica)** Será cómodo utilizar no que segue a construção algébrica abstrata do grupo abeliano livre associado a um conjunto arbitrário  $\mathcal{G}$ . Trata-se da classe de todas as famílias  $\Gamma = (p_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$  de elementos de  $\mathbb{Z}$  para as quais exista uma parte finita  $\mathcal{G}_0$  de  $\mathcal{G}$  com  $p_\gamma = 0$  para cada  $\gamma \notin \mathcal{G}_0$  (famílias quase sempre nulas), classe que constitui um subgrupo do grupo abeliano de todas as aplicações de  $\mathcal{G}$  para  $\mathbb{Z}$ . Repare-se que este grupo abeliano (ou, o que é equivalente, módulo sobre o anel  $\mathbb{Z}$  dos inteiros) possui uma base livre em correspondência biunívoca com  $\mathcal{G}$ , a saber a constituída pelos elementos  $\hat{\gamma}$ , com  $\gamma \in \mathcal{G}$ , onde  $\hat{\gamma}$  é a família que associa o inteiro 1 ao índice  $\gamma$  e 0 a todos os restantes índices. Mais precisamente, se  $\Gamma = (p_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$ , tem-se

$$(1) \quad \Gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} p_\gamma \hat{\gamma},$$

onde, como em qualquer grupo abeliano, esta soma eventualmente infinita é, por definição, igual a qualquer subsoma finita cuja parcelas incluam todas as que não são 0.

É comum cometer-se o abuso de utilizar a notação  $\gamma$  para designar a família  $\hat{\gamma}$  atrás referida, desde que seja claro se estamos a referir o índice  $\gamma$  ou o correspondente elemento do grupo abeliano livre, o que conduz a que a fórmula (1) seja reescrita na forma

$$(2) \quad \Gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} p_\gamma \gamma.$$



Uma propriedade bem conhecida das bases livres garante-nos que, dados um grupo abeliano  $\mathcal{H}$  e, para cada  $\gamma \in \mathcal{G}$ , um elemento  $h_\gamma \in \mathcal{H}$ , existe um único morfismo de grupos do grupo abeliano livre associado a  $\mathcal{G}$  para  $\mathcal{H}$  que aplica cada elemento  $\gamma$  da base livre em  $h_\gamma$ , nomeadamente aquele que a cada  $\Gamma$  verificando (2) associa o elemento

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{G}} p_\gamma h_\gamma$$

de  $\mathcal{H}$ , elemento que será naturalmente escrito na forma

$$\prod_{\gamma \in \mathcal{G}} h_\gamma^{p_\gamma},$$

no caso em que para o grupo  $\mathcal{H}$  se utilize a notação multiplicativa.

Note-se que o facto de termos um morfismo de grupos garante que, dadas famílias finitas de elementos  $\gamma_k \in \mathcal{G}$  (não necessariamente distintos) e de inteiros  $p_k$ , o elemento  $\sum p_k \gamma_k$  do grupo abeliano livre é aplicado no elemento  $\sum p_k h_{\gamma_k}$  de  $\mathcal{H}$  (ou, no caso da notação multiplicativa, no elemento  $\prod h_{\gamma_k}^{p_k}$  de  $\mathcal{H}$ ).

**3.7.26 (0-cadeias e 1-cadeias em  $\mathbb{C}$ )** As observações algébricas abstratas feitas em 3.7.25 vão ser aplicadas em duas situações distintas:

**a)** O conjunto  $\mathcal{G}$  é o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos. O correspondente grupo abeliano livre será notado  $\text{Cad}_0(\mathbb{C})$  e os seus elementos serão chamados *0-cadeias* de  $\mathbb{C}$ . Se uma 0-cadeia corresponder à família de inteiros  $(p_z)_{z \in \mathbb{C}}$  chamamos *suporte* da 0-cadeia ao conjunto finito dos  $z$  tais que  $p_z \neq 0$ .

**b)** O conjunto  $\mathcal{G}$  é o conjunto de todas os caminhos  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^1$ , onde  $a < b$  em  $\mathbb{R}$  são arbitrários. Para um tal caminho, chamamos *suporte* de  $\gamma$  ao subconjunto compacto  $\gamma^* = \gamma([a, b])$  de  $\mathbb{C}$  e dizemos que  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  são as suas *extremidades*, o primeiro a *origem* e o segundo a *meta* ou o *fim*. O correspondente grupo abeliano livre será notado  $\text{Cad}_1(\mathbb{C})$  e os seus elementos serão chamados *1-cadeias* de  $\mathbb{C}$ . Se uma 1-cadeia  $\Gamma$  corresponder à família de inteiros  $(p_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{G}}$  chamamos *suporte* de  $\Gamma$  ao subconjunto compacto  $\Gamma^*$  de  $\mathbb{C}$  união dos suportes  $\gamma^*$  dos  $\gamma$  tais que  $p_\gamma \neq 0$ .

Repare-se que, em qualquer das situações referidas em a) e b) o suporte de uma soma de cadeias está contido na união dos suportes destas, o suporte da cadeia 0 é vazio e o suporte do produto de um inteiro  $p \neq 0$  por uma cadeia é igual ao suporte desta, em particular a classe das cadeias com suporte contido num subconjunto dado  $A \subset \mathbb{C}$  é um subgrupo abeliano que admite uma base livre constituída pelos pontos de  $A$ , no primeiro caso, e pelos caminhos de classe  $C^1$  com suporte contido em  $A$ , no segundo caso. Esses subgrupos abelianos serão notados respetivamente  $\text{Cad}_0(A)$  e  $\text{Cad}_1(A)$ .

Como em qualquer das situações referidas em a) e b) o conjunto  $\mathcal{G}$  já tem uma estrutura de grupo abeliano, associada à operação de soma em  $\mathbb{C}$ , a comodidade da identificação de um ponto ou de um caminho  $C^1$  com a

correspondente cadeia impõe “como castigo” o risco de confusão sobre qual a soma ou multiplicação pelos inteiros que se está a considerar. Por esse motivo, no contexto das operações dos grupos abelianos  $\text{Cad}_0(\mathbb{C})$  e  $\text{Cad}_1(\mathbb{C})$  usaremos os símbolos

$$\oplus \quad \ominus \quad \odot \quad \Sigma$$

no lugar de

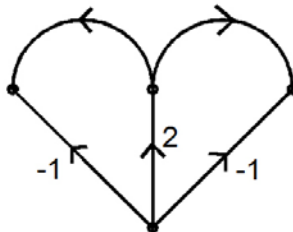
$$+ \quad - \quad \cdot \quad \sum$$

(soma, subtração, multiplicação por um inteiro e somatório).

**3.7.27 (O morfismo bordo e as 1-cadeias fechadas)** Define-se um morfismo de grupos abelianos  $\partial: \text{Cad}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Cad}_0(\mathbb{C})$ , o *morfismo bordo*, pela condição de aplicar cada  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  da base de  $\text{Cad}_1(\mathbb{C})$  no elemento  $\gamma(b) \ominus \gamma(a)$  de  $\text{Cad}_0(\mathbb{C})$ . É claro que se  $A \subset \mathbb{C}$  o morfismo  $\partial$  aplica  $\text{Cad}_1(A)$  em  $\text{Cad}_0(A)$ . Repare-se que, dados um conjunto finito de índices  $I$ , uma família de caminhos  $\gamma_k: [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^1$  e uma família de inteiros  $p_k \in \mathbb{Z}$ , vai-se ter

$$\partial\left(\sum_{k \in I} p_k \odot \gamma_k\right) = \sum_{k \in I} p_k \odot (\gamma(b_k) \ominus \gamma(a_k)).$$

Diz-se que uma 1-cadeia  $\Gamma = \sum_{k \in I} p_k \odot \gamma_k$  é *fechada*, ou que é um *ciclo*, se se tem  $\partial(\Gamma) = 0$ . Em particular, no caso em que a 1-cadeia se reduz a um caminho  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , a 1-cadeia é fechada se, e só se,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , ou seja, se, e só se, o caminho é fechado. Na figura a seguir está sugerida uma cadeia fechada que não é do tipo anterior; as setas definem qual a origem e a meta de cada caminho e um inteiro na proximidade significa que multiplicámos o correspondente caminho figurado por esse inteiro.



Repare-se que o facto de  $\partial$  ser um morfismo de grupos implica imediatamente que o conjunto das 1-cadeias fechadas é um subgrupo abeliano de  $\text{Cad}_1(\mathbb{C})$ .

**3.7.28 (O integral de uma aplicação contínua sobre uma 1-cadeia)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $A \subset \mathbb{C}$  um subconjunto e  $f: A \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Pela propriedade fundamental das bases livres existe

então um único morfismo de grupos abelianos de  $\text{Cad}_1(A)$  para  $F$  que aplica cada caminho  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  de classe  $C^1$  no integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

definido em 3.5.23. Notamos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

a imagem de uma 1-cadeia  $\Gamma$  com suporte contido em  $A$  por este morfismo. Repare-se que, dados um conjunto finito de índices  $I$ , uma família de caminhos  $\gamma_k: [a_k, b_k] \rightarrow A$  de classe  $C^1$  e uma família de inteiros  $p_k \in \mathbb{Z}$ , vai-se ter, para a 1-cadeia  $\Gamma = \sum_{k \in I} p_k \odot \gamma_k$ ,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k \in I} p_k \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Observemos que da igualdade precedente decorrem imediatamente propriedades de linearidade do integral sobre uma 1-cadeia  $\Gamma$  relativamente à função integranda  $f$  que correspondem às referidas em 3.5.24 para o integral sobre um caminho de classe  $C^1$ , propriedades essas que pensamos não ser necessário explicitar.

**3.7.29 (O integral de uma função primitivável ao longo de uma 1-cadeia fechada)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $g: U \rightarrow F$  uma aplicação contínua admitindo uma primitiva, isto é, tal que exista uma aplicação holomorfa  $f: U \rightarrow F$  com  $f'(z) = g(z)$  para cada  $z \in U$ . Se  $\Gamma$  for uma 1-cadeia fechada com suporte contido em  $U$  tem-se então

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0.$$

**Dem:** Consideremos o morfismo  $\Psi$  de  $\text{Cad}_0(U)$  para  $F$  que aplica cada elemento  $w$  da sua base livre em  $f(w)$ . Como referido em 3.5.27, para cada elemento  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  da base livre de  $\text{Cad}_1(U)$  tem-se

$$\int_{\gamma} g(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \Psi(\partial(\gamma))$$

Temos assim dois morfismos de  $\text{Cad}_1(U)$  para  $F$  que coincidem nos elementos de uma base livre pelo que coincidem, isto é, para cada 1-cadeia  $\Gamma \in \text{Cad}_1(U)$ ,

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \Psi(\partial(\Gamma)),$$

em particular, se a 1-cadeia  $\Gamma$  for fechada,

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = \Psi(0) = 0. \quad \square$$

**3.7.30 (O índice de um ponto relativamente a uma 1-cadeia fechada)** Sejam  $\Gamma$  uma 1-cadeia fechada e  $z \in \mathbb{C}$  não pertencente ao suporte  $\Gamma^*$  de  $\Gamma$ . Tem-se então que

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw$$

é um número inteiro, a que se dá o nome de *índice* do complexo  $z$  relativamente a  $\Gamma$ . Repare-se que decorre imediatamente da definição que,  $z$  estando fixado, a aplicação  $\Gamma \mapsto \text{Ind}_{\Gamma}(z)$  é um morfismo do grupo abeliano das 1-cadeias fechadas com suporte contido em  $\mathbb{C} \setminus \{z\}$  para  $\mathbb{Z}$ .

**Dem:** Vamos dividir a demonstração em várias partes:

**a)** Vamos mostrar que, se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é um caminho de classe  $C^1$  e se  $z \in \mathbb{C}$  não pertence ao suporte  $\gamma([a, b])$  então

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw\right) = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z}.$$

**Subdem:** Lembremos que se tem

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds.$$

Consideremos então a aplicação  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right)$$

para a qual se tem

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \times \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

e  $\varphi(a) = \exp(0) = 1$ . Sendo agora  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação definida por

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z},$$

vemos que

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0$$

e portanto  $\psi$  é constante, em particular

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z} = \psi(b) = \psi(a) = \frac{1}{\gamma(a) - z}$$

ou seja,

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw\right) = \varphi(b) = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z}.$$

**b)** Vamos agora mostrar que se  $\Gamma$  é uma 1-cadeia fechada e se  $z \in \mathbb{C}$  não pertence ao suporte  $\Gamma^*$  então tem-se

$$\exp\left(\int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw\right) = 1.$$

**Subdem:** Vamos interpretar a conclusão analítica obtida em a) com o auxílio dos instrumentos algébricos que introduzimos. Para isso, notamos que as propriedades da aplicação exponencial em  $\mathbb{C}$  implicam que esta é um morfismo do grupo aditivo  $\mathbb{C}$  para o grupo multiplicativo  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e consideramos o morfismo  $\Phi_z$  de  $\text{Cad}_0(\mathbb{C} \setminus \{z\})$  para o grupo multiplicativo  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  definido pela condição de aplicar um elemento  $w$  da sua base livre no complexo não nulo  $w - z$ , morfismo que aplica portanto uma 0-cadeia  $\sum p_k \odot w_k$  no complexo não nulo  $\prod (w_k - z)^{p_k}$ . O segundo membro da igualdade em a) é assim a imagem por  $\Phi_z$  da 0-cadeia

$$\partial(\gamma) = \gamma(b) \ominus \gamma(a).$$

Temos assim dois morfismos de  $\text{Cad}_1(\mathbb{C} \setminus \{z\})$  para o grupo multiplicativo  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , o primeiro aplicando  $\Gamma$  em

$$\exp\left(\int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw\right)$$

e o segundo aplicando  $\Gamma$  em  $\Phi_z(\partial(\Gamma))$ . A conclusão de a) diz-nos que estes dois morfismos coincidem nos elementos da base livre de  $\text{Cad}_1(\mathbb{C} \setminus \{z\})$ , o que implica que eles coincidem, ou seja, que para cada 1-cadeia de suporte contido em  $\mathbb{C} \setminus \{z\}$  tem-se

$$\exp\left(\int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw\right) = \Phi_z(\partial(\Gamma)).$$

No caso em que a 1-cadeia  $\Gamma$  é fechada tem-se assim

$$\exp\left(\int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw\right) = \Phi_z(0) = 1.$$

**c)** Para concluir que se  $\Gamma$  é uma 1-cadeia fechada com suporte contido em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  então  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw$  é um inteiro basta agora lembrar que, como referido em 3.6.15, se  $s, t \in \mathbb{R}$  tem-se  $\exp(s + ti) = 1$  se, e só se,  $s = 0$  e  $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ .  $\square$

**3.7.31 (O índice como função do ponto)** Seja  $\Gamma$  uma 1-cadeia fechada com suporte  $\Gamma^* \subset \mathbb{C}$ . Tem-se então que a função  $\text{Ind}_\Gamma: \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ , que a  $z$  associa o índice  $\text{Ind}_\Gamma(z)$  de  $z$  relativamente a  $\Gamma$ , é contínua, portanto constante em cada parte conexa do aberto  $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ , em particular constante em cada componente conexa deste aberto.

Chamaremos *interior* de  $\Gamma$  ao conjunto, que notaremos  $\text{int}(\Gamma)$ , dos pontos  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$  tais que  $\text{Ind}_\Gamma(z) \neq 0$  e *exterior* de  $\Gamma$  ao conjunto, notado  $\text{ext}(\Gamma)$ , dos pontos  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$  tais que  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0$ . Tem-se assim que  $\mathbb{C}$  é a união disjunta dos subconjuntos  $\Gamma^*$ ,  $\text{int}(\Gamma)$  e  $\text{ext}(\Gamma)$ , o primeiro compacto e os outros dois abertos.

**Dem:** Podemos considerar famílias finitas de caminhos  $\gamma_k: [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$ , com suporte contido em  $\Gamma^*$ , e de inteiros  $p_k \in \mathbb{Z}$  tais que  $\Gamma = \sum p_k \odot \gamma_k$ . Tem-se então, para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ ,

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum p_k \int_{\gamma_k} \frac{1}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum p_k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\gamma_k'(t)}{\gamma_k(t) - z} dt$$

pelo que a continuidade da aplicação  $\text{Ind}_\Gamma: \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$  resulta do teorema sobre a continuidade do integral paramétrico em 3.5.17. A continuidade desta aplicação implica que a imagem por ela de qualquer subconjunto conexo não vazio, em particular de cada uma das componentes conexas de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ , é um conexo não vazio contido em  $\mathbb{Z}$ , portanto necessariamente um conjunto com um único elemento. Essa continuidade implica também que  $\text{int}(\Gamma)$  e  $\text{ext}(\Gamma)$  são abertos em  $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ , e portanto em  $\mathbb{C}$ .  $\square$

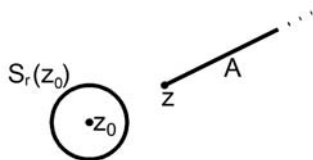
**3.7.32 (Pontos onde o índice é 0)** Seja  $\Gamma$  uma 1-cadeia fechada com suporte  $\Gamma^* \subset \mathbb{C}$ . Tem-se então que  $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$  tem uma única componente conexa não limitada e, para cada  $z$  nessa componente conexa,  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0$ . Mais precisamente, sendo  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$  tais que  $\Gamma^* \subset \overline{B}_r(z_0)$ , tem-se  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0$  para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(z_0)$ , por outras palavras  $\text{int}(\Gamma) \subset \overline{B}_r(z_0)$ .

Em consequência, podemos garantir que

$$\Gamma^* \cup \text{int}(\Gamma) = \mathbb{C} \setminus \text{ext}(\Gamma)$$

é fechado e limitado, portanto compacto.

**Dem:** Começemos por supor que o conjunto compacto  $\Gamma^*$  está contido em  $\overline{B}_r(z_0)$  e que  $z \notin \overline{B}_r(z_0)$ . Podemos considerar o subconjunto fechado  $A \subset \mathbb{C}$ ,



$$A = \{z + t(z_0 - z)\}_{t \leq 0} = \{w \in \mathbb{C} \mid \frac{w - z}{z_0 - z} \in ]-\infty, 0]\}.$$

Para cada  $w \in A$  tem-se  $w = z + t(z_0 - z)$  com  $t \leq 0$  pelo que

$$(w - z_0) - (z - z_0) = w - z = t(z_0 - z)$$

donde

$$w - z_0 = (1 - t)(z - z_0)$$

e

$$|w - z_0| = (1 - t)|z - z_0| \geq |z - z_0| > r,$$

em particular  $w \notin \Gamma^*$ . Tem-se assim  $\Gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus A$ . Reparemos agora que, sendo  $\text{Log}: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  a função logaritmo referida em 3.6.22, podemos definir uma aplicação  $f: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$f(w) = \text{Log}\left(\frac{w - z}{z_0 - z}\right)$$

para o qual se tem  $f'(w) = \frac{1}{w - z}$ . Podemos assim utilizar 3.7.29 para garantir que

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w - z} dw = 0.$$

Lembremos agora que  $S = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$  é conexo, por exemplo por ser a imagem de  $\mathbb{R}$  pela aplicação contínua  $t \mapsto \exp(ti)$ , e daqui resulta que  $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0)$  é conexo para cada  $r > 0$ , por ser a imagem de  $S \times [r, +\infty[$  pela aplicação contínua  $(w, t) \mapsto tw$ . Sendo  $r > 0$  tal que  $\Gamma^* \subset \overline{B}_r(0)$ , o conexo  $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0)$ , estando contido em  $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ , vai estar contido numa das suas componentes conexas, que é portanto ilimitada, tendo-se, pelo que verificámos no início, que nessa componente conexa o valor constante do índice é 0. Resta notar que as restantes componentes conexas de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$  são necessariamente limitadas por estarem contidas em  $\overline{B}_r(0)$ .  $\square$

**3.7.33 (Exemplo de caminhos fechados com outros índices)** Sejam  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  um inteiro,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $r > 0$ . Tem então lugar uma caminho de classe  $C^\infty$  fechado  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\gamma(t) = z_0 + r \exp(n(t_0 + t)i),$$

cujos suporte  $\gamma^*$  é

$$S_r = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| = r\}$$

e para o qual se tem para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} n, & \text{se } |z - z_0| < r, \\ 0, & \text{se } |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Em particular, vemos que neste caso o interior de  $\gamma$ ,  $\text{int}(\gamma)$  é a bola aberta  $B_r(0)$ .

**Dem:** O facto de o suporte  $\gamma^*$  estar contido em  $\{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| = r\}$  resulta de se ter  $|\exp(si)| = 1$  para cada  $s \in \mathbb{R}$  e o facto de se tratar de um caminho fechado resulta de, uma vez que  $\exp(2\pi ni) = 1$  (cf. a alínea c) de 3.6.15), vir

$$\begin{aligned} \gamma(2\pi) &= z_0 + r \exp(nt_0 i) \exp(2\pi ni) = \\ &= z_0 + r \exp(nt_0 i) = \gamma(0). \end{aligned}$$

O facto de se ter  $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$  sempre que  $|z - z_0| > r$  resulta do que vimos em 3.7.32. Por outro lado, uma vez que  $B_r(z_0)$  é convexo, e portanto conexo, sabemos que o índice é constante em  $B_r(z_0)$  pelo que para mostrar que  $\text{Ind}_\gamma(z) = n$  para todo o  $z \in B_r(z_0)$  basta verificar esse valor para  $z = z_0$ . Ora,

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\gamma(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{rni \exp(n(t_0 + t)i)}{r \exp(n(t_0 + t)i)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n dt = n. \end{aligned}$$

A justificação do facto de o suporte de  $\gamma$  ser igual a  $S_r$  (e não apenas contido neste) poderia ser feita a partir de uma análise das propriedades da exponencial mas pode também ser deduzido das propriedades do índice que estabelecemos atrás: Se  $w_0 \in S_r$  não pertencesse ao suporte, o conexo

$$A = \{z_0 + t(w_0 - z_0)\}_{t \geq 0}$$

não intersectaria  $\gamma^*$  pelo que o índice de  $\gamma$  relativamente a todos os seus pontos seria o mesmo, o que era absurdo porque para  $t = 0$  esse índice é  $n$  e para  $t > 1$  esse índice é 0.  $\square$

Vamos agora examinar alguns resultados que, em conjunto com o que estabelecemos em 3.7.31, 3.7.32 e 3.7.33, vão permitir determinar explicitamente os índices relativos a cadeias fechadas em casos particulares frequentes nas aplicações.

**3.7.34 (Lema da subdivisão)** Sejam  $a < c < b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho de classe  $C^1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  e  $\Gamma$  uma 1-cadeia tais que a 1-cadeia  $\Gamma \oplus p \odot \gamma$  seja fechada. Sejam  $\gamma_1: [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_2: [c, b] \rightarrow \mathbb{C}$  as restrições de  $\gamma$ . Para cada  $z \notin \Gamma^* \cup \gamma^*$  (que contém o suporte de  $\Gamma \oplus p \odot \gamma$ ) tem-se então que



$$\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \gamma_2$$

é também uma 1-cadeia fechada, cujo suporte não contém  $z$ , e

$$\text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \gamma_2}(z) = \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma}(z).$$

**Dem:** Consideremos a 1-cadeia  $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \ominus \gamma$ , com suporte contido em  $\gamma^*$ , que é fechada, uma vez que

$$\partial(\gamma_1 \oplus \gamma_2 \ominus \gamma) = \gamma(c) \ominus \gamma(a) \oplus \gamma(b) \ominus \gamma(c) \ominus \gamma(b) \oplus \gamma(a) = 0.$$

Tendo em conta 3.5.25 vem

$$\text{Ind}_{\gamma_1 \oplus \gamma_2 \ominus \gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_1} \frac{1}{w-z} dw + \int_{\gamma_2} \frac{1}{w-z} dw - \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw \right) = 0,$$

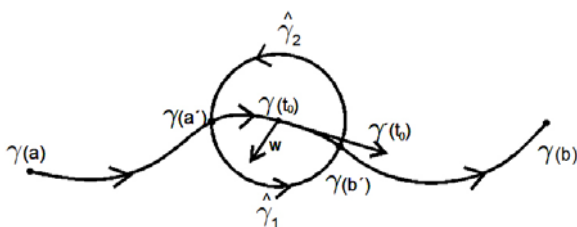
donde, por ser

$$\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \gamma_2 = \Gamma \oplus p \odot \gamma \oplus p \odot (\gamma_1 \oplus \gamma_2 \ominus \gamma),$$

vem

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \gamma_2}(z) &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma}(z) + p \times \text{Ind}_{\gamma_1 \oplus \gamma_2 \ominus \gamma}(z) = \\ &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma}(z). \end{aligned} \quad \square$$

**3.7.35 (Lema da variação do índice)** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação de classe  $C^1$ ,  $w \in \mathbb{C}$  com  $|w| = 1$  e  $t_0 \in ]a, b[$  tais que  $\gamma'(t_0) \neq 0$  e que  $\Im\left(\frac{\gamma'(t_0)}{w}\right) > 0$ , onde  $\Im$  designa o coeficiente da parte imaginária.<sup>314</sup> Tem-se então:



1) Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$ , que para  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0[$

$$\Im\left(\frac{\gamma'(t) - \gamma'(t_0)}{w}\right) < 0,$$

que para  $t \in ]t_0, t_0 + \varepsilon]$

<sup>314</sup>Esta condição exprime o facto de  $w$  seguido de  $\gamma'(t_0)$  constituir uma base direta de  $\mathbb{C}$  com a sua orientação usual. Em linguagem porventura mais sugestiva,  $w$  aponta para a direita de  $\gamma'(t_0)$ .

$$\Im\left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{w}\right) > 0$$

e que a aplicação  $t \mapsto |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$ , que toma o valor 0 para  $t = t_0$ , tenha restrição estritamente decrescente a  $[t_0 - \varepsilon, t_0]$  e restrição estritamente crescente a  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ .

2) Podemos escolher  $r > 0$  tal que

$$r < \min\{|\gamma(t_0 + \varepsilon) - \gamma(t_0)|, |\gamma(t_0 - \varepsilon) - \gamma(t_0)|\}$$

e, para um tal  $r$  ficam bem definidos  $a', b' \in ]a, b[$  pelas condições

$$\begin{aligned} t_0 - \varepsilon < a' < t_0 < b' < t_0 + \varepsilon \\ |\gamma(a') - \gamma(t_0)| = r, \quad |\gamma(b') - \gamma(t_0)| = r, \end{aligned}$$

assim como  $c, d$  com

$$\begin{aligned} -\pi < c < 0, \quad \frac{\gamma(a') - \gamma(t_0)}{w} = \operatorname{rexp}(ci). \\ 0 < d < \pi, \quad \frac{\gamma(b') - \gamma(t_0)}{w} = \operatorname{rexp}(di). \end{aligned}$$

3) Podemos considerar um caminho fechado  $\hat{\gamma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$ , com restrição injetiva a  $[0, 2\pi[$ , definido por

$$\hat{\gamma}(s) = \gamma(t_0) + r w \exp((c + s)i),$$

que verifica  $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(2\pi) = \gamma(a')$ , tendo-se

$$0 < -c < d - c < \pi - c < 2\pi$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(-c) &= \gamma(t_0) + r w, \\ \hat{\gamma}(d - c) &= \gamma(b'), \\ \hat{\gamma}(\pi - c) &= \gamma(t_0) - r w. \end{aligned}$$

4) Notando

$$\gamma_0 = \gamma|_{[a', b']}, \quad \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}|_{[0, d-c]}, \quad \hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}|_{[d-c, 2\pi]},$$

podemos considerar as 1-cadeias fechadas  $\hat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0$  e  $\gamma_0 \oplus \hat{\gamma}_2$  e tem-se para cada  $0 < \hat{s} < r$

$$\begin{aligned} \gamma(t_0) + \hat{s}w &\notin \gamma_0^* \cup \hat{\gamma}_1^* \cup \hat{\gamma}_2^*, & \gamma(t_0) - \hat{s}w &\notin \gamma_0^* \cup \hat{\gamma}_1^* \cup \hat{\gamma}_2^*, \\ \operatorname{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) &= 1, & \operatorname{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0}(\gamma(t_0) - \hat{s}w) &= 0, \\ \operatorname{Ind}_{\gamma_0 \oplus \hat{\gamma}_2}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) &= 0, & \operatorname{Ind}_{\gamma_0 \oplus \hat{\gamma}_2}(\gamma(t_0) - \hat{s}w) &= 1. \end{aligned}$$

**Dem: 1)** Notemos  $\langle \cdot \rangle$  o produto interno real usual de  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , cuja norma associada é o valor absoluto. O facto de se ter

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \Im \left( \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{w(t - t_0)} \right) = \Im \left( \frac{\gamma'(t_0)}{w} \right) > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left\langle \gamma'(t), \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\rangle = \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = |\gamma'(t_0)|^2 > 0,$$

implica a existência de  $\varepsilon > 0$  tal que  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$  e que para cada  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  com  $t \neq t_0$

$$\frac{1}{t - t_0} \Im \left( \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{w} \right) = \Im \left( \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{w(t - t_0)} \right) > 0,$$

$$\frac{1}{t - t_0} \langle \gamma'(t), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle = \left\langle \gamma'(t), \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\rangle > 0,$$

o que implica que se  $t < t_0$

$$\Im \left( \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{w} \right) < 0, \quad \langle \gamma'(t), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle < 0,$$

e se  $t > t_0$

$$\Im \left( \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{w} \right) > 0, \quad \langle \gamma'(t), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle > 0.$$

Considerando agora a aplicação  $\varphi: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  definida por

$$\varphi(t) = |\gamma(t) - \gamma(t_0)|^2 = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle,$$

para qual se tem

$$\varphi'(t) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle,$$

o que vimos atrás mostra que  $\varphi'(t) < 0$  se  $t < t_0$  e  $\varphi'(t) > 0$  para  $t > t_0$ , o que implica que  $\varphi$ , e portanto também a função  $t \mapsto |\gamma(t) - \gamma(t_0)|$  tem restrições estritamente decrescente a  $[t_0 - \varepsilon, t_0]$  e estritamente crescente a  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ .

**2)** A possibilidade de se escolher  $r$  nas condições indicadas resulta de que, pelo que se viu em 1),  $|\gamma(t_0 + \varepsilon) - \gamma(t_0)|$  e  $|\gamma(t_0 - \varepsilon) - \gamma(t_0)|$  são estritamente positivos. A existência e unicidade de  $a'$  e  $b'$  nas condições indicadas resulta das propriedades de monotonia referidas em 1) e de uma função contínua não passar de um valor a outro sem tomar todos os valores intermédios. A existência e unicidade de  $c$  e  $d$  nas condições apontadas resulta das propriedades da aplicação exponencial referidas em 3.6.15, uma vez que se tem

$$\left| \frac{\gamma(a') - \gamma(t_0)}{rw} \right| = \left| \frac{\gamma(b') - \gamma(t_0)}{rw} \right| = 1,$$

com

$$\Im\left(\frac{\gamma(a') - \gamma(t_0)}{rw}\right) < 0, \quad \Im\left(\frac{\gamma(b') - \gamma(t_0)}{rw}\right) > 0.$$

3) Sendo  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $w = \exp(s_0 i)$ , tem-se também

$$\widehat{\gamma}(s) = \gamma(t_0) + r \exp((s_0 + c + s)i),$$

o que mostra que o caminho  $\widehat{\gamma}$  é um caso particular dos caminhos fechados considerados em 3.7.33, neste caso com  $n = 1$ . O facto  $\widehat{\gamma}$  de ter restrição injetiva a  $[0, 2\pi[$  resulta das propriedades da aplicação exponencial referidas na alínea a) de 3.6.15, se repararmos que se pode escrever

$$\widehat{\gamma}(s) = \gamma(t_0) + rw \exp(ci) \exp(si).$$

As desigualdades

$$0 < -c < d - c < \pi - c < 2\pi$$

resultam de se ter  $-\pi < c < 0$  e  $0 < d < \pi$  e reparamos agora que

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}(0) &= \widehat{\gamma}(2\pi) = \gamma(t_0) + rw \exp(ci) = \gamma(a'), \\ \widehat{\gamma}(-c) &= \gamma(t_0) + rw, \\ \widehat{\gamma}(d - c) &= \gamma(t_0) + rw \exp(di) = \gamma(b'), \\ \widehat{\gamma}(\pi - c) &= \gamma(t_0) + rw \exp(\pi i) = \gamma(t_0) - rw. \end{aligned}$$

4) Tem-se

$$\begin{aligned} \partial(\widehat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0) &= \widehat{\gamma}(d - c) \ominus \widehat{\gamma}(0) \ominus \gamma(b') \oplus \gamma(a') = 0, \\ \partial(\gamma_0 \oplus \widehat{\gamma}_2) &= \gamma(b') \ominus \gamma(a') \oplus \widehat{\gamma}(2\pi) \ominus \widehat{\gamma}(d - c) = 0, \end{aligned}$$

pelo que as 1-cadeias referidas são efetivamente fechadas. Reparemos agora que para cada  $\widehat{s} \neq 0$  em  $\mathbb{R}$  o complexo  $\gamma(t_0) + \widehat{s}w$  não pertence ao suporte  $\gamma_0^* = \gamma([a', b'])$  visto que se fosse  $\gamma(t_0) + \widehat{s}w = \gamma(t)$ , necessariamente  $t \neq t_0$  e então  $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{w} = \widehat{s}$  seria real, contrariando as desigualdades envolvendo a parte imaginária do primeiro membro referidas em 1). No caso em que  $\widehat{s} > 0$ ,  $\gamma(t_0) + \widehat{s}w$  só pode pertencer ao suporte de  $\widehat{\gamma}$  se  $\widehat{s} = r$ , caso em que, por ser

$$\gamma(t_0) + \widehat{s}w = \widehat{\gamma}(-c),$$

a injetividade da restrição de  $\widehat{\gamma}$  a  $[0, 2\pi[$  garante que ele não pertence ao suporte de  $\widehat{\gamma}_2 = \widehat{\gamma}|_{[d-c, 2\pi]}$ . Do mesmo modo, no caso em que  $\widehat{s} < 0$ ,  $\gamma(t_0) - \widehat{s}w$  só pode pertencer ao suporte de  $\widehat{\gamma}$  se  $\widehat{s} = r$ , caso em que, por ser

$$\gamma(t_0) - \widehat{s}w = \widehat{\gamma}(\pi - c),$$

a injetividade da restrição de  $\widehat{\gamma}$  a  $[0, 2\pi[$  garante que ele não pertence ao suporte de  $\widehat{\gamma}_1 = \widehat{\gamma}|_{[0, d-c]}$ . Deduzimos daqui que o conjunto conexo ilimitado constituído pelos  $\gamma(t_0) + \widehat{s}w$  com  $\widehat{s} > 0$  não intersesta o suporte de  $\gamma_0 \oplus \widehat{\gamma}_2$  e que o conjunto conexo ilimitado constituído pelos  $\gamma(t_0) - \widehat{s}w$  com  $\widehat{s} > 0$  não

interseta o suporte de  $\hat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0$ , o que, tendo em conta o verificado em 8), implica que para  $\hat{s} > 0$  tem-se

$$\text{Ind}_{\gamma_0 \oplus \hat{\gamma}_2}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) = 0, \quad \text{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0}(\gamma(t_0) - \hat{s}w) = 0.$$

Supondo agora que  $0 < \hat{s} < r$ , o que vimos em 3.7.34 e o facto de  $\hat{\gamma}$  ser um dos caminhos considerados em 3.7.33, com  $n = 1$ , mostra que

$$\text{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \oplus \hat{\gamma}_2}(\gamma(t_0) \pm \hat{s}w) = \text{Ind}_{\hat{\gamma}}(\gamma(t_0) \pm \hat{s}w) = 1$$

e daqui deduzimos finalmente que

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) &= \text{Ind}_{(\hat{\gamma}_1 \oplus \hat{\gamma}_2) \ominus (\gamma_0 \oplus \hat{\gamma}_2)}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) = \\ &= \text{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \oplus \hat{\gamma}_2}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) - \text{Ind}_{\gamma_0 \oplus \hat{\gamma}_2}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) = 1, \\ \text{Ind}_{\gamma_0 \oplus \hat{\gamma}_2}(\gamma(t_0) - \hat{s}w) &= \text{Ind}_{(\hat{\gamma}_1 \oplus \hat{\gamma}_2) \ominus (\hat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0)}(\gamma(t_0) - \hat{s}w) = \\ &= \text{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \oplus \hat{\gamma}_2}(\gamma(t_0) - \hat{s}w) - \text{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \ominus \gamma_0}(\gamma(t_0) - \hat{s}w) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

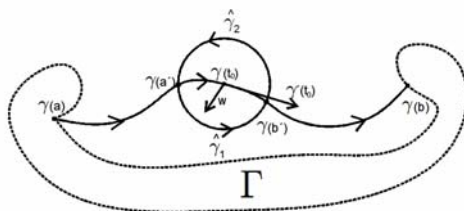
**3.7.36 (Método de determinação do índice)** Sejam  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação de classe  $C^1$ ,  $w \in \mathbb{C}$  com  $|w| = 1$  e  $t_0 \in ]a, b[$  tais que  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , que  $\Im\left(\frac{\gamma'(t_0)}{w}\right) > 0$  e que  $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$  para cada  $t \neq t_0$  ( $\gamma(t_0)$  é um ponto simples do suporte de  $\gamma$ ). Sejam  $p \in \mathbb{Z}$  e  $\Gamma$  um 1-cadeia tal  $f(t_0) \notin \Gamma^*$  e que a 1-cadeia  $\Gamma \oplus p \odot \gamma$  seja fechada. Existe então  $r > 0$  tal que para  $0 < \hat{s}, \hat{t} < r$  vem  $\gamma(t_0) + \hat{s}w \notin \Gamma^* \cup \gamma^*$ ,  $\gamma(t_0) - \hat{t}w \notin \Gamma^* \cup \gamma^*$  e

$$\text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) = \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) + p.$$

**Dem:** Comecemos por escolher  $\varepsilon > 0$  nas condições referidas na alínea 1) de 3.7.35. Uma vez que  $f(t_0)$  não pertence ao compacto

$$\Gamma^* \cup \gamma([a, t_0 - \varepsilon]) \cup \gamma([t_0 + \varepsilon, b])$$

escolhamos  $r > 0$ , verificando as condições referidas na alínea 2) de 3.7.35 e tal que a bola aberta  $B_r(\gamma(t_0))$  esteja contida no complementar daquele compacto e consideremos os correspondentes  $a', b' \in ]a, b[$  e  $c, d \in ]-\pi, \pi[$  definidos na referida alínea.



Reparemos que as propriedades de monotonia referidas na alínea 1) de 3.7.35 implicam que  $B_r(\gamma(t_0))$  também não intersecciona os conjuntos  $\gamma([t_0 - \varepsilon, a'])$  e  $\gamma([b', t_0 + \varepsilon])$  pelo que, de facto,  $B_r(\gamma(t_0))$  também está contido no complementar do compacto

$$\Gamma^* \cup \gamma([a, a']) \cup \gamma([b', b]).$$

Notemos  $\gamma_1 = \gamma|_{[a, a']}$ ,  $\gamma_2 = \gamma|_{[b', b]}$  e, tal como na alínea 4) de 3.7.35,  $\gamma_0 = \gamma|_{[a', b']}$ . Consideremos o caminho fechado  $\hat{\gamma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  definido na alínea 3) de 3.7.35 e, tal como na alínea 4) do mesmo resultado, as respetivas restrições  $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}|_{[0, d-c]}$  e  $\hat{\gamma}_2 = \hat{\gamma}|_{[d-c, 2\pi]}$ .

Uma vez que o conexo  $B_r(\gamma(t_0))$  não intersesta

$$\Gamma^* \cup \gamma([a, a']) \cup \gamma([b', b]) \cup \hat{\gamma}_1([0, d - c]),$$

que contém o suporte da 1-cadeia fechada

$$\begin{aligned} & \Gamma \oplus p \odot \gamma_1 + p \odot \hat{\gamma}_1 + p \odot \gamma_2 = \\ & = (\Gamma \oplus p \odot \gamma) \oplus (p \odot \gamma_1 + p \odot \hat{\gamma}_1 + p \odot \gamma_2 - p \odot \gamma), \end{aligned}$$

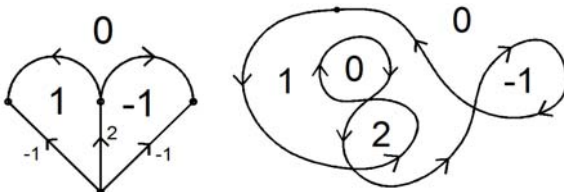
tem-se

$$\text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 + p \odot \hat{\gamma}_1 + p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) = \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 + p \odot \hat{\gamma}_1 + p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) + \hat{s}w).$$

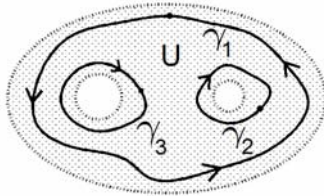
Podemos agora ter em conta as conclusões na alínea 4) de 3.7.35 e o resultado sobre a subdivisão em 3.7.34 para deduzir que

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \gamma_0 \oplus p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) = \\ &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \gamma_0 \oplus p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) + p \text{Ind}_{\hat{\gamma}_1 \oplus \gamma_0}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) = \\ &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \gamma_0 \oplus p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) + \text{Ind}_{p \odot (\hat{\gamma}_1 \oplus \gamma_0)}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) = \\ &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \hat{\gamma}_1 \oplus p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) - \hat{t}w) = \\ &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \hat{\gamma}_1 \oplus p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) = \\ &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \hat{\gamma}_1 \oplus p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) + p - \text{Ind}_{p \odot (\hat{\gamma}_1 \oplus \gamma_0)}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) = \\ &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma_1 \oplus p \odot \gamma_0 \oplus p \odot \gamma_2}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) + p = \\ &= \text{Ind}_{\Gamma \oplus p \odot \gamma}(\gamma(t_0) + \hat{s}w) + p. \quad \square \end{aligned}$$

**3.7.37 (Exemplo)** As figuras seguintes sugerem geometricamente situações em que os índices em cada componente conexa do complementar do suporte podem ser facilmente determinados com o auxílio dos resultados que estudámos. Utilizámos caracteres maiores para referir os índices nas diferentes componentes conexas e caracteres menores para identificar eventuais fatores multiplicativos



**3.7.38 (Versão geral da fórmula integral de Cauchy)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto não vazio e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Seja  $\Gamma$  uma 1-cadeia fechada com suporte  $\Gamma^* \subset U$  e tal que  $\text{Ind}_\Gamma(w) = 0$  para cada  $w \in \mathbb{C} \setminus U$  (isto é, tal que  $\text{int}(\Gamma) \subset U$ ).



Para cada  $w \in U \setminus \Gamma^*$  tem-se então

$$\text{Ind}_\Gamma(w)f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz. \quad 315$$

**Dem:** Vamos dividir a demonstração, devida a [Dixon \[7\]](#), em várias alíneas:

**a)** Consideremos uma família finita de caminhos  $\gamma_k: [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^1$  e uma família de inteiros  $p_k$  tais que  $\gamma_k^* \subset \Gamma^*$  e que  $\Gamma = \sum p_k \odot \gamma_k$ .

**b)** Tendo em conta [3.7.17](#), podemos considerar a aplicação  $g: U \times U \rightarrow F$  de classe  $C^\infty$ , no sentido complexo, definida por

$$g(w, z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \text{se } z \neq w \\ f'(w), & \text{se } z = w. \end{cases}$$

**c)** Tem lugar uma aplicação holomorfa  $h_1: U \rightarrow F$  definida por

$$h_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(w, z) dz.$$

**Subdem:** Tem-se

$$\begin{aligned} h_1(w) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k p_k \int_{\gamma_k} g(w, z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k p_k \int_{a_k}^{b_k} g(w, \gamma_k(t)) \gamma'_k(t) dt \end{aligned}$$

pelo que ficamos reduzidos a mostrar que para cada  $k$  é holomorfa a aplicação de  $U$  para  $F$  que a  $w$  associa

$$\int_{a_k}^{b_k} g(w, \gamma_k(t)) \gamma'_k(t) dt$$

<sup>315</sup>Reparar que a fórmula integral de Cauchy em [3.7.2](#) é um caso particular desta uma vez que o índice de cada  $w \notin \overline{B}_r(z_0)$  relativamente a  $\gamma_{z_0,r}$  é 0 e que para cada  $w \in \overline{B}_r(z_0)$  esse índice é 1.

e isso resulta do resultado sobre a diferenciabilidade do integral paramétrico em 3.5.18, considerando a aplicação de  $U \times [a_k, b_k]$  para  $F$  que a  $(w, t)$  associa  $g(w, \gamma_k(t)) \gamma'_k(t)$  e a isometria usual  $\mathcal{L}(\mathbb{C}; F) \rightarrow F$ .

**d)** Podemos considerar o aberto

$$\text{ext}(\Gamma) = \{w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \mid \text{Ind}_\Gamma(w) = 0\}$$

de  $\mathbb{C}$  e a aplicação holomorfa  $h_2: \text{ext}(\Gamma) \rightarrow F$  definida por

$$h_2(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

tendo-se  $\text{ext}(\Gamma) \supset \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0)$ , onde  $r > 0$  é tal que  $\Gamma^* \subset \overline{B}_r(0)$ , e  $\lim_{w \rightarrow \infty} h_2(w) = 0$ , onde o limite é relativo à topologia de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  como compactificado de Alexandroff de  $\mathbb{C}$ .

**Subdem:** O facto de  $\text{ext}(\Gamma)$  ser aberto em  $\mathbb{C}$  já foi referido em 3.7.31 e o facto de  $\text{ext}(\Gamma)$  conter o complementar de  $\overline{B}_r(0)$  resulta de 3.7.32. A verificação de que  $h_2$  é holomorfa resulta, como em c), de 3.5.18, uma vez que

$$\begin{aligned} h_2(w) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k p_k \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-w} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k p_k \int_{a_k}^{b_k} \frac{f(\gamma_k(t))}{\gamma_k(t)-w} \gamma'_k(t) dt. \end{aligned}$$

Esta mesma fórmula mostra-nos que, para verificar que  $\lim_{w \rightarrow \infty} h_2(w) = 0$  bastará verificar que, para cada  $k$  se tem

$$(1) \quad \lim_{w \rightarrow \infty} \int_{a_k}^{b_k} \frac{f(\gamma_k(t))}{\gamma_k(t)-w} \gamma'_k(t) dt = 0.$$

Ora, sempre que  $|w| > r$  vem

$$|w| \leq |w - \gamma_k(t)| + |\gamma_k(t)| \leq |w - \gamma_k(t)| + r,$$

donde

$$|w - \gamma_k(t)| \geq |w| - r,$$

e portanto

$$\left\| \int_{a_k}^{b_k} \frac{f(\gamma_k(t))}{\gamma_k(t)-w} \gamma'_k(t) dt \right\| \leq \frac{1}{|w| - r} \int_{a_k}^{b_k} \|f(\gamma_k(t)) \gamma'_k(t)\| dt$$

pelo que o facto de o segundo membro ter limite 0 quando  $w \rightarrow \infty$  implica por enquadramento o limite em (1).

**e)** Tem-se  $U \cup \text{ext}(\Gamma) = \mathbb{C}$  e pode definir-se uma aplicação holomorfa  $h: \mathbb{C} \rightarrow F$  cujas restrições a  $U$  e a  $\text{ext}(\Gamma)$  são respetivamente  $h_1$  e  $h_2$ .



**Subdem:** O facto de se ter  $U \cup \text{ext}(\Gamma) = \mathbb{C}$  é uma consequência de, por hipótese, para cada  $w \notin U$  vir  $w \notin \Gamma^*$  e  $\text{Ind}_\Gamma(w) = 0$ , portanto  $w \in \text{ext}(\Gamma)$ . Para verificar a existência de uma aplicação holomorfa  $h: \mathbb{C} \rightarrow F$  tendo  $h_1$  e  $h_2$  como restrições o que temos que verificar é que  $h_1(w) = h_2(w)$  para  $w \in U \cap \text{ext}(\Gamma)$ . Ora, por ser

$$0 = \text{Ind}_\Gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-w} dz,$$

vemos que

$$\begin{aligned} h_1(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(w, z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i} \left( \int_\Gamma \frac{1}{z-w} dz \right) f(w) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz = h_2(z). \end{aligned}$$

**f)** Uma vez que sempre que  $|w| > r$  tem-se  $h(w) = h_2(w)$ , o que vimos em d) mostra que  $h(w) \rightarrow 0$  quando  $w \rightarrow \infty$  o que, pelo teorema de Liouville em 3.7.11, implica que se tem  $h(w) = 0$  para todo o  $w \in \mathbb{C}$ . Podemos agora concluir que para cada  $w \in U \setminus \Gamma^*$  tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - h_1(w) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_\Gamma \frac{1}{z-w} dz \right) f(w) = \\ &= \text{Ind}_\Gamma(w) f(w). \quad \square \end{aligned}$$

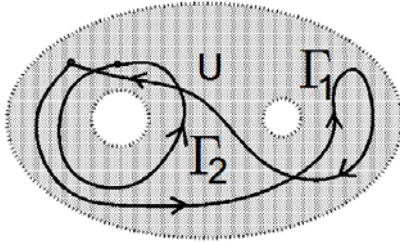
**3.7.39 (Corolário)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto não vazio e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Seja  $\Gamma$  uma 1-cadeia fechada com suporte  $\Gamma^* \subset U$  e tal que  $\text{Ind}_\Gamma(w) = 0$  para cada  $w \in \mathbb{C} \setminus U$  (isto é, tal que  $\text{int}(\Gamma) \subset U$ ). Tem-se então

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0.$$

**Dem:** Seja  $w \in U \setminus \Gamma^*$  um elemento fixado e consideremos uma nova aplicação holomorfa  $\hat{f}: U \rightarrow F$  definida por  $\hat{f}(z) = f(z)(z-w)$ . Aplicando 3.7.38, obtemos

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_\Gamma \frac{\hat{f}(z)}{z-w} dz = 2\pi i \text{Ind}_\Gamma(w) \hat{f}(w) = 0. \quad \square$$

**3.7.40 (Corolário)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto não vazio e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa. Sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2$  duas 1-cadeias fechadas com suporte contido em  $U$  e tais que para cada  $w \in \mathbb{C} \setminus U$  se tenha  $\text{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \text{Ind}_{\Gamma_2}(w)$ .



Tem-se então

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

**Dem:** Basta aplicar o corolário 3.7.39, considerando a 1-cadeia fechada  $\Gamma_1 - \Gamma_2$ , para a qual se tem  $\text{Ind}_{\Gamma_1 - \Gamma_2}(w) = 0$  para cada  $w \in \mathbb{C} \setminus U$ , e portanto

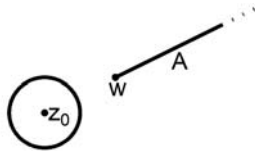
$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz - \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z) dz = 0. \quad \square$$

## Exercícios

**Ex. 3.7.1 a)** Verificar que o valor do integral calculado em 3.7.1 implica que, dado  $w \in \mathbb{C}$ , a função de  $\mathbb{C} \setminus \{w\}$  para  $\mathbb{C}$  que a  $z$  associa  $\frac{1}{z-w}$  não admite nenhuma primitiva.

**b)** Sejam  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  e  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z_0 - w\| > r$ . Verificar que o conjunto

$$A = \{w + t(z_0 - w)\}_{t \leq 0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{z - w}{z_0 - w} \in ]-\infty, 0] \right\}$$



é fechado em  $\mathbb{C}$  e que o aberto  $\mathbb{C} \setminus A$  de  $\mathbb{C}$  contém a imagem do caminho fechado  $\gamma_{z_0, r}$  definido em 3.7.1. Verificar que, sendo

$$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$$

a função logaritmo definida em 3.6.22 pode definir-se uma aplicação holomorfa  $g: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(z) = \text{Log}\left(\frac{z-w}{z_0-w}\right)$$

para a qual se tem  $g'(z) = \frac{1}{z-w}$  e concluir que

$$\int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{1}{z-w} dz = 0.$$

Comparar este valor com o obtido em 3.7.1 no caso em que  $\|w - z_0\| < r$ .

**Ex. 3.7.2 (A falsa exceção)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $z_0 \in U$  e  $f: U \rightarrow F$  uma aplicação contínua cuja restrição a  $U \setminus \{z_0\}$  seja holomorfa. Deduzir que  $f$  é uma aplicação holomorfa. **Sugestão:** Utilizar o resultado 3.7.10 sobre singularidades removíveis, lembrando que uma aplicação contínua é localmente limitada.

**Ex. 3.7.3** Seja  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa não constante. Mostrar que a imagem  $f(\mathbb{C})$  é densa em  $\mathbb{C}$ . Supondo que  $z_0 \in \mathbb{C}$  era exterior a  $f(\mathbb{C})$ , verificar que se podia definir uma função holomorfa limitada não constante  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - z_0},$$

contrariando o teorema de Liouville em 3.7.11.

**Ex. 3.7.4 (As equações de Cauchy-Riemann)** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Seja  $U'$  o aberto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $U' = \{(x, y) \mid x + yi \in U\}$  (de facto, quando se considera a identificação usual de  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$ , podemos escrever  $U' = U$ , mas a distinção pode ser cómoda). Sejam  $g, h: U' \rightarrow \mathbb{R}$  as funções definidas por

$$f(x + yi) = g(x, y) + h(x, y)i.$$

**a)** Verificar que a função  $f$  é holomorfa se, e só se, as funções  $g$  e  $h$  forem diferenciáveis e verificarem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial h}{\partial x}(x, y).$$

**Sugestão:** Lembrar que  $f$  é diferenciável no sentido complexo se, e só se, for diferenciável no sentido real e com cada diferencial  $Df_z$  aplicação linear complexa e reparar que esta última condição é equivalente à conjunção das condições

$$Df_z(i) = iDf_z(1), \quad Df_z(-1) = iDf_z(i),$$

mostrando em seguida que qualquer destas duas últimas condições é equivalente à conjunção das duas equações de Cauchy-Riemann.

**b)** Deduzir de a) que se a função  $f$  é holomorfa então cada uma das funções  $g, h: U' \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^\infty$  e é harmónica no sentido que verifica a equação

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

c) Suponhamos agora que  $U$  é estrelado relativamente a um certo  $z_0 \in U$  e que  $g: U' \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$  que seja *harmónica*, isto é que verifique

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

para cada  $(x, y) \in U'$ . Verificar que existe uma função diferenciável  $h: U' \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique as condições

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y),$$

que então vem holomorfa a função  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(x + yi) = g(x, y) + h(x, y)i$$

e que as funções  $g$  e  $h$  são necessariamente de classe  $C^\infty$ .<sup>316</sup> **Sugestão:** Aplicar o resultado de primitivação em 3.5.21, considerando a aplicação  $\omega: U' \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  definida por

$$\omega_{(x,y)}(1, 0) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), \quad \omega_{(x,y)}(0, 1) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y),$$

e reparando que, para verificar a identidade (1) na alínea b) do resultado referido para  $u$  e  $v$  arbitrários, basta verificá-la no caso particular em que  $u = (1, 0)$  e  $v = (0, 1)$ .

**Nota:** Se aplicar 3.5.35 ou, melhor ainda, 3.5.36 em vez de 3.5.21, poderá obter a mesma conclusão fazendo menos exigências de regularidade sobre a função  $g$ .

**Ex. 3.7.5 (Teorema de Gelfand-Mazur)** Seja  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa com elemento um, que notamos  $1$ , e que tenha a propriedade de cada  $x \neq 0$  em  $\mathcal{E}$  ser invertível. Verificar que existe então um isomorfismo de álgebras  $\lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{E}$  que é isométrico e aplica  $1 \in \mathbb{C}$  em  $1 \in \mathcal{E}$ , nomeadamente o definido por  $\lambda(t) = t \cdot 1$ .

**Sugestão:** A injetividade de  $\lambda$  resulta de se ter  $1 \neq 0$ . Para a sobrejetividade ter em conta o resultado 3.7.12.

**Ex. 3.7.6 (Generalização das fórmulas integrais de Cauchy)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  e  $f: \overline{B}_R(z_0) \rightarrow F$  uma aplicação contínua com restrição holomorfa à bola aberta  $B_R(z_0)$ . Verificar que, analogamente ao estabelecido em 3.7.2, tem-se, para cada  $w \in B_R(z_0)$ ,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, R}} \frac{f(z)}{z - w} dz$$

e, mais geralmente, como em 3.7.3, para cada  $k \geq 0$ ,

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, R}} \frac{f(z)}{(z - w)^{k+1}} dz$$

**Sugestão:** Para a primeira fórmula, considerando  $w$  fixado, ter em conta 3.7.2 para

<sup>316</sup>Costuma-se dizer que  $h$  é uma função *harmónica conjugada* da função harmónica  $g$ .

cada  $r > 0$  estritamente entre  $\|w\|$  e  $R$  e utilizar o teorema de continuidade do integral paramétrico para mostrar a continuidade da aplicação de  $\|w\|, R$  que a  $r$  associa  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(z)}{z-w} dz$ . As restantes fórmulas têm justificação análoga, a partir de 3.7.3.

**Ex. 3.7.7** Seja  $F$  o espaço de Banach  $\mathbb{C}^2$ , com a norma do máximo  $\|\cdot\|_\infty$  e seja  $B_1(0) \subset \mathbb{C}$  o conjunto dos complexos de módulo menor que 1. Verificar que, para a aplicação holomorfa não constante  $f: B_1(0) \rightarrow F$  definida por  $f(z) = (z, 1)$ , tem-se  $\|f(z)\| = \|f(0)\|$  para cada  $z$ .

**Ex. 3.7.8 (O teorema do mínimo — comparar com 3.7.14)** a) Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto conexo e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa tal que exista  $z_0 \in U$  com  $f(z_0) \neq 0$  e  $R > 0$  com  $B_R(z_0) \subset U$  e  $|f(z_0)| \leq |f(z)|$  para cada  $z \in B_R(z_0)$ . Mostrar que  $f$  é uma aplicação constante. **Sugestão:** Aplicar o teorema do máximo em 3.7.14 à aplicação de domínio  $B_R(z_0)$  que a  $z$  associa  $\frac{1}{f(z)}$  e lembrar 3.7.9.

b) Considerar o espaço de Hilbert  $F = \mathbb{C}^2$ , com o produto interno habitual e a aplicação holomorfa  $g: \mathbb{C} \rightarrow F$  definida por  $f(z) = (z, 1)$ . Verificar que, apesar de  $f$  não ser constante, a função que a  $z$  associa  $\|f(z)\|$  atinge um mínimo estritamente positivo para  $z = 0$ , concluindo que para a validade da conclusão de a) não podemos substituir o espaço de chegada  $\mathbb{C}$  por um espaço de Hilbert geral.

**Ex. 3.7.9 (O lema de Schwarz)** Seja  $F$  um espaço de Hilbert complexo e consideremos a bola aberta  $B_1(0)$  de  $\mathbb{C}$ . Seja  $f: B_1(0) \rightarrow F$  uma aplicação holomorfa tal que  $f(0) = 0$  e que  $\|f(z)\| \leq 1$  para cada  $z$ . Mostrar que:

a)  $\|f'(0)\| \leq 1$  e para cada  $z \in B_1(0)$  tem-se  $\|f(z)\| \leq \|z\|$ ;

b) Se  $\|f'(0)\| = 1$  ou existir  $z_1 \in B_1(0)$  com  $\|f(z_1)\| = \|z_1\|$  então existe  $w \in F$  com  $\|w\| = 1$  tal que  $f(z) = zw$  para cada  $z \in B_1(0)$ .

**Sugestão: 1)** Utilizar 3.7.8 para garantir a existência de uma aplicação holomorfa  $g: B_1(0) \rightarrow F$  tal que  $g(0) = f'(0)$  e  $f(z) = zg(z)$  para cada  $z$ . **2)** Utilizar o teorema do máximo em 3.7.14 para concluir que para cada  $0 < r < 1$  o máximo de  $\|g(z)\|$  para  $z$  no compacto  $\bar{B}_r(0)$  é atingido nalgum  $z_r$  com  $\|z_r\| = r$  e, reparando que para  $z \neq 0$  tem-se  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ , deduzir que para cada  $z \in B_r(0)$  tem-se  $\|g(z)\| \leq \frac{1}{r}$ .

**3)** Deduzir de 2) que se tem  $\|g(z)\| \leq 1$  para cada  $z \in B_1(0)$ , o que implica a). No caso em que  $\|f'(0)\| = 1$  ou exista  $z_1 \in B_1(0)$  com  $\|f(z_1)\| = \|z_1\|$  utilizar o teorema do máximo para garantir que  $g$  toma um valor constante  $w \in F$ .

**Ex. 3.7.10 (Teorema da aplicação aberta)** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto conexo e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa não constante.

a) Seja  $z_0 \in U$  tal que  $f'(z_0) \neq 0$ . Utilizar o teorema da aplicação inversa em 3.4.7 para deduzir a existência de um aberto  $U'$  de  $\mathbb{C}$  com  $z_0 \in U' \subset U$  tal que  $V' = f(U')$  seja aberto em  $\mathbb{C}$  e que  $f$  seja um difeomorfismo de  $U'$  sobre  $V'$  e deduzir, em particular, que a aplicação  $f$  é aberta em  $z_0$  (cf. 1.11.9).

b) Verificar que para cada inteiro  $n \geq 1$  é aberta a aplicação holomorfa  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $w \mapsto w^n$ . **Sugestão:** Lembrar 1.11.10, reparando que o facto de esta aplicação ser aberta em cada  $w \neq 0$  resulta da conclusão de a) e que o facto de ela ser aberta em 0 é uma consequência simples de se ter  $(\sqrt[n]{r} \exp(\frac{t}{n}i))^n = r \exp(it)$ .

c) Seja  $z_0 \in U$  tal que  $f'(z_0) = 0$ . Tendo em conta 3.7.8, para a aplicação que a  $z$  associa  $f(z) - f(z_0)$ , pode-se considerar  $n \geq 2$  tal que  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$  e  $f^{(p)}(z_0) = 0$  para cada  $1 \leq p < n$ . Deduzir da alínea b) do resultado referido que existe uma aplicação holomorfa  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  com  $g(z_0) \neq 0$  e

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n g(z)$$

para cada  $z \in U$ .

**d)** Seja  $z_0 \in U$  tal que  $f'(z_0) = 0$  e seja  $n \geq 2$  nas condições referidas em c). Mostrar que existe um aberto  $U'$  de  $\mathbb{C}$  com  $z_0 \in U' \subset U$  e uma aplicação holomorfa  $h: U' \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $h(z_0) = 0$ ,  $h'(z_0) \neq 0$  e

$$f(z) = f(z_0) + h(z)^n$$

para cada  $z \in U'$ . Deduzir, em particular, tendo em conta o concluído em a) e b), que a aplicação  $f$  é aberta em  $z_0$ . **Sugestão:** Considerando a aplicação  $g$  obtida em c), utilizar o teorema da função inversa com a aplicação  $w \mapsto w^n$ , depois de escolher um complexo cuja potência  $n$  seja  $g(z_0)$ , para garantir a existência de  $U'$  nas condições pedidas e de uma aplicação holomorfa  $\hat{g}: U' \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\hat{g}(z)^n = g(z)$  para cada  $z \in U'$  e tomar então  $h(z) = (z - z_0)\hat{g}(z)$ .

**e)** Deduzir de a) e d) que a aplicação  $f$ , sendo aberta em cada ponto do domínio, é aberta.

**f)** Seja  $z_0 \in U$  tal que  $f'(z_0) = 0$ , seja  $n \geq 2$  nas condições referidas em c) e seja  $h: U' \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa nas condições referidas em d). Aplicando de novo o teorema da função inversa deduzir a existência de um aberto  $U''$  de  $\mathbb{C}$ , com  $z_0 \in U'' \subset U'$  tal que a restrição de  $h$  a  $U''$  seja um difeomorfismo de  $U''$  sobre uma bola aberta  $B_\varepsilon(0)$  e deduzir daqui que a aplicação  $f$  não é injetiva. **Sugestão:** Lembrar que qualquer complexo não nulo tem  $n$  raízes de índice  $n$ .

**g)** “Debicando” nas conclusões das alíneas precedentes concluir que se  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma aplicação holomorfa injetiva então  $f'(z) \neq 0$  para todo o  $z \in U$ ,  $f(U)$  é aberto em  $\mathbb{C}$  e  $f$  é um difeomorfismo de  $U$  sobre  $f(U)$ .

**Sugestão:** Considerar a restrição de  $f$  a cada uma das componentes conexas de  $U$ .

**Ex. 3.7.11 (Duas generalizações de 3.7.16)** **a)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $E_1$  e  $E_2$  dois espaços vetoriais normados complexos,  $\Omega_1 \subset E_1$  e  $\Omega_2 \subset E_2$  dois abertos e  $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow F$  uma aplicação localmente limitada e separadamente holomorfa. Mostrar que a aplicação  $f$  é de classe  $C^\infty$ . **Sugestão:** Aplicando 3.7.22, temos apenas que mostrar a existência de derivada dirigida para  $f$  num ponto  $(w_0, z_0)$  arbitrário no domínio segundo qualquer vetor  $(u, v) \in E_1 \times E_2$ . Para isso, ter em conta 3.7.16 com a aplicação  $\varphi$  definida num produto cartesiano de abertos de  $\mathbb{C}$  por

$$\varphi(s, t) = f(w_0 + su, z_0 + tv),$$

considerando então o diferencial de  $\varphi$  em  $(0, 0)$  aplicado ao vetor  $(1, 1)$ .

**b)** Sejam  $F$  um espaço de Banach complexo,  $n \geq 2$  e, para cada  $1 \leq j \leq n$ ,  $U_j \subset \mathbb{C}$  um aberto. Sendo  $f: U_1 \times \cdots \times U_n \rightarrow F$  uma aplicação localmente limitada e separadamente holomorfa (isto é, holomorfa em cada variável quando se fixam as restantes  $n - 1$ ), mostrar que  $f$  é mesmo de classe  $C^\infty$ , no sentido complexo.

**Sugestão:** Fazer uma demonstração por indução, utilizando 3.7.16 e a conclusão da alínea a).

**Ex. 3.7.12 (Exemplo de aplicação holomorfa de domínio  $\ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N})$ , cf. [12])** Consideremos o espaço de Banach complexo  $\ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N})$  das  $\mathbb{N}$ -sucessões  $x = (x_p)_{p \geq 1}$  de números complexos com  $\sum_{p \geq 1} |x_p| < +\infty$ , com a norma  $\|x\|_1 = \sum_{p \geq 1} |x_p|$  (cf. 2.3.48).

**a)** Considerando para cada  $p \geq 1$  a aplicação holomorfa  $f_p: \ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f_p(x) = x_p^p$ , composta de uma aplicação linear contínua  $\ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$  com uma apli-

cação holomorfa  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , verificar que se pode definir uma aplicação contínua  $f: \ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$f(x) = \sum_{p \geq 1} f_p(x) = \sum_{p \geq 1} x_p^p,$$

onde a soma no segundo membro é a de uma família absolutamente somável.

**Sugestão:** Dado  $x_0 = (x_{0p})_{p \geq 1}$  em  $\ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N})$ , verificar que a família das restrições dos  $f_p$  à bola aberta  $B_{\frac{1}{2}}(x_0)$  de  $\ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N})$  é normalmente somável, aplicando então 2.3.26. Para isso ter em conta o facto de existir  $n_0$  tal que para cada  $p > n_0$  se tenha  $|x_{0p}| \leq \frac{1}{4}$ , considerando  $a_p = (\frac{3}{4})^p$  para  $p > n_0$ .

**b)** Verificar que  $f$  é holomorfa e que, dados  $x_0 = (x_{0p})_{p \geq 1}$  e  $u = (u_p)_{p \geq 1}$  em  $\ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N})$ ,

$$Df_{x_0}(u) = \sum_{p \geq 1} Df_{p, x_0}(u) = \sum_{p \geq 1} p x_p^{p-1} u_p.$$

**Sugestão:** Aplicar agora 3.3.34, onde, para verificar que a família das restrições  $Df_p: B_{\frac{1}{2}}(x_0) \rightarrow \mathcal{L}(\ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N}); \mathbb{C})$  é normalmente somável, escolhamos  $n_0$  como anteriormente, consideramos  $a_p = p(\frac{3}{4})^{p-1}$  para  $p > n_0$  e lembramos a desigualdade (2) em 3.3.35, com  $R = 1$  e  $w_k = 1 \in \mathbb{R}$ .

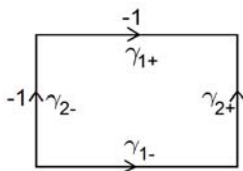
**c)** Verificar que se tem  $\|f(x)\| \leq 1$  para cada  $x \in \overline{B}_1(0)$  mas que, se  $r > 1$  a restrição de  $f$  a  $B_r(0)$  não é limitada, em particular a família das restrições das aplicações  $f_p$  a  $B_r(0)$  não é normalmente somável.

**Ex. 3.7.13 (O bordo dum retângulo)** Sejam  $a < b$  e  $c < d$  em  $\mathbb{R}$ . Vamos notar  $\partial([a, b] \times [c, d])$  a 1-cadeia

$$\partial([a, b] \times [c, d]) = \gamma_{1-} \oplus \gamma_{2+} \ominus \gamma_{1+} \ominus \gamma_{2-},$$

onde  $\gamma_{1-}, \gamma_{1+}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_{2-}, \gamma_{2+}: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  são os caminhos de classe  $C^\infty$  definidos por

$$\begin{aligned} \gamma_{1-}(s) &= s + ci, & \gamma_{1+}(s) &= s + di, \\ \gamma_{2-}(t) &= a + ti, & \gamma_{2+}(t) &= b + ti. \end{aligned}$$



Verificar que a 1-cadeia  $\Gamma = \partial([a, b] \times [c, d])$  é fechada, que o complementar do seu suporte tem duas componentes conexas,  $]a, b[ \times ]c, d[$  e  $\mathbb{C} \setminus ([a, b] \times [c, d])$  e que os índices nessas componentes conexas são  $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$  se  $z \in \mathbb{C} \setminus ([a, b] \times [c, d])$  e  $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 1$  se  $z \in ]a, b[ \times ]c, d[$ . Em particular, tem-se

$$\text{int}(\partial([a, b] \times [c, d])) = ]a, b[ \times ]c, d[.$$

**Sugestão:** Para verificar que  $\mathbb{C} \setminus ([a, b] \times [c, d])$  é conexo aplicar várias vezes 1.8.13, reparando que aquele aberto é a união da sequência de conexos

$$\mathbb{R} \times ]-\infty, c[ \quad ]b, +\infty[ \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times ]b, +\infty[ \quad ]-\infty, a[ \times \mathbb{R},$$

onde cada um intersesta o seguinte. Para o cálculo do índice utilizar 3.7.36, por exemplo com o caminho  $\gamma_{2+}$ , o ponto  $t_0 = \frac{c+d}{2}$  e  $w = 1 \in \mathbb{C}$ .

**Ex. 3.7.14 (Teorema de Fubini e integração em 1-cadeias)** Sejam  $A \subset \mathbb{C}$  e  $B \subset \mathbb{C}$  dois conjuntos,  $F$  um espaço de Banach complexo e  $f: A \times B \rightarrow F$  uma aplicação contínua. Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas 1-cadeias com suportes contidos em  $A$  e  $B$  respetivamente. Mostrar que se podem considerar aplicações contínuas

$$\begin{aligned} A &\rightarrow F, & z &\mapsto \int_{\Gamma_2} f(z, w) dw, \\ B &\rightarrow F, & w &\mapsto \int_{\Gamma_1} f(z, w) dz \end{aligned}$$

e que se tem

$$\int_{\Gamma_1} \left( \int_{\Gamma_2} f(z, w) dw \right) dz = \int_{\Gamma_2} \left( \int_{\Gamma_1} f(z, w) dz \right) dw.$$

**Sugestão:** Podemos reduzir-nos facilmente ao caso particular em que as 1-cadeias são caminhos  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow A$  e  $\gamma_2: [c, d] \rightarrow B$  de classe  $C^1$  e nesse caso temos uma consequência da versão do teorema de Fubini em 3.5.20.

**Ex. 3.7.15 (Contagem dos zeros—teorema de Rouché)** Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa que não seja constante em nenhuma das componentes conexas de  $U$ .

**a)** Sejam  $z_0 \in U$  e  $k_0 \geq 1$  tais que  $f(z_0) = 0$  ( $z_0$  é um zero de  $f$ ), que a derivada  $f^{(k_0)}(z_0)$  seja diferente de 0 e que se tenha  $f^{(k)}(z_0) = 0$  para cada  $1 \leq k < k_0$  (diz-se então que  $z_0$  é um zero de multiplicidade  $k_0$  de  $f$ ; a um zero de multiplicidade 1 dá-se o nome de zero simples). Seja  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$  e que  $f(z) \neq 0$  para cada  $z \in \overline{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  (a existência de um tal  $r$  decorre da alínea c) de 3.7.8) e consideremos o correspondente caminho fechado  $\gamma_{z_0, r}$  definido em 3.7.1. Mostrar que se tem

$$\int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi k_0 i.$$

**Sugestão:** Pela alínea b) de 3.7.8 pode-se considerar uma aplicação holomorfa  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  com  $g(z_0) \neq 0$  tal que  $f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z)$  para cada  $z \in U$ . Reparar então que, para cada  $z \in U$  com  $f(z) \neq 0$  tem-se

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

e aplicar 3.7.2 e, por exemplo, 3.7.39.

**b)** Seja  $\Gamma$  uma 1-cadeia fechada com  $\Gamma^* \subset U$  e  $\text{int}(\Gamma) \subset U$  e tal que  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 1$  para cada  $z \in \text{int}(\Gamma)$  (por outras palavras 0 e 1 são os únicos valores de  $\text{Ind}_\Gamma(z)$ ) e suponhamos que  $f(z) \neq 0$  para cada  $z \in \Gamma^*$ . Verificar que o conjunto dos zeros de  $f$  pertencentes a  $\text{int}(\Gamma)$  é finito (eventualmente vazio) e que, sendo  $z_1, \dots, z_n$  esses zeros e  $k_1, \dots, k_n$  as respetivas multiplicidades tem-se



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k_1 + \cdots + k_n$$

(o segundo membro da igualdade costuma ser nomeado como sendo o “número de zeros contados de acordo com as suas multiplicidades”).

**Sugestão:** Para verificar que o conjunto é finito atender a que ele é compacto (fechado no compacto  $\text{int}(\Gamma) \cup \Gamma^*$ ) e discreto (cf. 3.7.8). Considerar então  $r > 0$  menor que a distância de cada  $z_j$  a  $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\Gamma)$  e que cada um dos  $\frac{1}{2} |z_{k_j} - z_{k_\ell}|$  com  $k \neq \ell$  e aplicar 3.7.39 à 1-cadeia fechada

$$\Gamma \ominus \gamma_{z_1, r} \ominus \cdots \ominus \gamma_{z_n, r}$$

tendo em conta a conclusão de a).

**c) (Teorema de Rouché)** Seja  $h: U \rightarrow \mathbb{C}$  outra função holomorfa tal que para cada  $z \in \Gamma^*$  se tenha

$$|h(z) - f(z)| < |f(z)|,$$

em particular  $h(z) \neq 0$ . Mostrar que  $f$  e  $h$  têm o mesmo número de zeros em  $\text{int}(\Gamma)$  contados de acordo com as suas multiplicidades.

**Sugestão:** Ter em conta a conclusão de b) e mostrar que é contínua e toma valores inteiros a função de  $[0, 1]$  para  $\mathbb{C}$  que a  $t$  associa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) + t(h'(z) - f'(z))}{f(z) + t(h(z) - f(z))} dz.$$

**d)** Verificar que o teorema de Rouché permite obter algumas das conclusões já examinadas no exercício 3.7.10, nomeadamente: Seja  $z_0 \in U$  um zero de multiplicidade  $k_0 \geq 1$  de  $f$ ; mostrar que se pode considerar  $r > 0$  tal que  $\overline{B}_r(z_0) \subset U$  e que  $f(z) \neq 0$  e  $f'(z) \neq 0$  para cada  $z \in \overline{B}_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  e que então, sendo  $r' > 0$  o mínimo de  $|f(z)|$  para  $|z - z_0| = r$ , para cada  $w \in \mathbb{C}$  com  $0 < |w| < r'$  existem exatamente  $k_0$  valores distintos de  $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  tais que  $f(z) = w$  (os zeros de  $z \mapsto f(z) - w$  que são necessariamente simples).

**Ex. 3.7.16 (O espectro de um elemento de uma álgebra de Banach)** Seja  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach sobre  $\mathbb{K}$ , igual a  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , com elemento um que notamos  $\varepsilon$ . Para cada  $\alpha \in \mathcal{E}$ , chama-se *espectro* de  $\alpha$  ao conjunto  $\sigma(\alpha) \subset \mathbb{K}$  dos *valores espectrais* de  $\alpha$ , isto é, dos complexos  $z$  tais que  $\alpha - z\varepsilon$  não seja invertível. Repare-se que se verificou em 3.7.12 que se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  então  $\sigma(\alpha) \neq \emptyset$  mas que para as conclusões propostas neste exercício qualquer dos corpos dos escalares pode ser considerado.

**a)** Verificar que  $\sigma(z_0\varepsilon) = \{z_0\}$  para cada  $z_0 \in \mathbb{C}$  e que, em geral, o espectro  $\sigma(\alpha)$  é um conjunto compacto contido na bola fechada  $\overline{B}_{\|\alpha\|}(0) \subset \mathbb{C}$ . **Sugestão:** Lembrar que, como se verificou em 2.3.34, o conjunto  $\mathcal{E}_{inv}$  dos elementos invertíveis de  $\mathcal{E}$  é aberto e, para a inclusão, reparar que para  $z \neq 0$

$$\alpha - z\varepsilon = -z\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{z}\right)$$

e ter em conta 2.3.33.

**b)** Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto. Mostrar que é aberto em  $\mathcal{E}$  o conjunto

$$\Omega = \{\alpha \in \mathcal{E} \mid \sigma(\alpha) \subset U\}.$$

**Sugestão:** Seja  $\alpha_0 \in \Omega$  arbitrário, portanto com  $\sigma(\alpha_0) \subset U$ . Considerar o compacto

$$K = \overline{B}_{\|\alpha_0\|+1}(0) \setminus U$$

de  $\mathbb{C}$ , que não intersecta  $\sigma(\alpha_0)$ , e escolher  $\delta > 0$  tal que

$$d(\alpha_0 - z\varepsilon, \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{inv}) \geq \delta$$

para cada  $z \in \mathbb{K}$  (se  $K \neq \emptyset$  tomar para  $\delta$  o mínimo para  $z \in K$  da função contínua definida pelo primeiro membro da desigualdade precedente). Verificar que se  $\alpha \in \mathcal{E}$  verifica  $\|\alpha - \alpha_0\| < \min\{\delta, 1\}$  então tem-se  $\alpha \in \Omega$ ; para isso, reparar que para cada  $z \in \sigma(\alpha)$  tem-se, por um lado,

$$z \in \overline{B}_{\|\alpha\|}(0) \subset \overline{B}_{\|\alpha_0\|+1}(0)$$

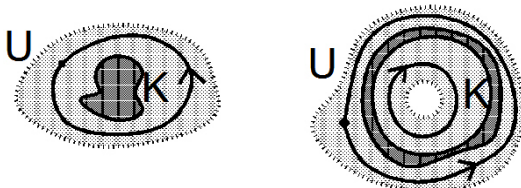
e, por outro lado,  $z \notin K$ , por ser

$$\|(\alpha - z\varepsilon) - (\alpha_0 - z\varepsilon)\| < \delta$$

com  $\alpha - z\varepsilon \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{inv}$ , resultando daqui que  $z \in U$ .

Nos exercícios a seguir propomos um conjunto de resultados que conduzem ao “Cálculo Simbólico holomorfo”, isto é, à possibilidade de aplicar funções holomorfas definidas em abertos de  $\mathbb{C}$  e com valores em  $\mathbb{C}$  a elementos de uma álgebra de Banach complexa com o espetro contido no domínio, de modo a que se verifiquem propriedades naturais.

**Ex. 3.7.17 (Cadeia fechada a rodear um compacto)** Sejam  $K \subset \mathbb{C}$  um compacto não vazio e  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto tais que  $K \subset U$ . Vamos dizer que uma 1-cadeia fechada  $\Gamma$  rodeia o compacto  $K$  no aberto  $U$  se se tem  $\Gamma^* \subset U \setminus K$ ,  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0$  para cada  $z \notin U$  (isto é,  $\text{int}(\Gamma) \subset U$ ) e  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 1$  para cada  $z \in K$ . As duas figuras a seguir ilustram este conceito, apesar de não darem nenhuma indicação sobre a prova do resultado de existência que proporemos a seguir.



Mostrar que quaisquer que sejam o compacto não vazio  $K$  e o aberto  $U$ , com  $K \subset U$  existe uma 1-cadeia fechada  $\Gamma$  que rodeia  $K$  em  $U$ .

**Sugestão:** Podemos já supor que o aberto  $U$  é limitado, uma vez que, no caso geral, pode-se considerar um aberto limitado  $U'$  com  $K \subset U' \subset U$  e então uma 1-cadeia fechada que rodeie  $K$  em  $U'$  também rodeia trivialmente  $K$  em  $U$ . Será cómodo utilizar em  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  a métrica do máximo  $d_\infty$ . Fixar  $N \in \mathbb{N}$  com

$$(1) \quad \frac{2}{N} < d_\infty(K, \mathbb{C} \setminus U).$$

Considerar a classe finita de todos os retângulos (quadrados) do tipo

$$\left[ \frac{p_\alpha}{N}, \frac{p_{\alpha+1}}{N} \right] \times \left[ \frac{q_\alpha}{N}, \frac{q_\alpha + 1}{N} \right],$$

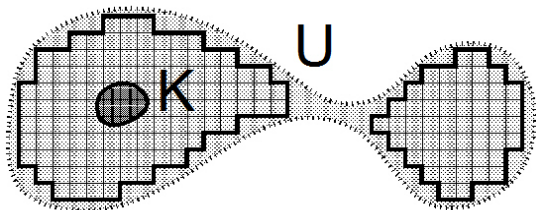
com  $p_\alpha, q_\alpha \in \mathbb{Z}$ , que estão contidos em  $U$ , com os correspondentes bordos

$$\partial \left( \left[ \frac{p_\alpha}{N}, \frac{p_{\alpha+1}}{N} \right] \times \left[ \frac{q_\alpha}{N}, \frac{q_\alpha + 1}{N} \right] \right)$$

(cf. o exercício 3.7.13), e tomar para  $\Gamma$  a 1-cadeia fechada

$$\Gamma = \sum_{\alpha} \partial \left( \left[ \frac{p_\alpha}{N}, \frac{p_{\alpha+1}}{N} \right] \times \left[ \frac{q_\alpha}{N}, \frac{q_\alpha + 1}{N} \right] \right),$$

reparando que a condição (1) implica que se  $\left[ \frac{p_\alpha}{N}, \frac{p_{\alpha+1}}{N} \right] \times \left[ \frac{q_\alpha}{N}, \frac{q_\alpha + 1}{N} \right]$  intersesta  $K$  então os elementos do suporte de  $\partial \left( \left[ \frac{p_\alpha}{N}, \frac{p_{\alpha+1}}{N} \right] \times \left[ \frac{q_\alpha}{N}, \frac{q_\alpha + 1}{N} \right] \right)$  não pertencem ao suporte de  $\Gamma$  e são aderentes a  $\left[ \frac{p_\alpha}{N}, \frac{p_{\alpha+1}}{N} \right] \times \left[ \frac{q_\alpha}{N}, \frac{q_\alpha + 1}{N} \right]$ .<sup>317</sup>



**Ex. 3.7.18 (Definição de  $\tilde{f}(\alpha)$  e propriedades elementares)** Sejam  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa, com elemento um  $\varepsilon$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa e  $\alpha \in \mathcal{E}$  com  $\sigma(\alpha) \subset U$  (cf. o exercício 3.7.16).

a) Verificar que se pode definir um elemento  $\tilde{f}(\alpha) \in \mathcal{E}$  pela condição de se ter

$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1} dz,$$

qualquer que seja a 1-cadeia fechada  $\Gamma$  com  $\Gamma^* \subset U \setminus \sigma(\alpha)$ ,  $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 1$  para cada  $z \in \sigma(\alpha)$  e  $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$  para cada  $z \notin U$  (isto é,  $\text{int}(\Gamma) \subset U$ ). **Sugestão:** Reparar que a integranda no segundo membro é uma aplicação holomorfa de domínio  $U \setminus \sigma(\alpha)$ . A existência de  $\Gamma$  nas condições indicadas resulta do exercício 3.7.17; para mostrar que o segundo membro não depende da escolha de  $\Gamma$  nessas condições, ter em conta 3.7.40.

b) Fixados  $\alpha \in \mathcal{E}$  e um aberto  $U \subset \mathbb{C}$  com  $\sigma(\alpha) \subset U$ , verificar que é linear a aplicação de  $\mathcal{H}(U, \mathbb{C})$  para  $\mathcal{E}$  que a  $f$  associa  $\tilde{f}(\alpha)$ . Verificar ainda que esta aplicação linear é contínua, quando se considera em  $\mathcal{H}(U, \mathbb{C})$  a topologia da convergência uniforme nos compactos (cf. 3.7.15).

c) Verificar que se  $\beta \in \mathcal{E}$  verifica  $\beta\alpha = \alpha\beta$  então tem-se também  $\beta\tilde{f}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha)\beta$ . **Sugestão:** Reparar que o conjunto dos  $\alpha' \in \mathcal{E}$  tais que  $\beta\alpha' = \alpha'\beta$  é um subespaço vetorial fechado de  $\mathcal{E}$  (de facto uma subálgebra unitária) que contém  $\alpha$  e portanto

<sup>317</sup>A demonstração aqui sugerida baseia-se na que aparece no livro de Rudin [15] mas goza de simplificações importantes pelo facto de estarmos a considerar 1-cadeias fechadas de tipo mais geral que as utilizadas nesse livro.

também cada  $f(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1}$  com  $z \in \Gamma^*$ .

**d)** Sendo  $V \subset \mathbb{C}$  um aberto com  $\sigma(\alpha) \subset V \subset U$ , verificar que se tem  $\tilde{f}(\alpha) = (f|_V)^{\sim}(\alpha)$ . **Sugestão:** Basta reparar que qualquer 1-cadeia fechada  $\Gamma$  nas condições de a) relativamente a  $V$  verifica também as mesmas condições relativamente a  $U$ .

**e)** Para cada  $z_0 \in U$  lembrar que  $\sigma(z_0\varepsilon) = \{z_0\}$  e deduzir da fórmula integral de Cauchy em 3.7.38 que se tem

$$\tilde{f}(z_0\varepsilon) = f(z_0)\varepsilon.$$

**Ex. 3.7.19 (Determinação de  $\tilde{f}(\alpha)$  em dois casos particulares)** Sejam  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa, com elemento um  $\varepsilon$  e  $\alpha \in \mathcal{E}$  um elemento fixado e consideremos  $R > \|\alpha\|$ .

**a)** Verificar que se pode definir uma aplicação holomorfa

$$\psi: \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0) \rightarrow \mathcal{E}$$

por

$$\psi(z) = (z\varepsilon - \alpha)^{-1} - \frac{\varepsilon}{z} = \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\alpha^2}{z^3} + \frac{\alpha^3}{z^4} + \dots$$

e que esta aplicação admite uma primitiva  $\varphi: \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0) \rightarrow \mathcal{E}$  definida por

$$\varphi(z) = -\frac{\alpha}{z} - \frac{\alpha^2}{2z^2} - \frac{\alpha^3}{3z^3} - \dots$$

(isto é, tem-se  $\psi(z) = \varphi'(z)$  para cada  $z$ ). **Sugestão:** Utilizar 3.3.34, como habitualmente considerando a isometria usual  $\mathcal{L}(\mathbb{C}; \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ .

**b)** Utilizar a conclusão de a) para concluir que, sendo  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação definida por  $f(z) = 1$ , tem-se  $\tilde{f}(\alpha) = \varepsilon$ . **Sugestão:** Escolher  $r > R$  e utilizar como 1-cadeia fechada  $\Gamma$  o caminho  $\gamma_{0,r}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  referido em 3.7.1, reparando que se tem

$$(z\varepsilon - \alpha)^{-1} = \frac{\varepsilon}{z} + \psi(z),$$

onde, tendo em conta 3.7.29,  $\int_{\Gamma} \psi(z) dz = 0$ .

**c)** Verificar que se pode definir uma aplicação holomorfa

$$\hat{\psi}: \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0) \rightarrow \mathcal{E}$$

por

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(z) &= z(z\varepsilon - \alpha)^{-1} - \frac{\alpha}{z} = \\ &= \varepsilon + \frac{\alpha^2}{z^2} + \frac{\alpha^3}{z^3} + \frac{\alpha^4}{z^4} + \dots = \\ &= \varepsilon + \psi(z)\alpha \end{aligned}$$

e, tendo em conta a conclusão de a), que esta aplicação admite uma primitiva

$$\hat{\varphi}: \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0) \rightarrow \mathcal{E}$$

definida por

$$\widehat{\varphi}(z) = z\varepsilon + \varphi(z)\alpha.$$

d) Procedendo como em b), deduzir de c) que, sendo  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação definida por  $g(z) = z$ , tem-se  $\tilde{g}(\alpha) = \alpha$ .

**Ex. 3.7.20 (Propriedade multiplicativa)** Sejam  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa, com elemento um  $\varepsilon$  e  $\alpha \in \mathcal{E}$  um elemento fixado. Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto com  $\sigma(\alpha) \subset U$  e  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  duas aplicações holomorfas. Sendo  $h: U \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação holomorfa definida por  $h(z) = f(z)g(z)$ , mostrar que se tem

$$\tilde{h}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha),$$

por outras palavras, a aplicação linear  $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{E}$  referida na alínea b) do exercício 3.7.18 é um morfismo de álgebras que, como se verificou na alínea b) do exercício 3.7.19, aplica o elemento um no elemento um.

**Sugestão generosa: 1)** Aplicando duas vezes a conclusão do exercício 3.7.17, começar por considerar uma 1-cadeia fechada  $\Gamma$  com  $\Gamma^* \subset U \setminus \sigma(\alpha)$ ,  $\text{int}(\Gamma) \subset U$  e  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 1$  para cada  $z \in \sigma(\alpha)$ , em particular,  $\sigma(\alpha) \subset \text{int}(\Gamma)$ , e, seguidamente, considerando o compacto

$$K = \Gamma^* \cup \text{int}(\Gamma) \subset U,$$

uma 1-cadeia fechada  $\widehat{\Gamma}$  com  $\widehat{\Gamma}^* \subset U \setminus K$ ,  $\text{int}(\widehat{\Gamma}) \subset U$  e  $\text{Ind}_{\widehat{\Gamma}}(z) = 1$  para cada  $z \in K$ , em particular para cada  $z \in \sigma(\alpha)$ .

2) Reparar que as construções em 1) implicam que

$$\forall_{z \in \Gamma^*} \text{Ind}_{\widehat{\Gamma}}(z) = 1, \quad \forall_{w \in \widehat{\Gamma}^*} \text{Ind}_\Gamma(w) = 0.$$

3) Obter a caracterização

$$\tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left( \int_{\widehat{\Gamma}} f(z)g(w)(z\varepsilon - \alpha)^{-1}(w\varepsilon - \alpha)^{-1} dw \right) dz.$$

4) A partir da igualdade  $(w\varepsilon - \alpha) - (z\varepsilon - \alpha) = (w - z)\varepsilon$  obter, para cada  $z \in \Gamma^*$  e  $w \in \widehat{\Gamma}^*$  a igualdade

$$(z\varepsilon - \alpha)^{-1} - (w\varepsilon - \alpha)^{-1} = (w - z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1}(w\varepsilon - \alpha)^{-1}.$$

5) Deduzir de 3) e 4) as caracterizações

$$\tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left( \int_{\widehat{\Gamma}} f(z)g(w) \frac{(z\varepsilon - \alpha)^{-1} - (w\varepsilon - \alpha)^{-1}}{w - z} dw \right) dz = A - B,$$

onde

$$A = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma f(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1} \left( \int_{\widehat{\Gamma}} \frac{g(w)}{w - z} dw \right) dz$$

e, tendo em conta a versão do teorema de Fubini referida no exercício 3.7.14,

$$B = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\widehat{\Gamma}} g(w)(w\varepsilon - \alpha)^{-1} \left( \int_\Gamma \frac{f(z)}{w - z} dz \right) dw.$$

6) Tendo em conta as fórmulas em 2), deduzir da fórmula integral de Cauchy em 3.7.38 que para cada  $w \in \widehat{\Gamma}^*$  tem-se  $\int_\Gamma \frac{f(z)}{w - z} dz = 0$ , e portanto  $B = 0$  e que para cada

$z \in \Gamma^*$  tem-se  $\int_{\Gamma} \frac{g(w)}{w-z} dw = 2\pi i g(z)$ , e portanto

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)g(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1} dz = \tilde{h}(\alpha).$$

**Ex. 3.7.21 (O espectro de  $\tilde{f}(\alpha)$ )** Sejam  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa, com elemento um  $\varepsilon$  e  $\alpha \in \mathcal{E}$  um elemento fixado. Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto com  $\sigma(\alpha) \subset U$  e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa, com o correspondente  $\tilde{f}(\alpha) \in \mathcal{E}$ .

a) Verificar que se  $f(z) \neq 0$  para cada  $z \in \sigma(\alpha)$  então  $\tilde{f}(\alpha)$  é invertível.

**Sugestão:** Considerando o aberto  $V = \{z \in U \mid f(z) \neq 0\}$ , que contém  $\sigma(\alpha)$ , e a aplicação holomorfa  $g: V \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ , utilizar a propriedade multiplicativa no exercício 3.7.20, tendo em conta a conclusão da alínea d) do exercício 3.7.17, para concluir que  $\tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha) = \varepsilon = \tilde{g}(\alpha)\tilde{f}(\alpha)$ .

b) **(Trivialidades algébricas)** Mostrar que, se  $\beta \in \mathcal{E}$  é tal que existam  $\beta', \beta'' \in \mathcal{E}$  com  $\beta\beta' = \varepsilon$  e  $\beta''\beta = \varepsilon$  (um inverso esquerdo e um inverso direito, respetivamente) então  $\beta' = \beta''$  e portanto  $\beta$  é invertível. Deduzir daqui que se  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{E}$  comutam, isto é, são tais que  $\beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1$ , e se  $\beta_1\beta_2$  é invertível então  $\beta_1$  (e portanto também  $\beta_2$ ) é invertível.

**Sugestão:** Para a primeira afirmação, reparar que se pode escrever

$$\beta' = \varepsilon\beta' = \beta''\beta\beta' = \beta''\varepsilon = \beta''$$

e para a segunda reparar que  $\beta_2(\beta_1\beta_2)^{-1}$  é um inverso direito de  $\beta_1$  e que  $(\beta_2\beta_1)^{-1}\beta_2$  é um inverso esquerdo de  $\beta_1$ .

c) Em contraste com a), verificar que se existir  $z_0 \in \sigma(\alpha)$  tal que  $f(z_0) = 0$  então  $\tilde{f}(\alpha)$  não é invertível.

**Sugestão:** Lembrar que, pela alínea b) de 3.7.8, existe uma aplicação holomorfa  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = (z - z_0)g(z)$  e concluir que

$$\tilde{f}(\alpha) = (\alpha - z_0\varepsilon)\tilde{g}(\alpha) = \tilde{g}(\alpha)(\alpha - z_0\varepsilon)$$

onde  $\alpha - z_0\varepsilon$  não é invertível.

d) Deduzir das conclusões de a) e c) que o espectro  $\sigma(\tilde{f}(\alpha))$  de  $\tilde{f}(\alpha)$  é igual a  $f(\sigma(\alpha))$ .

**Sugestão:** Reparar que se  $w \in \mathbb{C}$  então  $\tilde{f}(\alpha) - w\varepsilon = \tilde{h}(\alpha)$ , onde  $h(z) = f(z) - w$ .

**Ex. 3.7.22 (Propriedade de composição)** Sejam  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa, com elemento um  $\varepsilon$  e  $\alpha \in \mathcal{E}$  fixado. Sejam  $U \subset \mathbb{C}$  e  $V \subset \mathbb{C}$  dois abertos e  $f: U \rightarrow V$  e  $g: V \rightarrow \mathbb{C}$  duas aplicações holomorfas tais que  $\sigma(\alpha) \subset U$  e  $\sigma(\tilde{f}(\alpha)) = f(\sigma(\alpha)) \subset V$  (cf. a alínea d) do exercício 3.7.21). Considerando a aplicação holomorfa  $h = g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$  mostrar que se tem  $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{g}(\tilde{f}(\alpha))$ .

**Sugestão generosa: 1)** Considerar uma 1-cadeia fechada  $\hat{\Gamma}$  com  $\hat{\Gamma}^* \subset V \setminus f(\sigma(\alpha))$ ,  $\text{int}(\hat{\Gamma}) \subset V$  e  $\text{Ind}_{\hat{\Gamma}}(w) = 1$  para cada  $w \in f(\sigma(\alpha))$ . Reparar que  $\sigma(\alpha) \subset \hat{U} \subset U$ , onde  $\hat{U}$  é o aberto constituído pelos  $z \in U$  tais que  $f(z) \notin \hat{\Gamma}^*$  e  $\text{Ind}_{\hat{\Gamma}}(f(z)) = 1$ . Considerar uma 1-cadeia fechada  $\Gamma$  com  $\Gamma^* \subset \hat{U} \setminus \sigma(\alpha)$ ,  $\text{int}(\Gamma) \subset \hat{U}$  e  $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 1$  para cada  $z \in \sigma(\alpha)$ .

2) Verificar que para cada  $z \in \hat{\Gamma}^*$  tem-se

$$(z\varepsilon - \tilde{f}(\alpha))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - f(w)} (w\varepsilon - \alpha)^{-1} dw.$$

Para isso, utilizar a propriedade multiplicativa no exercício 3.7.20 e o facto de se ter

$$\frac{1}{z - f(w)} \times (z - f(w)) = 1.$$

3) Obter a caracterização

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{f}(\alpha)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} g(z)(z\varepsilon - \tilde{f}(\alpha))^{-1} dz = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\tilde{\Gamma}} \left( \int_{\Gamma} g(z) \frac{1}{z - f(w)} (w\varepsilon - \alpha)^{-1} dw \right) dz. \end{aligned}$$

4) Tendo em conta a versão do teorema de Fubini referida no exercício 3.7.14 obter a caracterização alternativa

$$\tilde{g}(\tilde{f}(\alpha)) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} (w\varepsilon - \alpha)^{-1} \left( \int_{\tilde{\Gamma}} g(z) \frac{1}{z - f(w)} dz \right) dw.$$

5) Deduzir da fórmula integral de Cauchy em 3.7.38 que para cada  $w \in \Gamma^*$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} g(z) \frac{1}{z - f(w)} dz = g(f(w))$$

e, por substituição na fórmula em 4), concluir que  $\tilde{g}(\tilde{f}(\alpha)) = \tilde{h}(\alpha)$ .

**Ex. 3.7.23 (Representação em série)** Sejam  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa, com elemento um  $\varepsilon$  e  $\alpha \in \mathcal{E}$  fixado. Sejam  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$  e  $f: B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa.

a) Verificar que se  $\sigma(\alpha) \subset B_R(z_0)$  então tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha) &= \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (\alpha - z_0\varepsilon)^k = \\ &= f(z_0)\varepsilon + f'(z_0)(\alpha - z_0\varepsilon) + \frac{f''(z_0)}{2} (\alpha - z_0\varepsilon)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!} (\alpha - z_0\varepsilon)^3 + \dots, \end{aligned}$$

onde a soma é a de uma família somável de vetores de  $\mathcal{E}$ .

**Sugestão:** Seja, para cada parte finita  $I$  de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $f_I: B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação holomorfa definida por

$$f_I(w) = \sum_{k \in I} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (w - z_0)^k.$$

Tendo em conta 3.7.7, verificar que  $f$  é o limite da sucessão generalizada dos  $f_I$  para a topologia da convergência uniforme nos compactos e, reparando que

$$\tilde{f}_I(\alpha) = \sum_{k \in I} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (\alpha - z_0\varepsilon)^k,$$

utilizar a propriedade de continuidade referida na alínea b) do exercício 3.7.18.

b) No caso em que  $\|\alpha\| < R$  lembrar que  $\sigma(\alpha) \subset B_R(z_0)$  e mostrar que a soma referida na alínea a) é a de uma família absolutamente somável de vetores de  $\mathcal{E}$ .

c) Sendo  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação holomorfa definida por  $f(z) = \exp(z)$  deduzir de a) que para cada  $\alpha \in \mathcal{E}$  tem-se  $\tilde{f}(\alpha) = \exp(\alpha)$ , onde no segundo membro estamos a considerar a aplicação exponencial da álgebra de Banach  $\mathcal{E}$  definida no exercício

2.3.11 (ou, alternativamente, tendo em conta o exercício 3.3.11, a definida em 3.6.14).

**Ex. 3.7.24 (Diferenciabilidade de  $\tilde{f}$ )** Sejam  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa, com elemento um  $\varepsilon$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto não vazio e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação holomorfa e consideremos o correspondente aberto de  $\mathcal{E}$

$$\Omega = \{\alpha \in \mathcal{E} \mid \sigma(\alpha) \subset U\}$$

(cf. a alínea b) do exercício 3.7.16) e a aplicação  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ , que a  $\alpha$  associa  $\tilde{f}(\alpha)$ .

**a)** Verificar que a aplicação  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathcal{E}$  é holomorfa e que para cada  $\alpha \in \Omega$  e  $\mu \in \mathcal{E}$  tem-se

$$(1) \quad D\tilde{f}_\alpha(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1} \mu (z\varepsilon - \alpha)^{-1} dz,$$

onde  $\Gamma$  é uma 1-cadeia fechada arbitrária com  $\Gamma^* \subset U \setminus \sigma(\alpha)$ ,  $\text{int}(\Gamma) \subset U$  e  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 1$  para cada  $z \in \sigma(\alpha)$ .

**Sugestão:** Começar por reparar que, fixados  $\alpha$  e  $\mu$ , o segundo membro de (1) não depende da escolha de  $\Gamma$  nas condições referidas, como consequência de 3.7.40. Para provar a diferenciabilidade, no sentido complexo, de  $\tilde{f}$  em  $\alpha_0 \in \Omega$  arbitrário e obter a fórmula em (1) para  $D\tilde{f}_{\alpha_0}(\mu)$ , começar por utilizar 1.6.54 para considerar um aberto  $\hat{U}$  e um compacto  $\hat{K}$  tais que  $\sigma(\alpha_0) \subset \hat{U} \subset \hat{K} \subset U$  e uma 1-cadeia fechada  $\Gamma$  com  $\Gamma^* \subset U \setminus \hat{K}$ ,  $\text{int}(\Gamma) \subset U$  e  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 1$  para cada  $z \in K$ . Reparar então que para cada  $\alpha$  no aberto

$$\hat{\Omega} = \{\alpha \in \mathcal{E} \mid \sigma(\alpha) \subset \hat{U}\}$$

tem-se

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_\Gamma f(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1} dz$$

e utilizando então o resultado sobre a derivação do integral paramétrico em 3.5.18 e a fórmula para o diferencial de inv em 3.2.20, obter (1) para cada  $\alpha$  no aberto  $\hat{\Omega}$ . Para verificar a possibilidade de aplicar 3.5.18 convirá notar que se pode escrever  $\Gamma$  na forma  $\sum p_k \odot \gamma_k$  com  $\gamma_k^* \subset \Gamma^*$  e caracterizar como um integral ordinário o integral em cada caminho  $\gamma_k$  de classe  $C^1$ .

**b)** Supondo que  $\alpha \in \Omega$  e  $\mu \in \mathcal{E}$  verificam  $\alpha\mu = \mu\alpha$ , mostrar que

$$D\tilde{f}_\alpha(\mu) = (f')^\sim(\alpha) \cdot \mu = \mu \cdot (f')^\sim(\alpha).$$

**Sugestão:** Para verificar que

$$\int_\Gamma f(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1} \mu (z\varepsilon - \alpha)^{-1} dz = \mu \int_\Gamma f'(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1} dz$$

atender a que a aplicação  $U \setminus \sigma(\alpha) \rightarrow \mathcal{E}$

$$z \mapsto f'(z)\mu(z\varepsilon - \alpha)^{-1} - f(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1}\mu(z\varepsilon - \alpha)^{-1}$$

admite a primitiva definida por

$$z \mapsto f(z)\mu(z\varepsilon - \alpha)^{-1}.$$

**c)** Seja  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a aplicação holomorfa definida por  $f(z) = \exp(z)$  e consideremos



a correspondente aplicação holomorfa  $\tilde{f}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ . Utilizar a fórmula para a derivada de  $\tilde{f}$  obtida em b) para verificar que para cada  $\alpha \in \mathcal{E}$  a aplicação  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $\varphi(t) = \tilde{f}(t\alpha)$  é derivável, com  $\varphi'(t) = \alpha\varphi(t)$  e  $\varphi(0) = \varepsilon$ . Reobter a partir daqui a conclusão de que se tem  $\tilde{f}(\alpha) = \exp(\alpha)$ , já obtida na alínea c) do exercício 3.7.23, mas agora utilizando apenas a caracterização da exponencial de  $\mathcal{E}$  em 3.6.14.

**Ex. 3.7.25 (Uma função logaritmo nas álgebras de Banach complexas)** Seja  $\mathcal{E} \neq \{0\}$  uma álgebra de Banach complexa, com elemento um  $\varepsilon$ .

a) Seja  $\Omega \subset \mathcal{E}$  o aberto

$$\Omega = \{\alpha \in \mathcal{E} \mid \sigma(\alpha) \subset \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]\}$$

(cf. a alínea b) do exercício 3.7.16). Reparar que podemos considerar uma aplicação holomorfa  $\text{Log}: \Omega \rightarrow \mathcal{E}$  definida por  $\text{Log}(\alpha) = \tilde{f}(\alpha)$ , onde  $f: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  é a aplicação definida por  $f(z) = \text{Log}(z)$  (cf. 3.6.22). Utilizar o exercício 3.7.22 para mostrar que se tem

$$\exp(\text{Log}(\alpha)) = \alpha$$

para cada  $\alpha \in \Omega$  e verificar que para cada  $\mu \in \mathcal{E}$  com  $\alpha\mu = \mu\alpha$  tem-se

$$D\text{Log}_\alpha(\mu) = \alpha^{-1}\mu = \mu\alpha^{-1}.$$

b) Verificar que a conclusão de a) permite garantir que se  $\sigma(\alpha) \subset \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  para um certo  $\alpha \in \mathcal{E}$  (condição que implica, naturalmente, que  $\alpha$  é invertível) então existe  $\beta \in \mathcal{E}$  com  $\alpha\beta = \beta\alpha$  e  $\alpha = \exp(\beta)$ .

c) Generalizar a conclusão de b) mostrando que se, para um certo  $\alpha \in \mathcal{E}$ , existe  $w_0 \in \mathbb{C}$  com  $|w_0| = 1$  e  $tw_0 \notin \sigma(\alpha)$  para todo o  $t \geq 0$  (condição que implica, mais uma vez, que  $\alpha$  é invertível)<sup>318</sup> então existe  $\hat{\beta} \in \mathcal{E}$  com  $\alpha\hat{\beta} = \hat{\beta}\alpha$  e  $\alpha = \exp(\hat{\beta})$ .

**Sugestão:** Mostrar que  $z \in \sigma(-\frac{\alpha}{w_0})$  se, e só se,  $-zw_0 \in \sigma(\alpha)$  e que, portanto

$$\sigma(-\frac{\alpha}{w_0}) \subset \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0].$$

Aplicando a conclusão de b) concluir a existência de  $\beta \in \mathcal{E}$  com  $\alpha\beta = \beta\alpha$  tal que  $-\frac{\alpha}{w_0} = \exp(\beta)$  e, sendo  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $-w_0 = \exp(t_0 i)$ , tomar

$$\hat{\beta} = \beta + t_0 i\varepsilon.$$

d) Seja  $E \neq \{0\}$  um espaço de Banach complexo de dimensão finita e consideremos a correspondente álgebra de Banach  $\mathcal{L}(E; E)$ . Mostrar que a imagem da aplicação exponencial  $\exp: \mathcal{L}(E; E) \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$  é exatamente o conjunto dos elementos invertíveis de  $\mathcal{L}(E; E)$ . **Sugestão:** Temos uma consequência de c) se repararmos que o espectro de um certo  $\alpha \in \mathcal{L}(E; E)$ , igual ao conjunto dos valores próprios de  $\alpha$ , é um conjunto finito.

<sup>318</sup>Por outras palavras,  $\alpha$  é invertível e não existem valores espectrais com direções e sentidos arbitrários.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] AHLFORS L. *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] BIVAR WEINHOLTZ, A. *Teoria dos Operadores*, Textos de Matemática 10, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1998.
- [3] BOURBAKI, N. *General Topology, Chapters 1–4*, Springer 1989.
- [4] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [5] CHOQUET, G. *Cours d'Analyse, Tome 2, Topologie*, Paris, Masson et Cie., 1969.
- [6] DIEUDONNÉ, J. *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.
- [7] DIXON, J. D. A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 29, No. 3, pp. 625-626, 1971.
- [8] HILLE, E. e PHILLIPS R. *Functional Analysis and Semi-Groups*, American Mathematical Society, 1957.
- [9] KELLEY, J. L. *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics 27, Springer 1991.
- [10] LANG, S. *Real and Functional Analysis*, Springer, GTM 142, New York, 1993.
- [11] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.
- [12] MUJICA, J. *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland Mathematics Studies, 120, 1986.
- [13] PONTRYAGIN, L. S. *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley, 1962.
- [14] RUDIN, W. *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.
- [15] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1974.
- [16] SCHWARTZ, L. *Analyse — Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970.

## ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$Ap(I, \mathbb{R})$	3
$\ (x_i)_{i \in I}\ _2 = \sqrt{\sum_{i \in I} x_i^2}$	3
$\ (x_i)_{i \in I}\ _\infty = \max_{i \in I}  x_i $	5
$d(a, B) = \inf_{x \in B} d(a, x)$	7
$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y)$	8
$\text{diam}(A)$	9
$\mathbb{B}(I, X)$	10
$d_\infty((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sup_{i \in I} d(x_i, y_i)$	10
$Ap(I, E), \mathbb{B}(I, E)$	11, 265
$\ (x_i)_{i \in I}\ _\infty = \sup_{i \in I} \ x_i\ $	11, 265
$B_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$	12
$\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$	12
$f(x) \rightarrow b$ quando $x \rightarrow x_0$	17, 38
$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} b$	17, 38
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	17, 45
$\ (x_i)_{i \in I}\ _1 = \sum_{i \in I}  x_i $	20
$\mathcal{V}_a$	22
$\overline{\mathbb{R}}$	23
$V_r(a) = ]a - r, a + r[$	23
$V_r(-\infty) = [-\infty, -\frac{1}{r}[, V_r(+\infty) = ]\frac{1}{r}, +\infty]$	23
$\mathcal{B}_a$	26
$\text{ad}(A), \overline{A}$	27
$\text{ad}_{X'}(A)$	37

$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{x \in A'} b$	42
$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq p\}$	50
$j \succeq k$	53
$\overline{J} = J \cup \{+\infty\}$	54
$J_j = \{k \in J \mid k \succeq j\}, \overline{J}_j = J_j \cup \{+\infty\}$	54
$\mathcal{F}(J)$	57
$S_K = \sum_{j \in K} x_j, \sum_{j \in J} x_j$	57, 355
$\mathcal{B}'_r((a_i)_{i \in I}) = \{(x_i)_{i \in I} \in Ap(I, X) \mid \forall_{i \in I} d(x_i, a_i) < r\}$	63
$\mathcal{B}_U = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall_i x_i \in U_i\}$	68
$\text{int}(A) = X \setminus \text{ad}(X \setminus A)$	78
$\text{ext}(A) = \text{int}(X \setminus A) = X \setminus \text{ad}(A)$	78
$\text{fr}(A) = \text{ad}(A) \cap \text{ad}(X \setminus A)$	78
$\text{int}_{X'}(A)$	85
$d_B: X \rightarrow \mathbb{R}, d_B(x) = d(x, B)$	102
$f^{-1}(W) = \{x \in X \mid f(x) \in W\}$	103
$\mathcal{C}(X, Y)$	108
$\Delta_X = \{(x, x)\}_{x \in X} = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$	126
$\prod_{i \in I} X_i$	130
$\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_{i_0}, \pi_{i_0}((x_i)_{i \in I}) = x_{i_0}$	130
$G_f \subset X \times Y, G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$	144
$\Phi: Ap(X, Y) \times X \rightarrow Y, \Phi(f, x) = f(x)$	144
$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x), \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$	152
$\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$	168
$\mathcal{U}_{K,r}(f_0) = \{f \in Ap(X, Y) \mid \forall_{x \in K} d(f(x), f_0(x)) < r\}$	210
$[[x, y]], [[x_1, \dots, x_n]]$	229
$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ (x_1, x_2, \dots, x_n)\  = 1\}$	234

$\circ_V(f), \circ_{x_0}(f)$	252
$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$	261
$\text{Pol}(\mathbb{K})$	262
$d(x, y) = \ y - x\ $	262
$\tau_{x_0}: E \rightarrow E, \tau_{x_0}(x) = x_0 + x$	264
$\rho_a: E \rightarrow E, \rho_a(x) = ax$	264
$\ell_E^\infty(I) = \mathbb{B}(I, E)$	266
$\ell_E^1(I), \ (x_i)_{i \in I}\ _1 = \sum_{i \in I} \ x_i\ $	267
$L(E; F), \mathcal{L}(E; F), \ \lambda\ $	278
$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F), \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$	280
$\Phi: \mathcal{L}(E; F) \times E \rightarrow F$	281
$\mathcal{L}(F_1, \dots, F_n; G), \mathcal{L}^n(F; G), \ \lambda\ $	282
$\Upsilon: \mathcal{L}(\mathbb{K}; F) \rightarrow F, \Upsilon(\lambda) = \lambda(1)$	286
$\Upsilon: \mathcal{L}^n(\mathbb{K}; F) \rightarrow F, \Upsilon(\lambda) = \lambda(1, \dots, 1)$	286
$\Upsilon_j: \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_j; \mathcal{L}(E_{j+1}, \dots, E_n; F))$	287
$\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; \mu): \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathcal{L}(E'_1, \dots, E'_n; F')$	287
$\ z\  = \inf_{\rho(x)=z} \ x\ , \rho: E \rightarrow G$	290
$\mathcal{R}: \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; \mathbb{R})$	302
$\Theta: E \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$	326
$A^\perp = \{y \in F \mid \forall_{x \in A} \gamma(x, y) = 0\}$	330
${}^\perp B = \{x \in E \mid \forall_{y \in B} \gamma(x, y) = 0\}$	331
$E = F \oplus G, x = \pi_F(x) + \pi_G(x)$	344
$\mathcal{C}(X, \mathcal{E})$	370
$\text{inv}: \mathcal{E}_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{E}$	372
$\mathcal{L}_{\text{iso}}(E; F)$	372
$\ell_E^p(I), \ (x_i)_{i \in I}\ _p = \left(\sum_{i \in I} \ x_i\ ^p\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty[$	373
$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$	376

$\ell_E^{fin}(I)$	382
$c_{0E}(I) \subset c_E(I) \subset \ell_E^\infty(I)$	383
$\Gamma: \ell_{\mathbb{K}}^p(I) \times \ell_{\mathbb{K}}^q(I) \rightarrow \mathbb{K}, \Gamma((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} x_i y_i$	385
$\Gamma: \ell_E^p(I) \times \ell_F^q(I) \rightarrow \mathbb{K}$	393
$\exp: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$	399, 604
$\Re(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}, \Im(a) = \frac{a-\bar{a}}{2i}$	411
$E \times E \rightarrow \mathbb{K}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$	412
$\overline{E}, \overline{\gamma}(x, y) = \overline{\gamma(x, y)} = \gamma(y, x)$	414
$\langle (a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \rangle = \sum_{i \in I} a_i \bar{b}_i$	416
$A^\perp = \{ x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0, \text{ para todo } y \in A \}$	418
$\pi_F(x)$	419
$\alpha: E \rightarrow F, \alpha^*: F \rightarrow E$	425
$\mathcal{L}_{sa}(E; E) \subset \mathcal{L}(E; E), \mathcal{L}_{-sa}(E; E) \subset \mathcal{L}(E; E)$	426
$\Omega_n(E) \subset E^n, f_n: \Omega_n(E) \rightarrow E$	432
$f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$	432
$g_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{f_k(x_1, \dots, x_k)}{\ f_k(x_1, \dots, x_k)\ }$	434
$j \oplus_{j \in J} E_j \subset \prod_{j \in J} E_j$	434
$\langle (x_j)_{j \in J}, (y_j)_{j \in J} \rangle = \sum_{j \in J} \langle x_j, y_j \rangle$	434
$\mathcal{L}(E; \mathbb{K})_{w*}$	443
$E_w$	449
$\mathbb{B}_{loc}(X, E)$	460
$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$	467
$\mathbf{t}_{x_0}(A)$	468
$D_w f(x_0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + sw) - f(x_0)}{s} \in F$	470
$\mathbf{t}_{t_0}^{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbf{t}_{t_0}^{\mathbb{C}}(A)$	471
$Df_x: E \rightarrow F$	473
$\mathbf{t}_{x_0}(A) = \mathbf{t}_{x_0}^+(A) \cup \mathbf{t}_{x_0}^-(A)$	488

$Df: A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$	490
$D^k f: A \rightarrow \mathcal{L}^k(E; F)$	491
$f^{(k)}: A \rightarrow F$	506
$\mathcal{M}_n, \det: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{K}, \text{Tr}: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{K}$	508
$D_1 f(x_0, y_0), D_1^k f(x_0, y_0), D_2 f(x_0, y_0), D_2^k f(x_0, y_0)$	522
$D_i f(x_0, \dots, x_0)$	526
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_0) = D_i f(x_0, \dots, x_0)(1) \in F$	529
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$	529
$P = \{a_0, a_1, \dots, a_N\}$	547
$S_P(f) = \sum_{1 \leq j \leq N} (a_j - a_{j-1})f(a_j)$	548
$\int_a^b f(t) dt$	548
$\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$	553
$\int_\gamma \omega(x) dx = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt \in F$	563
$\gamma_{y,z}: [0, 1] \rightarrow A, \gamma_{y,z}(t) = (1-t)y + tz$	565
$\int_y^z \omega(x) dx = \int_{\gamma_{y,z}} \omega(x) dx$	565
$H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow A$	584
$f'_{(x)}(t) = \Gamma(x, t) \times f_{(x)}(t) + \gamma(x, t)$	593
$\exp(ti) = \cos(t) + \text{sen}(t) i$	607
$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$	616
$\text{Arg}: \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow ]-\pi, \pi[$	616
$\text{Sen}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{Cos}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	618
$\log: \mathcal{L}_{sa+}(E; E) \rightarrow \mathcal{L}_{sa}(E; E)$	622
$\gamma_{z_0, r}(t) = z_0 + r \exp(2\pi ti)$	628
$S_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid  z - z_0  = r\}$	628
$\mathcal{H}(U, F)$	641
$\text{Cad}_0(\mathbb{C}), \text{Cad}_1(\mathbb{C})$	657
$\gamma^* = \gamma([a, b]), \Gamma^*$	657
$\text{Cad}_0(A), \text{Cad}_1(A)$	657

$\oplus, \ominus, \odot, \Sigma$	658
$\partial: \text{Cad}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Cad}_0(\mathbb{C})$	658
$\int_{\Gamma} f(z) dz$	659
$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w-z} dw$	660
$\text{int}(\Gamma), \text{ext}(\Gamma)$	662
$f(x + yi) = g(x, y) + h(x, y)i$	675
$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$	675
$\partial([a, b] \times [c, d]) = \gamma_{1-} \oplus \gamma_{2+} \ominus \gamma_{1+} \ominus \gamma_{2-}$	679
$\sigma(\alpha) \subset \mathbb{C}$	681
$\tilde{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)(z\varepsilon - \alpha)^{-1} dz$	683



# ÍNDICE REMISSIVO

aberto	82	aplicação localmente limitada	252, 460
aderência	28	aplicação multilinear	282
aderente	16, 27	aplicação parcialmente	
álgebra	368	diferenciável	522, 526
álgebra associativa	368	aplicação positivamente	
álgebra comutativa	368	homogénea	507
álgebra de Banach	370	aplicação separadamente	
álgebra normada	370	contínua	144, 349
álgebra trivial	368	aplicação separadamente holomorfa	644
antilinear	411	aplicação sesquilinear	412
aplicação aberta	144, 254	aplicação sesquilinear definida	
aplicação aberta num ponto	256	positiva	412
aplicação afim	495	aplicação sesquilinear hermitica	412
aplicação antilinear	411	aplicação simplesmente contínua	193
aplicação de avaliação	144, 211, 281	aplicação suave	491
aplicação bilinear oposta	329	aplicação uniformemente	
aplicação bilinear topologicamente		contínua	193, 195
definida positiva	536	argumento principal	616
aplicação de classe $C^k$	491	Ascoli (teorema)	206, 214
aplicação de composição	282	avaliação (aplicação bilinear de)	281
aplicação concatenável	581	arco	227
aplicação contínua	97	Baire (teorema)	248, 248
aplicação contínua num ponto	97	Banach (teorema)	340
aplicação contratante	191	Banach-Steinhaus (teorema)	347
aplicação derivável	467, 470	base de abertos	88
aplicação diferenciável	467, 473, 490	base contável	90
aplicação exponencial	604, 399	base de Hilbert	427
aplicação fechada	144, 254	bola aberta	12
aplicação finalizante	253	bola fechada	12
aplicação Gâteaux-diferenciável	648	Bolzano (teorema)	223
aplicação harmónica	675	bordo	658
aplicação holomorfa	629, 651	0-cadeia, 1-cadeia	657
aplicação isométrica	100	1-cadeia fechada	658
aplicação limitada	10	caminho	563
aplicação linear adjunta	426	Cauchy (estimações)	631, 655
aplicação linear anti-autoadjunta	426	Cauchy (fórmula integral)	629, 630
aplicação linear associada	495	Cauchy-Riemann (equações)	675
aplicação linear autoadjunta	426	Cauchy-Schwarz	
aplicação linear canónica	292	(desigualdade)	4, 412, 414
aplicação linear derivada	473	ciclo	658
aplicação linear de Hilbert-Schmidt	440	cobertura aberta	163
aplicação linear isométrica	280	codimensão	316
aplicação linear ortogonal	415	cofinal	56
aplicação linear real	411	colagem aberta	87
aplicação linear unitária	415	colagem fechada	95
aplicação lipschitziana	98	compactificado de Alexandroff	168
aplicação localmente constante	232	compacto	154
aplicação localmente injectiva	177	$\sigma$ -compacto	218

completado	198	derivada de ordem $k$	506
completado vetorial	324	derivada parcial	529
completo	185	derivado (conjunto)	95
complexificado	317	desigualdade de	
complexo conjugado	411	Cauchy-Schwarz	4, 412, 414
componente conexa	225	desigualdade traingular	1
componente conexa por arcos	228	diagonal	126
componente de um vetor	430	diâmetro dum conjunto	9
composição (aplicação bilinear de)	282	diâmetro numa partição	547
concatenável (aplicação)	581	difeomorfismo	544
condição de Cauchy	183, 358	diferencial	473
condição inicial	587, 608	diferencial de ordem $k$	491
condição de integrabilidade	611	diferencial parcial	522, 526
cone	319	distância de conjuntos	8
cone de derivabilidade	468	distância de pontos	1
conexo	221	distância de um ponto a um conjunto	7
conexo por arcos	227	domínio de diferenciabilidade	489
conjugado	411	domínio de diferenciabilidade	
conjunto aberto	82	localmente convexo	513
conjunto cofinal	56	dualizante (forma bilinear)	329
conjunto compacto	154	dual topológico	278
conjunto conexo	221	elemento invertível	368
conjunto conexo por arcos	227	elemento um	368
conjunto convexo	229	envólucro convexo	230
conjunto denso	31	epimorfismo estrito	353
conjunto derivado	95	equação diferencial linear	587
conjunto dirigido	53	equação diferencial linear de	
conjunto discreto	86	coeficientes constantes	619
conjunto equicontínuo	205	equação diferencial total linear	608
conjunto estrelado	229	equações de Cauchy-Riemann	675
conjunto fechado	31	equicontínuo (conjunto)	205
conjunto $\sigma$ -fechado	251	espaço de Baire	248
conjunto limitado	9	espaço de Banach	320
conjunto localmente fechado	96	espaço de Hilbert	415
conjunto magro	250	espaço métrico	1
conjunto precompacto	200	espaço métrico completo	185
conjunto relativamente compacto	218	espaço métrico precompacto	200
conjunto sequencialmente fechado	76	espaço métrico sequencialmente	
conjunto simétrico	410	compacto	204
conjunto total	514	espaço pre-hilbertiano	412
conjunto totalmente limitado	200	espaço projectivo	258
conjuntos mutuamente separados	220	espaço topológico	22
constante de Lipschitz	98	espaço topológico compacto	154
contradomínio admissível	243	espaço topológico conexo	221
convergência simples	68	espaço topológico conexo por arcos	227
convergência uniforme	63, 67	espaço topológico de Hausdorff	45
convergência uniforme nos		espaço topológico localmente	
compactos	209	compacto	165
convexo (conjunto)	229	espaço topológico localmente conexo	226
coordenadas de uma aplicação	123, 130	espaço topológico localmente	
cubo de Hilbert	441	conexo por arcos	228
denso	31	espaço topológico metrizável	22
derivada	467	espaço topológico normal	235
derivada dirigida	470	espaço topológico paracompacto	245

espaço topológico regular	107	gradiente	580
espaço topológico separado	45	gráfico duma aplicação	144
espaço topológico separável	90	grupo abeliano livre	656
espaço topológico de tipo contável	71	Hahn-Banach (teorema)	300, 303, 319
espaço topológico totalmente desconexo	233	harmónica (aplicação)	675
espaço vetorial conjugado	411	Hausdorff (espaço topológico)	45
espaço vetorial normado	3	hiperplano	316
espaço vetorial quociente	292	hipersuperfície esférica	234
espaço vetorial topológico	142, 442	holomorfa (aplicação)	629, 651
espetro	681	homeomorfismo	113
estimações de Cauchy	631, 655	homeomorfo	113
estrelado (conjunto)	229	homogénea (equação diferencial)	587, 609
Euler (fórmula de)	607	homotetia	264
expoente conjugado	376	homotopia	584, 585
exterior de 1-cadeia fechada	662	idempotente	436
exterior de conjunto	78	identidade de Euler	507
extremidades dum caminho	657	identidade de Parseval	428, 431
família absolutamente somável	363	identidade de Pitágoras	419
família completa	427	identidade do paralelogramo	418
família localmente finita	244, 244	inclusão	39
família normalmente somável	366	índice de ponto relativamente a 1-cadeia fechada	660
família ortogonal	426	integração por mudança de variáveis	554
família ortonormada	426	integração por partes	555
família ortonormada maximal	427	integral	548, 563
família somável	57, 355	integral indefinido	553
fechado	31	integral paramétrico	556
filtro	179	interior de 1-cadeia fechada	662
filtro de Cauchy	219	interior de conjunto	78
filtro de Fréchet	179	intervalo	222
filtro impróprio	179	intervalo não trivial	472
filtro principal	179	inverso	368
filtro próprio	179	isometria	100
filtro restrição	180	isométrica (aplicação linear)	280
fim dum caminho	657	isométrica (forma bilinear)	351
forma bilinear dualizante	329	isometria linear	286
forma bilinear isométrica	351	isomorfismo topológico	285
forma bilinear subdualizante	330	lema de Schwarz	677
forma diferencial	561, 563	limite de uma aplicação	38
forma diferencial fechada	561, 573	limite inferior	152
fórmula de Euler	607	limite de filtro	180
fórmula integral de Cauchy	629, 630, 671	limite restrito de aplicação	42
fórmula de Taylor	536	limite superior	152
fronteira de conjunto	78	limite uniforme	67
Fubini (teorema)	560	Liouville (teorema)	638
função de Heaviside	101	Lipschitz (constante de)	98
função par	410	Lipschitz-equivalentes (métricas)	14
funções ortogonalizadoras de Gram-Schmidt	432	localmente compacto	165
funções ortonormalizadoras de Gram-Schmidt	434	localmente conexo	226
Gâteaux-diferenciável (aplicação)	648	localmente conexo por arcos	228
Gelfand-Mazur (teorema)	676	localmente constante	232
Goursat (teorema)	572, 575	localmente convexo (domínio de diferenciabilidade)	513
		localmente fechado	96

localmente finita	244, 244	partição	547
localmente limitada	252, 460	partição da unidade	239
matriz generalizada	440	partição mais fina	547
matrizes transconjugadas	440	polinómio homogéneo	410, 538
maximal	54	polinómio de Légendre	439
máximo	54	ponto aderente	16, 27
meta dum caminho	657	ponto aderente de função	145
método de ortogonalização de		ponto de acumulação	95
Gram-Schmidt	432	ponto exterior	78
método de ortonormalização de		ponto fixo	191
Gram-Schmidt	434	ponto fronteiro	78
métrica	1	ponto interior	78
métrica associada a norma	3, 262	ponto isolado	85
métrica da convergência uniforme	11	pontos conexos em...	225
métrica discreta	6	pontos conexos por arcos em...	227
métrica do máximo	5, 135	precompacto	200
métrica euclidiana	3	primitiva	553, 554, 561
métrica induzida	6	produto cartesiano de conjuntos	130
métrica Lipschitz-equivalente	14	produto interno	412
métrica transportada	111	produto interno conjugado	414
métrica usual de $\mathbb{R}$	2	produto interno real associado	414
métricas topologicamente equivalentes	14	projecção associada a soma directa	344
metrizável (espaço topológico)	22	projecção linear contínua	346
mínimo local estrito	537	projecção ortogonal	419
monomorfismo estrito	353	projecções canónicas	126, 130
Montel (teorema)	641	prolongamento contínuo	106
Morera (teorema)	633	propriedade das coberturas	163
multiplicidade de zero	680	propriedade do encaixe	164, 192
norma	2, 262	propriedade de Fubini	560
norma associada a produto interno	414	raio de convergência	533
norma complexa	262	reflexivo (espaço normado)	327
norma da convergência uniforme	265	regra de Barrow	554
norma euclidiana	3	regra de Leibnitz	483
norma induzida	264	relativamente compacto	218
norma mais fina	269	reta acabada	23
norma do máximo	5, 266, 267	reta estendida	23
norma quociente	290	retração	243
norma real	262	retracto	243
norma da soma	20	Riesz (teorema)	307, 423
normas equivalentes	269	Rouché (teorema)	681
norma usual de $\mathbb{R}$	2	Schwarz (lema)	677
normalmente somável (família)	366	secção local	257
número de Lebesgue	200	segmento num espaço vetorial	229
operador de derivação	311	semi-espaço afim fechado	319
oposta (aplicação bilinear)	329	separado (espaço topológico)	45
ordem parcial	53	separável	90
ordem parcial filtrante	53	sequencialmente compacto	204
ordem total	53	sequencialmente fechado	76, 94
ordem de um zero	509	série comutativamente convergente	397
origem dum caminho	657	série convergente	59, 357
ortogonal dum conjunto	330, 418	série de potências	533
oscilação	252	série de Taylor	633, 654
paracompacto	245	símbolo de Kronecker	426
parcialmente diferenciável	522, 526	sistema fundamental de vizinhanças	26

solução de equação diferencial linear	587	teorema de Stone-Weierstrass	404
solução de equação diferencial		teorema de Tichonoff	160
total linear	608	teorema de Tietze-Urysohn	240, 242
soma directa topológica	345	teorema de Urysohn	236, 239
soma de Hilbert	434	teorema de Weierstrass	157, 406, 410
soma de uma família	57, 355	teorema de Zorn	160
soma parcial	57, 355	Tichonoff (teorema)	160
Stone-Weierstrass (teorema)	404	Tietze-Urysohn (teorema)	240, 242
subconjunto diagonal	126	tipo contável	71
subdualizante (forma bilinear)	330	topologia	22
subespaço métrico	6	topologia canónica de $\mathbb{R}^n$	25
subespaço topológico	34	topologia caótica	25
subespaço vetorial topologicamente		topologia compacta-aberta	178
complementado	346	topologia da convergência simples	68
sublimite	145	topologia da convergência uniforme	63
sublimite estrito	146	topologia da convergência uniforme	
sublimite de filtro	180	nos compactos	209
sublimite máximo	152	topologia direita	73
sublimite mínimo	152	topologia discreta	25
sucessão dupla	60	topologia final	253
sucessão generalizada	53	topologia forte	443, 449
sucessão generalizada de Cauchy	184	topologia fraca	449
sucessão generalizada crescente	74	topologia fraca*	443
sucessão generalizada decrescente	74	topologia induzida	34
sucessão generalizada restrição	57	topologia inferior	72
suporte duma aplicação	244	topologia mais fina	25
suporte duma cadeia	657	topologia metrizável	22
suporte dum caminho	657	topologia natural	296
Taylor (fórmula)	536	topologia produto	124, 131
Taylor (série)	633, 654	topologia quociente	253
teorema da aplicação aberta	340, 677	topologia de Tichonoff	131
teorema de Ascoli	206, 214	topologia transportada	112
teorema de Baire	248, 248	topologia usual de $\mathbb{R}^n$	25
teorema de Banach	340	topologia vetorial	442
teorema de Banach-Steinhaus	347	topologicamente equivalentes	14
teorema de Bolzano	223	total (conjunto)	514
teorema de Fubini	560	totalmente desconexo	233
teorema da função implícita	544	totalmente limitado	200
teorema da função inversa	545	translação	264
teorema de Gelfand-Mazur	676	ultrafiltro	181
teorema de Goursat	572, 575	Urysohn (teorema)	236, 239
teorema do gráfico fechado	341	valor espectral	639, 681
teorema de Hahn-Banach	300, 303	vetores ortogonais	418
teorema de Hahn-Banach		vizinhança	13, 22
geométrico	319	Weierstrass (teorema)	157, 406, 410
teorema da limitação uniforme	347	zero	680
teorema de Liouville	638	zero isolado	636
teorema do máximo	640	zero simples	680
teorema da média	510, 512	Zorn (teorema)	160
teorema de Montel	641		
teorema de Morera	633		
teorema da partição da unidade	239, 246		
teorema de Riesz	307, 423		
teorema de Rouché	681		