SUR LES μ-ANNEAUX ET LES μ_0-ANNEAUX

PAR

A. ALMEIDA COSTA

1) **Définition des μ-anneaux** — Nous ferons usage dans ce travail des notations et de la terminologie que nous avons introduites dans [1] et [2]. Ainsi: Un ensemble $\mathfrak{M}$ d'idéaux d'un anneau associatif $\mathfrak{S}$ est dit un *μ-système,* si, étant donnés les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, de $\mathfrak{S}$, appartenant à $\mathfrak{M}$, il existe un idéal $\mathfrak{g}$, de $\mathfrak{S}$, tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$. Dans tout ce qui va suivre, on mettra seulement en jeu les μ-systèmes ainsi que les théorèmes correspondants de [2].

Le théorème 3, sous-entendu dans [2], peut être démontré pour des anneaux quelconques, sans qu'il soit nécessaire d'introduire des restrictions dans les μ-systèmes. Il n'en est pas de même pour le théorème 4.

$\mathfrak{S}$ est dit un *μ-anneau,* si, étant donné un μ-système d'idéaux et une famille $\{\mathfrak{a}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ d'idéaux, l'hypothèse que la famille soit ordonnée pour la relation d'inclusion et que chaque $\mathfrak{a}_\lambda$ n'ait aucun sous-idéal appartenant au μ-système entraîne pour l'idéal $\mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_\lambda$ la propriété de n'avoir aussi aucun sous-idéal dans le même μ-système.

Pour les μ-anneaux, le théorème 4 dont on parle est encore valable sans les restrictions mises en question. Nous avons en effet:

Théorème 1: *Dans un μ-anneau $\mathfrak{S}$, soient $\mathfrak{M}$ un μ-système et $\mathfrak{a}$ un idéal sans sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}$. Il existe alors un idéal maximum $\mathfrak{q}$ parmi les idéaux qui contiennent*

$\mathfrak{a}$ et ne contiennent aucun sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}$. L'idéal $\mathfrak{q}$ est premier. $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{a}$ étant donnés, l'ensemble des idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et ne contiennent aucun sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}$ forme un système partiellement ordonnée non vide. En prennant, dans ce système, un ensemble ordonné $\{\mathfrak{q}_\lambda\}_{\lambda\in L}$, l'idéal engendré par les $\mathfrak{q}_\lambda$, qui est l'ensemble union $\bigcup \mathfrak{q}_\lambda = \mathfrak{q}$ ne contiendra aussi, par suite de la définition de μ-anneau, aucun sous-idéal $\mathfrak{g}\in\mathfrak{M}$. Le principe de Zorn peut être appliqué, ce qui démontre la première partie de l'énnoncé. Maintenant, si $\mathfrak{q}$ n'était pas premier, il existerait des idéaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ tels que $\mathfrak{b}\mathfrak{S}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{q})$, avec $\mathfrak{b}\not\equiv 0(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{c}\not\equiv 0(\mathfrak{q})$. Les idéaux $(\mathfrak{q},\mathfrak{b})\supset\mathfrak{q}$ et $(\mathfrak{q},\mathfrak{c})\supset\mathfrak{q}$ contiendraient des sous-idéaux $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ appartenant à $\mathfrak{M}$; il existerait donc $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{m}_1\mathfrak{g}\mathfrak{m}_2\in\mathfrak{M}$. Puisqu'on a $\mathfrak{m}_1\mathfrak{g}\mathfrak{m}_2\subset(\mathfrak{q},\mathfrak{b})\mathfrak{g}(\mathfrak{q},\mathfrak{c})\subseteq(\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{c},\mathfrak{q})$, on ne pourrait pas avoir $\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{q})$. Ce résultat est en contradiction avec les congruences $\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{b}\mathfrak{S}\mathfrak{c})\equiv 0(\mathfrak{q})$.

Prenons un anneau $\mathfrak{S}$, dans lequel l'une des deux hypothèses suivantes est valable: 1) Si $\{\mathfrak{a}_\lambda\}_{\lambda\in L}$ est une famille d'idéaux ordonnée pour la relation d'inclusion, tout sous-idéal contenu dans l'idéal union $\mathfrak{a}=\bigcup\mathfrak{a}_\lambda$ appartient à un $\mathfrak{a}_\lambda$; 2) étant donnée une famille d'idéaux qui jouît de la propriété de posséder un idéal qui contient chaque pair d'idéaux de la famille, alors l'ensemble union d'idéaux de la famille est un idéal de la famille. On voit très facilement que $\mathfrak{S}$ est un μ-anneau. En fait, il s'agit de simples caractérisations des anneaux avec condition de chaîne ascendante pour les idéaux.

Nous allons maintenant examiner le théorème 5, de [2]. La suffisance de la condition y indiquée peut encore être démontrée pour les μ-anneaux sans faire appel à des restrictions dans les μ-systèmes, mais il n'en est pas de même pour sa «nécessité». En ne considérant que les μ-anneaux pour lesquels, étant donné un idéal $\mathfrak{a}$ de l'anneau, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier appartenant à $\mathfrak{a}$, alors $C(\mathfrak{p})$ est un μ-système maximum parmi les μ-systèmes qui ne contiennent aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$, les théorèmes 3, 4 et 5, de [2], seraient valables sans faire des restrictions sur les μ-systèmes.

Toutefois, en passant au théorème 6, de [2], il est facile de voir que la validité des théorèmes 3, 4 et 5 ne nous permet pas de faire la théorie du radical avec la définition suivante: le radical $\mathfrak{r}$, d'un idéal $\mathfrak{a}$, est l'ensemble union des idéaux $\mathfrak{n}$ tels que tout μ-système qui contient $\mathfrak{n}$ contient aussi un sous-idéal de $\mathfrak{a}$.

Les difficultés mises en évidence cesseraient en se bornant aux anneaux pour lesqueles tout μ-système serait de la forme $\mathfrak{M}=C(U)$. On constate cependant que le seul anneau qui jouît de cette propriété est l'anneau nul. En effet, c'est seulement dans le cas cité que le μ-système formé par le seul idéal (0) possède la propriété en question.

2) **Définition des μ_0-aneaux**—Il résulte de tout ce qu'on vient de dire qu'un intérêt particulier s'attache, parmi les μ-anneaux, aux anneaux $\mathfrak{S}$ pour lesquels l'hypothèse suivante a lieu: un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{S}$ étant donné, tout μ-système maximum qui ne contient aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$ a la forme $\mathfrak{M}=C(U)$. Nous les désignerons par *μ_0-anneaux*.

Les anneaux simples sont des μ-anneaux. Un autre exemple est donné par les anneaux semi-simples de Artin-Noether. En écrivant, pour un tel anneau, la décomposition $\mathfrak{S}=\mathfrak{a}_1+\cdots+\mathfrak{a}_r$, où les $\mathfrak{a}_i$ sont des idéaux simples, on voit que tous les systèmes d'idéaux dans les conditions suivantes forment des μ-systèmes: I) Système vide d'idéaux; II) système formé par un seul idéal; III) système quelconque d'idéaux comprenant l'idéal nul; IV) système quelconque d'idéaux contenant, avec chaque pair d'idéaux, un idéal qui est contenu dans les deux.

Prenons alors l'idéal $\mathfrak{a}$, par exemple $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1+\cdots+\mathfrak{a}_r$, $(r<t)$. Un μ-système $\mathfrak{M}$ sans idéal dans $\mathfrak{a}$ se compose de tous les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}_{r+1}$ (ou $\mathfrak{a}_{r+k}, k\geqq 1$):

$$\mathfrak{M}=\{\mathfrak{a}_{r+1},\mathfrak{a}_{r+1}+\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_{r+1}+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2,\cdots,\mathfrak{a}_{r+1}+\mathfrak{a}_1+\cdots+\mathfrak{a}_r+\mathfrak{a}_{r+2}+\cdots+\mathfrak{a}_t\},$$

$$\mathfrak{M}=C(U), \qquad U=\mathfrak{a}_1+\cdots+\mathfrak{a}_r+\mathfrak{a}_{r+2}+\cdots+\mathfrak{a}_t.$$

On peut résumer les considérations ci-dessus, par les théorèmes suivants:

Théorème 2: *Les anneaux simples et les anneaux semi-simples de* Artin-Noether *sont des μ_0-anneaux. Dans les μ_0-anneaux sont valables les théorèmes 3, 4 et 5, de* [2], *sans introduire des restrictions dans les μ-systèmes.*

Théorème 3: *Dans un μ_0-anneau, le radical $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{a}$, défini comme ensemble union de tous les idéaux $\mathfrak{n}$ tels que tout μ-système qui contient $\mathfrak{n}$ contient aussi un sous-idéal de $\mathfrak{a}$, est l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$.*

Même s'il ne s'agit pas de μ_0-anneau, le radical $\mathfrak{a}$, d'accord avec [2, § 3], sera toujours sous-entendu comme intersection des idéaux premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$.

Après celà, nous allons poursuivre l'étude du radical $\mathfrak{r}$. Il est certain que $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{r}$, si on suppose que $\mathfrak{b}$ est un idéal tel que $\mathfrak{b}^\tau\subseteq\mathfrak{a}$. En effet, $\mathfrak{b}^\tau$, et par conséquent $\mathfrak{b}$, sont contenus dans tout idéal premier qui contient $\mathfrak{a}$. Inversement, soit $\mathfrak{n}$ un des idéaux de la définition de $\mathfrak{r}$, dans les conditions du théorème 3, et considérons le μ-système composé par les puissances de $\mathfrak{n}$: $\mathfrak{M}=\{\mathfrak{n},\mathfrak{n}^2\ldots\}$. Il y aura un sous-idéal de $\mathfrak{a}$ appartenant à $\mathfrak{M}$, donc, pour un certain σ, l'inclusion $\mathfrak{n}^\sigma\subseteq\mathfrak{a}$ sera valable. On peut donc énoncer:

Théorème 4: *Dans un μ_0-anneau, le radical $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{a}$, est l'ensemble union de tous les idéaux $\mathfrak{n}$ tels que $\mathfrak{n}^\sigma\subseteq\mathfrak{a}$.* En n'oubliant pas que le radical d'un anneau est le radical de son idéal (0), on a le

Corollaire 1: *Le radical d'un μ_0-anneau, qui est le radical inférieur de* Baer, *est aussi l'ensemble union des idéaux nilpotents, donc le radical classique.*

Dans les considérations des §§ suivants, bien que certains théorèmes soient démontrées pour des anneaux quelconques, il s'agit essentiellement de raisonnements relatifs aux μ-anneaux. Nous ferons l'extension à ces derniers anneaux de quelques résultats dus à Krull [3] et Curtis [4].

3) **Idéaux premiers et non premiers à droite**—Deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ d'un anneau arbitraire étant donnés, nous répresenterons par $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d$ l'idéal ensemble des élements $x\in\mathfrak{S}$ pour lesquels $x\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$. Dès que tous les élements de $\mathfrak{a}$ sont des élements x, il s'en suit que $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d\supseteq\mathfrak{a}$. On dira alors que $\mathfrak{b}$ est *premier à droite avec* $\mathfrak{a}$, si l'on a $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d=\mathfrak{a}$; dans le cas contraire, $\mathfrak{b}$ est dit *non-premier à droite avec* $\mathfrak{a}$. On doit faire la remarque suivante: $\mathfrak{b}$ peut fort bien être premier à droite avec $\mathfrak{a}$ et celui-ci ne pas l'être avec $\mathfrak{b}$. Par exemple, dans un anneau simple $\neq(0)$, qui soit anneau-zéro, on a $(\mathfrak{S}:(0))_d=\mathfrak{S}$, $((0):\mathfrak{S})_d=\mathfrak{S}$.

Du fait que tout système multiplicatif d'idéaux est un μ-système, l'ensemble des idéaux non-premiers à droite avec un idéal $\mathfrak{a}_0$ est un μ-système, puisque, de $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{b})_d\supset\mathfrak{a}_0$, $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{c})_d\supset\mathfrak{a}_0$, on déduit $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{b}\mathfrak{c})_d\supset(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{b})_d\supset\mathfrak{a}_0$. L'ensemble des idéaux premiers à droite avec $\mathfrak{a}_0$ est aussi un μ-système (également multiplicatif). Nous désignerons par $\mathfrak{M}_0'$ et $\mathfrak{M}_0$, respectivement, les deux μ-systèmes qu'on vient de signaler. Il s'agit de systèmes complémentaires.

Lorsque $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}$ est un idéal premier, $\mathfrak{M}_0 = C(\mathfrak{p})$ est l'ensemble complémentaire de l'ensemble $\mathfrak{M}'_0$ formé par les idéaux contenus dans $\mathfrak{p}$.

Prenons $\mathfrak{a}_0$. Si un idéal $\mathfrak{q}_0$ a les deux propriétés suivantes: 1) il n'est pas premier à droite avec $\mathfrak{a}_0$; 2) tout idéal $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{q}_0$ est premier à droite avec $\mathfrak{a}_0$; on dit alors que $\mathfrak{q}_0$ est un *idéal maximum appartenant à* $\mathfrak{a}_0$. Il s'agit d'un idéal qui est maximum dans l'ensemble $\mathfrak{M}'_0$.

Théorème 5: *En prenant, dans un μ-anneau, un idéal $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$, ainsi que l'idéal $\mathfrak{b}_0$ non-premier à droite avec $\mathfrak{a}_0$, l'idéal $\mathfrak{b}_0$ est contenu dans un idéal maximum appartenant à $\mathfrak{a}_0$.* Prenons $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$ ainsi que le système multiplicatif $\mathfrak{M}_0$ correspondant. Ce système ne contient pas $\mathfrak{b}_0$ ou quelques-uns de ses sous-idéaux. Le théorème 1 montre l'existence d'un idéal maximum $\mathfrak{p}_0 \supseteq \mathfrak{b}_0$, sans sous-idéal dans $\mathfrak{M}_0$. L'idéal $\mathfrak{p}_0$ a les deux propriétés qui le caractérisent comme idéal maximum appartenant à $\mathfrak{a}_0$.

On peut prendre $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0$. Par ailleurs la proposition suivante est valable:

Théorème 6: *Dans un anneau arbitraire, étant donné l'idéal $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$, si l'on suppose l'existence d'idéaux maximaux $\mathfrak{q}_0$ appartenant à $\mathfrak{a}_0$, chaque $\mathfrak{q}_0$ contient $\mathfrak{a}_0$ et est premier.* En effet: si $\mathfrak{g}$ est non-premier à droite avec $\mathfrak{a}_0$, il en est de même de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0)$, puisque $(\mathfrak{a}_0 : (\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0))_d = (\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{g})_d \cap (\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{a}_0)_d = (\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{g})_d \supset \mathfrak{a}_0$. Alors, pour chaque $\mathfrak{q}_0$, l'idéal $(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{a}_0)$ est non-premier à droit avec $\mathfrak{a}_0$; donc, en vertu de la propriété de maximum de $\mathfrak{q}_0$, on a $(\mathfrak{q}_0, \mathfrak{a}_0) = \mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{q}_0$. Pour voir que $\mathfrak{q}_0$ est premier, on fait les considérations suivantes. Supposons $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \equiv 0(\mathfrak{q}_0)$, avec $\mathfrak{b} \not\equiv 0(\mathfrak{q}_0)$, $\mathfrak{c} \not\equiv 0(\mathfrak{q}_0)$. On aura $\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{q}_0, \mathfrak{b}) \supset \mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_2 = (\mathfrak{q}_0, \mathfrak{c}) \supset \mathfrak{q}_0$, donc

$$(\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{q}_1)_d = (\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{q}_2)_d = \mathfrak{a}_0; \qquad (\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2)_d = ((\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{q}_2)_d : \mathfrak{q}_1)_d = \mathfrak{a}_0.$$

D'autre part, dès qu'on a $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \equiv 0(\mathfrak{q}_0)$, il en résulte $(\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2) \supset \mathfrak{a}_0$. Il est impossible admettre qu'aucun des idéaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ ne soit contenu dans $\mathfrak{q}_0$.

Le fait que, dans un μ-anneau, le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$ est contenu dans un idéal $\mathfrak{q}_0 \in \mathfrak{M}'_0$ (voir à ce sujet [1, pgs. 101-103]), nous montre qu'on a aussi $\mathfrak{r} \in \mathfrak{M}'_0$. Il existe, dans $\mathfrak{q}_0$, un sous-idéal premier minimum appartenant à $\mathfrak{a}_0$, ce qui entraîne la proposition suivante:

Théorème 7: *Dans un μ-anneau, le radical $\mathfrak{r}$ d'un idéal $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$ est non-premier à droite avec $\mathfrak{a}_0$. Il existe des idéaux premiers maximaux, et, par conséquent, des idéaux premiers minimaux, appartenant à $\mathfrak{a}_0$, qui sont eux aussi non-premiers à droite avec $\mathfrak{a}_0$.*

4) **Idéaux adjoints et associés** — Un idéal $\mathfrak{m}$ est dit *en relation* avec l'idéal $\mathfrak{a}_0$, s'il est possible de le considérer comme ensemble union d'idéaux non-premiers à droite avec $\mathfrak{a}_0$. Les idéaux qui sont des élements de $\mathfrak{M}'_0$ sont, de façon triviale, en relation avec $\mathfrak{a}_0$. Cependant, on ne peut pas faire l'affirmation inverse. Dans ce qui va immédiatement suivre, on mettra en jeu un idéal en relation avec $\mathfrak{a}_0$, lequel, dans le cas des μ-anneaux, est un élement de $\mathfrak{M}'_0$. C'est *l'idéal adjoint* de $\mathfrak{a}_0$.

En suivant [4], on dit que l'idéal $\mathfrak{r}_0$ est l'adjoint de $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$, s'il est l'ensemble union des idèaux $\mathfrak{c}$ tels que $(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{M}'_0$, si $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}'_0$. Cet ensemble n'est pas vide, car nous avons $(\mathfrak{a}_0, (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}))_d = (\mathfrak{a}_0 : \mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{a}_0$. Le théorème ci-dessous est valable et nous allons en faire la démonstration complète, pour montrer qu'il ne faut pas utiliser la condition de chaîne ascendante:

Théorème 8: *Dans un μ-anneau, l'idéal $\mathfrak{y}_0$, adjoint de $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$, est l'intersection de tous les idéaux premiers maxi-*

maux appartenant à $\mathfrak{a}_0$. Par définition d'idéal $\mathfrak{c}$, on a $(\mathfrak{c},\mathfrak{q}) \in \mathfrak{M}'_0$ pour chaque idéal maximum $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}'_0$. Compte tenu de la propriété de maximum de $\mathfrak{q}$, l'égalité $(\mathfrak{c},\mathfrak{q})=\mathfrak{q}$ est valable, donc $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{q}$ et aussi $\mathfrak{r}_0 \subseteq \bigcap \mathfrak{q}$. Inversement, prenons $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{q}$, quel que soit l'idéal maximum $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}'_0$, et considérons un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{a}_0$. Alors, nous avons $(\mathfrak{a}_0,(\mathfrak{g},\mathfrak{b}))_d \supset \mathfrak{a}_0$, comme nous allons le montrer. Puisque $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}'_0$, le théorème 5 affirme que $\mathfrak{b}$ est contenu dans un idéal maximum $\mathfrak{q}' \in \mathfrak{M}'_0$. On a également $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{q}'$, donc $(\mathfrak{g},\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{q}'$, ce qui entraîne $(\mathfrak{a}_0:(\mathfrak{g},\mathfrak{b}))_d \supseteq (\mathfrak{a}_0:\mathfrak{q}')_d \supseteq \mathfrak{a}_0$, et par conséquent $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{y}_0$. La proposition est démontrée.

Corollaire 2: *Dans un μ-anneau, l'idéal adjoint de* $\mathfrak{a}_0$ *est non-premier à droite avec* $\mathfrak{a}_0$.

Si on ne veut pas faire dans l'énnoncé l'exception $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{S}$, on peut employer l'artifice suivant: $\mathfrak{M}'_0$ étant vide contient seulement «l'idéal vide» $\mathfrak{b}$; c'est seulement aussi l'idéal vide $\mathfrak{c}$ qui satisfait à la condition $(\mathfrak{c},\mathfrak{b}) \in \mathfrak{M}'_0$. On a $\mathfrak{y}_0=\bigcup \mathfrak{c}=$ idéal vide. Cet idéal vide est encore l'intersection indiquée dans le théorème.

Définissons le quotient $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_e$ de façon semblable à celle dont on a fait usage pour définir $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d$. Ainsi, on aura $x \in (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_e$, si et seulement si $\mathfrak{b}x \subseteq \mathfrak{a}$. Comme dans [4, pgs. 693], on a le théorème suivant:

Théorème 9: *Dans un anneau arbitraire, un idéal* $\mathfrak{a}_0$ *étant donné, pour que l'inclusion* $\mathfrak{A}=\bigcup(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{b}^i)_d \supset \mathfrak{a}_0$, $(i=1,2,\ldots)$, *ait lieu, il faut et il suffit que* $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{a}_0$ *soit valable, c'est à dire, qu'on ait* $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}'$. *En supposant* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier maximum appartenant à* $\mathfrak{a}_0$, *on aura les relations suivantes:* $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{q})_d=\mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_0$, $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{q})_e \subseteq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{A}=\bigcup(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{q}^i)_d \supseteq \mathfrak{a}_1$, $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{A})_e \subseteq \mathfrak{q}$.

Un idéal $\mathfrak{s}$ est dit *associé* à $\mathfrak{a}_0$, si: 1) $\mathfrak{s}$ est premier et on a $\mathfrak{s} \supseteq \mathfrak{a}_0$; 2) $\mathfrak{s} \in \mathfrak{M}'_0$; 3) $(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{A})_e \subseteq \mathfrak{s}$, en supposant

$\mathfrak{A}=\bigcup(\mathfrak{a}_0:\mathfrak{s}^i)_d$. De cette définition, du théorème antérieur et du théorème 5, on conclut immédiatement le

Théorème 10: *Dans un anneau arbitraire, tout idéal premier maximum appartenant au idéal* $\mathfrak{a}_0$ *est associé à* $\mathfrak{a}_0$. *Dans un μ-anneau, idéal associé à* $\mathfrak{a}_0$ *est contenu dans un idéal premier maximum appartenant à* $\mathfrak{a}_0$.

Corollaire 3: *Dans un μ-anneau, il faut et il suffit, pour que* $\mathfrak{q}$ *soit un idéal premier maximum appartenant à* $\mathfrak{a}_0$, *que* $\mathfrak{q}$ *soit un idéal maximum dans les idéaux associés à* $\mathfrak{a}_0$.

5) **Idéaux primaux** — De la même façon que dans les §§ antérieurs, un idéal $\mathfrak{a}_0$ étant donné, nous représenterons par $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}'_0$, respectivement, l'ensemble des idéaux premiers à droite et non-premiers à droite avec $\mathfrak{a}_0$.

On dit que $\mathfrak{a}_0$ est un *idéal primal*, si l'ensemble union $\mathfrak{b}_0=\bigcup \mathfrak{b}_\mu$, des idéaux $\mathfrak{b}_\mu \in \mathfrak{M}'_0$, est un idéal $\mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{M}'_0$.

Lorsque $\mathfrak{a}_0$ est primal, en prenant $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{M}'_0$, on a aussi $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2) \in \mathfrak{M}'_0$, ce qui montre que l'idéal adjoint de $\mathfrak{a}_0$ est précisement $\mathfrak{y}_0=\mathfrak{b}_0$. Réciproquement, si $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2) \in \mathfrak{M}'_0$, on conclut que $\bigcup \mathfrak{b}_\mu=\mathfrak{b}_0=\mathfrak{y}_0$, mais on ne peut pas dire que $\mathfrak{a}_0$ est primal, puisqu'on ne sait pas si $\mathfrak{b}_0 \in \mathfrak{M}'_0$. Nous énoncerons le

Théorème 11: *Pour que* $\mathfrak{a}_0$ *soit primal, il faut et il suffit que* $\mathfrak{y}_0$ *appartienne à* $\mathfrak{M}'_0$ *et que, en prenant* $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{M}'_0$, *on ait* $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2) \in \mathfrak{M}'_0$.

Corollaire 4: *Dans un μ-anneau, il faut et il suffit, pour que* $\mathfrak{a}_0$ *soit primal, qu'en prenant* $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{M}'_0$, *on ait* $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2) \in \mathfrak{M}'_0$. En effet, on ne doit pas oublier le corollaire 2 du § antérieur.

Puisque, dans un μ-anneau, tout idéal qui est élement de $\mathfrak{M}'_0$ est contenu dans un idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}_0$ (élement de $\mathfrak{M}_0$), il s'ensuit que l'idéal adjoint d'un idéal primal $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$ est nécessairement le seul idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}_0$. Réciproquement, si, étant donné un μ-anneau, il y a un seul idéal premier maximum $\mathfrak{p}_0$ appartenant à un idéal $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$, l'idéal $\mathfrak{a}_0$ est primal. En effet, chaque idéal $\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}'_0$ étant contenu dans $\mathfrak{p}_0 \in \mathfrak{M}'_0$, la condition indiquée dans le corollaire 4 est vérifiée. Ainsi:

Théorème 12: *Dans un μ-anneau, il faut et il suffit, pour que $\mathfrak{a}_0$ soit un idéal primal, qu'il existe un seul idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}_0$. Cet idéal maximum est l'adjoint de $\mathfrak{a}_0$.*

L. Fuchs [5] donne une autre caractérisation des idéaux primaux qui est valable dans le cas non commutatif.

Bien que dans les raisonnements qui nous ont amené aux théorèmes 11 et 12 on ait supposé $\mathfrak{a}_0 \neq \mathfrak{S}$, on n'a pas tenu compte de ce fait das les énoncés respectifs, pour la raison suivante: l'anneau $\mathfrak{S}$ lui même, pris comme un idéal, doit être considéré primal, puisque l'ensemble $\mathfrak{M}'_0$ possédant le seul idéal vide, on peut supposer valable le théorème 11; et il en est de même pour ce qui concèrne le théorème 12.

Dans chaque μ-anneau, un exemple important d'idéaux primaux est donné par les *idéaux irréductibles,* c'est à dire par les idéaux qu'on ne peut pas considérer comme intersection d'un nombre fini d'idéaux qui soient parmi ses diviseurs propres. Nous pouvons donner cet énoncé

Théorème 13: *Dans un μ-anneau, si $\mathfrak{a}$ est irréductible il est aussi primal, car la somme d'idéaux non-premier à droite avec $\mathfrak{a}$ est un idéal non-premier à droite avec $\mathfrak{a}$.* Si on suppose, en effet, $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}:\mathfrak{c})_d \supset \mathfrak{a}$, on a aussi $(\mathfrak{a}:(\mathfrak{b},\mathfrak{c}))_d \supset \mathfrak{a}$, puisque, dans le cas contraire, $\mathfrak{a}$ ne serait pas irréductible.

6) **Composantes principaux**—Soit $\mathfrak{S}$ un μ-anneau et supposons $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$. $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ représenteront les systèmes complémentaires des idéaux premiers et non-premiers à droite avec $\mathfrak{a}$. En supposant que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}$, nous appellerons *composante principale* de $\mathfrak{a}$, définie par $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{S}$, l'idéal $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ qui est l'ensemble union des idéaux $\mathfrak{b}$ tels qu'il existe $\mathfrak{c} \in C(\mathfrak{p})$ *non vide* vérifiant la congruence $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \equiv 0(\mathfrak{a})$. On a toujours $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{p})$. Pour démontrer que $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ est un idéal, on se sert de la remarque suivant: si $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ sont deux idéaux $\mathfrak{b}$, on a $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \equiv 0(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 \equiv 0(\mathfrak{a})$, par conséquent $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 \equiv 0(\mathfrak{a})$ avec $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 \in C(\mathfrak{p})$.

Nous admettons maintenant que $\mathfrak{a}$ est primal. Alors, en supposant que $\mathfrak{p}$ est le seul idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{M} = C(\mathfrak{p})$, ainsi que $\mathfrak{p}$=ensemble union des idéaux qui sont des élements de $\mathfrak{M}'$. Si $\mathfrak{b}$ est un des idéaux de la définition de $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$, nous avons $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \equiv 0(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{b} \subseteq (\mathfrak{a}:\mathfrak{c})_d = \mathfrak{a}$, ce qui nous donne $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{p})$. Inversement, l'idéal $\mathfrak{a}$ d'un μ-anneau étant donné, supposons que $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}'$ est un idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}$ et admettons l'égalité $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{p})$. Si on a $\mathfrak{g} \in C(\mathfrak{p})$, la congruence $(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})_d \cdot \mathfrak{g} \equiv 0(\mathfrak{a})$ nous amène à $(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})_d \equiv 0(\mathfrak{a}(\mathfrak{p}))$, donc à $(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})_d = \mathfrak{a}$. On voit que $C(\mathfrak{p})$ se compose d'idéaux premiers à droite avec $\mathfrak{a}$. On aura $C(\mathfrak{p}) = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{p}$=ensemble union des idéaux qui sont des élements de $\mathfrak{M}'$. Il en résulte que $\mathfrak{a}$ est primal. Donc:

Théorème 14: *Dans un μ-anneau, il faut et il suffit, pour que l'idéal $\mathfrak{a}$ soit primal, qu'on ait $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{p})$, en supposant $\mathfrak{p}$ un idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}$.*

Lorsque nous avons $\mathfrak{a}=\mathfrak{S}$, l'idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}$ est l'idéal vide. Pour chaque pair d'idéaux $\mathfrak{b}$, de $\mathfrak{S}$, et $\mathfrak{c}\in C(\mathfrak{p})$ = totalité des idéaux de $\mathfrak{S}$, on a $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{a})$; par conséquent le théorème antérieur a encore lieu, et nous avons $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(\mathfrak{p})=\bigcup\mathfrak{b}=\mathfrak{S}$. Ce résultat est valable d'ailleurs pour chaque anneau $\mathfrak{S}$.

Corollaire 5: *Si, dans un μ-anneau, il y a plusieurs idéaux premiers maximaux $\mathfrak{p}$ appartenant à $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})\supset\mathfrak{a}$ pour chaque idéal $\mathfrak{p}$.*

On peut modifier la définition de $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ donnée antérieurement en disant que $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ est l'ensemble union de $\mathfrak{a}$ et des idéaux indiqués $\mathfrak{b}$. L'idéal $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ reste le même. Si nous supposons maintenant que $\mathfrak{p}=\mathfrak{S}$ est le seul idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}$, nous pouvons dire:

Corollaire 6: *Dans un μ-anneau, si $\mathfrak{p}=\mathfrak{S}$ est idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}$, nous aurons $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$.*

Des méthodes semblables à celle de Krull permettent encore de démontrer les propositions que nous allons signaler. Nous nons bornerons à donner une seule des démonstrations respectives.

Théorème 15: *Dans un anneau arbitraire, si $\mathfrak{a}$ est un idéal et $\mathfrak{p}$ un idéal premier maximum appartenant à $\mathfrak{a}$ tel que $\phi\neq\mathfrak{p}\neq\mathfrak{S}$, on a nécessairement $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})\neq\mathfrak{S}$.*

Théorème 16: *Dans un μ-anneau, si $\mathfrak{a}$ est un idéal et $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ une composante principale de $\mathfrak{a}$, alors, en supposant $\mathfrak{x}$ un idéal diviseur de $\mathfrak{a}$ tel que tous les idéaux premiers maximaux $\mathfrak{q}$ appartenant à $\mathfrak{x}$ vérifient la condition $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}$, on peut affirmer l'inclusion $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})\subseteq\mathfrak{x}$.*

Corollaire 6: *Dans un μ-anneau, la composante principale $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ est contenue dans tout idéal primal $\mathfrak{g}$, diviseur de $\mathfrak{a}$, dont l'idéal adjoint est contenu dans $\mathfrak{p}$. En particulier: on a $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})\subseteq\mathfrak{p}_0$, en supposant que $\mathfrak{p}_0$ est l'idéal premier minimum appartenant à $\mathfrak{a}$ et contenu dans $\mathfrak{p}$.*

Théorème 17: *Dans un μ-anneau, $\mathfrak{a}$ est l'intersection $\Delta=\bigcap\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$ de toutes ses composantes principales.* Si un élement b appartient à Δ, l'idéal (b) engendré par b, est contenu dans Δ. Un tel idéal (b) est toujours un des idéaux $\mathfrak{b}$ de ceux qu'on a introduits pour définir $\mathfrak{a}(\mathfrak{p})$. De cette façon, si on prouve que l'inclusion $\mathfrak{b}\subseteq\Delta$ implique $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$, le théorème restera établi. En supposant $\mathfrak{b}\subseteq\Delta$, on en conclut que, une fois $\mathfrak{p}$ choisi, il existe $\mathfrak{c}\in C(\mathfrak{p})$ tel que $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{a})$, ce qui entraîne $\mathfrak{c}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_e$. En faisant $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})_e=\mathfrak{g}$, on voit que $\mathfrak{g}\not\equiv 0(\mathfrak{p})$, quel que soit $\mathfrak{p}$. Puisque tout idéal non-premier à droite avec $\mathfrak{a}$ est contenu dans un idéal $\mathfrak{p}$, l'idéal $\mathfrak{p}$ est premier à droite avec $\mathfrak{a}$, donc $(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})_d=\mathfrak{a}$. L'idéal $\mathfrak{g}$, par définition, satisfait à la congruence $\mathfrak{b}\mathfrak{g}\equiv 0(\mathfrak{a})$, par conséquent on a $\mathfrak{b}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{g})_d=\mathfrak{a}$, ce qui est précisement ce qu'on désire montrer.

On doit faire la remarque suivante. Dans le raisonnement on a supposé $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{S}$. L'hypothèse $\mathfrak{a}=\mathfrak{S}$ donne de même $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(\mathfrak{p})=\mathfrak{S}$, comme on a déjà vu.

7) **Idéaux primaires**—Il est commode de définir *idéal primaire*, dans un anneau quelconque, de la façon à suivre. $\mathfrak{s}$ est dit primaire, si sont vérifiées les deux conditions que voici: 1) le radial $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{s}$, est un idéal premier; 2) si $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\equiv 0(\mathfrak{s})$, avec $\mathfrak{a}\not\equiv 0(\mathfrak{s})$, alors on a $\mathfrak{b}\equiv 0(\mathfrak{r})$.

Théorème 18: *Dans un μ-anneau, il faut et il suffit, pour que $\mathfrak{s}$ soit un idéal primaire, que $\mathfrak{s}$ ait un seul idéal premier maximum qui lui appartienne, et qui soit aussi le seul idéal premier minimum appartenant à $\mathfrak{s}$.* La condition est *nécessaire:*—Lorsque $\mathfrak{s}=\mathfrak{S}$, l'idéal primaire $\mathfrak{s}$ vérifie la condition de l'énoncé. Si $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{S}$, prenons l'idéal $\mathfrak{g}$ non-premier à droite avec $\mathfrak{s}$. De $(\mathfrak{s}:\mathfrak{g})_d \cdot \mathfrak{g} \equiv 0(\mathfrak{s})$, avec $(\mathfrak{s}:\mathfrak{g})_d \supset \mathfrak{s}$, on tire $\mathfrak{g} \equiv 0(\mathfrak{r})$. D'autre part, comme nous l'avons vu d'ailleurs, dans le théorème 7 du § 3, $\mathfrak{r}$ est non-premier à droite avec $\mathfrak{s}$, donc $\mathfrak{r}$ est exactement l'ensemble union des idéaus non-premiers à droite avec $\mathfrak{s}$. Le radical est le seul idéal maximum appartenant à $\mathfrak{s}$ et aussi, par conséquent, le seul idéal premier minimum appartenant à $\mathfrak{s}$.

La condition est *suffisante*:—Si $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{S}$ satisfait à la condition de l'énoncé, le radical $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{s}$, est un idéal premier. Au surplus, de $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \equiv 0(\mathfrak{s})$, avec $\mathfrak{a} \not\equiv 0(\mathfrak{s})$, on conclut $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{s}:\mathfrak{b})_d \supset \mathfrak{s}$; donc $\mathfrak{b}$ est non-premier à droite avec $\mathfrak{s}$ et est contenu, comme on l'a vu dans le théorème 5 du § 3, dans le seul idéal premier maximum $\mathfrak{p} = \mathfrak{r}$ appartenant à $\mathfrak{a}$.

Compte tenu du théorème 12 du § 5, on peut énoncer le

THÉORÈME 19: *Dans un μ-anneau, tout idéal primaire est primal.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] – A. ALMEIDA COSTA, *Sur les anneaux demi-premiers*, «Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa», 2.ª série, A – Ciências Matemáticas, vol. VII, 1958, pgs. 89-104.

[2] – A. ALMEIDA COSTA, *μ-systèmes et π-systèmes d'idéaux*, dans le même Journal, aussi vol. VII, 1958, pgs. 235-243.

[3] – W. KRULL, *Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung*, «Mathematische Annalen», Band 101, 1929, pgs. 729-744.

[4] – C. W. CURTIS, *On additive ideal theory in general rings*, «American Journal of Mathematics», vol. LXXIV, 1952, pgs. 687-700.

[5] – L. FUCHS, *On primal ideals*, «Proccedings of the American Mathematical Society», vol. 1, 1950, pgs. 1-6.

Lisboa, Centro de Matemáticas Aplicadas ao Estudo de Energia Nuclear, Setembro de 1960.