TEXTOS E NOTAS

45

ESPAÇOS VECTORIAIS TOPOLÓGICOS

J. S. Guerreiro

CENTRO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES FUNDAMENTAIS DAS UNIVERSIDADES DE LISBOA

INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA

CMAF

1990

PREFÁCIO

Sabíamos, no CMAF, que já há algum tempo o Professor João Cosme Santos Guerreiro vinha trabalhando num projecto de redacção de um texto sobre Espaços Vectoriais Topológicos, teoria que considerava de grande importância para quem fizesse investigação em Análise, como era o seu caso. Mas não foi só a actividade de investigador que o levou a interessar-se por essa teoria e, mais particularmente, pela dos Espaços Localmente Convexos, pois também como professor a ela se dedicou regendo na Faculdade de Ciências de Lisboa durante vários anos lectivos uma cadeira de espaços vectoriais topológicos e no Instituto Superior Técnico, no âmbito de um curso de pós-graduação, algumas disciplinas em que fazia largo uso da mesma teoria.

Como todos os que o conheciam sabem bem, a essas actividades se entregou com a competência e o entusiasmo que o caracterizavam tendo acabado por se tornar o nosso mais reputado especialista nessa matéria. A ele muitos recorriam e a todos atendia com impressionante clareza, segurança e generosidade.

Não sabemos ao certo o conteúdo e os contornos do projecto do livro que o Professor Guerreiro tencionava publicar. O presente texto, recolhido no gabinete de trabalho de sua casa, foi encontrado em diversas parcelas não totalmente dactilografadas e estamos certos de que não corresponde ao plano total da obra que tinha idealizado. Além disso, vários indícios sugerem também que o próprio texto já escrito não tinha ainda atingido a forma final - a inexistência duma última revisão, a falta de um ou outro título, a presença de textos alternativos em geral apenas esboçados, etc. Alguns pontos devem mesmo ser referidos explicitamente: a demonstração do teorema 1.8.10 sobre a completação dum espaço localmente convexo estava apenas iniciada e, quando do estudo dos limites indutivos e projectivos, anunciam-se vários exemplos dum e doutro caso mas, para os limites indutivos, é apresentado apenas um. Em ambas as situações pareceu-nos preferível não completar o texto.

Além dos casos atrás mencionados deve citar-se ainda uma nota de fim de página, logo no início (suprimida nesta edição), na qual se fazia referência a um texto prévio a este, que não conseguimos encontrar. Por outro lado, o capítulo 1.9 tinha a referência 1.10, o que provocava um salto na numeração. Gralha ou espaço aberto para incluir outras matérias?

Foi o Professor Guerreiro, desde a fundação do CMAF, o primeiro nome da sua direcção. À consolidação e prestígio do Centro sempre dedicou muitas horas. Pareceu-nos pois correcto diligenciar no sentido da publicação desta obra na colecção "Textos e Notas" e de igual modo foi a questão entendida pela Direcção do CMAF. Mesmo justa não se pode deixar de publicamente agradecer essa atitude. Deve também agradecer-se ao Centro de Informática do Instituto Superior de Agronomia a excelente qualidade gráfica desta publicação.

Lisboa, 1990

J. Campos Ferreira

J. Silva Oliveira

ÍNDICE

1. Espaços Localmente Convexos

1.1 – Espaços vectoriais topológicos

Chama-se *espaço vectorial topológico*, abreviatura e.v.t., a um espaço vectorial E(¹) munido de uma topologia tal que as aplicações $(x,y) \to x+y$ de $E \times E$ em E e $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ em E (K com a sua topologia natural) são contínuas. Em particular, as translacções de E, $x \to a+x$, e as homotetias $x \to \lambda x$ de razão $\lambda \neq 0$ são homeomorfismos de E sobre E. Como as translacções são homeomorfismos, a topologia de E fica determinada pelo filtro $\mathcal{U}$ das vizinhanças de zero: para cada $a \in E$, $a + \mathcal{U} = \{a + U : U \in \mathcal{U}\}$ é o filtro das vizinhanças de a. Uma rede x_j (em particular, sucessão) de pontos de E converge para um ponto a sse $x_j - a \to 0$.

1.1.1 Teorema. *Tem-se em qualquer e.v.t. E,*

a) *Para cada vizinhança U de zero, existe uma vizinhança W de zero tal que $W + W \subset U$;*

b) *Toda a vizinhança U de zero é absorvente, isto é, para cada $x \in E$ existe $r > 0$ tal que $x \in \rho U$, $\forall \rho \geq r$;*

c) *Toda a vizinhança de zero contém uma vizinhança W de zero equilibrada, isto é, tal que $\lambda W \subset W$, para qualquer $\lambda \in K$ tal que $|\lambda| \leq 1$;*

d) ***Toda a vizinhança de zero contém uma vizinhança de zero fechada.***

(¹) **Sobre o corpo $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.**

Dem.: a) resulta imediatamente da continuidade da adição $(x,y) \to x+y$ no ponto $(0,0)$ e b) da continuidade da aplicação $\lambda \to \lambda x$ de K em E, para $\lambda = 0$. c): Como a multiplicação $(\lambda, x) \to \lambda x$ é uma aplicação contínua de $K \times E$ em E, para cada vizinhança U de zero, existe uma vizinhança V de zero e um número $\delta > 0$ tais que $\alpha V \subset U$, para $|\alpha| \leq \delta$. Ora o conjunto $W = \bigcup \alpha V : |\alpha| \leq \delta$ é equilibrado e é vizinhança de zero contida em U. d): Em virtude de a) e c), se U é vizinhança de zero existe uma vizinhança W de zero equilibrada tal que $W + W \subset U$. Mas isto implica $\overline{W} \subset U$. Com efeito, se $x \in \overline{W}$, tem-se $(x + W) \cap W \neq \emptyset$ e, portanto, $x \in W - W$, mas como W é equilibrada, $W = -W$, donde $x \in W + W \subset U$. ∎

É fácil ver que se um conjunto A num e.v.t. é equilibrado, $\overline{A}$ é também equilibrado. Assim de c) e d) resulta:

Corolário 1. *Num e.v.t. qualquer E existe um sistema fundamental de vizinhanças de zero equilibradas e fechadas.* ∎

Recordemos, por outro lado, que um espaço topológico se diz *regular* se qualquer ponto do espaço tem um sistema fundamental de vizinhanças fechadas e que um tal espaço é separado sse todo o conjunto reduzido a um ponto é fechado. Tem-se assim:

Corolário 2. *Todo o e.v.t. é regular. Um e.v.t. é separado sse o conjunto $\{0\}$ é fechado.* ∎

Exemplos. 1. Se E é um e.v.t. todo o subespaço vectorial de E com a topologia induzida é um e.v.t..

2. Um espaço vectorial E não nulo com a *topologia discreta* não é e.v.t. (o conjunto $\{0\}$ seria absorvente); porém, qualquer espaço vectorial munido da *topologia trivial* é um e.v.t..

3. Recordemos que uma *norma* sobre um espaço vectorial E é uma função real não negativa $x \to \|x\|$ definida em E tal que:

1) $\|x\| = 0$ sse $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ e $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x, y \in E$ e $\forall\, \lambda \in K$.

Uma norma $\|x\|$ sobre E determina uma distância $d(x,y) = \|x-y\|$ e, portanto, uma topologia tal que para cada $a \in E$, as bolas $B[a,\rho] = \{x \in E\colon \|x-a\| \leq \rho\}$ de centro a e raio $\rho > 0$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de a. É um exercício simples verificar que, se a topologia de E é definida por uma norma, E é um e.v.t. separado. As bolas $B[0,\rho]$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero equilibradas e fechadas.

O espaço K^n, n inteiro ≥ 0, com a sua topologia natural que é definida pela norma euclidiana $\|(\xi_1,\ldots,\xi_n)\| = (|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2)^{1/2}$ é um e.v.t..

4. Se (E_α) é uma família de e.v.ts., o espaço vectorial produto $E = \prod_\alpha E_\alpha$ com a topologia produto é também um e.v.t.. Basta ver que compondo as aplicações $(x,y) \to x+y$ de $E \times E$ em E e $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ em E com as projecções $p_\alpha : E \to E_\alpha$ se obtêm aplicações contínuas $E \times E \to E_\alpha$ e $K \times E \to E_\alpha$.

Em particular, se E é um e.v.t. e X um conjunto qualquer, o espaço E^X, formado pelas funções $f : X \to E$, com a topologia do produto é um e.v.t.. Esta topologia chama-se *topologia da convergência simples ou pontual* sobre E^X: uma rede de funções $f_j\colon X \to E$ converge, nesta topologia, para uma função $f\colon X \to E$ sse $f_j(x) \to f(x)$, $\forall x \in E$. Convém ainda recordar que a topologia de K^n é idêntica à do produto $K \times \ldots \times K$ (n factores). Pode-se considerar mesmo K^n como o caso particular do precedente que corresponde a tomar $X = \{1,2,\ldots,n\}$.

A. Aplicações lineares contínuas. Isomorfismos

1.1.2 Teorema. *Se E e F são e.v.ts., uma aplicação linear $f = E \to F$ é contínua sse é contínua no ponto zero. Em geral, se $E_1,\ldots,E_n,F$ são e.v.ts. uma aplicação multilinear $f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ é contínua sse é contínua no ponto $(0,0,\ldots,0)$.* ∎

Se E e F são e.v.t., chama-se *isomorfismo vectorial topológico* ou simplesmente *isomorfismo* de E sobre F a qualquer bijecção linear $f\colon E \to F$ tal que f e f^{-1} são contínuas; é ao mesmo tempo isomorfismo algébrico e isomorfismo topológico (ou seja homeomorfismo).

1.1.3 Teorema. *Todo o e.v.t. separado E de dimensão finita n é isomorfo a K^n; mais precisamente, todo o isomorfismo algébrico $h\colon K^n \to E$ é isomorfismo topológico.*

Dem.: a) h e de um modo geral qualquer aplicação linear de K^n num e.v.t. é contínuo, pois exprime-se na base canónica $e_1, \dots, e_n$ de K^n do seguinte modo: $h(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{1 \le j \le n} \xi_j \, h(e_j)$.

b) Vejamos que h^{-1} é também contínuo. Por comodidade de notação, vamos supor E identificado algebricamente com K^n por meio de h. Nestas condições, tendo em conta 1.1.2, bastará provar que, para qualquer $\rho > 0$, a bola de K^n, $B[0, \rho] = \{x\colon \|x\| \le \rho\}$, é vizinhança de zero em E. Ora a esfera $S_\rho = \{x \in K^n\colon \|x\| = \rho\}$ é um conjunto compacto em K^n e portanto em E, visto que h é contínua. Como E é separado, S_ρ é fechado em E e como $0 \notin S_\rho$, existe uma vizinhança U de zero em E, equilibrada, tal que $U \cap S_\rho = \emptyset$. Mas isto implica $U \subset B[0, \rho]$. Com efeito se não fosse assim, existiria $x \in U$ tal que $\|x\| > \rho$ e o ponto $\frac{\rho}{\|x\|} x$ pertenceria a S_ρ e a U, o que é absurdo. ∎

Do teorema anterior resulta:

Corolário. *Toda a aplicação linear de um e.v.t. E separado e de dimensão finita num e.v.t. qualquer F é contínua.* ∎

B. Quocientes. Somas directas

Sejam E um e.v.t., H um subespaço vectorial de E e considere-se o espaço vectorial quociente E/H; os elementos de E/H são as classes de equivalência para a relação $x - y \in H$, ou seja, são as variedades lineares $x + H$, $x \in E$, e a estrutura vectorial é definida pela condição de a aplicação canónica $j = E \to E/H$, $j(x) = x + H$, ser linear. Em E/H introduz-se a *topologia quociente que é a mais fina das topologias que tornam a aplicação j contínua*. Esta topologia é caraterizada pela propriedade seguinte: um conjunto $U \subset E/H$ é aberto sse $j^{-1}(U)$ é aberto em E.

1.1.4 Teorema.

a) *O espaço E/H com a topologia quociente é um e.v.t. e a aplicação canónica $j\colon E \to E/H$ é aberta;*

b) *E/H é separado sse H é fechado;*

c) *Uma aplicação linear f de E sobre um e.v.t. F é contínua sse o isomorfismo algébrico $\tilde{f}\colon E/\operatorname{Ker} f \to F$ definido pelo diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & F \\ E/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

é contínuo.

Dem.: a) Vejamos que j é aberta. Trata-se de provar que se A é aberto em E, $j(A)$ é aberto em E/H. Ora $j^{-1}(j(A)) = A + H = \bigcup\{A + h\colon h \in H\}$ é aberto em E (por ser reunião de abertos). Vejamos agora que E/H é um e.v.t., ou seja que as aplicações $(x, y) \to x + y$ de $E/H \times E/H$ em E/H e $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E/H$ em E/H são contínuas. Para isso notemos que estas aplicações compostas com $j \times j$ e $\operatorname{id} K \times j$ dão funções contínuas de acordo com os diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r] \arrow[d, "j \times j"'] & E \arrow[d, "j"] \\ E/H \times E/H \arrow[r] & E/H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \times E \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\, k \times j"'] & E \arrow[d, "j"] \\ K \times E/H \arrow[r] & E/H \end{tikzcd}$$

Como $j \times j$ e $\operatorname{id} K \times j$ são abertas e sobrejectivas, o resultado é consequência da seguinte propriedade geral cuja demonstração é simples: ***Sejam X, Y, Z espaços topológicos e $g\colon X \to Y$ uma aplicação aberta e sobrejectiva; então toda a função $f\colon Y \to Z$ que composta com g dê uma função $f \circ g\colon X \to Z$ contínua é também contínua.***

b) Se E/H é separado, o conjunto $\{\dot{0}\}$ reduzido ao ponto zero de E/H é fechado e, portanto, $H = j^{-1}(\{\dot{0}\})$ é fechado em E. Inversamente, se H é fechado em E, o complementar $\complement_E H$ é aberto, e $j(\complement_E H) = \complement_{E/H}\{\dot{0}\}$ é aberto em E/H.

c) Se $\tilde{f}$ é contínua, f é contínua, pois que $f = \tilde{f} \circ j$. Inversamente, se f é contínua, tomando um aberto A em F, $\tilde{f}^{-1}(A) = j \circ f^{-1}(A)$ é aberto em $E/\operatorname{Ker} f$. ∎

Considere-se agora num e.v.t. E dois subespaços suplementares H e L, isto é, tais que E é soma directa de H e L. Significa isto que a aplicação $s\colon\ H \times L \to E$, $s(x,y) = x+y$, é um isomorfismo algébrico. Tomando em H e L as topologias induzidas por E, s é contínua, como é óbvio. Se s^{-1} é também contínua ou, o que é equivalente, s é um isomorfismo, diz-se que E é *soma directa topológica* de H e L ou que cada um destes espaços é *suplementar topológico* do outro.

As aplicações $p\colon\ E \to H$, $q\colon\ E \to L$ que resultam de compor s^{-1} com as projecções $H \times L \to H$, $H \times L \to L$, chamam-se também projecções de E sobre H e L respectivamente:

$$\begin{tikzcd} H \times L \arrow[r, "s"] \arrow[d] & E \arrow[dl, "q"] \\ L & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \times L \arrow[r, "s"] \arrow[d] & E \arrow[dl, "p"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Verifica-se facilmente que $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p = H$ e portanto q induz um isomorfismo algébrico $\tilde{q}\colon\ E/H \to L$ de acordo com o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "j"'] & L \\ E/H \arrow[ur, "\tilde{q}"'] & \end{tikzcd}$$

Note-se ainda que $\tilde{q}^{-1} = j \mid L$ e é portanto, contínua.

1.1.5 Teorema. *Seja E um e.v.t. e sejam H e L subespaços de E suplementares (algébricos) um do outro. Então as condições seguintes são equivalentes:*

a) *L é suplementar topológico de H;*

b) *A projecção q: $E \to L$ é contínua;*

c) *$\tilde{q}$: $E/H \to L$ é contínua ou, o que é equivalente, é um isomorfismo de E/H sobre L.*

Dem.: a)$\Rightarrow$b) é imediato. b)$\Rightarrow$a): se q é contínua, p também é contínua, pois que se tem, $\forall x \in E$, $p(x) = x - q(x)$. Como p e q são contínuas, s^{-1} é contínua. A equivalência de b) e c) é imediata. ∎

C. Hiperplanos. Formas lineares

Seja E um espaço vectorial e H um subespaço de E. Chama-se codimensão de H à dimensão do espaço quociente E/H: $\operatorname{cod}(H) = \dim(E/H) = \dim L$, sendo L um suplementar algébrico de H.

O subespaço H diz-se um *hiperplano* se $\operatorname{cod}(H) = 1$ ou seja se o suplementar algébrico é uma recta. Isto quer dizer também que para qualquer vector $\ell \notin H$, E é soma directa algébrica de H e $K\ell$. É fácil ver que um subespaço H de E é um hiperplano sse é elemento maximal no conjunto dos subespaços de E distintos de E ordenado pela relação $\subset$.

1.1.6 Teorema. *Num e.v.t. E todo o hiperplano é denso ou fechado em E.*

Dem.: Facilmente se vê que, se H é subespaço vectorial de E, o mesmo acontece com a sua aderência. Assim, se H é hiperplano, da relação $H \subset \overline{H}$ vem $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$. ∎

Recordemos que uma forma linear sobre um espaço vectorial E é uma aplicação linear de E no corpo de escalares K. As formas lineares sobre E constituem um espaço vectorial (sobre K) que se chama *dual algébrico* de E e se representa por E^*.

1.1.7 Teorema.

a) *Se* $\varphi \in E^*$ e $\varphi \neq 0$, $\operatorname{Ker}\varphi$ *é hiperplano de* E;

b) *Para qualquer hiperplano* H *de* E *existe uma forma linear* φ *sobre* E *tal que* $H = \operatorname{Ker}\varphi$;

c) *Se* $\varphi, \psi \in E^*$ e $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$, φ *e* ψ *são linearmente dependentes.*

Dem.: a) $\varphi(E)$ é subespaço não nulo de K, portanto $\varphi(E) = K$, assim a aplicação $\tilde{\varphi}$ definida pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & K \\ E/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

é um isomorfismo de $E/\operatorname{Ker}\varphi$ sobre K e, portanto, $\operatorname{cod}(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$.

b) Se H é hiperplano de E, E/H é isomorfo a K; a aplicação canónica $j : E \to E/H$ composta com um isomorfismo $E/H \to K$ dá uma forma linear φ tal que $\operatorname{Ker}\varphi = H$.

c) Se $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = E$, φ e ψ são nulas. Noutra hipótese, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = H$ é um hiperplano de E. Considere-se um vector ℓ de E tal que $\ell \notin H$. Como E é soma directa de H e $K\ell$ todo o elemento $x \in E$ exprime-se de um único modo: $x = h + \xi\,\ell$, $h \in H$ e $\xi \in K$. Assim tem-se $\varphi(x) = \xi\,\varphi(\ell)$, $\psi(x) = \xi\,\psi(\ell)$ donde vem $\varphi(x) = \frac{\varphi(\ell)}{\psi(\ell)}\,\psi(x)$. ∎

Suponhamos agora que E é um e.v.t.. O subespaço de E^* constituído pelas formas lineares contínuas sobre E chama-se *dual topológico* ou simplesmente *dual* de E e representa-se por E'. Se E é *separado de dimensão finita tem-se* $E' = E^*$ (Corol. de 1.1.3).

1.1.8 Teorema.

a) *Uma forma linear φ sobre E é contínua sse* $\operatorname{Ker}\varphi$ *é fechado em E;*

b) *Toda a forma linear φ sobre E não nula é uma aplicação aberta de E sobre K.*

Dem.: a) Basta considerar o caso em que $\varphi \neq 0$. Se φ é contínua, é óbvio que $\operatorname{Ker}\varphi$ é fechado. Inversamente, se esta condição se verifica, o isomorfismo vectorial $\tilde{\varphi}$ (ver diagrama anterior) é contínuo em virtude de $E/\operatorname{Ker}\varphi$ ser separado e de dimensão 1 e isto implica que φ é contínua.

b) Basta ter em conta que $\tilde{\varphi}^{-1}$ é contínua (mesmo que φ não o seja). ■

1.2 – Conjuntos convexos e absolutamente convexos. Espaços localmente convexos

Seja E um espaço vectorial. Se $x, y \in E$, designa-se por $[x, y]$ o segmento de extremos x e y, isto é, o conjunto dos pontos $t\,x+(1-t)\,y$ em que $0 \leq t \leq 1$; estes pontos podem-se escrever também com a forma $\alpha\,x + \beta\,y$, em que $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$, e chamam-se *combinações convexas* de x e y. De um modo geral se $x_1, ..., x_n \in E$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são números reais ≥ 0 e com soma $\sum \alpha_i = 1$, o ponto $\alpha_1\,x_1 + ... + \alpha_n\,x_n$ diz-se uma *combinação convexa* de $x_1, ..., x_n$.

Um conjunto $A \subset E$ chama-se *convexo* se para quaisquer $x, y \in A$ o segmento $[x, y] \subset A$, ou seja $\alpha\,x + \beta\,y \in A$ se $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$. Esta condição pode-se exprimir pela relação $\alpha\,A + \beta\,A \subset A$, para quaisquer $\alpha, \beta \geq 0$ tais que $\alpha+\beta = 1$ ou ainda, $\alpha\,A+\beta\,A \subset (\alpha+\beta)\,A$, para quaisquer $\alpha, \beta \geq 0$.

Se A é convexo, A contém todas as combinações convexas de quaisquer pontos $x_1, ..., x_n \in A$ (se $n = 1, 2$, resulta da definição e o caso geral estabelece-se facilmente por indução).

Um conjunto $A \subset E$ chama-se *absolutamente convexo* se é equilibrado e convexo. Verifica-se facilmente que A é absolutamente convexo sse $\alpha\,A+\beta\,A \subset A$, para quaisquer $\alpha, \beta \in K$ tais que $|\alpha|+|\beta| \leq 1$, ou mais explicitamente: A contém com cada par de pontos x, y, as combinações $\alpha\, x + \beta\, y$ tais que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$.

Por indução prova-se, facilmente, que se A é absolutamente convexo, A contém com quaisquer pontos $x_1, ..., x_n$ todas as combinações $\alpha_1\, x_1 + ... + \alpha_n\, x_n$ tais que $|\alpha_1| + ... + |\alpha_n| \leq 1$, que se chamam *combinações absolutamente convexas* de $x_1, ..., x_n$.

1.2.1 Teorema.

a) *Se A é um conjunto convexo num espaço vectorial E e $a \in E$, $a + A$ é convexo;*

b) *A imagem directa ou inversa de um conjunto convexo (resp. absolutamente convexo) por uma aplicação linear é convexa (resp. absolutamente convexa);*

c) *Se (A_i) é uma família de conjuntos convexos (resp. absolutamente convexos) num espaço vectorial E, $\bigcap_i A_i$ é também convexa (resp. absolutamente convexa);*

d) *Se (E_i) é uma família de espaços vectoriais e, para cada i, A_i é um conjunto convexo (resp. absolutamente convexo) de E_i, o produto $\prod_i A_i$ é um conjunto convexo (resp. absolutamente convexo) do espaço produto $\prod_i E_i$;*

e) *Se A é um conjunto convexo (resp. absolutamente convexo) num e.v.t., o mesmo acontece com $\overline{A}$.* ∎

Todas estas propriedades são fáceis de demonstrar; deixamo-las como exercício.

Se $M \subset E$ chama-se *envólucro convexo* de M e representa-se por $c(M)$ a intersecção de todos os subconjuntos convexos de E que contêm M. Verifica-se facilmente que $c(M)$ *é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de M*. De modo análogo se define o *envólucro absolutamente convexo* $ac(M)$ de M: é a intersecção de todos os subconjuntos de E absolutamente convexos que contêm M *e é constituído por todas as combinações absolutamente convexas de elementos de M*. Se E é um e.v.t. define-se ainda o *envólucro convexo* (resp. *absolutamente convexo*) *fechado* de M como sendo a intersecção de todos os conjuntos de E fechados e convexos (resp.

absolutamente convexos) que contêm M e vê-se sem dificuldade que é idêntico a $\overline{c(M)}$ (resp. $\overline{ac(M)}$).

Exemplos: **1.** Se $a_0, ..., a_n$ são pontos de E tais que $a_1 - a_0$, ..., $a_n - a_0$ são linearmente independentes, o envólucro convexo de $\{a_0, ..., a_n\}$ é o n-simplex de vértices $a_0, ..., a_n$. Se $n = 1$ é o segmento de recta $[a_0, a_1]$.

2. Num e.v.t. E todo o conjunto convexo é conexo. Em particular, em $\mathbf{R}$ um conjunto é convexo sse é um intervalo.

3. Num espaço normado E as bolas fechadas $B[0, \rho]$ com centro na origem são absolutamente convexas. Com efeito, se $x, y \in B[0, \rho]$ tem-se, para $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, $\|\alpha\, x + \beta\, y\| \leq |\alpha|\, \|x\| + |\beta|\, \|y\| \leq (|\alpha| + |\beta|)\, \rho \leq \rho$ e portanto $\alpha\, x + \beta\, y \in B[0, \rho]$. De modo análogo se vê que as bolas abertas de centro em 0 são absolutamente convexas.

4. Se A, B são conjuntos convexos (resp. absolutamente convexos) num espaço vectorial E, o envólucro convexo (resp. absolutamente convexo) de $A \cup B$ é formado pelas combinações convexas (resp. absolutamente convexas) dos pares $(x, y) \in A \times B$.

A. Espaços localmente convexos

Chama-se espaço localmente convexo, abreviatura e.l.c., a um e.v.t. E *tal que a origem tem um sistema fundamental de vizinhanças absolutamente convexas*. Verifica-se facilmente que isto equivale a admitir que a origem (ou qualquer ponto de E) tem um sistema fundamental de vizinhanças convexas.

Exemplos: **1.** Todo o espaço normado E (com a topologia dada pela norma) é um e.l.c..

2. Se (E_α) é uma família de e.l.cs., o produto $\prod_\alpha E_\alpha$ é também um e.l.c.. Em particular, se E é um e.l.c. e X um conjunto qualquer, o espaço das funções $f : X \to E$ com a topologia da convergência simples é um e.l.c..

3. Se E é um e.l.c. e H é subespaço de E, $E \mid H$ é um e.l.c..

4. Todo o subespaço vectorial de um e.l.c. com a topologia induzida é um e.l.c.. Se E é um e.l.c., todo o e.v.t. isomorfo a E é também e.l.c..

Se E é um espaço localmente convexo, a topologia de E diz-se localmente convexa. O teorema que segue dá um processo simples de obter topologias localmente convexas.

1.2.2 Teorema. *Seja E um espaço vectorial e $\mathcal{B}$ uma base de filtro sobre E tal que:*

1) *Todos os conjuntos de $\mathcal{B}$ são absolutamente convexos e absorventes;*

2) *$\mathcal{B}$ é invariante para as homotetias de razão $\rho > 0$, isto é, se $U \in \mathcal{B}$ e $\rho > 0$, $\rho U \in \mathcal{B}$.*

Existe então uma topologia localmente convexa τ sobre E e uma só tal que $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ.

Dem.: Se existir uma topologia nestas condições ela é única, pois que, para cada $a \in E$, $a+\mathcal{B} = \{a+U : U \in \mathcal{B}\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de a. Para ver que existe, vamos ver em primeiro lugar que há efectivamente uma topologia τ sobre E tal que, $\forall\, a \in E$, $a+\mathcal{B}$ é sistema fundamental de vizinhanças de a. Para isso, tendo em conta o modo como se define uma topologia por meio de vizinhanças, bastará mostrar que, para cada $a \in E$ e cada $U \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $a+U$ é vizinhança de qualquer $x \in a+W$. Ora tomando $W = \frac{1}{2}U$, o que é legítimo em virtude de 2), vem, atendendo a que U é convexo, $x+W \subset a+W+W = a+\frac{1}{2}U+\frac{1}{2}U \subset a+U$. Teremos agora de provar que a topologia τ assim definida é localmente convexa. Tendo em conta a condição 1) bastará provar que E munido de τ é um e.v.t. ou seja que as aplicações $(x,y) \to x+y$ de $E \times E$ em E e $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ em E são contínuas. Para a primeira basta ver que se tem para cada par $(a,b) \in E \times E$ e cada $U \in \mathcal{B}$, $(a+\frac{1}{2}U) + (b+\frac{1}{2}U) \subset (a+b)+U$. Para a segunda vamos ver que se uma rede $(\lambda_j, x_j)_{j\in J}$ em $K \times E$ converge para (λ, x) também $\lambda_j x_j \to \lambda x$ ou seja $\lambda_j x_j - \lambda x \to 0$. Tem-se a seguinte identidade fácil de verificar

$$\lambda_j x_j - \lambda x = (\lambda_j - \lambda)(x_j - x) + \lambda (x_j - x) + (\lambda_j - \lambda) x .$$

Basta provar que cada uma das parcelas do segundo membro tende para zero (note que já provamos que a adição é contínua). Tome-se $U \in \mathcal{B}$. Como $x_j - x \to 0$ e $\lambda_j - \lambda \to 0$, pode-se tomar $j_0 \in J$ de modo que para $j \geq j_0$, $x_j - x \in U$ e $|\lambda_j - \lambda| \leq 1$, então como U é equilibrado, $(\lambda_j - \lambda)(x_j - x) \in U$, para $j \geq j_0$, e, portanto, $(\lambda_j - \lambda)(x_j - x) \to 0$. Vejamos que $\lambda (x_j - x) \to 0$. Tomando $\rho > |\lambda|$ e $j_0 \in J$ de modo que, para $j \geq j_0$, $x_j - x \in \frac{1}{\rho} U$, vem, para estes valores de j, $\lambda (x_j - x) = \frac{\lambda}{\rho} \rho (x_j - x) \in \frac{\lambda}{\rho} U \subset U$. Resta ver que $(\lambda_j - \lambda) x \to 0$. Ora como U é absorvente, existe $r > 0$ tal que $x \in rU$, então tomando $j_0 \in J$ pela condição $|\lambda_j - \lambda| < \frac{1}{r}$, para $j \geq j_0$, vem $(\lambda_j - \lambda) x = r (\lambda_j - \lambda) \frac{1}{r} x \in U$. ■

1.3 – Subnormas e seminormas

Seja E um espaço vectorial. Chama-se *subnorma* sobre E a uma função real não negativa p definida em E com as propriedades:

(S1) (positivamente homogénea): $p(\rho x) = \rho p(x)$, $\forall x \in E$ e $\forall \rho \geq 0$;

(S2) (subaditiva): $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.

Se em vez de (S1) se verifica a condição mais forte:

(S'1) (absolutamente homogénea): $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall x \in E$ e $\forall \lambda \in K$,

diz-se que p é uma *seminorma* sobre E.

Vê-se imediatamente que *p é seminorma sse é subnorma e $p(\theta x) = p(x)$, para qualquer $\theta \in K$ tal que $|\theta| = 1$*. Tem-se, em particular, $p(-x) = p(x)$; combinando esta condição com (S2) deduz-se facilmente que $p(x - y) \geq |p(x) - p(y)|$, $\forall x, y \in E$ (esta propriedade não é válida para as subnormas).

Se p é subnorma sobre E da definição resulta que $p(0) = 0$; se, inversamente, $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, diz-se que p é *separante*. Uma seminorma separante é uma norma. Se $a \in E$ e $\rho > 0$, o conjunto $B_p[a,\rho] = \{x: p(x-a) \leq \rho\}$ (resp. $B_p(a,\rho) = \{x: p(x-a) < \rho\}$) chama-se *bola fechada* (resp. *aberta*) *de centro* a *e raio* ρ, *relativa a* p. Tem-se $B_p[a,\rho] = a + B_p[0,\rho]$ e $B_p[0,\rho] = \rho B_p[0,1]$; se p e q são subnormas tais que $p \leq q$, $B_q[a,\rho] \subset B_p[a,\rho]$. De modo análogo para as bolas abertas.

Facilmente se prova que:

1.3.1 Teorema.

a) *Se p é uma subnorma (resp. seminorma) sobre E as bolas abertas ou fechadas de centro na origem, relativas a p, são convexas (resp. absolutamente convexas) e absorventes.*

b) *Se $p_1, \ldots, p_n$ são subnormas (resp. seminormas) sobre E as combinações lineares $\lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n$ de coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ e $\sup(p_1, \ldots, p_n)$ são também subnormas (resp. seminormas) sobre E.* ∎

Considere-se agora um conjunto $A \subset E$ *absorvente*; chama-se *função de Minkowski* de A à função $p_A : E \to \mathbf{R}$ assim definida:

$$p_A(x) = \inf\Big\{\rho > 0 : x \in \rho A\Big\} .$$

1.3.2 Teorema.

a) *Se A é convexo (resp. absolutamente convexo) e absorvente, p_A é uma subnorma (resp. seminorma) sobre E que se diz definida por A e tem-se:*

$$B_{p_A}(0,1) \subset A \subset B_{p_A}[0,1] ;$$

b) *Se p é subnorma sobre E e A é um conjunto convexo tal que $B_p(0,1) \subset A \subset B_p[0,1]$ (portanto, absorvente) tem-se $p = p_A$.*

Deste teorema resulta que a correspondência $A \to p_A$ determina uma aplicação da classe dos subconjuntos de E convexos (resp. absolutamente convexos) e absorventes sobre o conjunto das subnormas (resp. seminormas) sobre E. Esta aplicação não é injectiva: uma subnorma p é determinada por qualquer conjunto convexo A tal que $B_p(0,1) \subset A \subset B_p[0,1]$.

Dem.: a) Suponhamos que A é convexo e absorvente. Se $x, y \in E$, para qualquer $\delta > 0$, existem números $\rho, \rho' > 0$ tais que $\rho \leq p_A(x) + \delta/2$, $\rho' \leq p_A(y) + \delta/2$ e $x \in \rho\, A$, $y \in \rho'\, A$; assim, $x + y \in \rho\, A + \rho'\, A \subset (\rho + \rho')\, A$ donde $p_A(x+y) \leq \rho + \rho' \leq p_A(x) + p_A(y) + \delta$ e como δ é arbitrário > 0, segue-se que $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$. Se $\lambda \geq 0$, da relação $x \in \rho\, A$ em que $\rho > 0$, deduz-se $\lambda\, x \in \lambda\, \rho\, A$, $p_A(\lambda\, x) \leq \lambda\, \rho$ e, portanto, $p_A(\lambda\, x) \leq \lambda\, p_A(x)$ donde resulta a desigualdade oposta $p_A(\lambda\, x) \geq \lambda\, p_A(x)$. Assim p_A é subnorma. Se A é absolutamente convexo de $\theta\, A = A$, para $|\theta| = 1$, deduz-se facilmente $p_A(\theta\, x) = p(x)$, e portanto que p_A é seminorma. Tem-se, evidentemente, $A \subset B_{p_A}[0,1]$. Vejamos que $B_{p_A}(0,1) \subset A$. Ora se $x \in B_{p_A}(0,1)$ existe um número positivo $\lambda < 1$ tal que $x \in \lambda\, A$ ou seja $\frac{1}{\lambda}\, x \in A$; como x pertence ao segmento $[0, \frac{1}{\lambda}\, x]$ e A é convexo, segue-se que $x \in A$.

b) Se $x \in \rho\, A$ em que $\rho > 0$, da relação $A \subset B_p[0,1]$ vem $p(x) \leq \rho$ e desta deduz-se $p(x) \leq p_A(x)$; a desigualdade oposta deduz-se de modo análogo da relação $B_p(0,1) \subset A$. ∎

1.3.3 Teorema. *Se E é um e.v.t., para qualquer subnorma p sobre E são equivalentes:*

a) *p é contínua;*

b) *p é contínua no ponto zero;*

c) *p é majorada numa vizinhança de zero;*

d) *$B_p(0,1)$ é vizinhança aberta de zero;*

e) *$B_p[0,1]$ é vizinhança fechada de zero.*

Dem.: **a)⇒b)** é imediata. **b)⇒a)** Se p é contínua no ponto zero, da relação (fácil de estabelecer), $|p(x) - p(a)| \leq \max\{p(x-a), p(a-x)\}$ deduz-se imediatamente que p é contínua em qualquer $a \in E$. A implicação **b)⇒c)** é óbvia. **c)⇒b)** Seja U vizinhança de zero e $M > 0$ tais que $p(x) \leq M$, $\forall\, x \in U$. Então, dado $\delta > 0$, tem-se, para cada x da vizinhança $\frac{\delta}{M}\, U$, $p(x) \leq \delta$, o que é suficiente para garantir a continuidade de p visto que $p(x) \geq 0$, $\forall\, x \in E$. Para acabar a demonstração bastará agora provar que a)$\Rightarrow$d), a)$\Rightarrow$e), d)$\Rightarrow$c) e e)$\Rightarrow$c), o que é imediato. ∎

Corolário 1. *Uma forma linear φ sobre um e.v.t. é contínua sse $|\varphi|$ é majorada numa vizinhança de zero.*

Basta ter em conta que $|\varphi(x)|$ é uma seminorma sobre E. ∎

Corolário 2. *Se p e q são subnormas sobre um e.v.t. E e existe $k \geq 0$ tal que $p(x) \leq k\,q(x)$, $\forall x \in E$, então se q é contínua p é contínua.* ∎

Corolário 3. *Se U é vizinhança de zero convexa num e.v.t. E, a subnorma p_U é contínua em E; tem-se, além disso,*

$$\text{(a)} \qquad B_{p_U}(0,1) = \overset{\circ}{U} \quad \text{e} \quad B_{p_U}[0,1] = \overline{U}\,.$$

Em particular, se U é aberta, $U = B_{p_U}(0,1)$, se U é fechada, $U = B_{p_U}[0,1]$. A continuidade de p_U resulta de 1.3.3 c). Para estabelecer as relações (a) basta provar (tendo em conta 1.3.2 a), 1.3.3 d) e 1.3.3 e)) que $\overset{\circ}{U} \subset B_{p_U}(0,1)$ e $B_{p_U}[0,1] \subset \overline{U}$. Ora se $x \in \overset{\circ}{U}$, U é vizinhança de x e da continuidade da aplicação $\rho \to \rho\,x$ de $\mathbf{R}$ *em E, para $\rho = 1$, resulta que existe $\rho > 1$ tal que $\rho\,x \in U$, o que implica $p(x) < 1$. Para a segunda inclusão, basta provar que $x \in \overline{U}$ se $p_U(x) = 1$; ora se esta condição se verifica, para cada inteiro $n > 0$, existe ρ_n tal que $1 < \rho_n < 1 + \frac{1}{n}$ e $x \in \rho_n U$. Assim $\frac{1}{\rho_n} x \in \overline{U}$ e tomando o limite vem $x \in \overline{U}$.* ∎

1.3.4 Teorema. *Seja A um conjunto convexo num e.v.t. E. Se $a \in \overset{\circ}{A}$ e $b \in \overline{A}$, os pontos do segmento semiaberto $[a,b[= [a,b] \sim \{b\}$ são todos interiores a A.*

Dem.: Usando uma translacção pode-se supor $a = 0$. Assim, A é vizinhança convexa de zero e, portanto, p_A é subnorma contínua em E. Ora se $c \in [a,b[= [0,b[$, $c = t\,b$ com $0 \leq t < 1$, e como $p_A(b) \leq 1$, $p_A(c) = t\,p_A(b) < 1$. ∎

Corolário 1. *Se A é um convexo num e.v.t. E, $\overset{\circ}{A}$ é convexo.* ∎

Corolário 2. *Se A é um convexo num e.v.t. e $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ então $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ e $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$.* ∎

Deixamos a demonstração destes corolários como exercício.

1.4 – Topologias definidas por seminormas

Seja E um espaço vectorial e S um conjunto de seminormas sobre E. O conjunto $\mathcal{B}$ formado pelas bolas $B_p[0,\rho]$ tais que $p \in S$ e $\rho > 0$ e as suas intersecções finitas é uma base de filtro sobre E que verifica as condições 1 e 2 de 1.2.2.. Existe então uma topologia localmente convexa τ sobre E e uma só tal que $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ; esta topologia diz-se *gerada* ou *definida* por S (ou pelas seminormas $\in S$). As bolas abertas $B_p(0,\rho)$, tais que $p \in S$ e $\rho > 0$ e as suas intersecções finitas constituem também um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ.

Em particular, uma seminorma p sobre E define uma topologia localmente convexa: as bolas fechadas $B_p[0,\rho]$ (e também as abertas) constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero.

Inversamente, *para qualquer e.l.c. E existe um sistema de seminormas sobre E que gera a sua topologia.* Se $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de zero absolutamente convexas, o conjunto das funções de Minkowski p_U das vizinhanças $U \in \mathcal{B}$ é um sistema nestas condições. Com efeito, cada bola $B_{p_U}[0,\rho]$ é vizinhança de zero em E (pois $B_{p_U}[0,\rho] \supset \rho U$) e para qualquer vizinhança V de zero em E existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $V \supset \overline{U} = B_{p_U}[0,1]$.

Se S é um sistema de seminormas sobre um espaço vectorial E, cada seminorma $p \in S$ é contínua para a topologia definida por S (pois as bolas $B_p[0,1]$ são vizinhanças de zero). Se T é outro sistema de seminormas sobre E, diz-se que T é equivalente a S se define a mesma topologia que S. Uma condição necessária e suficiente para que isto se verifique é que toda a seminorma de um qualquer dos sistemas, S, T seja contínua para a topologia definida pelo outro. Daqui resulta imediatamente que em qualquer espaço localmente convexo E existe um sistema de seminormas máximo que define a sua topologia:

o *sistema de todas as seminormas contínuas sobre* E.

Um sistema S de seminormas sobre um espaço vectorial E diz-se *filtrante* se para quaisquer $p, q \in S$, existe $r \in S$ tal que $p(x) \leq r(x)$ e $q(x) \leq r(x)$, $\forall x \in E$ (isto implica que toda a família finita de seminormas de S é majorada por uma seminorma de S). Se S é filtrante as bolas $B_p[0,\rho]$, em que $p \in S$ e $\rho > 0$, constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero, pois toda a intersecção finita $B_{p_1}[0,\rho_1] \cap \ldots \cap B_{p_n}[0,\rho_n]$, $p_1, \ldots, p_n \in S$ e $\rho_1, \ldots, \rho_n > 0$, contém uma bola $B_p[0,\rho]$ tal que p é uma seminorma de S que majora $p_1, \ldots, p_n$ e $\rho = \inf\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$.

Para qualquer sistema de seminormas S sobre E, existe sempre um sistema de seminormas filtrante S' sobre E equivalente a S. Por exemplo, $S' = \{\sup\{p_1, \ldots, p_n\};\ p_1, \ldots, p_n \in S\}$ ou $S' = \{p_1 + \ldots + p_n :$ $p_1, \ldots, p_n \in S\}$, etc..

1.4.1 Teorema. *Seja* E *um e.l.c. e* S *um sistema de seminormas que gera a topologia de* E. *Então:*

a) *Uma rede* $x_j \to 0$ *em* E *sse* $p(x_j) \to 0$, $\forall p \in S$;

b) E *é separado sse para cada* $x \neq 0$ *em* E, *existe* $p \in S$ *tal que* $p(x) \neq 0$;

c) *Se* H *é subespaço de* E, *as restrições* $p \mid H$ *das seminormas* $p \in S$ *a* H *geram a topologia induzida por* E *em* H;

d) *Se* F *é outro espaço localmente convexo e* T *é um sistema de seminormas que define a topologia de* F, *uma aplicação linear* $f : E \to F$ *é contínua sse para qualquer* $q \in T$ *existe uma família finita* $p_1, \ldots, p_n \in S$ *e um número* $M > 0$ *tais que*

$$q[f(x)] \leq M \sup\{p_1(x), \ldots, p_n(x)\}, \qquad \forall x \in E . \tag{1}$$

Se S *é filtrante, esta condição exprime-se do seguinte modo mais simples:*

$$\forall q \in T\ \exists p \in S \text{ e } M > 0 \text{ tais que } q[f(x)] \leq M\, p(x),\ \forall x \in E. \tag{2}$$

Dem.: a) Como cada $p \in S$ é contínua, $x_j \to 0 \Rightarrow p(x_j) \to 0$; inversamente, se $p(x_j) \to 0$, $\forall p \in S$, dada uma família finita

$p_1, ..., p_n \in S$ e $\rho_1, ..., \rho_n > 0$, existe um índice j_0 tal que $j \geq j_0$ $\Rightarrow$ $p_k(x_j) \leq \rho_k$, $\forall k = 1, ..., n$ $\Rightarrow$ $x_j \in \bigcap_{1 \leq k \leq n} B_{p_k}[0, \rho_k]$, e portanto $x_j \to 0$.

b) Basta ter em conta que E é separado sse a intersecção de todas as bolas $B_p[0, \rho]$, $p \in S$ e $\rho > 0$ (que é idêntica à intersecção de todas as vizinhanças de zero) se reduz a $\{0\}$.

c) Como as seminormas $p \mid H$ são contínuas para a topologia induzida, basta ver que se uma rede x_j em H é tal que $\forall p \in S$ $p \mid H(x_j) = p(x_j) \to 0$, $x_j \to 0$ para esta topologia, o que é imediato.

d) Basta considerar o caso em que S é filtrante. Ora se (2) se verifica, para cada rede $x_j \to 0$ em E, $f(x_j) \to 0$ em F. Inversamente, se f é contínua, para cada $q \in T$ existem $p \in S$ e $r > 0$ tais que $q[f(u)] \leq 1$, para $u \in B_p[0, r]$. Então, se $x \in E$, para qualquer $\rho > p(x)$, $u = r/\rho\, x \in B_p[0, r]$ e, portanto, $q[f(x)] = \frac{\rho}{r} q[f(u)] \leq \frac{\rho}{r}$; mas isto implica (dada a arbitrariedade de ρ) $q[f(x)] \leq \frac{1}{r} p(x)$. ∎

Tem-se como consequência de 1.4.1 c):

Corolário 1. *Se E é um e.l.c. e S é um sistema filtrante de seminormas sobre E que gera a sua topologia, uma forma linear φ sobre E é contínua sse existe uma seminorma $p \in S$ e um número $r > 0$ tais que $|\varphi(x)| \leq r\, p(x)$, $\forall x \in E$. Isto significa também que uma forma linear φ sobre E é contínua sse é contínua para uma das seminormas do sistema S.* ∎

De 1.4.1 d) deduz-se também uma condição para que dois sistemas S e T de seminormas sobre um espaço vectorial E sejam equivalentes. Para o caso em que S e T são filtrantes tem-se: *S e T são equivalentes sse para toda a seminorma p de um qualquer dos sistemas, existe uma seminorma q no outro e um número $M > 0$ tais que $p(x) \leq M\, q(x)$, $\forall x \in E$.*

Em particular duas seminormas p e q sobre E são equivalentes sse existem $M > 0$ e $N > 0$ tais que $N\, p(x) \leq q(x) \leq M\, p(x)$, $\forall x \in E$.

Se E é um espaço vectorial e H é um subespaço de E, para qualquer seminorma p sobre E, a função $\dot{p}\colon E/H \to \mathbf{R}$ assim definida:

$$\dot{p}(\xi) = \inf\{p(x)\colon x \in \xi\}, \qquad \xi \in E/H ,$$

é uma seminorma sobre E/H que se diz obtida de p por passagem ao quociente. Verifica-se facilmente que:

1.4.2 Teorema. *Se E é um e.l.c. e H é um subespaço vectorial de E, para qualquer sistema S de seminormas filtrante que gera a topologia de E, $\dot{S} = \{\dot{p} : p \in S\}$ gera a topologia (quociente) de E/H.* ∎

Prova-se, ainda, sem dificuldade, que se $(E_i)_{i \in I}$ é uma família de espaços localmente convexos e para cada $i \in I$, S_i é um sistema de seminormas que define a topologia de E_i, a topologia do espaço produto $E = \prod_i E_i$ é gerada pelo conjunto de seminormas $\{q \circ \mathrm{pr}_i : i \in I \text{ e } q \in S_i\}$ em que pr_i é a projecção $E \to E_i$. Em particular:

1.4.3 Teorema. *Se E é um espaço normado e X é um conjunto qualquer, a topologia da convergência simples (ou pontual) no espaço E^X das funções $f : X \to E$ é definida pelas seminormas $p_x(f) = \|f(x)\|$, $x \in X$.* ∎

1.5 – Teorema de Hann-Banach

Alguns teoremas que seguem referem-se a espaços vectoriais reais; mas aplicam-se também a qualquer espaço vectorial complexo E considerando a estrutura de espaço vectorial sobre $\mathbf{R}$ que resulta de restringir a multiplicação $(\lambda, x) \to \lambda x$ a $\mathbf{R} \times E$. Para não duplicar os enunciados continuamos como até agora a considerar espaços vectoriais indistintamente reais ou complexos, indicando as noções relativas à estrutura do espaço sobre $\mathbf{R}$ com o adjectivo "real"; assim, uma forma linear real sobre E é uma aplicação $\varphi : E \to \mathbf{R}$ tal que $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$; um subespaço real H de E é uma parte não vazia de E tal que $\alpha H + \beta H \subset H$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, etc..

Seja E um espaço complexo. Se g é uma forma linear sobre E, a sua parte real $\mathrm{Re}\, g$ é uma forma linear real sobre E, como se verifica facilmente. Inversamente, dada uma forma linear real φ sobre E, existe uma única forma linear g sobre E tal que $\varphi = \mathrm{Re}\, g$; a forma g

é dada por

$$(1) \qquad g(x) = \varphi(x) - i\,\varphi(i\,x)\,, \qquad \forall\, x \in E\,.$$

A demonstração é um exercício simples que deixamos ao leitor. Vê-se assim que a relação $\varphi = \operatorname{Re} g$ ou a equivalente fórmula (1) determina uma *correspondência biunívoca entre as formas lineares g sobre E e as formas lineares reais φ sobre E, e é óbvio que g é contínua sse φ é contínua.*

1.5.1 Teorema de Hahn-Banach (Forma analítica). *Seja E um espaço vectorial, p uma subnorma sobre E e H um subespaço real de E. Então, para qualquer forma linear φ sobre H que é majorada por p em H, ou seja, tal que $\varphi(x) \leq p(x)$, $\forall\, x \in H$, existe uma forma linear real $\tilde{\varphi}$ sobre E que prolonga φ e é majorada por p em E, isto é,*

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \quad \forall\, x \in H, \qquad \text{e} \qquad \tilde{\varphi}(x) \leq p(x), \quad \forall\, x \in E\,.$$

Dem.: a) Considere-se primeiro o caso em que H é um hiperplano real de E. Tomando em E um elemento $a \notin H$, toda a forma linear real $\tilde{\varphi}$ sobre E que prolonga φ fica determinada pelo seu valor em a, $\alpha = \tilde{\varphi}(a)$, pois que cada $x \in E$ representa-se (de um único modo) pela expressão $x = \xi\, a + h$, em que $\xi \in \mathbb{R}$ e $h \in H$, e $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(h) + \xi\,\alpha$. Para a forma $\tilde{\varphi}$ que se procura tem-se, ainda, $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$, portanto,

$$(1) \qquad \varphi(h) + \xi\,\alpha \leq p(\xi\, a + h)\,, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \forall\, h \in H\,.$$

Assim, para provar que existe uma forma $\tilde{\varphi}$ nas condições do enunciado bastará mostrar que existe um número real α que verifica (1). Ora esta relação, para $\xi > 0$, é equivalente a

$$(2) \qquad \alpha \leq p(a + h') - \varphi(h')\,, \qquad \forall\, h' \in H\,,$$

e para $\xi < 0$ é equivalente a

$$(3) \qquad \alpha \geq -p(-a + h'') + \varphi(h'')\,, \qquad \forall\, h'' \in H\,.$$

Basta então mostrar que $-p(-a+h'')+\varphi(h'')\leq p(a+h')-\varphi(h')$, $\forall\, h', h''\in H$. Ora tem-se $\varphi(h''+h')\leq p(h''+h')=p(-a+h''+a+h')\leq p(-a+h'')+p(a+h')$ donde o resultado.

b) Para o caso geral teremos de usar o lema de Zorn: *todo o conjunto ordenado X tal que toda a parte totalmente ordenada é majorada em X tem um elemento maximal.*

Considere-se então o conjunto Δ constituído pelos pares (M,ψ) em que M é subespaço real de E que contém H e ψ é uma forma linear real sobre M que prolonga φ e é majorada por p em M, e ordenemos Δ do seguinte modo $(M,\psi)\leq(M',\psi')$ sse $M\subset M'$ e ψ' prolonga ψ. Verifica-se facilmente que todo o subconjunto totalmente ordenado de Δ tem um majorante em Δ e, portanto, em virtude do lema de Zorn, Δ tem um elemento maximal (N,θ). Vamos ver que $N=E$, o que demonstra o teorema. Com efeito se fosse $N\neq E$, tomando em E um elemento $a\notin N$, N seria hiperplano de $N'=N+\mathbf{R}\,a$, mas em virtude de a), θ prolonga-se numa forma linear real θ' sobre N' tal que $\theta'(x)\leq p(x)$ em N'. Assim, $(N',\theta')\in\Delta$ e (N,θ) não seria maximal em Δ. ∎

Do teorema anterior deduz-se o seguinte teorema de extensão para formas lineares reais ou complexas que muitos autores chamam também teorema de Hahn-Banach:

1.5.2 Teorema. *Seja E um espaço vectorial e p uma seminorma sobre E. Então, qualquer forma linear φ sobre um subespaço H de E tal que $|\varphi(x)|\leq p(x)$, $\forall\, x\in H$, prolonga-se numa forma linear ψ sobre E tal que se tem também $|\psi(x)|\leq p(x)$, $\forall\, x\in E$.*

Dem.: a) No caso em que E é real, é consequência imediata de 1.5.1, tendo em conta que, sendo p uma seminorma, para qualquer forma linear g sobre um subespaço de E, a relação $|g(x)|\leq p(x)$ é equivalente a $g(x)\leq p(x)$.

b) Suponhamos que E é complexo e seja $h=\mathrm{Re}\,\varphi$; h é uma forma linear real sobre H e verifica $h(x)\leq p(x)$, $\forall\, x\in E$. Em virtude de 1.5.1, h estende-se numa forma linear real g sobre E tal que $g(x)\leq p(x)$, $\forall\, x\in E$. Considere-se a forma linear complexa

ψ sobre E tal que $g = \operatorname{Re}\psi$ ou seja $\psi(x) = g(x) - i\,g(i\,x)$. Vê-se imediatamente que ψ prolonga φ; resta então ver que $|\psi(x)| \leq p(x)$, $\forall\, x \in E$. Ora para cada $x \in E$ existe um número complexo ω tal que $|\omega| = 1$ e $|\psi(x)| = \psi(x) \cdot \omega = \psi(\omega\, x)$. Assim, tem-se (visto que $|\psi(x)|$ é real) $|\psi(x)| = \psi(\omega\, x) = g(\omega\, x) \leq p(\omega\, x) = p(x)$. ∎

Deste teorema resultam os seguintes corolários bastante importantes nas aplicações:

Corolário 1. *Se E é um espaço vectorial e p uma seminorma sobre E, para cada $x_0 \in E$ existe uma forma linear φ sobre E tal que*

$$\varphi(x_0) = p(x_0) \quad \text{e} \quad |\varphi(x)| \leq p(x), \quad \forall\, x \in E\ .$$

Dem.: No subespaço $H = K\, x_0$ define-se uma forma linear θ pondo $\theta(\lambda\, x_0) = \lambda\, p(x_0)$, $\forall\, \lambda \in K$; tem-se $|\theta(\lambda\, x_0)| = |\lambda|\, p(x_0) = p(\lambda\, x_0)$. Assim, por 1.5.2, θ estende-se numa forma linear φ sobre E que verifica as condições do enunciado. ∎

Corolário 2. *Se E é um espaço localmente convexo separado não nulo, existe pelo menos uma forma linear contínua sobre E não nula (por outras palavras, o dual topológico E' de E não é nulo).*

Dem.: Considere-se em E um ponto $x_0 \neq 0$. Como E é separado, existe uma seminorma contínua p sobre E tal que $p(x_0) \neq 0$ mas pelo corolário anterior existe uma forma linear φ sobre E tal que $\varphi(x_0) = p(x_0) \neq 0$ e $|\varphi(x)| \leq p(x)$, $\forall\, x \in E$, e que é, portanto, contínua. ∎

Corolário 3. *Se E é um espaço localmente convexo, toda a forma linear contínua φ sobre um subespaço H de E estende-se numa forma linear contínua sobre E.*

Dem.: Como as restrições a H das seminormas contínuas sobre E geram a topologia de H (1.4.2 c)), existe uma seminorma p contínua sobre E tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$, $\forall\, x \in H$, e, em virtude de 1.5.2, φ estende-se a todo o espaço E como forma linear contínua. ∎

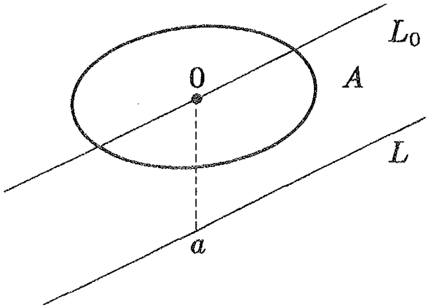
A. Teorema de Hahn-Banach na forma geométrica. Separação de conjuntos convexos

Para o que segue convém recordar a noção de variedade linear. Seja E um espaço vectorial. Chama-se *variedade linear* ou *afim* de E a um conjunto $M = a + H$ que é imagem por meio de uma translacção $x \to a + x$, $a \in E$, de um subespaço vectorial H de E. O subespaço H é univocamente determinado por M, enquanto que o ponto a pode ser escolhido arbitrariamente em M. Chama-se dimensão (resp. codimensão) de M à dimensão (resp. codimensão) de H. Se $\operatorname{cod}(M) = 1$, M diz-se um *hiperplano afim* ou somente *hiperplano* se não há receio de confusão. Neste caso, existe uma forma linear φ sobre E, não nula, tal que $M = a + \operatorname{Ker}\varphi$ de modo que M é definida pela equação $\varphi(x) = \alpha$ em que $\alpha = \varphi(a)$, isto é, $M = \{x \in E : \varphi(x) = \alpha\}$. De acordo com as convenções já feitas, uma variedade linear real de E é uma variedade linear para a estrutura de espaço vectorial real de E; é, portanto, um conjunto da forma $M = a + H$ em que H é subespaço real de E e $a \in E$.

1.5.3 Teorema de Hahn-Banach (Forma geométrica). *Seja E um e.v.t.. Se A é um conjunto convexo aberto não vazio de E e L é uma variedade linear real de E tal que $L \cap A = \emptyset$, existe em E um hiperplano real afim M, fechado, tal que $L \subset M$ e $A \cap M = \emptyset$.*

Dem.: Usando uma translacção se for necessário pode-se supor que $0 \in A$. Assim, A é vizinhança convexa aberta de zero e, portanto, a função de Minkowski p_A é uma subnorma contínua sobre E. Note-se ainda que, como A é aberto, $A = B_{p_A}(0,1) = \{x \in E\colon\ p_A(x) < 1\}$.

Posto isto, tome-se um ponto $a \in L$ e seja L_0 o subespaço (real) de E tal que $L = a + L_0$; L_0 é um hiperplano em $N = L_0 + \mathbf{R}\,a$ e existe, portanto, uma forma linear real φ sobre N tal que $L_0 = \operatorname{Ker}\varphi$; como $\varphi(a) \neq 0$ (pois $a \notin L_0$) pode-se supor φ escolhida de modo que $\varphi(a) = 1$.



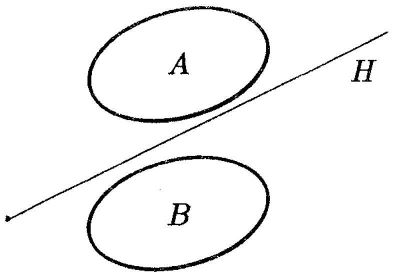
Assim, L é definido pela equação $\varphi(x) = 1$. Vamos ver que, para cada $x \in N$, $\varphi(x) \leq p_A(x)$. Ora se $x \in N$, tem-se $x = \ell_0 + \xi\, a$ com $\ell_0 \in L_0$ e $\xi \in \mathbb{R}$, de modo que $\varphi(x) = \xi$. Se $\xi \leq 0$ é óbvio que $\varphi(x) \leq p_A(x)$; se $\xi > 0$, pode-se escrever $p_A(x) = \xi\, p_A(\frac{1}{\xi}\,\ell_0 + a)$ e como $\frac{1}{\xi}\,\ell_0 + a \in N$ e $p \geq 1$ em L segue-se que $p_A(x) \geq \xi$. Nestas condições, pelo teorema de Hahn-Banach na forma analítica, 1.5.1, pode-se estender φ numa forma linear ψ sobre E tal que $\psi(x) \leq p_A(x)$, $\forall\, x$. O hiperplano M definido por $\psi(x) = 1$ verifica as condições do teorema. Com efeito, $L \subset M$ como é óbvio, M não encontra A, pois, para cada $x \in M$, $p_A(x) \geq \psi(x) = 1$, e é fechado visto que ψ é contínua (por ser majorada por p_A). ∎

Corolário. *Se um conjunto convexo aberto A num e.v.t. E não contém a origem, existe uma forma linear $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, contínua, tal que $\varphi(x) > 0$, $\forall\, x \in A$.*

Dem.: Pelo teorema anterior, existe em E um hiperplano real fechado H tal que $0 \in H$ e $A \cap H = \emptyset$. Se ψ é uma forma linear real tal que $H = \operatorname{Ker} \psi$ (portanto, contínua), como $\psi(A)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$ e $0 \notin \psi(A)$, tem-se $\psi(x) > 0$, $\forall\, x \in A$, ou $\psi(x) < 0$, $\forall\, x \in A$, e, portanto, a condição verifica-se com $\varphi = \psi$ ou $\varphi = -\psi$. ∎

Considere-se num e.v.t. E um hiperplano (afim) real e fechado H de equação $\varphi(x) = \alpha$ (φ é portanto uma forma linear real contínua não nula e $\alpha \in \mathbb{R}$). Os conjuntos convexos $F^\alpha = \{x \in E\colon \varphi(x) \geq \alpha\}$, $F_\alpha = \{x \in E\colon \varphi(x) \leq \alpha\}$, $G^\alpha = \{x \in E\colon \varphi(x) > \alpha\}$ e $G_\alpha = \{x \in E\colon \varphi(x) < \alpha\}$ chamam-se *semiespaços* de E determinados por H. Os semiespaços F^α e F_α são fechados enquanto que G^α e G_α são abertos; é fácil ver que todos eles têm por fronteira o hiperplano H e que, portanto, G^α é o interior de F^α e G_α o interior de F_α.

Dados dois conjuntos não vazios $A, B \subset E$, diz-se que A e B são *separados* por H se "$\varphi(x) \leq \alpha \leq \varphi(y)$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$" ou "$\varphi(y) \leq \alpha \leq \varphi(x)$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$"; equivale a dizer que A está contido num dos semiespaços fechados F^α, F_α e B está contido no outro. Se "$\varphi(x) < \alpha < \varphi(y)$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$" ou "$\varphi(y) < \alpha < \varphi(x)$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$" diz-se que A e B são *estritamente separados* por H; equivale a dizer que A está contido num dos semiespaços abertos G^α, G_α e B está contido no outro.



No que segue vamos estudar alguns teoremas relativos à separação de conjuntos convexos.

1.5.4 Teorema (1º Teorema de separação). *Se A e B são conjuntos convexos não vazios e disjuntos num e.v.t. E e A é aberto, existe em E um hiperplano real fechado H que separa A e B. Se A e B são ambos abertos, a separação é estrita.*

Dem.: $A - B$ é convexo e aberto e como $0 \notin A - B$, pelo corolário de 1.5.3, existe uma forma linear contínua $\varphi\colon E \to \mathbf{R}$ que é positiva em $A - B$ de modo que se tem $\varphi(x) < \varphi(y)$, $\forall x \in B$ e $\forall y \in A$. Assim $\alpha = \sup_{x \in B} \varphi(x)$ é finito e o hiperplano $H = \{x : \varphi(x) = \alpha\}$ separa A de B. Note-se que B fica no semiespaço fechado F_α e A em F^α; mas como A é aberto e o semiespaço aberto $G^\alpha = \operatorname{int}(F^\alpha)$, $A \subset G^\alpha$. Se B é também aberto, pela mesma razão, $B \subset G_\alpha$ e a separação é estrita. ∎

1.5.5 Teorema (2º Teorema de separação). *Se A e B são conjuntos convexos não vazios e disjuntos num espaço localmente convexo E, A é fechado e B é compacto, existe em E um hiperplano real fechado H que separa estritamente A e B.*

Dem.: Facilmente se verifica que $A - B$ é fechado; como $0 \notin A - B$, existe uma vizinhança absolutamente convexa e aberta U de zero em E tal que $(A - B) \cap (U + U) = \emptyset$. Desta relação deduz-se facilmente que $(A + U) \cap (B + U) = \emptyset$. Então, como $A + U$ e $B + U$ são convexos e abertos, do teorema anterior resulta que existe um hiperplano real fechado A que separa estritamente $A + U$ e $B + U$ e, portanto, A e B. ∎

Em particular, *num espaço localmente convexo E qualquer conjunto convexo fechado $A \neq \emptyset$ pode ser estritamente separado de qualquer ponto $a \notin A$ por um hiperplano real fechado.*

Corolário. *Num espaço localmente convexo E todo o conjunto convexo fechado A é a intersecção dos semiespaços fechados de E que contém A.*

Dem.: Seja $A' = \bigcap\{S : S$ é semiespaço fechado de E que contém $A\}$. É óbvio que $A \subset A'$. Inversamente se $x \notin A$, como x é separado de A por um hiperplano real fechado H, um dos semiespaços fechados determinados por H contém A e não contém x, de modo que $x \notin A'$. ∎

Observação. Deste Corolário resulta que os convexos fechados de um e.l.c. E dependem somente das formas lineares contínuas sobre E ou seja do dual topológico E'. Assim se E é um espaço vectorial e τ_1 e τ_2 topologias localmente convexas sobre E tais que $E(\tau_1)$ e $E(\tau_2)$ têm o mesmo dual topológico, os conjuntos convexos fechados para τ_1 são os mesmos que para τ_2.

1.6 – Conjuntos limitados

Se E é um espaço vectorial e A, B são subconjuntos de E, diz-se que B *absorve* A se existe $\rho > 0$ tal que $A \subset r\,B$, $\forall r \geq \rho$.

Se B é equilibrado, para que B absorva A basta que exista $\rho > 0$ tal que $A \subset \rho B$, pois sendo assim, tem-se para $r \geq \rho$, $A \subset \rho B = r \frac{\rho}{r} B \subset r B$.

Um conjunto $B \subset E$ absorvente, no sentido que temos usado, é um conjunto que absorve qualquer ponto de E.

1.6.1 Teorema. *Seja E um espaço localmente convexo e S um sistema de seminormas que define a topologia de E. Então, para qualquer $A \subset E$, são equivalentes:*

1) *Toda a vizinhança de zero absorve A;*

2) *Toda a seminorma $p \in S$ é majorada em A, isto é, para cada $p \in S$ existe um número $\rho > 0$ tal que $p(x) \leq \rho$, $\forall\, x \in A$;*

3) *Para qualquer sucessão x_n de pontos de A, $\frac{1}{n}\, x_n \to 0$.*

Dem.: **1)⇒2)** Se 1) se verifica, tomando $p \in S$, a bola $B_p[0,1]$ absorve A, e existe, portanto, $\rho > 0$ tal que $A \subset \rho\, B_p[0,1] = B_p[0,\rho]$ o que mostra que $p(x) \leq \rho$, $\forall\, x \in A$.

2)⇒3) é imediato, porque para cada $p \in S$, $p(\frac{1}{n}\, x_n) = \frac{1}{n}\, p(x_n) \leq \rho/n \to 0$.

3)⇒1) Vamos provar a contrarecíproca. Ora se 1) não se verifica, existe uma vizinhança V de zero equilibrada que não absorve A e portanto A não está contido em nenhum dos conjuntos $V, 2V, \ldots, nV, \ldots$. Assim, existe uma sucessão x_n de pontos de A tal que $x_n \notin nV$ ou seja $\frac{1}{n}\, x_n \notin V$; portanto, $\frac{1}{n}\, x_n$ não tende para zero e 3) também não se verifica. ∎

Num espaço localmente convexo E, um conjunto A diz-se *limitado* se verifica uma qualquer das condições (equivalentes) do teorema 1.6.1.

Convém notar que esta noção de conjunto limitado depende somente da topologia de E.

Se a topologia de E é definida por uma norma $\|\cdot\|$, $A \subset E$ é limitado sse existe $\rho > 0$ tal que $\|x\| \leq \rho$, $\forall\, x \in A$, ou seja A está contido numa bola. A noção coincide portanto com a que conhecíamos da teoria dos espaços normados.

1.6.2 Teorema. *Se E é um espaço localmente convexo, então:*

a) *Se $A \subset E$ é limitado, todo o conjunto $B \subset A$ é limitado;*

b) *Toda a reunião finita $A_1 \cup ... \cup A_n$ de conjuntos limitados em E é um conjunto limitado em E;*

c) *Toda a parte finita de E é limitada;*

d) *Se A é limitado em E, o mesmo acontece com $\overline{A}$, $\mathrm{ac}(A)$ e $\overline{\mathrm{ac}(A)}$;*

e) *Todo o conjunto compacto de E é limitado;*

f) *Se E é o produto $\prod_i E_i$ de uma família de espaços localmente convexos e, para cada i, A_i é parte limitada de E_i, $A = \prod_i A_i$ é limitado em E;*

g) *Toda a sucessão x_n convergente em E é limitada (é falso para as redes em geral);*

h) *Toda a aplicação linear contínua f de E noutro espaço localmente convexo F transforma limitados em limitados.*

Dem.: a) é imediata.

b) resulta de que se uma seminorma é majorada em cada um dos conjuntos $A_1, ..., A_n$ é majorada na sua reunião.

c) resulta de b) e de que todo o conjunto reduzido a um ponto é limitado (é absorvido pelas vizinhanças de zero).

d) Basta ver que sendo A limitado $\overline{\mathrm{ac}(A)}$ é também limitado. Ora toda a vizinhança de zero absolutamente convexa e fechada, absorvendo A absorve também $\overline{\mathrm{ac}(A)}$.

e) Toda a seminorma contínua sobre E é limitada em qualquer compacto.

f) Seja x_n uma sucessão de pontos de A; como cada A_i é limitado, $\mathrm{pr}_i(\frac{1}{n}\, x_n) \to 0$, o que implica $\frac{1}{n}\, x_n \to 0$.

g) Para qualquer seminorma contínua p, $p(x_n)$ é convergente em $\mathbf{R}$ e, portanto, limitada.

h) Seja A limitado em E. Se y_n é uma sucessão de pontos de $f(A)$ existe x_n em A tal que $y_n = f(x_n)$; assim $\frac{1}{n}\, y_n = f(\frac{1}{n}\, x_n) \to 0$. ∎

Se a topologia de um e.l.c. E é definida por uma única seminorma p, há vizinhanças de zero em E limitadas: as bolas $B_p[0,\rho]$. Vamos ver que, inversamente,

1.6.3 Teorema. *Se um e.l.c. E tem uma vizinhança de zero limitada, a topologia de E é definível por uma única seminorma.*

Dem.: Seja V uma vizinhança de zero limitada. Pode-se supor que V é absolutamente convexa e fechada. Vamos ver que sendo p a função de Minkowski de V, a topologia de E é definida por p. Como as bolas $B_p[0,\rho]$ são vizinhanças de zero bastará mostrar que toda a vizinhança W de zero contém uma delas. Ora $V = B_p[0,1]$ e como é absorvida por W, $\exists r > 0$, tal que $B_p[0,1] \subset rW$ ou seja $W \supset B_p[0,\frac{1}{r}]$. ∎

Um espaço localmente convexo E diz-se *normável* se existe uma norma sobre E que defina a sua topologia. Do que precede resulta:

Corolário. *Um espaço localmente convexo E é normável sse é separado e tem uma vizinhança de zero limitada.* ∎

1.7 – Espaços localmente convexos metrizáveis

Um espaço topológico E diz-se *metrizável* se existe uma distância d sobre E que defina a sua topologia. Se E é metrizável, E é separado e todo o ponto $a \in E$ possui um sistema fundamental de vizinhanças de zero numerável (por exemplo, as bolas de centro a e raio $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_1$, $\{x \in E : d(x,a) \leq \frac{1}{n}\}$). A recíproca não é em geral verdadeira; ela verifica-se porém na categoria dos espaços localmente convexos[1], como vamos ver em seguida. Antes disso, porém, convém introduzir a seguinte definição:

Seja E um espaço vectorial; uma distância d sobre E diz-se invariante com as translacções se $d(x,y) = d(x+a, y+a)$, $\forall x, y, a \in E$. Isto equivale a dizer que as translacções $x \to a + x$ são isometrias do

[1] É também válida na categoria dos e.v.t. e mais geralmente na categoria dos grupos topológicos.

espaço $E(d)$ sobre si próprio e, portanto, homeomorfismos. Nestas condições *uma rede $x_j \to a$ em $E(d)$ sse $x_j - a$ converge para zero.*

A distância definida por uma norma sobre E, $d(x, y) = \|x - y\|$ é invariante com as translacções, como é óbvio.

1.7.1 Teorema. *Se E é um espaço localmente convexo separado, as condições seguintes são equivalentes:*

a) *E tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero numerável;*

b) *Existe uma sucessão crescente de seminormas sobre E, $p_1 \leq ... \leq p_n \leq ...$, que define a topologia de E;*

c) *Existe uma distância d sobre E invariante com as translacções que define a topologia de E.*

Assim, um espaço localmente convexo E é metrizável *sse é separado e tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero numerável.* Além disso, a topologia de um e.l.c. metrizável pode ser definida sempre por uma distância invariante com as translacções.

Dem.: É óbvio que c)$\Rightarrow$a); basta então provar que a)$\Rightarrow$b) e b)$\Rightarrow$c).

a)$\Rightarrow$b) Por hipótese, existe em E um sistema fundamental de vizinhanças de zero $W_1, ..., W_n, ...$ que podemos supor serem absolutamente convexas e fechadas. A partir deste sistema podemos formar outro decrescente $V_1 \supset V_2 \supset ... \supset V_n \supset ...$ pondo $V_1 = W_1$, $V_2 = W_1 \cap W_2, ..., V_n = W_1 \cap ... \cap W_n, ...$. As funções de Minkowski $p_1 = p_{V_1}, ..., p_n = p_{V_n}, ...$ formam uma sucessão crescente de seminormas que define a topologia de E.

b)$\Rightarrow$c) Suponhamos que a topologia de E é definida por um sistema crescente de seminormas $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_n \leq ...$. Para cada $x \in E$ a série $\sum \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}$ é convergente, pois é majorada por $\sum \frac{1}{2^n}$; designemos por $|x|$ a sua soma

$$|x| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)} . \tag{1}$$

A função $|x|$ assim definida em E é não negativa e tem as propriedades:

$$(2) \qquad |x| = 0 \quad \text{sse} \quad x = 0 \; ;$$

$$(3) \qquad |x| = |-x| \, , \qquad \forall x \in E \; ;$$

$$(4) \qquad |x+y| \leq |x| + |y| \, , \qquad \forall x, y \in E \; .$$

As propriedades (2) e (3) são imediatas. Para estabelecer (4), vejamos em primeiro lugar que se tem para quaisquer $a, b, c \geq 0$ tais que $c \leq a + b$

$$(5) \qquad \frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \; .$$

Se $c = 0$ é imediato, pode-se então supor $c > 0$ e também, é claro, $a + b > 0$. Assim,

$$\frac{c}{1+c} = \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{a+b}\right)^{-1} = \frac{a+b}{a+b+1} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \; .$$

Agora, usando a relação que acabamos de estabelecer e tendo em conta que $p_n(x+y) \leq p_n(x) + p_n(y)$, obtém-se imediatamente (4).

Posto isto, ponhamos para cada par $x, y \in E$

$$d(x,y) = |x - y| \; .$$

De (2), (3) e (4) resulta imediatamente que d é uma distância sobre E e é óbvio que é invariante para as translacções. Resta então ver que a topologia definida por d é idêntica à topologia de E. Para isso basta provar que uma rede $x_j \to a$ em $E(d)$ sse $x_j \to a$ em E ou seja

$$d(x_j, a) \to 0 \quad \text{é equivalente a} \quad \forall n \geq 1, \;\; p_n(x_j - a) \to 0 \; .$$

Como

$$(6) \qquad d(x_j, a) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x_j - a)}{1 + p_n(x_j - a)} \; ,$$

se $d(x_j, a) \to 0$, cada um dos termos da série (sendo $\leq d(x_j, a)$) tende para zero e isto implica $p_n(x_j - a) \to 0$, $\forall n \geq 1$. Inversamente, suponhamos que esta relação se verifica. Dado $\delta > 0$, como a série do segundo membro de (6) é majorada por $\sum \frac{1}{2^n}$ pode-se fixar um inteiro $m \geq 1$ de modo que a soma dos termos de índice $> m$ seja majorada por $\delta/2$; assim

$$d(x_j, a) \leq \sum_{1 \leq n \leq m} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x_j - a)}{1 + p_n(x_j - a)} + \frac{\delta}{2} ,$$

e como a soma do segundo membro tem um número finito de parcelas $\to 0$ ela fica $\leq \delta/2$ a partir de certo índice j_0. ∎

1.8 – Espaços completos

A. Redes e filtros de Cauchy

Recordemos que num espaço normado $E(\|\cdot\|)$ uma sucessão x_n diz-se uma sucessão de Cauchy se $\forall \delta > 0$ existe um inteiro n_0 tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \delta$; esta definição pode pôr-se do seguinte modo: *para cada bola $B[0, \delta]$ existe um inteiro n_0 tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow x_m - x_n \in B[0, \delta]$* e, é claro, em vez de bolas podemos usar vizinhanças de zero quaisquer. É sob esta forma que vamos generalizar esta noção para os espaços localmente convexos. Porém, em vez de sucessões convém considerar mais geralmente redes; o formalismo é análogo.

Seja E um espaço localmente convexo. Uma rede $(x_j)_{j \in J}$ em E diz-se uma *rede de Cauchy* se para cada vizinhança U de zero, existe um índice $j_0 \in J$ tal que

$$\ell, j \geq j_0 \implies x_j - x_\ell \in U .$$

Se considerarmos a rede dupla $(x_j - x_\ell)_{(j,\ell) \in J \times J}$ indiciada em $J \times J$ (a ordem em $J \times J$ é a ordem produto e em relação a ela $J \times J$ é filtrante à direita como o é J), vê-se imediatamente que (x_j) *é rede de Cauchy em E sse $x_j - x_\ell \to 0$ em E.*

Se p é uma seminorma sobre E, (x_j) diz-se, naturalmente, uma rede de Cauchy em relação a p se $\forall \delta > 0 \; \exists j_0 \in J$ tal que $j, \ell \geq j_0$ $\Rightarrow p(x_j - x_\ell) \leq \delta$. É fácil ver que:

1.8.1 Teorema. *Se S é um sistema de seminormas que define a topologia de E, uma rede (x_j) em E é de Cauchy sse é rede de Cauchy relativamente a qualquer $p \in S$.* ∎

1.8.2 Teorema. *Se E é um e.l.c. então:*

a) *Toda a rede convergente em E é de Cauchy (a recíproca é falsa);*

b) *Se x_j é rede de Cauchy em E e tem um ponto aderente a, $x_j \to a$;*

c) *Se x_n é sucessão de Cauchy em E, x_n é limitada (é falso para as redes em geral);*

d) *Toda a aplicação linear contínua f de E num e.l.c. F transforma qualquer rede x_j de Cauchy em E numa rede $f(x_j)$ de Cauchy em F.*

Dem.: a) Se $x_j \to a$ em E, tomando uma vizinhança U de zero absolutamente convexa, existe $j_0 \in J$ tal que $x_j - a \in \frac{1}{2}U$, para $j \geq j_0$. Então se $j, \ell \geq j_0$, $x_j - x_\ell = (x_j - a) - (x_\ell - a) \in \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$. (Pode-se também demonstrar do seguinte modo: se $x_j \to a$, $x_j - x_\ell \to a - a = 0$).

b) Como x_j é de Cauchy, dada uma vizinhança U de zero absolutamente convexa, tem-se a partir de certo $j_0 \in J$, $x_j - x_\ell \in \frac{1}{2}U$ e como a adere a (x_j), pode-se supor que $x_\ell - a \in \frac{1}{2}U$. Assim, $x_j - a = (x_j - x_\ell) + (x_\ell - a) \in \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$.

c) Basta provar que, para qualquer seminorma p contínua em E, $p(x_n)$ é limitada. Ora tomando um número $\delta > 0$, existe um inteiro n_0 tal que para $n \geq n_0$, $p(x_n - x_{n_0}) \leq \delta$ e, portanto, $p(x_n) \leq p(x_{n_0}) + \delta$. Assim, os termos $p(x_n)$ tais que $n \geq n_0$ formam um conjunto limitado e os restantes são em número finito.

d) Basta ver que $f(x_j) - f(x_\ell) = f(x_j - x_\ell) \to 0$. ∎

Recordemos agora que a cada rede $(x_j)_{j\in J}$ em E corresponde uma base de filtro sobre E (a qual se diz associada à rede) e que é formada pelos conjuntos $X_j = \{x_\ell \colon \ell \geq j\}$, $j \in J$; de acordo com a definição (x_j) é rede de Cauchy sse para cada vizinhança U de zero existe

$j_0 \in J$ tal que

$$X_{j_0} - X_{j_0} \subset U \ ,$$

(note que $X_{j_0} - X_{j_0} = \{x_\ell - x_j : \ell, j \geq j_0\}$).

A definição posta desta maneira estende-se imediatamente aos filtros: *Um filtro (ou base de filtro) $\mathcal{B}$ sobre E diz-se de Cauchy se para cada vizinhança U de zero existe $M \in \mathcal{B}$ tal que $M - M \subset U$.*

A relação $M - M \subset U$ exprime-se dizendo que M é pequeno da ordem de U. *Assim, $\mathcal{B}$ é filtro de Cauchy sse contém conjuntos pequenos da ordem de qualquer vizinhança de zero.*

Observações. 1. Do que precede resulta que (x_j) é rede de Cauchy sse a base de filtro associada é de Cauchy.

2. Seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro sobre E. Ordenando $\mathcal{B}$ pela relação $\supset$ (isto é, $A \leq B$ significa $A \supset B$), $\mathcal{B}$ fica um conjunto filtrante à direita. Se associarmos a cada $A \in \mathcal{B}$ um ponto $x_A \in A$, forma-se uma rede $(x_A)_{A \in \mathcal{B}}$ que se diz extraída de $\mathcal{B}$. É fácil ver que se $\mathcal{B}$ é base de filtro de Cauchy, toda a rede extraída de $\mathcal{B}$ é rede de Cauchy.

As propriedades relativas a redes de Cauchy estendem-se aos filtros.

1.8.2 Teorema. *Se E é um e.l.c. então:*

a) *Todo o filtro convergente em E é filtro de Cauchy;*

b) *Se F é filtro de Cauchy em E e tem um ponto aderente a, $F \to a$;*

c) *Toda a aplicação linear contínua de E num e.l.c. F transforma qualquer base de filtro de Cauchy em E numa base de filtro de Cauchy em F.* ∎

A demonstração é um exercício simples que deixamos ao leitor.

B. Espaços completos

Um conjunto X num e.l.c. E diz-se *completo* se toda a rede de Cauchy (x_j) de pontos de X converge para um ponto de X. Em particular, E é completo sse toda a rede de Cauchy de pontos de E converge em E. A noção de conjunto completo pode pôr-se por meio de filtros.

1.8.3 Teorema. *Se E é um e.l.c., para qualquer $X \subset E$ são equivalentes:*

a) *X é completo;*

b) *Toda a base $\mathcal{B}$ de filtro de Cauchy sobre X converge para um ponto de X.*

Dem.: É imediato que b)$\Rightarrow$a). Vejamos que a)$\Rightarrow$b). Suponhamos então que X é completo e seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro de Cauchy sobre X. Considere-se uma rede $(x_A)_{A\in\mathcal{B}}$ extraída de $\mathcal{B}$ (Obs. 2 de B), (x_A) é rede de Cauchy e converge portanto para um ponto $x_0 \in X$. Vamos ver que o ponto x_0 adere a $\mathcal{B}$ o que termina a demonstração em virtude de 1.8.2 b). Ora dado um conjunto qualquer $M \in \mathcal{B}$, a sub-rede formada pelos x_A tais que $A \subset M$ converge para x_0 e como é formada de pontos de M, x_0 adere a M. ∎

1.8.4 Teorema.

a) *Todo o subconjunto fechado X de um e.l.c. E completo é completo;*

b) *Num e.l.c. separado E todo o subconjunto completo X de E é fechado;*

c) *Todo o produto $E = \prod_\alpha E_\alpha$ de espaços localmente convexos completos é completo;*

d) *Todo o espaço F isomorfo a um espaço localmente convexo E completo é completo.*

Dem.: a) Se (x_j) é uma rede de Cauchy de pontos de X, x_j converge para um ponto $a \in E$, mas como X é fechado, $a \in X$.

b) Seja (x_j) uma rede de pontos de X convergente para um ponto $a \in E$; x_j é rede de Cauchy e converge, portanto, para um ponto $b \in X$, visto que X é completo. Mas como E é separado $a = b$, o que prova que X é fechado.

c) Se (x_i) é rede de Cauchy em E, para cada índice α, $\mathrm{pr}_\alpha(x_i)$ é rede de Cauchy em E_i e converge, portanto, para um ponto $y_\alpha \in E_\alpha$. Assim $(x_i) \to y = (y_\alpha) \in E$.

d) Seja φ um isomorfismo de E sobre F. Tomando uma rede de Cauchy (y_j) em F, $x_j = \varphi^{-1}(y_j)$ é rede de Cauchy em E. Então $x_j \to x$ em E e $y_j = \varphi(x_j) \to y = \varphi(x)$ em F. ∎

Tem-se o seguinte resultado mais geral que d) e que se prova de modo análogo: *se E e F são espaços localmente convexos e φ um isomorfismo de E sobre F, para qualquer $X \subset E$ completo, $\varphi(X)$ é completo em F.* Isto, no entanto, é falso se φ é uma aplicação linear contínua $E \to F$ qualquer.

C. Espaços semicompletos

Um conjunto X num espaço localmente convexo E (em particular $X = E$) diz-se *semicompleto* ou *sequencialmente completo* se toda a sucessão de Cauchy (x_n) de pontos de X converge para um ponto de X. Se X é completo é semicompleto, como é óbvio; a recíproca é em geral falsa, mas verifica-se no caso em que E tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero numerável, como se vê no teorema seguinte.

1.8.5 Teorema. *Se E é um espaço localmente convexo com um sistema fundamental de vizinhanças de zero numerável, para qualquer $X \subset E$ são equivalentes:*

a) *X é completo;*

b) *X é semicompleto.*

Dem.: Basta provar que **b)⇒a)**. Em virtude da hipótese pode-se determinar em E uma sucessão decrescente de vizinhanças de zero absolutamente convexas

$$V_1 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots ,$$

constituindo um sistema fundamental. Como X é semicompleto, qualquer sucessão de Cauchy de pontos de X converge em X; vamos ver que isto implica que toda a base de filtro $\mathcal{B}$ de Cauchy sobre X converge também para um ponto de X. A cada inteiro $n \in N_1$ corresponde um conjunto $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $B_n - B_n \subset \frac{1}{2}V_n$ e existe, portanto, uma sucessão x_n de pontos de X tal que $x_n \in B_n$, $\forall n \in \mathbf{N}_1$. Vamos ver que (x_n) é sucessão de Cauchy. Com efeito, dada uma vizinhança V_p e $n, m \geq p$, tome-se um ponto y na intersecção $B_n \cap B_m \cap B_p$ que não é vazia, visto $\mathcal{B}$ ser base de filtro). Tem-se então

$$\begin{aligned} x_n - x_m = (x_n - y) + (y - x_m) \;&\in\; (B_n - B_n) + (B_m - B_m) \\ &\subset\; \frac{1}{2}V_n + \frac{1}{2}V_m \;\subset\; V_p \,, \end{aligned}$$

o que prova que (x_n) é de Cauchy. Assim $x_n \to a \in X$. Vamos ver que também $\mathcal{B} \to a$ o que terminará a demonstração. Ora dado V_p, existe $n \geq p$ tal que $x_n - a \in \frac{1}{2}V_p$; então, se $y \in B_n$,

$$y - a = (y - x_n) + (x_n - a) \;\in\; (B_n - B_n) + \frac{1}{2}V_p \;\subset\; \frac{1}{2}V_n + \frac{1}{2}V_p \;\subset\; V_p \,,$$

o que mostra que $B_n \subset a + V_p$ e que, portanto, $\mathcal{B} \to a$. ∎

O teorema anterior generaliza-se do seguinte modo:

1.8.5′ Teorema. *Seja J um conjunto ordenado filtrante à direita. Se um espaço localmente convexo E tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero $(V_j)_{j \in J}$, indiciado em J, decrescente, isto é, $j \leq \ell \Rightarrow V_\ell \subset V_j$, então para qualquer $X \subset E$ são equivalentes:*

a) *X é completo;*

b) *Toda a rede de Cauchy $(x_j)_{j \in J}$ de pontos de X converge em X.* ∎

A demonstração é a mesma que a de 1.8.5; basta substituir $\mathbf{N}_1$ por J.

Observações: 1. Pode-se exprimir a condição b) dizendo que X é J-completo; assim ser sequencialmente completo é o mesmo que ser $\mathbf{N}_1$-completo.

2. Para todo o espaço localmente convexo E pode-se fixar um conjunto J nas condições de 1.8.5'. Se $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E pode-se tomar $J = \mathcal{V}$ ordenado pela relação $\supset$ e para aplicação $j \to V_j$ a identidade. Vê-se assim que, para um espaço localmente convexo ser completo, basta que sejam convergentes as redes de Cauchy indiciadas num sistema fundamental de vizinhanças de zero.

De 1.8.5 resulta:

Corolário. *Num e.l.c. metrizável um conjunto X é completo sse toda a sucessão de Cauchy (x_n) de pontos de X converge em X.* ∎

Em particular, um espaço normado E é completo sse toda a sucessão de Cauchy é convergente.

O espaço K^n (n inteiro ≥ 0) é completo; K é completo como se sabe e K^n é o produto de n espaços idênticos a K. Daqui resulta também que qualquer e.v.t. E separado de dimensão finita é completo, pois é isomorfo a K^n.

Se E é um e.l.c. metrizável e d uma distância sobre E invariante com as translacções que define a sua topologia, é fácil ver que as sucessões de Cauchy em E são as mesmas que as que são dadas pela distância d, isto é, (x_n) é sucessão de Cauchy em E sse $\forall \rho > 0$ $\exists p \in \mathbf{N}_1$ tal que $m, n \geq p \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \rho$. Assim, um conjunto $X \subset E$ é completo sse é completo como espaço métrico com a distância induzida por d.

D. Extensão de aplicações lineares contínuas

Uma questão que surge frequentemente em Análise é a seguinte: *são dados dois espaços localmente convexos E, F e uma aplicação linear contínua f de um subespaço H de E em F e procura-se saber se existe uma aplicação linear contínua $g : E \to F$ que prolonga f ou seja tal que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in H$.*

O problema pode não ter solução e sendo possível pode admitir mais do que uma solução. Tem-se, no entanto, o resultado seguinte:

1.8.6 Teorema. *Se H é denso em E, isto é, $\overline{H} = E$ e F é completo e separado, toda a aplicação linear contínua $f: H \to F$ prolonga-se numa única aplicação linear contínua $g: E \to F$.*

Dem.: A unicidade da extensão de f resulta do seguinte princípio geral[1]: *se duas aplicações contínuas $g_1, g_2: E \to F$ coincidem numa parte densa H de E elas coincidem em todo o espaço E.* Na verdade, como $\overline{H} = E$, para cada $x \in E$ existe em H uma rede $(x_j) \to x$ e como $g_1(x) = g_2(x)$, $\forall j$, tem-se, passando ao limite e atendendo a que F é separado, $g_1(x) = g_2(x)$.

Para provar que g existe, vamos usar a hipótese de F ser completo.

Considere-se um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E, $(V_j)_{j\in J}$, com J ordenado filtrante e $V_\ell \subset V_j$ se $j \leq \ell$ (como em 1.8.5′).

Para cada $x \in E$, há uma rede $(x_j)_{j\in J}$ em H que converge para x (basta tomar cada x_j na intersecção $(v + V_j) \cap H$ que não é vazia); tal rede produz uma rede de Cauchy $f(x_j)$ em F, convergente visto que F é completo; o $\lim f(x_j)$ depende só de x, pois tomando outra rede (x'_j) em H convergente para x, $x_j - x'_j \to 0$, portanto $f(x_j) - f(x'_j) \to 0$ e $\lim f(x_j) = \lim f(x'_j)$ (visto F ser separado). Assim pode-se definir uma aplicação $g: E \to F$ pondo

$$g(x) = \lim f(x_j)\,, \qquad \forall x \in E\ ,$$

e é óbvio que $g(x) = f(x)$, quando $x \in H$. Resta então provar que g é linear e contínua.

A linearidade é imediata: se $\alpha, \beta \in K$ e $x, y \in E$, tomando em H redes $(x_j)_{j\in J} \to x$ e $(y_j)_{j\in J} \to y$, das relações $f(\alpha x_j + \beta y_j) = \alpha f(x_j) + \beta f(y_j)$ vem, passando ao limite, $g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$. Para ver que g é contínua, tome-se uma seminorma q sobre E, contínua; como f é linear contínua, de 1.4.1 d) resulta que existem uma seminorma contínua p sobre E e um número $\rho > 0$ tais que $q[f(x)] \leq \rho\, p(x)$, $\forall x \in H$; mas esta relação estende-se a E, pois se $x \in E$, tomando em H uma rede $(x_j)_{j\in J} \to x$, tem-se $q[f(x_j)] \leq \rho\, p(x_j)$, $\forall j \in J$, e passando ao limite vem $q[g(x)] \leq \rho\, p(x)$. ∎

---

[1] É válido para espaços topológicos quaisquer E, F, com F separado e chama-se, por vezes, princípio de prolongamento por continuidade das identidades.

Tomando $F = K$ no teorema anterior, obtém-se o seguinte corolário:

Corolário 1. *Se E é um e.l.c. e H é um subespaço denso em E, toda a forma linear contínua sobre H prolonga-se numa única forma linear contínua sobre E.* ∎

Outra consequência importante é a seguinte:

Corolário 2. *Se E, E' são e.l.c. completos e separados e H, H' subespaços de E e E' tais que $\overline{H} = E$ e $\overline{H'} = E'$, todo o isomorfismo $f\colon H \to H'$ prolonga-se num único isomorfismo $g\colon E \to E'$.*

De modo mais abreviado, *dois espaços localmente convexos completos e separados com subespaços densos isomorfos são isomorfos.*

Dem.: f tem um prolongamento linear contínuo $g\colon E \to E'$ e o isomorfismo inverso $f'\colon H' \to H$ tem também um prolongamento linear contínuo $g'\colon E' \to E$. Das relações $f' \circ f = \operatorname{id} H$ e $f \circ f' = \operatorname{id} H'$ vem, atendendo a que $\operatorname{id} H$ e $\operatorname{id} H'$ se prolongam em $\operatorname{id} E$ e $\operatorname{id} E'$, $g' \circ g = \operatorname{id} E$ e $g \circ g' = \operatorname{id} E'$, o que prova que g e g' são isomorfismos inversos um do outro. ∎

Tem-se um resultado análogo ao do corolário 1 de 1.8.6 para seminormas:

1.8.7 Teorema. *Se E é um e.l.c. e H é um subespaço denso em E, toda a seminorma contínua p sobre H estende-se numa única seminorma contínua sobre E.* ∎

A demonstração é análoga à de 1.8.6 e fica como exercício.

Deste teorema resulta o seguinte corolário:

Corolário. *Se H é um subespaço denso num e.l.c. E e $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de zero em H, as aderências $\overline{U}$ dos conjuntos $U \in \mathcal{B}$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E.*

Dem.: Como toda a vizinhança fechada de zero em E contém uma vizinhança $U \in \mathcal{B}$ e portanto $\overline{U}$, basta provar que para qualquer

$U \in \mathcal{B}$, $\overline{U}$ é vizinhança de zero em E. Sem perda de generalidade, pode-se supor que U é absolutamente convexa. Seja p_U a função de Minkowski de U (em H). Em virtude de 1.8.7, p_U prolonga-se numa seminorma contínua $\tilde{p}_U$ sobre E. Vamos ver que $\overline{U} \supset B_{\tilde{p}_U}(0,1)$ e portanto que $\overline{U}$ é vizinhança de zero em E. Com efeito, se $\tilde{p}_U(x) < 1$, existe uma rede (x_j) em H tal que $x_j \to x$ e $p_U(x_j) < 1$, $\forall j$; assim os pontos $x_j \in \overline{U}$ e como $\overline{U}$ é fechado também $x \in \overline{U}$. ∎

E. Completação de espaços localmente convexos

Seja E um espaço localmente convexo e separado; chama-se *completado* de E a qualquer espaço localmente convexo *completo* e *separado* F tal que E é subespaço de F[1], denso em F. Do corolário 2 de 1.8.6 resulta:

1.8.9 Teorema. *Dois completados de um e.l.c. separado E são isomorfos; mais precisamente, se F_1 e F_2 são completados de E, existe um isomorfismo $\varphi : F_1 \to F_2$ que conserva os elementos de E, isto é, $\varphi(x) = x$, $\forall x \in E$.* ∎

1.8.10 Teorema. *Todo o espaço localmente convexo separado E tem um completado $\widehat{E}$ (que em virtude de 1.8.9 é definido a menos de um isomorfismo).* ∎

1.9 – Limites projectivos e indutivos de espaços localmente convexos

Antes de entrar propriamente no assunto deste número, vamos estudar dois processos de definir topologias localmente convexas sobre um espaço vectorial E. O primeiro é dado pelo teorema seguinte:

1.9.1 Teorema. *Seja $\{g_\alpha : E \to E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de aplicações lineares de E em espaços localmente convexos E_α. Existe então, no conjunto das topologias sobre E (localmente convexas ou*

---

[1] Subentende-se que a topologia de E é induzida pela de F.

não) que tornam as aplicações g_α contínuas uma topologia τ menos fina que as outras. Esta topologia é localmente convexa e tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero constituído pelos conjuntos da forma

$$(1) \qquad \bigcap_{\alpha \in H} g_\alpha^{-1}(V_\alpha) \; ,$$

em que H é parte finita de A e V_α é vizinhança de zero absolutamente convexa no espaço E_α.

Dem.: Vê-se imediatamente, tendo em conta 1.2.2, que os conjuntos da forma (1) constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para uma topologia localmente convexa τ sobre E e é também imediato que tomando em E esta topologia as aplicações g_α ficam contínuas. Resta então ver que se uma topologia σ sobre E torna as g_α contínuas, σ é mais fina que τ. Para isso basta provar que se uma rede $x_j \to x$ em $E(\sigma)$, também $x_j \to x$ em $E(\tau)$. Considere-se uma vizinhança de zero em $E(\tau)$ com a forma (1), $W = \bigcap_{\alpha \in H} g_\alpha^{-1}(V_\alpha)$. Para cada $\alpha \in H$, $g_\alpha(x_j) \to g_\alpha(x)$ em E_α e, portanto, $g_\alpha(x_j - x) \to 0$, visto que g_α é linear: como H é finito pode-se fixar um índice j_0 tal que para $j \geq j_0$ e $\forall\, \alpha \in H$, $g_\alpha(x_j - x) \in V_\alpha$; mas isto é equivalente a $x_j - x \in W$, o que prova que $x_j \to x$ em $E(\tau)$. ∎

A topologia τ assim definida chama-se *topologia inicial*[1] do sistema $\{E_\alpha, g_\alpha\}$ ou, mais abreviadamente, das aplicações g_α. Ela tem as propriedades seguintes, cuja demonstração é um exercício simples:

1.9.2 Teorema.

a) *Uma rede $x_j \to 0$ em $E(\tau)$ sse $g_\alpha(x_j) \to 0$ em cada E_α;*

b) *Uma aplicação f de um espaço topológico F em $E(\tau)$ é contínua sse todas as aplicações $g_\alpha \circ f : F \to E_\alpha$ são contínuas.* ∎

---

[1] De um modo geral, dado um conjunto E e uma família $\{g_\alpha : E \to E_\alpha\}$ de aplicações de E em espaços topológicos E_α, chama-se topologia inicial das aplicações g_α à menos fina das topologias sobre E que tornam as g_α contínuas. Tal topologia existe sempre; tem uma base de abertos formada pelos $g_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, em que U_α é aberto em E_α, e suas intersecções finitas.

Exemplos: 1. A topologia de um produto $E = \prod_\alpha E_\alpha$ de espaços localmente convexos é a topologia inicial das projecções $E \to E_\alpha$.

2. Se $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma família de topologias localmente convexas sobre um espaço vectorial E, o seu limite superior, ou seja, a menos fina das topologias sobre E mais finas que as τ_α, é a topologia inicial das aplicações identidade $E \to E(\tau_\alpha)$ e é, portanto, localmente convexa.

Se E é um espaço localmente convexo e S é um sistema de seminormas que define a sua topologia, esta é o limite superior das topologias definidas pelas seminormas $p \in S$.

O segundo processo é dual do anterior e é dado pelo teorema seguinte.

1.9.3 Teorema. *Seja $\{h_\alpha \colon E_\alpha \to E\}_{\alpha \in A}$ uma família de aplicações lineares de espaços localmente convexos E_α em E. Existe então no conjunto das topologias localmente convexas sobre E que tornam as aplicações h_α contínuas uma topologia τ' mais fina que as outras. O conjunto $\mathcal{B}$ das partes U de E absolutamente convexas e absorventes tais que $h_\alpha^{-1}(U)$ é vizinhança de zero em E_α, $\forall\, \alpha \in A$, é um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ'.*

Dem.: Vê-se imediatamente que $\mathcal{B}$ verifica as condições de 1.2.2 e é, portanto, um sistema fundamental de vizinhanças de zero para uma topologia localmente convexa τ' sobre E. Por outro lado é fácil ver que uma topologia localmente convexa σ sobre E torna as h_α contínuas sse toda a vizinhança de zero absolutamente convexa para σ pertence a $\mathcal{B}$. ∎

A topologia τ' definida pelo teorema anterior chama-se *topologia localmente convexa final* do sistema $\{E_\alpha, h_\alpha\}$ ou das aplicações h_α.

Observação: Ao contrário do que sucede com a topologia inicial a topologia localmente convexa final das aplicações h_α não é, em geral, a mais fina das topologias (localmente convexas ou não) que tornam as h_α contínuas; tal topologia existe sempre e chama-se *topologia final* das aplicações h_α(1). Por exemplo, a topologia final da aplicação nula de um espaço localmente convexo F num espaço vectorial $E \neq \emptyset$ é a topologia discreta que não é localmente convexa.

Exemplos: 3. Se E é um e.l.c. e H é um subespaço de E, a topologia quociente em E/H é a topologia localmente convexa final da aplicação canónica $j: E \to E/H$; excepcionalmente, neste caso, esta topologia é também a topologia final de j.

4. Toda a família $\{\tau_\alpha\}$ de topologias localmente convexas sobre um espaço vectorial E tem um limite inferior τ' no conjunto de todas as topologias localmente convexas sobre E e um limite inferior τ'' no conjunto de todas as topologias sobre E; τ' é a topologia localmente convexa final das aplicações identidade $E(\tau_\alpha) \to E$ e τ'' a topologia final destas aplicações. Em geral $\tau' \neq \tau''$.

1.9.4 Teorema. *Seja τ' a topologia localmente convexa final de uma família de aplicações lineares $\{h_\alpha\colon E_\alpha \to E\}_{\alpha\in A}$ de espaços localmente convexos E_α num espaço vectorial E. Então:*

a) *Uma aplicação linear f de $E(\tau')$ num espaço localmente convexo F é contínua sse $\forall\, \alpha \in A$, $f \circ h_\alpha\colon E_\alpha \to F$ é contínua.*

b) *Uma seminorma p sobre E é contínua para τ' sse $\forall\, \alpha \in A$, $p \circ h_\alpha$ é uma seminorma contínua sobre E_α.* ∎

A demonstração é um exercício simples que fica ao cuidado do leitor.

Note-se que 1.9.4 a) é dual de 1.9.2 b) mas na categoria dos espaços localmente convexos. A dual deste último para os espaços topológicos é válida mas para a topologia final τ'' das g_α.

A. Limites projectivos

Considere-se um conjunto parcialmente ordenado A filtrante à direita ($\alpha, \beta \in A \Rightarrow \exists\, \gamma \in A$, $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$) e suponhamos que

(1) Os conjuntos abertos para a topologia final das h_α são os $\Omega \subset E$ tais que $h_\alpha^{-1}(\Omega)$ é aberto em E_α, $\forall\, \alpha \in A$.

a cada $\alpha \in A$ corresponde um *espaço localmente convexo* E_α e a cada par $\alpha, \beta \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$ corresponde uma *aplicação linear contínua* $g_{\alpha\beta}\colon E_\beta \to E_\alpha$ de modo que se verificam as condições:

1) $g_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}\, E_\alpha$, $\forall\, \alpha \in A$;

2) $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma}$, para quaisquer $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ em A.

Diz-se então que os espaços E_α constituem um *espectro projectivo* em relação às aplicações $g_{\alpha\beta}$ o qual se notará $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}_A$.

Considere-se o produto $S = \prod_{\alpha\in A} E_\alpha$; os elementos $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ de S que verificam a condição

$$(1) \qquad x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta) \quad \text{ou} \quad \mathrm{pr}_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(\mathrm{pr}_\beta(x)) \ ,$$

para quaisquer $\alpha \leq \beta$ em A, constituem um subespaço vectorial E de S; E com a topologia induzida pela de S (ou seja pela topologia produto dos E_α) chama-se *limite projectivo* dos espaços E_α em relação às aplicações $g_{\alpha\beta}$ e representa-se por $\varprojlim_A \{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ ou só $\varprojlim_A \{E_\alpha\}$ ([1]). Para cada $\alpha \in A$, a restrição a $E = \varprojlim E_\alpha$ da projecção $\mathrm{pr}_\alpha\colon S \to E_\alpha$ representa-se por g_α; de (1) resulta imediatamente que se tem, para quaisquer $\alpha \leq \beta$ em E,

$$(2) \qquad g_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ g_\beta \ ,$$

ou seja, os diagramas

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, "g_\beta"'] & E_\alpha \\ E_\beta \arrow[ur, "g_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

são comutativos.

Da definição resulta imediatamente que a topologia do limite projectivo $E = \varprojlim E_\alpha$ é a topologia inicial das projecções $g_\alpha\colon E \to E_\alpha$.

([1]) Pode-se também não indicar o conjunto dos índices A desde que não haja risco de confusão.

De 1.9.2 resulta:

1.9.5 Teorema. *Uma aplicação f de um espaço topológico F no limite projectivo $E = \varprojlim E_\alpha$ é contínua sse todas as aplicações $g_\alpha \circ f : F \to E_\alpha$, $\alpha \in A$, são contínuas.* ∎

1.9.6 Teorema. *Se os espaços E_α são separados, o limite projectivo $E = \varprojlim E_\alpha$ é separado e é fechado no espaço produto $S = \prod_\alpha E_\alpha$.*

Dem.: A separação de E é óbvia. Vejamos que é fechado em S. Seja $x^j = (x^j_\alpha)$ uma rede em E convergente para um ponto $x = (x_\alpha) \in S$. Para quaisquer $\alpha \leq \beta$ em A, tem-se $x^j_\alpha = g_{\alpha\beta}(x^j_\beta)$ e como as $g_{\alpha\beta}$ são contínuas e os E_α separados vem, passando ao limite, $x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)$ o que prova que $x \in E$. ∎

Corolário. *Se os espaços E_α são separados e completos, o limite projectivo $E = \varprojlim E_\alpha$ é também separado e completo.* ∎

Pois, neste caso, S é completo e E é fechado em S.

Caracterização axiomática. Seja $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}_A$ um espectro projectivo de espaços localmente convexos; se F é um espaço localmente convexo, uma família de aplicações $\{f_\alpha : F \to E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ diz-se compatível (ou que comuta) com as $g_{\alpha\beta}$ se $f_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$, para quaisquer $\alpha \leq \beta$ em A, ou seja se os diagramas seguintes são comutativos:

(2)
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "f_\beta"'] & E_\alpha \\ E_\beta \arrow[ur, "g_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Por exemplo, as projecções $g_\alpha : E \to E_\alpha$ formam uma família nestas condições.

1.9.7 Teorema.

a) *O limite projectivo $E = \varprojlim\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ tem a seguinte pro-*

priedade universal:

(U) *Para qualquer e.l.c. F e qualquer família de aplicações lineares contínuas $\{f_\alpha\colon F \to E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ compatível com as $g_{\alpha\beta}$ existe uma aplicação linear contínua $f\colon F \to E$ e uma só tal que os diagramas seguintes são comutativos*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "f"'] & E_\alpha \\ E \arrow[ur, "g_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

ou seja $f_\alpha = g_\alpha \circ f$, $\forall\alpha \in A$.

b) *Se um e.l.c. $\widehat{E}$ munido de aplicações lineares contínuas $\widehat{g}_\alpha\colon \widehat{E} \to E_\alpha$, $\alpha \in A$, compatíveis com as $g_{\alpha\beta}$, verifica a propriedade (U) (com $\widehat{E}$ em vez de E e $\widehat{g}_\alpha$ em vez de g_α), $\widehat{E}$ é isomorfo a E, mais precisamente, existe um isomorfismo $\chi\colon \widehat{E} \to E$ tal que $g_\alpha \circ \chi = \widehat{g}_\alpha$, $\forall\alpha \in A$.* ∎

A demonstração não oferece dificuldade e fica como exercício. A propriedade b) mostra que o limite projectivo $\overleftarrow{\lim}\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ é caracterizado a menos de um isomorfismo pela propriedade universal (U). Isto permite dar uma definição axiomática do limite projectivo $\overleftarrow{\lim}\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ como sendo um espaço localmente convexo E munido de aplicações lineares contínuas $g_\alpha\colon E \to E_\alpha$ que comutam com as aplicações $g_{\alpha\beta}$ e que verifica a propriedade universal (U). Com tal definição um espectro projectivo $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ tem uma infinidade de limites projectivos isomorfos entre si; o que definimos é um modelo desta axiomática bastante cómodo pela maneira como está relacionado com o produto dos espaços E_α.

Espectros equivalentes. Considere-se um espectro projectivo $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}_A$ em que o conjunto A é ordenado e filtrante à direita como sempre temos suposto. Seja $B \subset A$ *cofinal* com A, isto é, $\forall\alpha \in A$, $\exists\beta \in B$ tal que $\alpha \leq \beta$; B com a ordem induzida por A é também filtrante à direita e pode-se portanto definir a restrição do espectro a B, $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}_B$ (os índices α e β neste espectro variam só em B). Tem-se:

1.9.8 Teorema. *Se $B \subset A$ é cofinal com A, os limites projectivos $E = \overleftarrow{\lim}_A\{E_\alpha\}$ e $E' = \overleftarrow{\lim}_B\{E_\alpha\}$ são isomorfos.*

Dem.: Designemos por g_α a projecção $E \to E_\alpha$, $\alpha \in A$, e por g'_α a projecção $E' \to E_\alpha$, $\alpha \in B$. Como as g_α comutam com as $g_{\alpha\beta}$ existe uma aplicação linear contínua e uma só, $\theta: E \to E'$, tal que $g'_\alpha \circ \theta = g_\alpha$, $\forall \alpha \in B$ (Teorema 1.9.7, propriedade (U)); isto equivale a associar a cada família $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ em E, a restrição $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$. Notemos agora que os g'_α estão definidos só para os $\alpha \in B$, mas podemos defini-los para qualquer $\alpha \in A$, pondo $g'_\alpha = g_{\alpha\beta}\, g'_\beta$, sendo β um elemento de B tal que $\beta \geq \alpha$; é fácil ver que g'_α não depende do elemento β escolhido. Claro que os g'_α comutam com os $g_{\alpha\beta}$ e novamente pela propriedade (U) de 1.9.7 existe uma única aplicação linear contínua $\eta: E' \to E$ tal que $g_\alpha \circ \eta = g'_\alpha$, $\forall \alpha \in A$. Agora é fácil provar que $\theta \circ \eta = \mathrm{id}\, E'$ e $\eta \circ \theta = \mathrm{id}\, E$, o que prova que η e θ são isomorfismos inversos um do outro. ∎

Exprime-se esta propriedade dizendo que os espectros $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}_A$ e $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}_B$ são equivalentes.

Exemplos: **1.** Considere-se o conjunto $\mathcal{C}$ dos compactos de $\mathbb{R}$ ordenado por inclusão; $\mathcal{C}$ é filtrante à direita. Para cada compacto K de $\mathbb{R}$ designemos por $C(K)$ o espaço das funções complexas contínuas em K com a norma $\|f\|_K = \sup_{x\in K} |f(x)|$; $C(K)$ com esta norma é um espaço de Banach. Para cada par de compactos $K \subset K'$ de $\mathbb{R}$, considere-se a aplicação $\rho_{KK'}: C(K') \to C(K)$ que associa a cada $f \in C(K')$ a sua restrição $f \mid K$ a K. Estas aplicações são lineares e contínuas, pois que se tem $\|\rho_{KK'}(f)\|_K \leq \|f\|_{K'}$, $K \subset K'$ e $f \in C(K')$. É fácil ver que os espaços $C(K)$ formam um espectro projectivo em relação às restrições $\rho_{KK'}$. O limite projectivo deste espectro é constituído pelas famílias $(f_K)_{K\in\mathcal{C}}$ tais que $f_K = \rho_{KK'}(f_{K'}) = f_{K'|K}$, para quaisquer compactos $K \subset K'$, e podem-se identificar de modo óbvio com as funções contínuas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Tem-se assim $C(\mathbf{R}) = \overleftarrow{\lim}_{\mathcal{C}}\, C(K)$, tomando em $C(\mathbf{R})$ a topologia do limite projectivo. Verifica-se facilmente que esta topologia é definida pelas seminormas $p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|$; uma rede $f_j \to 0$ sse f_j converge para zero uniformemente sobre cada compacto de $\mathbf{R}$. Por isso se chama a esta topologia a topologia da convergência uniforme nos compactos ou, mais abreviadamente, topologia da convergência compacta. Como os espaços $C(K)$ são separados e completos segue--se que $C(\mathbf{R})$ com a topologia da convergência compacta é também separado e completo. Notemos agora que os intervalos compactos I de $\mathbf{R}$ formam um sistema cofinal em $\mathcal{C}$ e que portanto $C(\mathbf{R})$ com a topologia da convergência compacta se exprime também como limite projectivo dos espaços $C(I)$, I intervalo compacto de $\mathbf{R}$, em relação às restrições. Pode-se ainda tomar outros espectros equivalentes, como por exemplo o que é indiciado sobre os intervalos $[-n, n]$, n inteiro > 0. Deixamos como exercício o estudo de exemplos análogos em que em vez de $\mathbf{R}$ se considera o espaço $\mathbf{R}^n$ ou um espaço localmente compacto qualquer.

2. Limites projectivos canónicos. Um espectro projectivo de espaços localmente convexos $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}_A$ diz-se *canónico* se para quaisquer $\alpha \leq \beta$ em A, E_β é subespaço vectorial de E_α e $g_{\alpha\beta}: E_\beta \to E_\alpha$ é a aplicação de inclusão $g_{\alpha\beta}(x) = x$. No entanto não se exige que a topologia de E_β seja a induzida pela de E_α; ela é mais fina em geral. Neste caso, cada elemento (x_α) do limite projectivo $E = \overleftarrow{\lim}\, E_\alpha$ tem as coordenadas todas iguais, pois quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in A$, existe $\gamma \in A$ tal que $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$ e portanto $x_\alpha = g_{\alpha\gamma}(x_\gamma) = x_\gamma$ e $x_\beta = g_{\beta\gamma}(x_\gamma) = x_\gamma$. Assim E como espaço vectorial pode ser identificado com a intersecção de todos os espaços E_α;

$$E = \overleftarrow{\lim}\, E_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha \ ;$$

a topologia é o limite superior das topologias induzidas pelos E_α. Note-se ainda que se a topologia de cada um dos espaços E_α é definida por uma seminorma p_α, a topologia de E é definida pelas restrições destas seminormas a E.

Em particular, todo o espaço localmente convexo $E(\tau)$ é limite projectivo canónico dos espaços $(E(\tau_p))_{p\in S}$ em que S é um sistema de seminormas filtrante que defina τ e, para cada $p \in S$, τ_p é a topologia definida por p.

3. Seja $I = [a,b]$, $a < b$, um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e considere-se a sucessão de espaços

$$C^0(I) = C(I) \supset C^1(I) \supset \dots \supset C^m(I) \supset \dots ,$$

em que $C^m(I)$ é o espaço das funções de classe C^m em I com a norma

$$\|f\|^m = \max\left\{\sup_{x\in I}|f(x)|, \dots, \sup_{x\in I}|D^m f(x)|\right\} .$$

Verifica-se facilmente que estes espaços formam um espectro projectivo canónico; o limite projectivo é o espaço $C^\infty(I) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(I)$ formado pelas funções indefinidamente diferenciáveis em I, com a topologia τ definida pelas normas $\|f\|^m$ (restringidas, claro, a $C^\infty(I)$). Note-se que esta topologia é definida também pelas seminormas $\sup_{x\in I}|D^m f(x)|$, $m \in \mathbb{N}$, e que portanto uma rede $f_j \to 0$ na topologia τ sse todas as derivadas $D^m f_j \to 0$ uniformemente sobre I. Por isso se diz também que τ é a topologia da *convergência uniforme em cada derivada*. Prova-se facilmente que os espaços $C^m(I)$ com as normas $\|f\|^m$ são espaços de Banach e, portanto, que $C^\infty(I)(\tau)$ é completo. É além disso metrizável, mas, como se verá adiante, não é normável.

B. Limites indutivos

Suponhamos agora que a cada elemento α de um conjunto A parcialmente ordenado filtrante à direita está associado um espaço localmente convexo E_α e a cada par $\alpha \leq \beta$ de elementos de A está associada uma aplicação linear contínua $g_{\alpha\beta}\colon E_\alpha \to E_\beta$ de modo que se tem:

1) $g_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}\, E_\alpha$, $\forall\, \alpha \in A$;

2) $g_{\alpha\gamma} = g_{\beta\gamma} \circ g_{\alpha\beta}$, se $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Diz-se então que os espaços E_α constituem um *espectro indutivo* em relação às aplicações $g_{\alpha\beta}$ e representa-se por $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}_A$ (como se vê, a noção difere da de espectro projectivo somente no sentido das aplicações).

Considere-se o conjunto S formado pelos pares (x, α) tais que $\alpha \in A$ e $x \in E_\alpha$; neste conjunto defina-se uma relação de equivalência do seguinte modo: $(x, \alpha) \sim (y, \beta)$ sse $\exists\, \gamma \geq \alpha, \beta$ tal que $g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\beta\gamma}(y)$. Seja E o conjunto das classes de equivalência ou seja o quociente $S/\sim$; para cada $\alpha \in A$, defina-se uma aplicação $g_\alpha : E_\alpha \to E$ associando a cada $x \in E_\alpha$ a classe $[x, \alpha]$ do par (x, α):

$$g_\alpha(x) = [x, \alpha] \ .$$

Pode-se dizer de um modo um tanto sugestivo que se obtém E identificando os elementos dos diferentes espaços E_α com as suas imagens pelas aplicações $g_{\alpha\beta}$.

As aplicações g_α comutam com as aplicações $g_{\alpha\beta}$, isto é, tem-se para $\alpha \leq \beta$ em A:

(1) $$g_\alpha = g_\beta \circ g_{\alpha\beta} \ ,$$

ou seja, os diagramas

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, "g_{\alpha\beta}"'] & E \\ E_\beta \arrow[ur, "g_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

são comutativos.

Existe em E uma estrutura de espaço vectorial e uma só que torna as aplicações $g_\alpha : E_\alpha \to E$ *lineares*; a adição e a multiplicação por escalares são definidas do seguinte modo: se $\xi, \eta \in E$, existem $\alpha \in A$, $x, y \in E_\alpha$ tais que $\xi = [x, \alpha] = g_\alpha(x)$, $\eta = [y, \alpha] = g_\alpha(y)$ e tem-se, então, $\xi + \eta = [x + y, \alpha]$, $\lambda\, \xi = [\lambda\, x, \alpha]$, $\lambda \in K$. É um exercício simples verificar que as operações assim definidas não dependem dos pares escolhidos e definem uma estrutura vectorial sobre E que, como é óbvio, é a única que torna as aplicações g_α lineares.

O espaço vectorial E assim definido, munido da topologia localmente convexa final das aplicações $g_\alpha : E_\alpha \to E$, chama-se o *limite* *indutivo* dos espaços E_α em relação às aplicações $g_{\alpha\beta}$; representa-se por $\overrightarrow{\lim}_A\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ ou só $\overrightarrow{\lim}_A E_\alpha$.

Do que vimos sobre topologias localmente convexas finais resulta:

1.9.10 Teorema.

a) *Obtém-se um sistema fundamental de vizinhanças de zero no limite indutivo* $E = \overrightarrow{\lim} E_\alpha$ *tomando os conjuntos* $U \subset E$ *absolutamente convexos e absorventes tais que* $\forall\, \alpha \in A$ *a imagem inversa* $g_\alpha^{-1}(U)$ *é vizinhança de zero em* E_α.

b) *Uma aplicação linear* f *de* E *num espaço localmente convexo* F *é contínua sse todas as aplicações* $f \circ g_\alpha : E_\alpha \to F$ *são contínuas.* ∎

A propriedade b) é, de certo modo, dual de 1.9.5; têm-se as seguintes propriedades análogas às de 1.9.7 e que se demonstram do mesmo modo:

1.9.11 Teorema.

a) *O limite indutivo* $E = \overrightarrow{\lim}\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ *tem a seguinte propriedade universal:*

(U) *Para qualquer e.l.c.* F *e qualquer família de aplicações lineares contínuas* $\{f_\alpha : E_\alpha \to F\}_{\alpha \in A}$ *que comuta*(1)*com as aplicações* $g_{\alpha\beta}$, *existe uma aplicação linear contínua* f: $E \to F$ *e uma só tal que os diagramas seguintes são comutativos*

(1) A compatibilidade ou comutação de $\{f_\alpha\}$ com as aplicações $g_{\alpha\beta}$ exprime-se do mesmo modo que nos espectros projectivos mas invertendo o sentido das setas:

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "g_{\alpha\beta}"'] & F \\ E_\beta \arrow[ur, "f_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & E \arrow[d, "f"] \\ & F \end{tikzcd}$$

ou seja $f_\alpha = f \circ g_\alpha$, $\forall\, \alpha \in A$.

b) *Se um e.l.c.* $\hat{E}$ *munido de aplicações lineares contínuas* $\hat{g}_\alpha : E_\alpha \to \hat{E}$, $\alpha \in A$, *compatíveis com as* $g_{\alpha\beta}$, *verifica a propriedade* U, $\hat{E}$ *é isomorfo a* E*; mais precisamente existe um isomorfismo* $\chi : E \to \hat{E}$ *tal que* $\chi \circ g_\alpha = \hat{g}_\alpha$, $\forall\, \alpha \in A$. ∎

Tal como acontece com os limites projectivos, a propriedade b) mostra que o limite indutivo $\varinjlim\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ é caracterizado a menos de um isomorfismo pela propriedade universal (U). Isto permite dar uma definição axiomática de $\varinjlim\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ como sendo um espaço localmente convexo E munido de uma família de aplicações lineares contínuas $g_\alpha : E_\alpha \to E$ compatível com as $g_{\alpha\beta}$ e que verifica a propriedade universal (U). Com esta definição, um espectro indutivo tem uma infinidade de limites indutivos isomorfos entre si; o que definimos é um dos modelos possíveis.

O teorema 1.9.8 tem também um correspondente para os limites indutivos:

1.9.12 Teorema. *Se* $B \subset A$ *é cofinal com* A*, os limites indutivos* $\varinjlim_A\{E_\alpha\}$ *e* $\varinjlim_B\{E_\alpha\}$ *são isomorfos.* ∎

A demonstração é análoga e fica como exercício.

Convém notar que o corolário de 1.9.6 não se verifica para os limites indutivos; um limite indutivo de espaços separados pode não ser separado bem como um limite indutivo de espaços completos pode não ser completo.

Tal como para os espectros projectivos, um espectro indutivo $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ de espaços localmente convexos diz-se *canónico* se para quaisquer $\alpha \leq \beta$ em A, E_α é subespaço vectorial de E_β e $g_{\alpha\beta}: E_\alpha \to E_\beta$

é a aplicação de inclusão $g_{\alpha\beta}(x) = x$, $\forall\, x \in E_\alpha$. A topologia de cada E_α é mais fina que a induzida pelos E_β, $\beta \geq \alpha$; se for igual diz-se que o espectro indutivo é *estrito* (assim, neste caso, cada E_α é subespaço vectorial e topológico de qualquer E_β, tal que $\beta \geq \alpha$).

Se $\{E_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ é um espectro indutivo canónico, a relação de equivalência que define o limite indutivo E tem a seguinte particularidade: $(x,\alpha) \sim (y,\beta)$ sse $x = y$ (de facto $(x,\alpha) \sim (y,\beta)$ se existe $\gamma \geq \alpha, \beta$ tal que $g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\beta\gamma}(y)$, mas isto é o mesmo que $x = y$). Assim, cada elemento (classe de equivalência) $\xi \in E$ pode ser identificado com um elemento de um espaço E_α e portanto pode-se considerar E como sendo a reunião destes espaços:

$$E = \overrightarrow{\lim} E_\alpha = \bigcup_\alpha E_\alpha \,.$$

Com esta identificação é óbvio que as aplicações $g_\alpha \colon E_\alpha \to E$ são as inclusões $E_\alpha \to E$, ou seja, $g_\alpha(x) = x$, $\forall\, x \in E_\alpha$.

Em resumo, dar um espectro indutivo canónico de espaços localmente convexos indiciado em A é o mesmo que dar uma família $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subespaços vectoriais de um espaço vectorial E, sendo cada um dos espaços E_α munido de uma topologia τ_α de modo que:

1) $E = \bigcup_\alpha E_\alpha$;

2) *Se $\alpha \leq \beta$, $E_\alpha \subset E_\beta$ e a topologia τ_α é mais fina que a induzida por τ_β em E_α; se for igual o espectro é estrito.*

O limite indutivo $\overrightarrow{\lim} E_\alpha$ é então o espaço E com a topologia localmente convexa τ mais fina que induz em cada E_α uma topologia menos fina que τ_α, e tem-se como consequência de 1.9.10:

1.9.10′ Teorema.

a) *Os conjuntos $U \subset E$ absolutamente convexos e absorventes tais que $U \cap E_\alpha$ é vizinhança de zero para τ_α, $\forall\, \alpha \in A$, formam um sistema fundamental de vizinhanças de zero em $E(\tau)$.*

b) *Uma aplicação linear f de $E(\tau)$ num espaço localmente convexo F é contínua sse as suas restrições $f \mid E_\alpha$ são contínuas para as topologias τ_α.* ∎

Convém notar que mesmo que o espectro seja *estrito* a topologia induzida em cada E_α pela topologia τ do limite indutivo pode não ser igual a τ_α. Por outras palavras, mesmo que cada $E_\alpha(\tau_\alpha)$ seja subespaço vectorial e topológico de $E_\beta(\tau_\beta)$, $\alpha \leq \beta$, ele pode não ser subespaço topológico de $E(\tau)$.

No caso em que $A = \mathbf{N}$ (com a ordem usual) o espectro é definido por uma sucessão crescente

$$E_1 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$$

de subespaços vectoriais de E com reunião igual a E e cada um deles com uma topologia localmente convexa mais fina que a induzida pelo seguinte, etc..

Exemplo: Considere-se um espaço topológico X e um compacto K de X e seja A o conjunto das vizinhanças abertas de K ordenado pela relação $\supset$ ou seja $\Omega \leq \Omega'$ significa que $\Omega \supset \Omega'$. Este conjunto é evidentemente filtrante à direita. Associemos a cada $\Omega \in A$ o espaço $C(\Omega)$ das funções contínuas $\Omega \to \mathbf{C}$ e a cada par $\Omega \supset \Omega'$ a aplicação $\rho_{\Omega\Omega'} : C(\Omega) \to C(\Omega')$ que associe a cada função $f \in C(\Omega)$ a sua restrição a Ω'. Suponhamos ainda cada $C(\Omega)$ munido da topologia da convergência compacta (exemplo 1 de B). Vê-se imediatamente que as aplicações $\rho_{\Omega\Omega'}$ são lineares contínuas e que os espaços $C(\Omega)$ formam um espectro indutivo em relação a elas. Considere-se o limite indutivo $C(K) = \varinjlim_A\{C(\Omega), \rho_{\Omega\Omega'}\}$; os seus elementos chamam-se *germes* de função contínua sobre K. A relação de equivalência que usamos para definir o limite indutivo traduz-se neste caso por $(f, \Omega) \sim (g, \Omega')$ sse existe uma vizinhança aberta U de K tal que $f \mid U = g \mid U$. Assim cada *germe* de função contínua sobre K pode-se considerar como a classe formada por uma função contínua f numa vizinhança aberta de K e todas aquelas que coincidem com f numa vizinhança aberta de K.

2. Espaços de Funções. Dualidade

2.1 – Espaços de funções

A. $\mathcal{M}$-topologias

No que segue vamos definir uma classe importante de topologias no espaço F^E das funções definidas num dado conjunto E e com valores num espaço localmente convexo F.

2.1.1 Teorema. *Para cada conjunto $\mathcal{M}$ de partes de E, existe uma topologia τ sobre F^E, e uma só, tal que uma rede $f_j \to f$ em $F^E(\tau)$ sse f_j tende para f uniformemente sobre cada conjunto $M \in \mathcal{M}$, isto é, para cada $M \in \mathcal{M}$ e cada vizinhança U de zero em F existe um índice j_0 tal que*

$$(1) \qquad f_j(x) - f(x) \in U\,, \quad \forall x \in M \ \text{ e } \ \forall j \geq j_0\,.$$

Dem.: É óbvio que só pode existir uma topologia τ sobre F^E nestas condições. Para ver que existe, notemos em primeiro lugar que se pode supor $\mathcal{M}$ filtrante à direita para a relação $\subset$, pois, se não for assim, podemos substituir $\mathcal{M}$ pelo conjunto $\mathcal{M}'$ formado pelas reuniões finitas de conjuntos de $\mathcal{M}$ visto que, como é óbvio, uma rede $f_j \to f$ uniformemente sobre os conjuntos $M \in \mathcal{M}'$ sse $f_j \to f$ uniformemente sobre os conjuntos $M \in \mathcal{M}$. Por outro lado, a condição do teorema é equivalente à conjunção das duas seguintes, como se verifica facilmente:

a) τ é invariante para as translacções;

b) Uma rede $f_j \to 0$ em $F^E(\tau)$ sse f_j converge uniformemente para zero sobre todo o $M \in \mathcal{M}$ ou seja, para cada vizinhança U de zero em F e cada $M \in \mathcal{M}$ existe um índice j_0 tal que

$$(2) \qquad f_j(M) \subset U\,, \qquad \forall j \geq j_0\,.$$

Posto isto, consideremos os conjuntos

$$(3) \qquad \mathcal{F}(M,U) = \left\{ f \in F^E :\ f(M) \subset U \right\},$$

em que $M \in \mathcal{M}$ e U é vizinhança de zero em F. A condição (2) exprime-se então por $f_j \in \mathcal{F}(M,U)$, $\forall j \geq j_0$, e é fácil ver que estes conjuntos constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para uma topologia τ sobre F^E invariante para as translacções. ∎

A topologia τ que acabamos de definir representa-se por $\tau_{\mathcal{M}}$ e chama-se $\mathcal{M}$-topologia sobre F^E ou *topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos de* $\mathcal{M}$.

Exemplos e observações: **1.** Como vimos a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ é idêntica à topologia da convergência uniforme sobre todas as reuniões finitas de conjuntos de $\mathcal{M}$; ela é também idêntica à topologia da convergência uniforme sobre todos os subconjuntos de conjuntos de $\mathcal{M}$, pois que se $f_j \to 0$ uniformemente sobre M, $f_j \to 0$ uniformemente sobre qualquer $M' \subset M$.

2. Se $\mathcal{M}$ é o conjunto das partes de E com um só elemento, $\tau_{\mathcal{M}}$ é a topologia da convergência pontual, ou seja, a topologia do espaço produto F^E; chama-se também topologia da *convergência simples* e representa-se por τ_s. Uma rede $f_j \to 0$ em $F^E(\tau_s)$ sse $f_j(x) \to 0$, $\forall x \in E$. Note-se ainda que τ_s é a topologia da convergência uniforme sobre as partes finitas de E. Os conjuntos $\mathcal{F}(A,U)$ em que A é parte finita de E e U vizinhança de zero em F, formam um sistema fundamental de vizinhanças de zero para τ_s.

3. Se $\mathcal{M}$ tem um único conjunto $M \subset E$, $\tau_{\mathcal{M}} = \tau_M$ chama-se topologia da convergência uniforme sobre M; é idêntica à topologia da convergência uniforme sobre todos os subconjuntos de M.

4. Se E é um espaço topológico, tem interesse especial a topologia da convergência uniforme sobre os compactos de E que se representa por τ_c; se E é separado, esta topologia é idêntica à topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos relativamente compactos. Claro que se E é compacto $\tau_c = \tau_E$.

5. Se E é um espaço localmente convexo, têm ainda interesse a topologia da convergência uniforme sobre os conjuntos précompactos, que se representa por $\tau_{c'}$, e a da convergência uniforme sobre as partes limitadas de E, τ_β. Se E é completo $\tau_c = \tau_{c'}$, e se é de dimensão finita $\tau_c = \tau_{c'} = \tau_\beta$.

6. Se $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ é óbvio que $\tau_{\mathcal{M}}$ é menos fina que $\tau_{\mathcal{M}'}$. Assim, τ_E (topologia da convergência uniforme sobre E) é a mais fina das $\mathcal{M}$--topologias e τ_s é a menos fina das $\mathcal{M}$-topologias tais que $\bigcup \mathcal{M} = E$. Vê-se ainda que se E é localmente convexo $\tau_c \subset \tau_{c'} \subset \tau_\beta$.

Vejamos agora algumas propriedades das $\mathcal{M}$-topologias sobre F^E.

2.1.2 Teorema:

a) *A topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre F^E torna contínuas a adição $f+g$ e as homotetias $f \to \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{K}$.*

b) *A topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre F^E tem um sistema fundamental de vizinhanças de zero absolutamente convexas e fechadas, invariante para as homotetias.*

c) *A topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre F^E é localmente convexa sse todas as funções $f\colon E \to F$ são limitadas em qualquer conjunto $M \in \mathcal{M}$, isto é, $\forall f \in F^E$ e $\forall M \in \mathcal{M}$, $f(M)$ é limitado em F.*

d) *Se F é separado e $\bigcup \mathcal{M} = E$, $\tau_{\mathcal{M}}$ é separada.*

e) *Se F é completo e $\bigcup \mathcal{M} = E$, F^E com a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ é um espaço completo.*

Dem.: a) Tendo em conta que $\tau_{\mathcal{M}}$ é invariante com as translacções bastará provar que se $(f_j)_{j\in J}$ e $(g_j)_{j\in J}$ são redes em F^E uniformemente convergentes para zero sobre cada $M \in \mathcal{M}$, o mesmo acontece com $f_j + g_j$ e λf_j, o que é imediato.

b) Supondo $\mathcal{M}$ filtrante à direita, o que é sempre possível, os conjuntos $\mathcal{F}(M,U)$, em que $M \in \mathcal{M}$ e U é vizinhança absolutamente convexa fechada de zero em F, constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para $\tau_{\mathcal{M}}$. Basta então provar que estes conjuntos são absolutamente convexos, fechados e que para qualquer $\lambda \neq 0$, $\lambda\,\mathcal{F}(M,U) = \mathcal{F}(M,\lambda U)$. Ora se $f,g \in \mathcal{F}(M,U)$ e $|\alpha|+|\beta| \leq 1$, $\alpha,\beta \in \mathbf{K}$, das relações $f(M) \subset U$, $g(M) \subset U$ vem

$$(\alpha f + \beta g)(M) \subset \alpha f(M) + \beta g(M) \subset \alpha U + \beta U \subset U \ ,$$

o que prova que $\mathcal{F}(M,U)$ é absolutamente convexo. Vejamos que é fechado. Trata-se de provar que se uma rede $f_j \to f$ em $F^E(\tau_{\mathcal{M}})$ e as funções $f_j \in \mathcal{F}(M,U)$, também $f \in \mathcal{F}(M,U)$. Ora existe um índice j_0 tal que para $j \geq j_0$ e $x \in M$, $f_j(x) \in U$, mas como U é fechado, isto implica $f(x) \in U$, $\forall x \in M$. Para a última relação bastará provar que $\lambda\,\mathcal{F}(M,U) \subset \mathcal{F}(M,\lambda U)$ o que é imediato.

c) Em virtude de b) e de 1.2.2, a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ é localmente convexa sse os conjuntos $\mathcal{F}(M,U)$ forem absorventes. Ora se para cada $M \in \mathcal{M}$ e cada vizinhança U de zero em F, $\mathcal{F}(M,U)$ é absorvente, tomando $f \in F^E$, existe $\rho > 0$ tal que $f \in \rho\,\mathcal{F}(M,U) = \mathcal{F}(M,\rho U)$, mas esta condição é equivalente a $f(M) \subset \rho U$ o que prova que $f(M)$ é limitado em F. De modo análogo se prova a recíproca.

d) Em virtude de b) o espaço F^E com a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ é regular; basta então provar que sendo F separado a intersecção de todas as vizinhanças $\mathcal{F}(M,U)$ só contém a função nula. Seja então $f \in \bigcap \mathcal{F}(M,U)$; como $\mathcal{M}$ cobre E, para cada $x \in E$ existe um $M \in \mathcal{M}$ tal que $x \in M$; assim, $f(x) \in U$ qualquer que seja a vizinhança U e portanto $f(x) = 0$, visto F ser separado.

e) Como os espaços $F^E(\tau_{\mathcal{M}})$ não são em geral localmente convexos esta propriedade exige definições prévias de rede de Cauchy e de espaço completo. Elas são análogas às dadas para os espaços localmente convexos. Assim uma rede f_j em $F^E(\tau_{\mathcal{M}})$ diz-se de Cauchy se para qualquer vizinhança de zero W existe um índice j_0 tal que $f_j - f_\ell \in W$, $\forall j,\ell \geq j_0$. Uma parte X de $F^E(\tau_{\mathcal{M}})$, diz-se completa se toda a rede de Cauchy em X converge para uma função $f \in X$.

Posto isto, considere-se uma rede de Cauchy f_j em $F^E(\tau_{\mathcal{M}})$; existe então para cada vizinhança U de zero em F, que se pode supor fechada, e cada $M \in \mathcal{M}$ um índice j_0 tal que $f_j - f_\ell \in F(M,U)$ para $j, \ell \geq j_0$ ou seja

$$(3) \qquad f_j(x) - f_\ell(x) \in U\,, \qquad \forall x \in M, \quad \forall j, \ell \geq j_0\,.$$

Assim, para cada $x \in E$, $f_j(x)$ é rede de Cauchy em F e como este espaço é completo ela tem um limite $f(x)$. Define-se assim uma função $f \in F^E$ e de (3) vem, atendendo a que U é fechado, $f(x) - f_\ell(x) \in U$, $\forall \ell \geq j_0$, donde se conclui que $f_j \to f$ na topologia $\tau_{\mathcal{M}}$. ∎

Observações: 1. Note-se que para as topologias $\tau_{\mathcal{M}}$ em F^E a aplicação $\lambda \to \lambda f$ do corpo de escalares K em F^E em geral não é contínua; a continuidade desta aplicação, para cada $f \in F^E$, é como se verifica facilmente (cf. 2.1.2) equivalente à condição de as vizinhanças de zero serem absorventes.

2. Prova-se facilmente, o que deixamos como exercício, que se E é um conjunto infinito e F é separado, e não é nulo, a topologia da convergência uniforme sobre E não é localmente convexa.

3. Da propriedade c) do teorema anterior resulta imediatamente que a topologia da convergência pontual τ_j sobre F^E é localmente convexa o que já era conhecido.

O teorema seguinte generaliza a propriedade c) e demonstra-se do mesmo modo:

2.1.3 Teorema. *Se H é um subespaço vectorial de F^E, a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre H (ou seja a topologia induzida por $\tau_{\mathcal{M}}$ em H) é localmente convexa sse cada função $f \in H$ é limitada sobre cada conjunto $M \in \mathcal{M}$.* ∎

Se E é um espaço topológico, designa-se por $C(E,F)$ o subespaço de F^E formado pelas aplicações contínuas de E em F. Tem-se como corolário:

Corolário. *O espaço $C(E,F)$ com a topologia da convergência compacta é um espaço localmente convexo.* ∎

Verifica-se ainda facilmente

2.1.4 Teorema. *Se H é um subespaço vectorial de F^E tal que cada função $f \in H$ é limitada sobre cada conjunto $M \in \mathcal{M}$, e S é um sistema de seminormas que define a topologia de F, a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre H é definida pelas seminormas*

$$p_M(f) = \sup_{x \in M} p(f(x)), \quad p \in S, \ M \in \mathcal{M} \ \text{e} \ f \in H . \blacksquare$$

Por exemplo, se F é um espaço normado e E um espaço topológico a topologia da convergência compacta sobre $C(E,F)$ é definida pelas seminormas $\|f\|_\Delta = \sup_{x\in\Delta} \|f(x)\|_F$, em que Δ é compacto de E. No caso particular em que E é compacto a topologia τ_c sobre $C(E,F)$ (que é idêntica à topologia da convergência uniforme sobre E) é definida pela norma $\|f\| = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F$.

Recorde-se que uma sucessão de compactos $\Delta_1, ..., \Delta_n, ...$ num espaço topológico E se diz *exaustiva* se é crescente, isto é, $\Delta_1 \subset ... \subset \Delta_n \subset ...$ e cada compacto de E está contido num dos Δ_n. Um espaço localmente compacto separado com uma base numerável de abertos (em particular, todo o aberto de $\mathbf{R}^n$) tem uma sucessão exaustiva de compactos. Tem-se:

2.1.5 Teorema. *Se F é um espaço localmente convexo metrizável e E é um espaço topológico com uma sucessão exaustiva de compactos, $C(E,F)$ com a topologia da convergência compacta é também um espaço localmente convexo metrizável.* $\blacksquare$

Com efeito, se $p_1, ..., p_n, ...$ é uma sucessão de seminormas que define a topologia de F e $\Delta_1 \subset ... \subset \Delta_m \subset ...$ é uma sucessão exaustiva de compactos de E, a topologia τ_c sobre $C(E,F)$ é definida pelas seminormas

$$p_{n,m}(f) = \sup_{x\in\Delta_m} p_n(f(x)), \quad n, m \in \mathbf{N}_1 ,$$

pois formam um sistema equivalente ao das seminormas $p_{n,\Delta}(f) = \sup_{x\in\Delta} p_n(f(x))$, em que Δ percorre o conjunto de todos os compactos de E.

Em particular, se Ω é um aberto de $\mathbf{R}^n$, o espaço das funções contínuas $C(\Omega, K)$ (reais ou complexas conforme $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) com a topologia da convergência compacta é metrizável.

Para terminar este estudo dos espaços $C(E, F)$ vamos provar:

2.1.6 Teorema. *Seja F um espaço localmente convexo e E um espaço topológico. Então:*

a) *Se uma rede de funções contínuas $f_j: E \to F$ converge uniformemente sobre um conjunto $M \subset E$ para uma função $f: E \to F$, a restrição $f \mid M: M \to F$ é contínua.*

b) *Se E é localmente compacto, $C(E, F)$ é fechado em F^E para a topologia da convergência compacta.*

c) *Se E é localmente compacto e F é completo, $C(E, F)$ com a topologia da convergência compacta é também completo.*

Dem.: a)(1) Considere-se um ponto $x_0 \in M$. Dada uma vizinhança U de zero absolutamente convexa em F existe um índice j_0 tal que

$$(\alpha) \qquad f_j(x) - f(x) \in \frac{1}{3}U, \quad \forall j \geq j_0 \text{ e } \forall x \in M.$$

Como f_{j_0} é contínua em x_0, existe uma vizinhança V deste ponto em E tal que

$$(\beta) \qquad f_{j_0}(x) - f_{j_0}(x_0) \in \frac{1}{3}U, \quad \forall x \in V.$$

Assim de (α) e (β) vem, para $x \in V \cap M$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x) - f_{j_0}(x) + f_{j_0}(x) - f_{j_0}(x_0) + f_{j_0}(x_0) - f(x_0) \\ &\in \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U = U, \end{aligned}$$

o que prova que $f \mid M$ é contínua em x_0.

(1) A propriedade a) generaliza um resultado conhecido: todo o limite uniforme de funções contínuas reais ou complexas sobre um espaço X é uma função contínua.

b) Considere-se uma rede f_j em $C(E,F)$ convergente para uma função $f: E \to F$ na topologia τ_c. Como E é localmente compacto, cada ponto x de E tem uma vizinhança V_x compacta e de a) resulta que as restrições de f a estas vizinhanças são contínuas. Isto é suficiente para concluir que $f \in C(E,F)$ e que, portanto, $C(E,F)$ é fechado em $F^E(\tau_c)$.

c) Resulta imediatamente de b) e de que F^E é completo para a topologia τ_c. ∎

Observação: Note-se que $C(E,F)$ não é em geral fechado em F^E para a topologia τ_s da convergência simples: se uma rede de funções contínuas $f_j: E \to F$ converge pontualmente para $f: E \to F$, f não é em geral contínua (é um caso bem conhecido). O mesmo acontece com outras $\mathcal{M}$-topologias e mesmo com τ_c quando E não é localmente compacto.

Corolário. *Se F é um espaço localmente convexo completo e E um espaço compacto, $C(E,F)$ com a topologia da convergência uniforme sobre E é também completo.* ∎

B. Partes equicontínuas de F^E. Teoremas de Ascoli

No que se segue supõe-se sempre que F é um espaço localmente convexo e que E é um espaço topológico.

Um conjunto de funções $\phi \subset F^E$ diz-se *equicontínuo* num ponto $x_0 \in E$ se para cada vizinhança U de zero em F, existe uma vizinhança V de x_0 em E tal que se tem

$$f(x) - f(x_0) \in U, \quad \forall x \in V \ \text{ e } \ \forall f \in \phi .$$

No caso em que F é normado esta condição traduz-se por: para cada $\delta > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 em E tal que

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \delta, \quad \forall x \in V \ \text{ e } \ \forall f \in \phi .$$

O conjunto ϕ diz-se *equicontínuo* se é equicontínuo em cada ponto de E. Da definição resulta imediatamente que se ϕ é equicontínuo num ponto x_0, todas as funções $f \in \phi$ são contínuas em x_0. Assim, se ϕ é equicontínuo, todas as funções de ϕ são contínuas (em E). Por outras palavras, *todas as partes equicontínuas de F^E estão contidas em $C(E,F)$*. Note-se ainda que a propriedade de um conjunto $\phi \subset F^E$ ser equicontínuo depende só das topologias de E e F.

Facilmente se verifica que toda a parte finita de $C(E,F)$ é equicontínua; se ϕ, ψ são partes equicontínuas de $C(E,F)$, o mesmo acontece com $\phi + \psi$ e $\lambda\phi$, $\forall \lambda \in K$.

2.1.7 Teorema (1º teorema de Ascoli). *Se ϕ é uma parte equicontínua de F^E (ou o que dá no mesmo de $C(E,F)$), a sua aderência $\overline{\phi}$ para a topologia da convergência simples é equicontínua.*

Dem.: Vamos provar mais geralmente que se ϕ é equicontínuo num ponto $x_0 \in E$, $\overline{\phi}$ é equicontínuo no mesmo ponto. Tome-se uma vizinhança U de zero em F absolutamente convexa e seja V uma vizinhança de x_0 em E tal que

$$(\alpha) \qquad f(x) - f(x_0) \in \frac{1}{3}U, \quad \forall x \in V \text{ e } \forall f \in \phi .$$

Para cada $g \in \overline{\phi}$, existe uma rede f_j em ϕ tal que $f_j \to g$ pontualmente e pode-se associar, portanto, a cada $x \in V$ um índice j de modo que se tem ao mesmo tempo, $g(x) - f_j(x) \in \frac{1}{3}U$ e $g(x_0) - f_j(x_0) \in \frac{1}{3}U$. Desta relação e de (α) vem

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= (g(x) - f_j(x)) + (f_j(x) - f_j(x_0)) + (f_j(x_0) - g(x_0)) \\ &\in \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U = U , \end{aligned}$$

o que prova que $\overline{\phi}$ é equicontínuo em x_0. ∎

Corolário 1. *Se $\phi \subset F^E$ é equicontínuo, a aderência de ϕ para a topologia da convergência simples em F^E é a mesma que a aderência de ϕ para a topologia da convergência simples sobre $C(E,F)$.* ∎

Pois que $\overline{\phi}$ sendo equicontínuo está contido em $C(E,F)$.

Corolário 2. *Se uma rede de funções contínuas $f_j : E \to F$ é equicontínua e converge pontualmente para uma função $f : E \to F$, f é contínua.* ∎

O corolário anterior dá um critério para que o limite pontual de funções contínuas em E seja uma função contínua em E, distinto do da convergência uniforme sobre E. Uma rede f_j de funções contínuas pode convergir uniformemente sobre E e não ser equicontínua e, inversamente, pode ser equicontínua e convergir pontualmente sem que convirja uniformemente sobre E (no entanto neste caso converge uniformemente sobre os compactos de E, como se vê no teorema seguinte).

2.1.8 Teorema (2º teorema de Ascoli). *Se ϕ é um conjunto equicontínuo de funções $E \to F$, as topologias τ_s da convergência simples e τ_c da convergência compacta sobre ϕ são idênticas.* ∎

Este teorema é consequência do seguinte, um tanto mais geral.

2.1.8′ Teorema. *Se $\phi \subset F^E$ é equicontínuo e E_0 é uma parte densa de E a topologia τ_s da convergência pontual*[1] *nos pontos de E_0 e a topologia da convergência compacta sobre ϕ são idênticas.*

Dem.: Como τ_s é menos fina que τ_c, bastará provar que τ_s é também mais fina que τ_c (sobre ϕ) ou, o que é equivalente, se uma rede $f_j \in \phi \to f \in \phi$ nos pontos de E_0, $f_j \to f$ uniformemente sobre cada compacto Δ de E. Seja U uma vizinhança de zero em F, absolutamente convexa; a cada $x \in E$ corresponde uma vizinhança aberta V_x de x em E tal que as funções $h \in \phi$ verificam $h(y) - h(x) \in \frac{1}{5}U$, $\forall\, y \in V_x$ e, em particular,

$$(\alpha) \qquad \begin{array}{l} f_j(y) - f_j(x) \in \dfrac{1}{5}U \\[2ex] f(y) - f(x) \in \dfrac{1}{5}U \end{array} , \qquad \forall\, y \in V_x, \ \ \forall\, j\,.$$

Considere-se um compacto Δ de E. Existe em Δ um número finito de pontos $x_1, \ldots, x_m$ tal que Δ é coberto pelas vizinhanças $V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}$. Como E_0 é denso em E, existe em cada V_{x_i} um ponto

[1] Melhor seria dizer "da convergência uniforme sobre os pontos de E_0", mas é hábito, quando se trata de conjuntos reduzidos a um ponto, usar o adjectivo "pontual" em vez de "uniforme"

$y_i \in E_0$, $i = 1,...,n$. Assim, como para cada i, $f_j(y_i) \to f(y_i)$, pode-se determinar um índice j_0 tal que se tem

$$(\beta) \qquad f_j(y_i) - f(y_i) \in \frac{1}{5}U, \quad \forall i = 1,...,n, \quad \forall j \geq j_0 .$$

Posto isto, dado um ponto qualquer $y \in \Delta$, y pertence a uma vizinhança V_{x_i}; decompondo $f_j(y) - f(y)$ do seguinte modo, com $j \geq j_0$,

$$f_j(y) - f(y) = (f_j(y) - f_j(x_i)) + (f_j(x_i) - f_j(y_i)) + (f_j(y_i) - f(y_i)) + (f(y_i) - f(x_i)) + (f(x_i) - f(y)) .$$

Cada uma das parcelas do segundo membro verifica (α) ou (β) e está portanto em $\frac{1}{5}U$. Tem-se então: $f_j(y) - f(y) \in U, \forall j \geq j_0$ e $\forall y \in \Delta$, o que prova que $f_j \to f$ uniformemente sobre Δ. ∎

Corolário 1. *Se uma rede equicontínua $f_j \in C(E,F) \to f \in C(E,F)$ nos pontos de uma parte densa E_0 de E, $f_j \to f$ uniformemente sobre cada compacto de E.* ∎

Basta aplicar o teorema ao conjunto formado por f e pelos f_j que é evidentemente equicontínuo.

Note-se que se $E = E_0$ não é necessário supor que a função limite f é contínua, isso é consequência de (f_j) ser equicontínua (corol. de 2.1.7). Porém, se $E_0 \neq E$ *podem existir redes f_j equicontínuas que convirjam em cada ponto de E_0 para uma função não contínua.*

Corolário 2. *Para qualquer conjunto equicontínuo $\phi \subset F^E$ são equivalentes: ϕ é compacto para τ_s; ϕ é compacto para τ_c.* ∎

2.1.9 Teorema (3º teorema de Ascoli). *Se F é separado, qualquer conjunto ϕ de funções $E \to F$ que verifica as condições,*

a) *ϕ é equicontínuo,*

b) *Para cada $x \in E$, $\phi(x) = \{f(x) : f \in \phi\}$ é relativamente compacto em F,*

é relativamente compacto em $C(E,F)$ para a topologia τ_c.

Dem.: Da relação $\phi \subset \prod_{x\in E}\phi(x)$, deduz-se que a condição b) é equivalente a ϕ ser relativamente compacto para τ_s em F^E. Como $\overline{\phi}$ é equicontínuo e compacto para τ_s, do corolário 2 do teorema anterior vem o resultado. ∎

Note-se que este teorema, que é conhecido também só por teorema de Ascoli, pode ser enunciado do seguinte modo:

2.1.9′ Teorema. *Se F é um e.l.c. separado, E é um espaço topológico qualquer e $\phi \subset C(E,F)$, então*

$$\phi \textit{ equicontínuo e relativamente compacto para } \tau_s \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \phi \textit{ relativamente compacto para } \tau_c \textit{ em } C(E,F). \blacksquare$$

Pois que a condição $\phi(x)$ relativamente compacto em F, $\forall\, x \in E$, equivale a ϕ ser relativamente compacto para τ_s.

Observação: Prova-se, o que deixamos como exercício, que o recíproco do 3º teorema de Ascoli, ou o que dá no mesmo, de 2.1.9′, é válido se E é localmente compacto.

Corolário 1. *Se F é um e.l.c. metrizável e E é um espaço topológico com uma sucessão exaustiva de compactos, para cada sucessão de funções contínuas $f_n\colon E \to F$ tal que*

a) *é equicontínua,*

b) *para cada $x \in E$, $\{f_n(x)\colon n \in \mathbb{N}_1\}$ é relativamente compacto em F,*

existe uma subsucessão f_{n_k} e uma função contínua $f : E \to F$ tal que $f_{n_k} \to f$ uniformemente sobre cada compacto de E. ∎

Basta ter em conta que neste caso o espaço $C(E,F)$ com a topologia τ_c é metrizável (Teorema 2.1.5).

Se F é de dimensão finita e separado, em particular $F = K$, a condição b) equivale a $\{f_n(x)\}$ ser limitado em E, para cada $x \in E$; tem-se assim, para sucessões equicontínuas de funções reais ou complexas:

Corolário 2. *Se E é um espaço topológico com uma sucessão exaustiva de compactos, de toda a sucessão $f_n : E \to K$ equicontínua e limitada em cada ponto $x \in E$ ($\{f_n(x)\}$ limitado) pode-se extrair uma subsucessão f_{n_k} que converge para uma função contínua $f : E \to K$ uniformemente sobre cada compacto de E.* ∎

Os corolários 1 e 2 valem no caso particular em que E é um *aberto* ou *compacto* de $\mathbb{R}^n$. No caso em que E é compacto, o corolário 2 é conhecido na Análise com o nome de teorema de Arzela ou de Ascoli-Arzela.

Vejamos algumas aplicações dos teoremas precedentes.

C. Espaços de funções holomorfas. Teorema de Montel

Considere-se um aberto Ω de $\mathbf{C}$ e seja $H(\Omega)$ o espaço das funções holomorfas $f : \Omega \to \mathbf{C}$; $H(\Omega)$ é um subespaço do espaço $C(\Omega) = C(\Omega; \mathbf{C})$ das funções complexas contínuas e definidas em Ω. Como se sabe, Ω tem uma sucessão exaustiva de compactos $\Delta_1 \subset \ldots \subset \Delta_n \subset \ldots$ e a topologia da convergência compacta sobre $C(\Omega)$ é definida pelas seminormas:

$$\|f\|_{\Delta_n} = \sup_{z \in \Delta_n} |f(z)| \; ;$$

a topologia da convergência compacta em $H(\Omega)$ é definida pelas restrições a $H(\Omega)$ destas seminormas.

2.1.10 Teorema. *$H(\Omega)$ é fechado em $C(\Omega)$ para a topologia da convergência compacta.*

Dem.: Como $C(\Omega)$ é metrizável (com a topologia τ_c) basta mostrar que se uma sucessão de funções holomorfas $f_n : \Omega \to \mathbf{C}$ converge uniformemente sobre cada compacto Δ de Ω para uma função contínua[1] $f : \Omega \to \mathbf{C}$, f é holomorfa. Pelo teorema de Morera basta mostrar que para qualquer linha fechada L (seccionalmente C^1) contida numa bola aberta $B(z_0, R) \subset \Omega$, $\int_L f(z)\,dz = 0$. Ora tem-se, para cada n, $\int_L f_n(z)\,dz = 0$, mas como $f_n \to f$ uniformemente sobre L, $\int_L f(z)\,dz = \lim \int_L f_n(z)\,dz = 0$. ∎

---

[1] Não é preciso supor que f é contínua, porque $C(\Omega)$ é fechado em $\mathbf{C}^\Omega$

Corolário. *$H(\Omega)$ com a topologia da convergência compacta é um espaço metrizável e completo (portanto, um espaço de Fréchet).* ∎

Porque assim é $C(\Omega)$ com a topologia τ_c.

O teorema anterior é uma parte do conhecido teorema de Weierstrass[1] para as funções holomorfas:

Se uma sucessão de funções holomorfas $f_n : \Omega \to \mathbf{C}$ tende uniformemente sobre cada compacto $\Delta \subset \Omega$ para uma função $f : \Omega \to \mathbf{C}$, f é holomorfa e as derivadas f_n' convergem para a derivada f' também uniformemente sobre cada compacto de Ω.

A segunda parte deste teorema mostra que:

2.1.11 Teorema. *Supondo $H(\Omega)$ com a topologia da convergência compacta o operador de derivação $D : H(\Omega) \to H(\Omega)$ é linear contínuo.* ∎

Um dos teoremas mais profundos da Análise Complexa é o seguinte teorema de Montel:

2.1.12 Teorema (Montel). *Se uma sucessão de funções holomorfas $f_n : \Omega \to \mathbf{C}$ é limitada sobre cada compacto de Ω, isto é, para cada compacto $\Delta \subset \Omega$, existe um número $L_\Delta \geq 0$ tal que*

$$|f_n(z)| \leq L_\Delta\,, \quad \forall z \in \Delta, \ \forall n \in \mathbf{N}_1\,,$$

existe uma subsucessão (f_{n_k}) de (f_n) e uma função holomorfa $f : \Omega \to \mathbf{C}$, tais que $f_{n_k} \to f$ uniformemente sobre cada compacto de Ω.

Dem.: Notemos que a condição de limitação para f_n implica em particular que $f_n(z)$ é limitada em cada ponto $z \in \Omega$; então em virtude do Corolário 2 do 3º teorema de Ascoli *bastará mostrar que (f_n) é equicontínua*, pois sendo assim ela tem uma subsucessão f_{n_k} uniformemente convergente sobre cada compacto de Ω para uma função contínua $f : \Omega \to \mathbf{C}$, a qual é holomorfa em virtude de 2.1.10.

---

[1] Ver, por exemplo, "Análise Superior", Sebastião e Silva.

Seja então $z_0 \in \Omega$. Considere-se uma bola fechada $\Delta = B[z_0, R] \subset \Omega$, $R > 0$ e seja γ a fronteira orientada no sentido directo (circunferência de raio R e centro z_0). Tome-se um número $\delta > 0$ e considere-se uma bola $B[z_0, r]$ com $r < R$. Pela fórmula integral de Cauchy vem, para qualquer n e qualquer $z \in B[z_0, r]$:

$$f_n(z) - f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f_n(u) \frac{z - z_0}{(u - z)(u - z_0)} \, du \ ;$$

usando a fórmula de majoração do integral e tendo em conta que sobre γ, $|f_n(u)| \leq L_\Delta$ e $|u - z|, |u - z_0| \geq R - r$, vem

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| \leq R \, L_\Delta \frac{r}{(R - r)^2}$$

e, portanto, $|f_n(z) - f_n(z_0)| \leq \delta$, desde que se tome r pela condição $\frac{r}{(R-r)^2} \leq \delta / R L_\Delta$, o que é sempre possível visto que $r/(R - r)^2 \to 0$ quando $r \to 0$. Provámos assim que f_n é equicontínua em qualquer $z_0 \in \Omega$, o que termina a demonstração. ∎

Note-se que a condição de limitação imposta a f_n no teorema é a condição para que f_n seja limitada no espaço localmente convexo que se obtém munindo $H(\Omega)$ com a topologia da convergência compacta. Na verdade ela é equivalente a $\|f_n\|_\Delta$ ser limitada para cada compacto $\Delta \subset \Omega$. Tendo em conta que $H(\Omega)$ é metrizável vê-se então que o teorema de Montel é equivalente ao seguinte:

2.1.13 Teorema. *No espaço $H(\Omega)$ (com a topologia da convergência compacta) todo o conjunto limitado é relativamente compacto.* ∎

Como os relativamente compactos são limitados, pode-se dizer que em $H(\Omega)$ são equivalentes as noções de limitado e de relativamente compacto.

2.2 - Espaços de aplicações lineares contínuas

Vamos agora considerar dois espaços localmente convexos E e F. O espaço das aplicações lineares de E em F designa-se por $\operatorname{Hom}(E,F)$ e o das aplicações lineares contínuas de E em F, por $L(E,F)$.

Note-se que $\operatorname{Hom}(E,K)$ é o dual algébrico E^* de E e $L(E,K)$ é o dual topológico E'.

De 2.1.3 resulta:

2.2.1 Teorema. *Se $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E, a $\mathcal{M}$-topologia sobre $L(E,F)$ é localmente convexa.* ∎

Com efeito, toda a aplicação linear contínua $u: E \to F$ transforma limitados de E em limitados de F.

Note-se que, em geral, uma $\mathcal{M}$-topologia sobre $\operatorname{Hom}(E,F)$ não é localmente convexa mesmo que os conjuntos de $\mathcal{M}$ sejam limitados.

Estamos particularmente interessados no estudo das $\mathcal{M}$-topologias sobre $L(E,F)$ em que $\mathcal{M}$ é formado de partes limitadas de E; como acabamos de ver, estas topologias são localmente convexas. De entre elas há a destacar a topologia τ_s(1) da convergência simples, τ_c da convergência compacta, τ_c' da convergência uniforme nos précompactos e a mais fina de todas: a topologia τ_β da convergência uniforme nos limitados de E. De acordo com 2.1.4, se S é um sistema de seminormas que define a topologia de F, a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre $L(E,F)$ é definida pelas seminormas

$$(1) \qquad p_M(u) = \sup_{x \in M} p(u(x)), \qquad p \in S, \quad M \in \mathcal{M} .$$

Como vimos uma $\mathcal{M}$-topologia não muda se substituirmos $\mathcal{M}$ pelo conjunto das reuniões finitas de elementos de $\mathcal{M}$, o que permite supor $\mathcal{M}$ filtrante à direita, e não muda também se em vez de $\mathcal{M}$ se considera a classe de todos os subconjuntos de conjuntos de $\mathcal{M}$. Para o caso do espaço $L(E,F)$ tem-se ainda:

(1) Como temos feito até agora, continuamos a designar pelo mesmo símbolo uma $\mathcal{M}$-topologia sobre F^E e a que ela induz em $L(E,F)$, salvo se houver risco de confusão.

2.2.2 Teorema. *Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ são conjuntos de partes limitadas de E as topologias $\tau_{\mathcal{M}}$ e $\tau_{\mathcal{M}'}$ sobre $L(E,F)$ são idênticas nos seguintes casos:*

a) *$\mathcal{M}'$ é o conjunto dos homotéticos de razão > 0 dos conjuntos de $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}' = \{\rho M : \rho > 0 \text{ e } M \in \mathcal{M}\}$;*

b) *$\mathcal{M}'$ é o conjunto das aderências dos conjuntos de $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}' = \{\overline{M} : M \in \mathcal{M}\}$;*

c) *$\mathcal{M}'$ é o conjunto dos envólucros absolutamente convexos dos $M \in \mathcal{M}$: $\mathcal{M}' = \{\mathrm{ac}(M) : M \in \mathcal{M}\}$;*

d) *$\mathcal{M}'$ é o conjunto dos envólucros absolutamente convexos fechados dos conjuntos de $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}' = \{\overline{\mathrm{ac}(M)} : M \in \mathcal{M}\}$.*

Dem.: Note-se que d) é consequência de b) e c). Pode-se provar a), b) e c) mostrando que se S é um sistema de seminormas que define a topologia de F, em cada caso, os sistemas de seminormas $\{p_M\}_{M\in\mathcal{M}, p\in S}$ e $\{p_{M'}\}_{M'\in\mathcal{M}', p\in S}$ são equivalentes. Para isso, bastará provar que, para qualquer $M \subset E$, limitado, $p_{\rho M} = \rho\, p_M$, $\rho > 0$, $p_{\overline{M}} = p_M$ e $p_{\mathrm{ac}(M)} = p_M$, o que deixamos como exercício. ∎

Em virtude de 2.2.2 d), se $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes de E tal que $\bigcup \mathcal{M} = E$ e F é separado, a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre $L(E,F)$ (e também sobre $\mathrm{Hom}(E,F)$) é separada.

2.2.3 Teorema. *Se F é separado, toda a rede de aplicações lineares $u_j : E \to F$ que converge pontualmente tem por limite uma aplicação linear $u : E \to F$.*

Dem.: Com efeito, se $\alpha, \beta \in K$ e $x, y \in E$, tem-se, para cada j, $u_j(\alpha x + \beta y) = \alpha u_j(x) + \beta u_j(y)$, donde vem, passando ao limite e tendo em conta que F é separado, $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$. ∎

Corolário. *Se $\bigcup \mathcal{M} = E$ e F é separado,* $\mathrm{Hom}(E,F)$ *é fechado em F^E para a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$; se além disso, F é completo,* $\mathrm{Hom}(E,F)$ *com $\tau_{\mathcal{M}}$ é completo.* ∎

Com efeito, em virtude do teorema anterior, $\mathrm{Hom}(E,F)$ é fechado em F^E para τ_s e portanto, para $\tau_{\mathcal{M}}$ (que é mais fina que τ_s). A última parte resulta de 2.1.2 e).

Note-se que, em geral, $L(E,F)$ não é fechado em F^E para as $\mathcal{M}$-topologias mesmo que os conjuntos $M \in \mathcal{M}$ sejam limitados, cubram E e F seja separado. Em certos casos porém $L(E,F)$ é fechado para a topologia τ_β da convergência uniforme em todos os limitados de E. Para estudar esta questão, introduzimos a seguinte definição:

Um espaço localmente convexo E diz-se *bornológico* se todo o conjunto absolutamente convexo que absorve todas as partes limitadas é vizinhança de zero.

2.2.4 Teorema. *Todo o espaço localmente convexo metrizável é bornológico.*

Em particular, os espaços normados são bornológicos.

Dem.: Seja $U_1 \supset ... \supset U_n \supset ...$ um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E absolutamente convexas e $A \subset E$ absolutamente convexo que absorve todas as partes limitadas.

Vamos ver que existe um inteiro n tal que $A \supset n^{-1} U_n$, o que demonstra o teorema. Ora se não fosse assim, existiria uma sucessão $x_1 \in U_1$, ..., $x_n \in U_n$, ..., portanto, $x_n \to 0$ e por consequência limitada, tal que $n^{-1} x_n \notin A$, $\forall n$, o que é absurdo visto que A absorve $\{x_n\}$. ■

2.2.5 Teorema. *Se E é bornológico e F localmente convexo, toda a aplicação linear $u: E \to F$ que transforma os limitados de E em limitados de F é contínua.*

Dem.: Se V é vizinhança de zero absolutamente convexa em F, $u^{-1}(V)$ é um conjunto absolutamente convexo em E e absorve qualquer limitado M de E. Com efeito, pela hipótese do teorema, $u(M)$ é limitado em F, portanto, é absorvido por V, mas isto implica que M é absorvido por $u^{-1}(V)$. Como E é bornológico, $u^{-1}(V)$ é vizinhança de zero em E e u é, portanto, contínua. ■

Voltemos à questão que estávamos tratando:

2.2.6 Teorema. *Se E é bornológico e F é separado, $L(E,F)$ é fechado em F^E para a topologia τ_β da convergência uniforme nas partes limitadas de E.*

Dem.: Basta provar que se uma rede de aplicações lineares contínuas $u_j : E \to F$ converge uniformemente sobre cada $M \in \mathcal{M}$(1) para uma função $u : E \to F$, a função u é limitada sobre cada $M \in \mathcal{M}$. Pois que, sendo assim, como u é linear (2.2.3 Corolário) é contínua, visto E ser bornológico. Seja p uma semi-norma contínua sobre F e $M \in \mathcal{M}$. Dado $\delta > 0$, existe um índice j tal que $p(u_j(x) - u(x)) \leq \delta$, $\forall\, x \in M$; como u_j é limitada sobre M, existe também $L > 0$ tal que $p(u_j(x)) \leq L$, $\forall\, x \in M$. Destas relações vem

$$p(u(x)) \leq p(u(x) - u_j(x)) + p(u_j(x)) \leq L + \delta \ ,$$

$\forall\, x \in M$, o que prova que u é limitada sobre M. ∎

Corolário 1. *Se E é bornológico (em particular, metrizável) e F é separado e completo, $L(E,F)$ com a topologia τ_β é completo.* ∎

No caso em que F é Banach e E normado obtém-se:

Corolário 2. *Se E é um espaço normado e F é um espaço de Banach, o espaço $L(E,F)$ com a norma (usual)*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$$

é um espaço de Banach. ∎

Pois esta norma define a topologia τ_β sobre $L(E,F)$.

A. Conjuntos limitados em $L(E,F)(\tau_\mathcal{M})$

2.2.7 Teorema. *Se $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E, para qualquer conjunto ϕ de aplicações lineares contínuas de E em F, são equivalentes:*

---

(1) $\mathcal{M}$ designa aqui o conjunto de todas as partes limitadas de E.

a) *ϕ é limitado para a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$;*

b) *Para cada vizinhança V de zero em F e cada $M \in \mathcal{M}$, existe $\rho > 0$ tal que $u(M) \subset \rho V$, $\forall u \in \phi$;*

c) *Se S é um sistema de seminormas que define a topologia de F, para cada $p \in S$ e cada $M \in \mathcal{M}$, existe $\rho > 0$ tal que $p[u(x)] \leq \rho$, $\forall x \in M$ e $\forall u \in \phi$;*

d) *Para cada $M \in \mathcal{M}$, o conjunto dos $u(x)$, tais que $u \in \phi$ e $x \in M$, é limitado em F;*

e) *Para cada vizinhança V de zero em F, o conjunto $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$ absorve todos os $M \in \mathcal{M}$.*

Dem.: A condição b) resulta imediatamente de exprimir que cada vizinhança de zero para $\tau_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{F}(M,V) \cap L(E,F) = \{u \in L(E,F) : u(M) \subset V\}$ absorve ϕ. Por sua vez c) resulta de exprimir que as seminormas $p_M(u) = \sup_{x\in M} p[u(x)]$, $M \in \mathcal{M}$ e $p \in S$, que definem a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$, são limitadas sobre ϕ. A equivalência de d) e b) é imediata. Resta ver que e)$\Leftrightarrow$b). Ora a condição $u(M) \subset \rho V$ ou seja $M \subset u^{-1}(\rho V) = \rho u^{-1}(V)$, $\forall u \in \phi$, é equivalente a

$$M \subset \bigcap_{u\in\phi} \rho u^{-1}(V) = \rho \bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)\ . \blacksquare$$

Observação: Exprime-se a condição b) (ou c)) dizendo que ϕ é *uniformemente limitado* sobre cada $M \in \mathcal{M}$. Note-se que as condições b), c), d) caracterizam os limitados de qualquer subespaço localmente convexo de $F^E(\tau_{\mathcal{M}})$; no entanto a condição e) só é válida se ϕ é formado por aplicações lineares de E em F. Ela desempenhará um papel importante no que segue.

Recordemos que se chama *tonel* num espaço localmente convexo E a qualquer conjunto $T \subset E$ *absolutamente convexo, fechado e absorvente* e que E se diz *tonelado* se todo o tonel é vizinhança de zero. Recorde-se ainda que todo o espaço metrizável completo (em particular, Banach) é tonelado.

Um conjunto $\phi \subset L(E,F)$ diz-se *simplesmente limitado* se é limitado para a topologia da convergência simples τ_s; equivale a dizer, em virtude de c) que, para cada $x \in E$, o conjunto $\phi(x) = \{u(x) \colon u \in \phi\}$ é limitado em F. De 2.2.7 e) resulta

2.2.8 Teorema. *Um conjunto $\phi \subset L(E,F)$ é simplesmente limitado sse para cada vizinhança V de zero fechada e absolutamente convexa em F, $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$ é um tonel em E.* ∎

Pois que sendo V absolutamente convexa e fechada, os conjuntos $u^{-1}(V)$ são também absolutamente convexos e fechados, e em virtude de e) a condição de ϕ ser limitado é equivalente à de $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$ ser absorvente.

Corolário 1. *Se E é um espaço tonelado e $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E, todo o conjunto $\phi \subset L(E,F)$ simplesmente limitado é limitado para $\tau_{\mathcal{M}}$.* ∎

Com efeito, para cada vizinhança V de zero em F absolutamente convexa e fechada, $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$, sendo um tonel, é vizinhança de zero em E e absorve portanto qualquer $M \in \mathcal{M}$.

O corolário 1 pode-se enunciar dizendo que se *E é tonelado, todo o conjunto $\phi \subset L(E,F)$ simplesmente limitado é uniformemente limitado sobre cada parte limitada M de E.*

Tem-se, em particular, o seguinte resultado clássico da teoria dos espaços normados que se chama *teorema da limitação uniforme.*

Corolário 2 (Teorema da limitação uniforme). *Se E é um espaço de Banach e F é um espaço normado, todo o conjunto ϕ de aplicações lineares contínuas de E em F que é simplesmente limitado é uniformemente limitado sobre a bola de raio 1 de E.* ∎

Por outras palavras, se para cada $x \in E$, $\sup_{u\in\phi} \|u(x)\| < +\infty$, também $\sup_{u\in\phi,\|x\|\leq 1} \|u(x)\| < +\infty$.

Como um conjunto limitado numa topologia é também limitado nas topologias menos finas, do Corolário 1 resulta que se *E é tonelado, os limitados de $L(E,F)$ são os mesmos para todas as $\mathcal{M}$-topologias tais que $\bigcup \mathcal{M} = E$.*

Esta propriedade em geral é falsa; ela no entanto é verdadeira se E é separado e quase completo. Um espaço localmente convexo

E diz-se *quase completo se toda a parte limitada e fechada de E é completa.*

Facilmente se verifica que um espaço localmente convexo metrizável (em particular, normado) que é quase completo é completo.

Para estabelecer este resultado vamos demonstrar o seguinte teorema:

2.2.9 Teorema. *Se E é separado e $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E absolutamente convexas e sequencialmente completas, todo o conjunto $\phi \subset L(E, F)$ simplesmente limitado é limitado para $\tau_{\mathcal{M}}$.* ■

Como, para cada vizinhança V de zero em F, absolutamente convexa e fechada, $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$ é um tonel (Teorema 2.2.8), bastará provar o seguinte lema:

2.2.10 Lema. *Se E é um espaço localmente convexo separado, todo o tonel T de E absorve qualquer parte M de E absolutamente convexa limitada e sequencialmente completa.*

Dem.: Considere-se o subespaço vectorial E_M de E gerado por M; é fácil ver que M é absorvente em E_M. Assim, a função de Minkowski, $\|x\|_M = \inf\{\rho > 0\colon\ x \in \rho M\}$, $x \in E_M$, é uma seminorma sobre E_M e como M é limitado é uma norma (verificação imediata). Vamos supor E_M munido desta norma. Note-se que se tem, para cada $\rho > 0$,

$$B_{\|\ \|_M}(0, \rho) \subset \rho M \subset B_{\|\ \|_M}[0, \rho] ,$$

de modo que os conjuntos ρM formam um sistema fundamental de vizinhanças de zero em E_M. Posto isto vamos ver que

α) *E_M é um espaço de Banach, portanto, tonelado*; e

β) *a topologia de E_M é mais fina que a induzida por E.*

Vamos provar primeiro β). Ora se V é vizinhança de zero em E, como M é limitado, existe $\rho > 0$ tal que $V \supset \rho M$ e, portanto, $V \cap E_M \supset \rho M$, o que prova que $V \cap E_M$ é vizinhança de zero em E_M.

Para provar α) considere-se uma sucessão de Cauchy x_n em E_M;

como x_n é limitada, existe $r > 0$ tal que $\|\frac{x_n}{r}\|_M < 1$; e, portanto, $\frac{x_n}{r} \in M$, $\forall n$. Mas em virtude de $\beta)$, $\frac{x_n}{r}$ é sucessão de Cauchy em E, e como M é sequencialmente completo, segue-se que $\frac{x_n}{r}$ converge para um ponto $\frac{x}{r} \in M$, na topologia de E. Para acabar a demonstração de $\alpha)$, vamos ver que $x_n \to x$ (note-se que $x \in E_M$) na topologia de E_M. Ora, para cada $\delta > 0$, existe p tal que $\|x_n - x_m\|_M < \delta$, $\forall n, m \geq p$; mas desta condição vem $\frac{x_n}{\delta} - \frac{x_m}{\delta} \in M$; tomando o limite em E com m fixo e tendo em conta que M é sequencialmente fechado em E, vem $\frac{x}{\delta} - \frac{x_m}{\delta} \in M$ ou $x - x_m \in \delta M$ e, portanto, $\|x - x_m\|_M \leq \delta$, $\forall m \geq p$.

Agora é fácil estabelecer o lema: dado um tonel T em E, de $\beta)$ resulta que $T \cap E_M$ é tonel em E_M; mas como E_M é tonelado, M é absorvido por $T \cap E_M$ e, portanto, por T. ∎

Do teorema 2.2.9 resulta imediatamente:

Corolário 1. *Se E é separado, os conjuntos limitados em $L(E,F)$ são os mesmos para todas as topologias $\tau_{\mathcal{M}}$ tais que $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E absolutamente convexas e sequencialmente completas e $\bigcup \mathcal{M} = E$.* ∎

Daqui vem também o resultado já anunciado:

Corolário 2. *Se E é separado e quase completo, os conjuntos limitados em $L(E,F)$ são os mesmos para todas as topologias $\tau_{\mathcal{M}}$ em que $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E tal que $\bigcup \mathcal{M} = E$.*

Dem.: Basta ver que $\tau_{\mathcal{M}} = \tau_{\mathcal{M}'}$ em que $\mathcal{M}'$ é formado pelos envólucros convexos fechados dos conjuntos de $\mathcal{M}$ e que tais conjuntos são completos, visto serem limitados e fechados e E ser quase completo. ∎

B. Conjuntos equicontínuos em $L(E,F)$

Vamos começar por estabelecer a seguinte caracterização para os conjuntos equicontínuos de aplicações lineares contínuas de E em F:

2.2.11 Teorema. *Para qualquer conjunto $\phi \subset L(E,F)$ são equivalentes:*

a) *ϕ é equicontínuo;*

b) *ϕ é equicontínuo no ponto zero;*

c) *Para qualquer vizinhança V de zero em F, o conjunto $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$ é vizinhança de zero em E.*

Dem.: a)$\Rightarrow$b). Imediato; b)$\Rightarrow$a). A condição b) é equivalente a existir para cada vizinhança V de zero em F, uma vizinhança W de zero em E tal que $u(W) \subset V$, $\forall u \in \phi$; tomando um ponto qualquer $x_0 \in E$, e tendo em conta que u é linear, da condição anterior vem $u(x_0 + W) = u(x_0) + u(W) \subset u(x_0) + V$, o que prova que ϕ é equicontínuo em x_0. Para a equivalência b)$\Leftrightarrow$c), basta ver que a condição $u(W) \subset V$, ou seja $W \subset u^{-1}(V)$, $\forall u \in \phi$, é equivalente a $W \subset \bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$. ∎

Da condição c) e de 2.2.7 e) resulta imediatamente:

Corolário 1. *Se $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E, toda a parte equicontínua de $L(E,F)$ é limitada para a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$.* ∎

A recíproca é falsa; tem-se, no entanto,

Corolário 2. *Se E é tonelado, todo o conjunto ϕ de aplicações lineares contínuas de E em F que é simplesmente limitado é equicontínuo.* ∎

Com efeito, para cada vizinhança V de zero em F absolutamente convexa e fechada, $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$ é um tonel em E e é, portanto, vizinhança de zero.

Dos corolários 1 e 2 resulta que, se E é tonelado e $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E tal que $\bigcup \mathcal{M} = E$, são equivalentes, para qualquer $\phi \subset L(E,F)$: *ϕ é equicontínuo, ϕ é limitado* para $\tau_{\mathcal{M}}$.

Recordemos que, pelo primeiro teorema de Ascoli, se $\phi \subset L(E,F)$ é equicontínuo, a sua aderência $\overline{\phi}$ em F^E para a topologia da convergência simples é equicontínua; se além disto F é separado, de 2.2.3 resulta que $\overline{\phi} \subset L(E,F)$. Tem-se assim:

2.2.12 Teorema. *Se $\phi \subset L(E,F)$ é equicontínuo, a sua aderência para a topologia da convergência simples em $L(E,F)$ é equicontínua* *e coincide com a aderência de ϕ para a topologia da convergência simples em F^E se F é separado.* ■

Recordemos ainda que em virtude do segundo teorema de Ascoli, 2.1.8, se $\phi \subset L(E,F)$ é equicontínuo, coincidem em ϕ as topologias da convergência simples e da convergência compacta e também da précompacta. Combinando com os resultados anteriores, obtém-se o seguinte teorema bastante importante nas aplicações à Análise Funcional:

2.2.13 Teorema (Banach-Steinhaus). *Suponhamos que E é tonelado e F é separado e seja u_n uma sucessão de aplicações lineares contínuas de E em F que converge simplesmente para uma função $u\colon E \to F$. Então:*

a) *u é linear e contínua;*

b) *$u_n \to u$ uniformemente sobre cada compacto ou précompacto de E.*

Dem.: Como, para cada $x \in E$, $u_n(x) \to u(x)$, $u_n(x)$ é limitada em F e portanto $\{u_n\}$ é simplesmente limitada. Do corolário 2 de 2.2.11 resulta que $\{u_n\}$ é equicontínuo; como u pertence à aderência $\overline{\{u_n\}}$ de $\{u_n\}$ em F^E para τ_s e $\{u_n\} \subset L(E,F)$, visto que F é separado (teorema anterior), segue-se que $u \in L(E,F)$ o que prova a). Para b) basta aplicar o segundo teorema de Ascoli a $\overline{\{u_n\}}$ que é um conjunto equicontínuo. ■

Observação: O Teorema de Banach-Steinhaus é falso para redes de aplicações lineares contínuas simplesmente convergentes em F^E; é no entanto verdadeiro com a hipótese adicional de a rede ser simplesmente limitada.

Para terminar este estudo sobre partes equicontínuas de $L(E,F)$ vamos estabelecer o seguinte resultado que será usado adiante:

2.2.14 Teorema. *Se F é quase completo e separado e $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E tal que $\bigcup \mathcal{M} = E$, então, no espaço $L(E,F)(\tau_{\mathcal{M}})$ todo o conjunto ϕ equicontínuo e fechado é completo.*

Dem.: Considere-se uma rede de Cauchy u_j em ϕ para a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$. Como $\tau_{\mathcal{M}}$ é mais fina que τ_s, u_j é também rede de Cauchy para τ_s e, portanto, para cada $x \in E$, $u_j(x)$ é rede de Cauchy em F. Como ϕ é limitado para τ_s visto ser equicontínuo, o conjunto $\phi(x) = \{u(x) : u \in \phi\}$ é limitado em F, a sua aderência é portanto um conjunto completo, e como contém os pontos $u_j(x)$ segue-se que $u_j(x) \to u(x)$ em F. Define-se assim uma função $u : E \to F$ que é linear contínua, pois está na aderência de ϕ para a topologia da convergência simples, que como já vimos está contida em $L(E, F)$. Resta agora provar que $u_j \to u$ em $L(E, F)(\tau_{\mathcal{M}})$, pois sendo assim, $u \in \phi$, visto ϕ ser fechado neste espaço. Ora dada uma vizinhança V de zero fechada em F e um conjunto $M \in \mathcal{M}$, existe um índice j_0 tal que

$$u_j(x) - u_\ell(x) \in V\,, \qquad \forall j, \ell \geq j_0, \quad \forall x \in M\,,$$

e tomando o limite com j fixo vem $u_j(x) - u(x) \in V$, $\forall j \geq j_0$ e $\forall x \in M$, o que prova que $u_j \to u$ uniformemente sobre M. ∎

2.3 – Sistemas duais. Topologias fracas

Sejam E e F espaços vectoriais e considere-se uma forma bilinear $\langle x, y\rangle$ sobre $E \times F$, isto é, uma aplicação $E \times F \to K$ tal que, para cada y fixado em F, $x \to \langle x, y\rangle$ é uma forma linear sobre E e, para cada x fixado em E, $y \to \langle x, y\rangle$ é uma forma linear sobre F. Diz-se que E e F estão em *dualidade* ou que constituem um *sistema dual* $\langle E, F\rangle$ (em relação a $\langle x, y\rangle$) se as condições seguintes são verificadas:

(D1) Para cada $y \neq 0$ em F, existe $x \in E$ tal que $\langle x, y\rangle \neq 0$;

(D2) Para cada $x \neq 0$ em E, existe $y \in F$ tal que $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Exemplos: **1.** Se E é um espaço vectorial e E^* o seu dual algébrico (espaço das formas lineares sobre E), define-se um sistema dual $\langle E, E^*\rangle$ em relação à forma bilinear canónica sobre $E \times E^*$: $\langle x, y\rangle = y(x)$, $\forall x \in E$ e $\forall y \in E^*$. Com efeito, (D1) é verificada por definição de forma linear $\neq 0$; quanto a (D2) note-se que qualquer $x \neq 0$ pertence a uma base de E e existe, portanto, $y \in E^*$ tal que $y(x) = 1 \neq 0$.

2. Um espaço localmente convexo separado E e o seu dual topológico E' (espaço das formas lineares contínuas sobre E) constituem um sistema dual $\langle E, E'\rangle$ em relação à restrição a $E \times E'$ da forma bilinear canónica sobre $E \times E^*$: $\langle x, y\rangle = y(x)$ (D1) é verificada como no caso anterior e (D2) resulta do teorema de Hahn-Banach (Corol. de 1.5.2).

Note-se que se E não é separado (D2) não é verificada e portanto E e E' não constituem um sistema dual no sentido que definimos.

Se $\langle E, F\rangle$ é um sistema dual, associando a cada $y \in F$ a forma linear $x \to \langle x, y\rangle$ sobre E, obtém-se uma aplicação linear de F em E^* que é injectiva, em virtude de (D1), o que permite identificar F com um subespaço de E^*. Com esta identificação, tem-se $\langle x, y\rangle = y(x)$, $\forall x \in E$ e $\forall y \in F$, isto é, a forma bilinear que define a dualidade passa a ser a restrição a $E \times F$ da forma bilinear canónica sobre $E \times E^*$ (Exemplo 1). De modo análogo, fazendo corresponder a cada $x \in E$ a forma linear $y \to \langle x, y\rangle$ sobre F, obtém-se uma aplicação linear $E \to F^*$ que é injectiva em virtude de (D2) e permite identificar E com um subespaço de F^*; com tal identificação tem-se $\langle x, y\rangle = x(y)$, $\forall x \in E$ e $\forall y \in F$.

No que segue vamos usar muitas vezes estas identificações, que consistem portanto em considerar cada um dos espaços de um sistema dual $\langle E, F\rangle$ como espaço de formas lineares sobre o outro. Note-se ainda que em virtude da simetria de $\langle E, F\rangle$ as definições e teoremas relativos a um dos espaços E, F convertem-se em definições e teoremas relativos ao outro pela simples troca de E com F.

A. Topologias fracas

Considere-se um sistema dual $\langle E, F\rangle$; a menos fina das topologias sobre E que tornam *contínuas as formas* lineares $y \in F$ (ou seja as formas lineares $x \to \langle x, y\rangle$, $y \in F$) chama-se *topologia fraca sobre E* (definida pela dualidade) e representa-se por $\sigma(E, F)$. Do mesmo modo se define a topologia fraca $\sigma(F, E)$ (é a menos fina das topologias sobre F que tornam contínuas as formas lineares $x \in E$).

As propriedades relativas às topologias fracas são muitas vezes indicadas com os qualificativos "fraco" ou "fracamente". Assim $x_j \to 0$ fracamente em E significa que $x_j \to 0$ para a topologia $\sigma(E,F)$.

A cada $y \in F$ corresponde uma seminorma $x \to |\langle x,y\rangle|$ sobre E e é fácil ver que a *topologia fraca* $\sigma(E,F)$ *é idêntica à topologia localmente convexa sobre* E *definida por estas seminormas*. Desta propriedade resulta imediatamente que $\sigma(E,F)$ é idêntica à *topologia da convergência pontual* (E como subespaço de F^*) ou, o que dá no mesmo, $\sigma(E,F)$ *é a topologia induzida em* E *pela do espaço produto* K^F. Como esta topologia é separada segue-se que $\sigma(E,F)$ é também separada. Pode-se também obter esta propriedade como consequência directa de (D2): para cada $x \neq 0$ *existe* $y \in F$ *tal que* $|\langle x,y\rangle| \neq 0$ (a seminorma definida por y não se anula em x).

Observações: 1. Se E é um e.l.c. separado, a topologia fraca $\sigma(E,E')$ é menos fina que a topologia de E. A topologia fraca sobre $E' = L(E,K)$ é a topologia da convergência pontual e o mesmo acontece, claro, com $\sigma(E',E)$, tomando E como espaço de formas lineares sobre E' ($x_j \to 0$ fracamente em E sse $\forall u \in E'$, $x_j(u) = u(x_j) \to 0$).

2. Se E é um espaço vectorial, $\sigma(E,E^*)$ torna contínuas todas as formas lineares sobre E, de modo que E^* é o dual topológico de E munido de $\sigma(E,E^*)$.

3. Se $\langle E,F\rangle$ é um sistema dual e F_1 é subespaço de F em dualidade com E relativamente à restrição de $\langle x,y\rangle$ a $E \times F_1$, vê-se imediatamente que $\sigma(E,F_1)$ *é menos fina que* $\sigma(E,F)$ e $\sigma(F_1,E)$ é a *topologia induzida em* F_1 *por* $\sigma(F,E)$.

2.3.1 Teorema. *Se* $\langle E,F\rangle$ *é um sistema dual, uma forma linear* φ *sobre* E *é contínua para* $\sigma(E,F)$ *sse* $\varphi \in F$ *(ou seja, sse existe* $y \in F$ *tal que* $\varphi(x) = \langle x,y\rangle$, $\forall x \in E$*).*

Isto significa que F é o dual topológico de $E[\sigma(E,F)]$ e também (trocando E com F) que E é o dual topológico de $F[\sigma(F,E)]$. Por outras palavras, cada um dos espaços de um sistema dual qualquer é o *dual topológico do outro com a respectiva topologia fraca*.

Dem.: Da definição resulta imediatamente que se $\varphi \in F$, φ é fracamente contínua. Inversamente, se φ é contínua para $\sigma(E,F)$ de 1.4.1 d) resulta que existem $y_1,\dots,y_p \in F$ e $M > 0$ tais que

$$|\varphi(x)| \leq M \sup_{1\leq j\leq p} |y_j(x)|, \qquad \forall x \in E .$$

Tem-se assim $\varphi(x) = 0$, quando $y_1(x) = \dots = y_p(x) = 0$. Vamos ver que isto implica que φ é combinação linear de $y_1,\dots,y_p$ e que, portanto, $\varphi \in F$. Pode-se supor sem perda de generalidade que as formas $y_1,\dots,y_p$ são linearmente independentes. Considere-se a aplicação linear ϕ: $E \to K^{p+1}$ assim definida:

$$\phi(x) = \Big(y_1(x),\dots,y_p(x),\varphi(x)\Big) .$$

ϕ não é sobrejectiva, pois de contrário existiria $x \in E$ tal que $y_1(x) = \dots = y_p(x) = 0$ e $\varphi(x) = 1$, o que é contra a hipótese. Existe então um hiperplano de K^{p+1} que contém $\phi(E)$. Este hiperplano é representado por uma equação da forma $\alpha_1\, \xi_1 + \dots + \alpha_{p+1}\, \xi_{p+1} = 0$, em que $\alpha_1,\dots,\alpha_{p+1} \in K$ e não são todos nulos. Assim, tem-se, para cada $x \in E$, $\alpha_1\, y_1(x) + \dots + \alpha_p\, y_p(x) + \alpha_{p+1}\, \varphi(x) = 0$, o que mostra que $y_1,\dots,y_p,\varphi$ são linearmente dependentes. ∎

Tem-se como consequências deste teorema

Corolário 1. *Se $\langle E,F\rangle$ é um sistema dual e F_1 é um subespaço próprio de F em dualidade com E (para a restrição de $\langle x,y\rangle$ a $E\times F_1$), $\sigma(E,F_1)$ é estritamente menos fina que $\sigma(E,F)$.* ∎

Com efeito $\sigma(E,F_1)$ é menos fina que $\sigma(E,F)$ (Obs. 3) e se fosse igual, ter-se-ia $F_1 = F$.

Corolário 2. *Se E é um e.l.c. separado, uma forma linear u sobre E' é contínua para $\sigma(E',E)$ sse é definida por um elemento de E (ou seja, sse existe $x \in E$ tal que $u(\varphi) = \varphi(x)$, $\forall \varphi \in E'$).* ∎

Note-se que do teorema anterior também resulta que uma forma linear sobre um e.l.c. separado E é contínua sse é fracamente contínua, mas isto é consequência imediata da definição de topologia fraca, (Obs. 1).

Tem-se ainda o seguinte resultado:

2.3.2 Teorema. *Se E é um espaço localmente convexo separado um conjunto convexo $A \subset E$ é fechado sse é fracamente fechado.* ∎

Resulta imediatamente do que precede e da observação ao Corol. de 1.5.5.

B. Polares

Se $\langle E, F\rangle$ é um sistema dual e $A \subset E$, chama-se polar de A e representa-se por A° o conjunto dos $y \in F$ que verificam a relação $|\langle x, y\rangle| \leq 1$, $\forall x \in A$. De modo análogo se define o polar de uma parte A de F. Da definição resultam imediatamente as propriedades seguintes:

1) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \supset B^\circ$;

2) Se λ é um escalar $\neq 0$, $(\lambda A)^\circ = \lambda^{-1} A^\circ$;

3) Se (A_i) é uma família de partes de E, $(\bigcup_i A_i)^\circ = \bigcap_i A_i^\circ$.

Da definição resulta também que, para cada $x \in E$, $\{x\}^\circ$ é a bola fechada de raio 1 para a seminorma $y \to |\langle x, y\rangle|$ sobre F e é, portanto, um conjunto absolutamente convexo e fracamente fechado em F.

Em geral:

4) *Para qualquer $A \subset E$, A° é absolutamente convexo e fracamente fechado em F.*

Pois, em virtude de 3), $A^\circ = \bigcap_{x \in A} \{x\}^\circ$.

Chama-se *bipolar* de um conjunto $A \subset E$, ao conjunto $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$ (ou seja, o polar do polar de A). Vê-se imediatamente que

$$A \subset A^{\circ\circ}.$$

2.3.3 Teorema dos bipolares. *Se $\langle E, F\rangle$ é um sistema dual, para qualquer parte não vazia A de E, $A^{\circ\circ}$ é o envólucro absolutamente convexo fechado para $\sigma(E,F)$ de A.*

Dem.: Designemos por A' o envólucro absolutamente convexo fracamente fechado de A em E. De 4) resulta imediatamente que $A' \subset A^{\circ\circ}$. Resta então provar que $A^{\circ\circ} \subset A'$ ou, o que é equivalente, que para cada $x_0 \in E$, $x_0 \notin A' \Rightarrow x_0 \notin A^{\circ\circ}$. Ora se $x_0 \notin A'$, em virtude de 1.5.5 existe em E um hiperplano real H fracamente fechado que separa x_0 e A'. Em virtude de 2.3.1, H é definido por uma equação da forma $\operatorname{Re} y(x) = \operatorname{Re}\langle x, y\rangle = 1$, em que $y \in F$, e pode-se supor a forma linear y escolhida de modo que se verifiquem as condições:

i) $\operatorname{Re}\langle x_0, y\rangle > 1$;

ii) $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle < 1, \forall x \in A'$.

A cada $x \in A'$ pode-se associar um escalar ω_x tal que $|\omega_x| = 1$ e $|\langle x, y\rangle| = \omega_x\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\langle \omega_x x, y\rangle$; como $\omega_x x \in A'$, visto que A' é equilibrado, de ii) vem $|\langle x, y\rangle| < 1$, donde se conclui que $y \in A'^{\circ} \subset A^{\circ}$. Mas em virtude de i), $|\langle x_0, y\rangle| > 1$ e, portanto, $x_0 \notin A^{\circ\circ}$. ∎

Corolário 1. *Se $A \subset E$ é absolutamente convexo, $A^{\circ\circ}$ é a aderência de A para $\sigma(E,F)$; Se $A \subset E$ é absolutamente convexo e fechado para $\sigma(E,F)$, $A^{\circ\circ} = A$.* ∎

Corolário 2. *Se (A_i) é uma família de conjuntos absolutamente convexos fracamente fechados em E, $(\bigcap_i A_i)^{\circ}$ é o envólucro absolutamente convexo e fracamente fechado em F de $\bigcup_i A_i^{\circ}$.* ∎

Tem-se, com efeito, $\bigcap_i A_i = \bigcap_i A_i^{\circ\circ} = (\bigcup_i A_i^{\circ})^{\circ}$ em virtude de 3), donde $(\bigcap_i A_i)^{\circ} = (\bigcup_i A_i^{\circ})^{\circ\circ}$.

Se $\langle E, F\rangle$ é um sistema dual, dois elementos $x \in E$ e $y \in F$ dizem-se ortogonais se $\langle x, y\rangle = 0$. Se $M \subset E$, o conjunto $\{y \in F\colon \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in M\}$ é um subespaço de F que se chama *ortogonal* de M e se representa por $M^{\perp}$.

Se M é um subespaço de E, tem-se $M^{\perp} = M^{\circ}$ e, portanto, $M^{\perp}$ é um subespaço de F fracamente fechado. Com efeito, é óbvio que

$M^\perp \subset M^\circ$; inversamente, se $y \in M^\circ$, tem-se $\forall\, x \in M$ e para qualquer inteiro $n > 0$, $|\langle n\,x, y\rangle| \le 1$ ou $|\langle x, y\rangle| \le \frac{1}{n}$ donde, dada a arbitrariedade de n, $\langle x, y\rangle = 0$ o que prova que $y \in M^\perp$.

Assim, de 2.3.3, corolário 1, resulta:

Se M é subespaço de E, o biortogonal $M^{\perp\perp}$ é a aderência de M para $\sigma(E,F)$; se M é subespaço de E fechado para $\sigma(E,F)$, $M = M^{\perp\perp}$.

C. Transposta de uma aplicação linear

Se E e E_1 são espaços vectoriais e $f\colon E \to E_1$ é linear, associando a cada forma linear $u\colon E_1 \to K$ a forma linear $u \circ f\colon E \to K$ obtém-se uma aplicação *linear* ${}^{t}f\colon E_1^* \to E^*$ que se chama *transposta* de f:

(1) $$ {}^{t}f(u) = u \circ f $$

ou, mais explicitamente,

(2) $$ {}^{t}f(u)(x) = u[f(x)]\,, \qquad \forall\, x \in E \;\text{ e }\; \forall\, u \in E_1^*\,. $$

2.3.4 Teorema. *Se $\langle E, F\rangle$ e $\langle E_1, F_1\rangle$ são sistemas duais, para qualquer aplicação linear $f\colon E \to E_1$ são equivalentes:*

a) *${}^{t}f(F_1) \subset F$ ou seja, para cada $y \in F_1$, $y \circ f \in F$;*

b) *f é fracamente contínua, isto é, é contínua para as topologias fracas $\sigma(E,F)$ e $\sigma(E_1,F_1)$.*

Dem.: b)$\Rightarrow$a). Com efeito, se f é fracamente contínua, como cada $y \in F_1$ é fracamente contínuo o mesmo acontece com $y \circ f$ e, portanto, $y \circ f \in F$ em virtude de 2.3.1; a)$\Rightarrow$b). Se a) se verifica, de (2) deduz-se que, para cada $y \in F_1$ e cada $x \in E$:

(3) $$ \langle f(x), y\rangle = \langle x, {}^{t}f(y)\rangle\,. $$

Assim se uma rede $x_j \to 0$ fracamente em E, $f(x_j) \to 0$ fracamente em E_1. ∎

Notemos agora que a condição a) significa que a restrição de ${}^{t}f$ a F_1 é uma aplicação linear de F_1 em F; esta aplicação chama-se *transposta de f em relação às dualidades $\langle E, F\rangle$* e $\langle E_1, F_1\rangle$ e representa-se também por ${}^{t}f$ se não houver risco de confusão.

Vê-se assim que a transposta de uma aplicação linear $f\colon E \to E_1$ em relação a dualidades $\langle E, F\rangle$ e $\langle E_1, F_1\rangle$ existe sse f é *fracamente contínua*. Note-se ainda que ${}^{t}f$ é definida por (3).

Tem-se, como consequência de **2.3.4**:

Corolário. *Se E e E_1 são espaços localmente convexos separados, qualquer aplicação linear contínua $f\colon E \to E_1$ é fracamente contínua e tem portanto transposta ${}^{t}f\colon E_1' \to E'$.* ∎

Com efeito neste caso a) verifica-se, pois que se $y\colon E_1 \to K$ é uma forma linear contínua o mesmo acontece com $y \circ f\colon E \to K$.

No teorema que segue consideram-se sistemas duais $\langle E, F\rangle$, $\langle E_1, F_1\rangle$, $\langle E_2, F_2\rangle$ e aplicações lineares $f\colon E \to E_1$, $g\colon E_1 \to E_2$, fracamente contínuas.

2.3.5 Teorema:

a) *${}^{t}f\colon F_1 \to F$ é fracamente contínua e ${}^{t}({}^{t}f) = f$;*

b) ${}^{t}(g \circ f) = {}^{t}f \circ {}^{t}g$;

c) *Para qualquer $A \subset E$, $f(A)^\circ = {}^{t}f^{-1}(A^\circ)$;*

d) *Para qualquer $A \subset E_1$, absolutamente convexo e fracamente fechado, $\overline{{}^{t}f(A^\circ)} = [f^{-1}(A)]^\circ$ (a aderência tomada em relação a $\sigma(F, E)$).*

e) $\mathrm{Ker}({}^{t}f) = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ e $\overline{\mathrm{Im}({}^{t}f)} = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

Dem.: a) Tomando uma rede $y_j \to 0$ fracamente em F_1, tem-se, para qualquer $x \in E$, $\langle x, {}^{t}f(y_j)\rangle = \langle f(x), y_j\rangle \to 0$, o que mostra que ${}^{t}f(y_j) \to 0$ fracamente em F e que, portanto, ${}^{t}f$ é fracamente contínua. Assim, ${}^{t}({}^{t}f)$ existe e é óbvio que coincide com f.

b) É imediato.

c) Se $y \in f(A)^\circ$ tem-se, para qualquer $x \in A$, $|\langle f(x), y\rangle| \le 1$ ou $|\langle x, {}^{t}f(y)\rangle| \le 1$ e, portanto, ${}^{t}f(y) \in A^\circ$ ou seja $y \in {}^{t}f^{-1}(A^\circ)$. De modo análogo se vê que $y \in {}^t f^{-1}(A^\circ) \Rightarrow y \in f(A^\circ)$.

d) Tem-se em virtude de c) e a) ${}^t f(A^\circ)^\circ = f^{-1}(A^{\circ\circ}) = f^{-1}(A)$ visto que, sendo A absolutamente convexo e fracamente fechado, $A = A^{\circ\circ}$. Da relação anterior vem ${}^t f(A^\circ)^{\circ\circ} = f^{-1}(A)^\circ$ ou seja, visto que ${}^t f(A^\circ)$ é absolutamente convexo, $\overline{{}^t f(A^\circ)} = [f^{-1}(A)]^\circ$.

e) É consequência imediata de c) e d). ■

2.4 – Topologias de convergência uniforme numa dualidade

No que se segue considera-se um sistema dual $\langle E, F\rangle$ de espaços vectoriais e designa-se por E_σ (resp. F_σ) o espaço E (resp. F) com a topologia fraca $\sigma(E,F)$ (resp. $\sigma(F,E)$). Como vimos, 2.3.1, F identifica-se com o dual de E_σ e E com o dual de F_σ

$$F = (E_\sigma)' = L(E_\sigma, K)\,, \qquad E = (F_\sigma)' = L(F_\sigma, K)\ .$$

Assim, a cada conjunto $\mathcal{M}$ de partes de E fracamente limitadas corresponde uma topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre F (topologia da convergência uniforme nos conjuntos $M \in \mathcal{M}$); como vimos em 2.1 esta topologia é localmente convexa e é definida pelas seminormas $|\cdot|_M$:

$$(1) \qquad |y|_M = \sup_{x\in M} |\langle x, y\rangle|\,, \qquad M \in \mathcal{M} \ \text{ e } \ y \in F\ .$$

A topologia fraca $\sigma(E,F)$ é uma destas topologias, justamente a da convergência simples. De modo análogo a cada conjunto $\mathcal{M}$ de partes de F fracamente limitadas corresponde uma topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre $E = (F_\sigma)'$.

Em muitas questões interessa considerar o sistema dual $\langle E, E'\rangle$ formado por um espaço localmente convexo E separado e o seu dual E'; neste caso tem-se $E' = (E_\sigma)'$, $E = (E'_\sigma)'$, havendo a considerar topologias $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre E' (resp. sobre E) em que $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes de E (resp. E') fracamente limitadas. Há aqui no entanto que distinguir cuidadosamente as propriedades que se referem à topologia dada em E, que se chama também *topologia inicial*, das que se referem à topologia fraca $\sigma(E, E')$. No entanto, como se verá adiante, os conjuntos limitados são os mesmos para as duas topologias.

Note-se ainda que um sistema dual de espaços vectoriais $\langle E, F\rangle$ se reduz a este caso, tomando para topologia inicial a topologia fraca $\sigma(E, F)$.

No estudo que vamos fazer vamos aplicar os resultados de 2.2, mas convém reformular alguns deles. Nesta ordem de ideias notemos já que, dados um sistema dual $\langle E, F\rangle$ e um conjunto $\mathcal{M}$ de partes de E fracamente limitadas, para cada $M \in \mathcal{M}$ o polar M° é a bola de raio 1 relativa à seminorma $|\cdot|_M$:

$$M^\circ = \left\{y \in F\colon \sup_{x\in M} |\langle x, y\rangle| \leq 1\right\}$$

e é, portanto, vizinhança de zero para a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre F.

Tem-se, além disso:

2.4.1 Teorema. *Se $\mathcal{M}$ é filtrante à direita para a relação $\subset$ e é invariante para as homotetias positivas (isto é, $M \in \mathcal{M}$ e $\rho > 0$ $\Rightarrow \rho M \in \mathcal{M}$), os polares dos conjuntos de $\mathcal{M}$ formam um sistema fundamental de vizinhanças de zero em $F(\tau_{\mathcal{M}})$.*

Dem.: Como $\mathcal{M}$ é filtrante à direita para a relação $\subset$ o mesmo acontece com o conjunto das seminormas $|\cdot|_M$, $M \in \mathcal{M}$, para a relação $\leq$. Assim, as bolas relativas a estas seminormas, ou seja, os conjuntos ρM°, $\rho > 0$ e $M \in \mathcal{M}$, formam um sistema fundamental de vizinhanças de zero para $\tau_{\mathcal{M}}$, mas dada a invariância de $\mathcal{M}$ com as homotetias positivas, cada uma destas bolas é o polar de um conjunto de $\mathcal{M}$: $(\rho M^\circ) = (\rho^{-1}M)^\circ$. ∎

Observações: 1. Se $\mathcal{M}$ não verifica as condições do teorema pode-se substituí-lo por outro conjunto que as verifica e produz a mesma topologia sobre F; por exemplo, o conjunto $\mathcal{M}'$ das reuniões finitas de homotéticos de razão > 0 de conjuntos de $\mathcal{M}$.

2. Os polares das partes finitas de E constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para a topologia fraca $\sigma(F, E)$.

Como vimos em 2.2.7 há diferentes modos (equivalentes) de exprimir que um conjunto $\phi \subset F = (E_\sigma)'$ é limitado para uma topologia $\tau_{\mathcal{M}}$, designadamente:

- ϕ é uniformemente limitado sobre cada $M \in \mathcal{M}$, ou seja, $\forall M \in \mathcal{M}$ $\exists \rho > 0$, tal que $|\langle x, u\rangle| \leq \rho$, $\forall x \in M$ e $\forall u \in \phi$;
- Para cada vizinhança V de zero em K, $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$ absorve todos os conjuntos de $\mathcal{M}$.

A última condição pode simplificar-se por meio da noção de polar. Para isso note-se que ela é verificada para qualquer vizinhança V se o fôr quando V é a bola de raio 1 do corpo K e, que neste caso, a intersecção dos $u^{-1}(V)$ em que u percorre ϕ é o polar ϕ°:

$$(2) \qquad \bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V) = \phi^\circ \quad \text{se } V = \left\{\xi \in K = |\xi| \leq 1\right\}.$$

Tem-se assim:

2.4.2 Teorema. *Para qualquer $\phi \subset F$ são equivalentes:*

a) *ϕ é limitado para $\tau_{\mathcal{M}}$(1);*

b) *O polar ϕ° absorve todos os conjuntos de $\mathcal{M}$.* ∎

Observação: Pode-se dar uma demonstração directa deste teorema sem recorrer a 2.2.7. Para isso, basta notar que ϕ é limitado para $\tau_{\mathcal{M}}$ sse para cada $M \in \mathcal{M}$, M° absorve ϕ e que esta condição é equivalente à de $M^{\circ\circ}$, e portanto M, ser absorvido por ϕ°.

De 2.4.2 resulta

Corolário 1. *$\phi \subset F = (E_\sigma)'$ é fracamente limitado sse o seu polar ϕ° é um tonel em E para a topologia fraca $\sigma(E, F)$.* ∎

Para o caso da dualidade $\langle E, E'\rangle$ em que E é um e.l.c. separado e E' o seu dual, tem-se

Corolário 2. *Se E é tonelado e $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes limitadas de E, todo o conjunto $\phi \subset E'$ fracamente limitado é limitado para qualquer topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre E'.* ∎

(1) **$\mathcal{M}$ designa sempre, salvo outra indicação, um conjunto de partes fracamente limitadas de E ou de F conforme o caso.**

Basta ter em atenção (2.3.2) que todo o tonel em E_σ (isto é, para a topologia fraca) é um tonel em E e portanto vizinhança de zero.

Este corolário é caso particular do corolário 1 de 2.2.8. De 2.2.9 resulta:

2.4.3 Teorema. *Se E é um e.l.c. separado, e $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes de E absolutamente convexas limitadas e sequencialmente completas para a topologia fraca $\sigma(E, E')$, todo o conjunto $\phi \subset E'$ fracamente limitado é limitado na topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre E'.* ∎

Como consequência:

Corolário. *Se E é um e.l.c. separado e quase-completo para a topologia fraca $\sigma(E, E')$, todo o conjunto $\phi \subset E'$ fracamente limitado é limitado para qualquer topologia $\tau_{\mathcal{M}}$.* ∎

A. Partes equicontínuas do dual. Teorema de Alaoglu-Bourbaki

Continuemos a considerar um espaço localmente convexo separado E e o seu dual E'; as *partes equicontínuas de E' referem-se à topologia dada em E*. De acordo com 2.2.11, um conjunto $\phi \subset E'$ é equicontínuo sse é equicontínuo no ponto zero e, pela condição c) do mesmo teorema, ϕ é equicontínuo sse para cada vizinhança V de zero em K, $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V)$ é vizinhança de zero em E. Mas cabe aqui uma observação análoga à que conduziu ao teorema 2.4.2; basta que a condição anterior se verifique quando V é a bola de raio 1 do corpo K e, como neste caso, $\bigcap_{u\in\phi} u^{-1}(V) = \phi^\circ$, tem-se (como caso particular de 2.2.11):

2.4.4 Teorema. *Para qualquer $\phi \subset E'$ são equivalentes:*

a) *ϕ é equicontínuo;*

b) *ϕ é equicontínuo no ponto zero;*

c) *O polar ϕ° é uma vizinhança de zero em E.* ∎

Como consequência de c) (cf. Corolário 1 de 2.2.11), toda a parte equicontínua de E' é fracamente limitada.

A recíproca é verdadeira no caso em que E é tonelado (Corolário 2 de 2.2.11); tem-se, no entanto, o seguinte resultado mais preciso e que caracteriza os espaços tonelados:

2.4.5 Teorema. *Se E é um espaço localmente convexo separado, são equivalentes:*

1) *E é tonelado;*

2) *Toda a parte do dual E' fracamente limitada é equicontínua.*

Dem.: **1)$\Rightarrow$2)**, já foi visto, é o Corolário 2 de 2.2.11.

2)$\Rightarrow$1). Seja T um tonel de E; como T é absolutamente convexo e fracamente fechado, do teorema dos bipolares resulta que $T = T^{\circ\circ} = (T^\circ)^\circ$; mas em virtude de 2.4.2, Corolário 1, T° é fracamente limitado (em E') e, portanto, equicontínuo. Agora, de 2.4.4 c), segue-se que T é vizinhança de zero em E. ∎

Outra consequência importante de 2.4.4 c) é a seguinte:

2.4.6 Teorema. *A topologia de um espaço localmente convexo separado E é idêntica à topologia da convergência uniforme nas partes equicontínuas do seu dual E'.*

Por outras palavras, no sistema dual $\langle E, E'\rangle$ formado por um e.l.c. separado e o seu dual, a topologia inicial de E é a topologia da convergência uniforme nas partes equicontínuas de E'.

Dem.: Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das partes equicontínuas de E'. Trata-se de provar que a topologia τ dada em E é idêntica à topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre E (como dual de E'_σ). Vê-se imediatamente que $\mathcal{M}$ verifica as condições de 2.4.1 e que, portanto, os polares M° dos conjuntos $M \in \mathcal{M}$ formam um sistema fundamental de vizinhanças de zero para $\tau_{\mathcal{M}}$. Ora de 2.4.4 c) resulta que cada um dos M° é vizinhança de zero para τ; assim τ é mais fina que $\tau_{\mathcal{M}}$. Inversamente, seja V uma vizinhança de zero para τ absolutamente convexa e fechada: V é fracamente fechada e portanto (teorema dos bipolares) $V^{\circ\circ} = V$, mas então V° é parte equicontínua de E' (2.4.4 c)) e por consequência V é vizinhança de zero para $\tau_{\mathcal{M}}$. ∎

Vamos agora estabelecer outro resultado importante:

2.4.7 Teorema (Alaoglu-Bourbaki). *Se E é um espaço localmente convexo separado, toda a parte equicontínua ϕ do dual E' é relativamente compacta para a topologia fraca $\sigma(E',E)$.*

Dem.: Considere-se o espaço K^E com a topologia da convergência simples, que é idêntico ao espaço produto $\prod_{x\in E} K_x$, $K_x = K$, $\forall\, x \in E$. O dual E' com a topologia fraca é subespaço (topológico) de K^E e, como vimos, em 2.1.7 (1º Teorema de Ascoli) a aderência de ϕ para $\sigma(E',E)$, é idêntica à aderência $\overline{\phi}$ de ϕ em K^E. Por outro lado, sendo ϕ equicontínuo é limitado para $\sigma(E',E)$ e, portanto, limitado no espaço K^E. Assim, para cada $x \in E$, o conjunto $\phi(x) = \{y(x) : y \in E\}$ (projecção de ϕ no factor $K_x = K$) é limitado e por consequência relativamente compacto em K.

Agora, de $\phi \subset \prod_{x\in E} \phi(x)$, vem $\overline{\phi} \subset \prod_{x\in E} \overline{\phi}(x)$, e como $\prod_{x\in E} \overline{\phi}(x)$ é compacto (por ser produto de compactos) segue-se que $\overline{\phi}$ é compacto em K^E e também em E' para $\sigma(E',E)$. ∎

Deste teorema e de 2.4.5 resulta que, se E é tonelado e separado, para qualquer $\phi \subset E'$ são equivalentes: *ϕ é equicontínuo, ϕ é limitado para a topologia fraca, ϕ é relativamente fracamente compacto.*

Pode-se agora demonstrar o seguinte resultado que anunciámos no início:

2.4.8 Teorema. *Se E é um espaço localmente convexo separado, para qualquer conjunto $M \subset E$ são equivalentes:*

a) *M é limitado;*

b) *M é fracamente limitado.*

Dem.: É óbvio que a)$\Rightarrow$b). Vejamos a recíproca b)$\Rightarrow$a). Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das partes equicontínuas de E'. Como vimos em 2.4.6, a topologia inicial de E é idêntica a $\tau_{\mathcal{M}}$ e, portanto, a $\tau_{\mathcal{M}'}$, em que $\mathcal{M}'$ é formado pelos envólucros absolutamente convexos fechados para $\sigma(E',E)$ dos conjuntos de $\mathcal{M}$. Em virtude do teorema de Alaoglu-Bourbaki os conjuntos de $\mathcal{M}'$ são compactos para $\sigma(E',E)$ e, portanto, completos para esta topologia e cai-se então no Teorema 2.4.3. ∎

B. Topologias compatíveis com uma dualidade. Teorema de Mackey-Arens

Considere-se um sistema dual $\langle E, F\rangle$. Uma topologia localmente convexa separada τ sobre E diz-se *compatível com a dualidade* se F é idêntico ao dual de $E(\tau)$, $F = (E(\tau))'$, ou seja, uma forma linear sobre E é contínua para τ sse pertence a F. De modo análogo, uma topologia localmente convexa separada τ sobre F é compatível com a dualidade $\langle E, F\rangle$ se $E = (F(\tau))'$.

As topologias fracas $\sigma(E, F)$ e $\sigma(F, E)$ são compatíveis com a dualidade $\langle E, F\rangle$.

Se E é um espaço localmente convexo separado, a topologia inicial de E é compatível com a dualidade $\langle E, E'\rangle$, como é óbvio. Note-se ainda que da definição da topologia fraca resulta imediatamente que dado um sistema dual $\langle E, F\rangle$, $\sigma(E, F)$ (resp. $\sigma(F, E)$) é a menos fina das topologias localmente convexas separadas sobre E (resp. sobre F) que são compatíveis com a dualidade.

As topologias compatíveis com uma dualidade são caracterizadas pelo seguinte teorema que se deve a Mackey e Arens:

2.4.9 Teorema (Mackey-Arens). *Seja $\langle E, F\rangle$ um sistema dual. Para qualquer topologia localmente convexa τ sobre E são equivalentes:*

a) *τ é compatível com a dualidade $\langle E, F\rangle$;*

b) *Existe uma cobertura $\mathcal{M}$ de F formada de conjuntos absolutamente convexos e fracamente compactos tal que $\tau = \tau_{\mathcal{M}}$.*

Por outras palavras, uma topologia localmente convexa τ sobre E é compatível com a dualidade sse é a topologia da convergência uniforme sobre partes de F absolutamente convexas e fracamente compactas que cobrem F.

Dem.: **a)$\Rightarrow$b).** Se τ é compatível com $\langle E, F\rangle$, tem-se $F = (E(\tau))'$ e de 2.4.6 resulta que τ é a topologia da convergência uniforme nas partes equicontínuas de F (como dual de $E(\tau)$) e, também, sobre os seus envólucros absolutamente convexos e fracamente fechados, os quais constituem uma cobertura $\mathcal{M}$ nas condições de b). Para isso, basta ter em conta que o envólucro absolutamente convexo fechado de um conjunto $\subset F$ equicontínuo é equicontínuo (verificação fácil) e é, portanto, fracamente compacto, em virtude do teorema de Alaoglu-Bourbaki.

b)$\Rightarrow$a). Trata-se de provar que se $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes de F nas condições de b), $\tau_{\mathcal{M}}$ é compatível com a dualidade. Basta considerar o caso em que $\mathcal{M}$ é o conjunto $\mathcal{N}$ de todas as partes de F absolutamente convexas e fracamente compactas. Pois sendo assim, qualquer das topologias $\tau_{\mathcal{M}}$ nas condições de b) é menos fina que $\tau_{\mathcal{N}}$ e como é mais fina que $\sigma(E,F)$ também é compatível com $\langle E,F\rangle$.

Antes de prosseguir, vejamos que $\mathcal{N}$ está nas condições de 2.4.1, ou seja, é invariante para as homotetias (o que é óbvio) e é filtrante à direita.

Para estabelecer esta última propriedade, vamos provar que se A e B são conjuntos absolutamente convexos e compactos num e.l.c. qualquer F, o mesmo acontece com $\mathrm{ac}(A\cup B)$; claro que $\mathrm{ac}(A\cup B)$ é absolutamente convexo, bastando então provar que é compacto. Considere-se o conjunto $\Delta = \{(\alpha,\beta)\in K\times K : |\alpha|+|\beta|\leq 1\}$ (Δ é compacto de $\mathbf{R}^2$ como é óbvio) e seja ϕ: $F\times F\times K\times K\to F$, assim definida: $\phi(x,y,\alpha,\beta)=\alpha x+\beta y$; ϕ é contínua, e como $\mathrm{ac}(A\cup B)$ $=\phi(A\times B\times\Delta)$ e $A\times B\times\Delta$ é compacto, segue-se que $\mathrm{ac}(A\cup B)$ é compacto. Nestas condições, de acordo com 2.4.1, os polares N° dos conjuntos $N\in\mathcal{N}$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de zero para a topologia $\tau_{\mathcal{N}}$ (sobre E).

Passemos à prova de que $\tau_{\mathcal{N}}$ é compatível com a dualidade. Seja F_1 o dual de $E(\tau_{\mathcal{N}})$; é óbvio que $F\subset F_1$ (pois $\sigma(E,F)$ é menos fina que $\tau_{\mathcal{N}}$) e tudo se reduz então a provar que $F_1\subset F$. Considere-se a dualidade, $\langle E,F_1\rangle$. Se $u\in F_1$, o polar $\{u\}^\circ$ nesta dualidade é uma vizinhança de zero para $\tau_{\mathcal{N}}$, visto $\{u\}$ ser equicontínuo (teorema 2.4.6), e contém portanto o polar N° dum conjunto $N\in\mathcal{N}$. Assim, tem-se (considerando sempre a dualidade $\langle E,F_1\rangle$) $\{u\}^{\circ\circ}\subset N^{\circ\circ}$ e como $u\in\{u\}^{\circ\circ}$, basta provar que $N^{\circ\circ}\subset F$. Ora $N^{\circ\circ}=\overline{N}$, para a topologia $\sigma(F_1,E)$, mas como N é compacto para $\sigma(F,E)$ e esta topologia (sobre F) é induzida por $\sigma(F_1,E)$, N é compacto para $\sigma(F_1,E)$, logo $\overline{N}=N$ e, portanto, $N^{\circ\circ}=N\subset F$. ∎

Dado um sistema dual $\langle E, F\rangle$ chama-se *topologia de Mackey* sobre E e representa-se por $\tau(E, F)$ a topologia da convergência uniforme sobre o conjunto $\mathcal{N}$ de todas as partes de F absolutamente convexas e fracamente compactas. Do mesmo modo se define a topologia de Mackey $\tau(F, E)$. Do teorema de Mackey-Arens resulta:

Corolário 1. *A topologia de Mackey $\tau(E,F)$ é a mais fina das topologias localmente convexas sobre E compatíveis com a dualidade $\langle E,F\rangle$.* ∎

Como a topologia fraca $\sigma(E, F)$ é a menos fina compatível com a dualidade, segue-se que uma topologia localmente convexa θ sobre E é compatível com a dualidade $\langle E, F\rangle$ sse

$$\sigma(E,F) \subset \theta \subset \tau(E,F) .$$

Como todos os conjuntos compactos são completos, de 2.4.3 e do teorema de Mackey-Arens resulta o seguinte corolário que generaliza 2.4.8:

Corolário 2. *Se $\langle E,F\rangle$ é um sistema dual, os conjuntos limitados são os mesmos para todas as topologias sobre E compatíveis com a dualidade.* ∎

Note-se ainda que o mesmo acontece com os conjuntos absolutamente convexos fechados e com os envólucros absolutamente convexos fechados, mas isto é consequência da Obs. ao Corolário de 1.5.5.

2.5 – Topologias fortes. Bidual. Espaços semi-reflexivos e reflexivos

A. Topologia forte

Considere-se um sistema dual $\langle E, F\rangle$. Chama-se *topologia forte* sobre E (induzida pela dualidade) e representa-se por $\beta(E, F)$ a topologia da convergência uniforme sobre as partes de F fracamente limitadas (ou, o que dá no mesmo, limitadas para uma topologia sobre F compatível com a dualidade). A topologia $\beta(E,F)$ é então a mais fina das topologias $\tau_{\mathcal{M}}$ em que $\mathcal{M}$ é um conjunto de partes de F fracamente limitadas. Define-se de modo análogo a topologia $\beta(F,E)$. O espaço E (resp. F) com a topologia forte é por vezes representado por E_β (resp. F_β).

As propriedades que se referem à topologia forte levam por vezes a indicação "forte" ou "fortemente".

Em geral a topologia forte $\beta(E,F)$ (resp. $\beta(F,E)$) não é compatível com a dualidade; ela será compatível com a dualidade sse fôr idêntica à topologia de Mackey $\tau(E,F)$ (resp. $\tau(F,E)$).

Interessa especialmente considerar a dualidade $\langle E,E'\rangle$ definida por um espaço localmente convexo separado E e o seu dual E'. A topologia forte $\beta(E',E)$ (sobre o dual) é *idêntica à topologia da convergência uniforme nas partes limitadas de* E (teorema 2.4.8). O dual E' com a topologia forte, ou seja E'_β, é muitas vezes referido como *dual forte* de E. Por sua vez a topologia forte $\beta(E,E')$ é mais fina que a topologia de E (topologia inicial) podendo, no entanto, em alguns casos coincidir com ela. Tem-se, para este efeito, o seguinte teorema:

2.5.1 Teorema. *Se E é um espaço localmente convexo separado, são equivalentes:*

a) *A topologia forte $\beta(E,E')$ é igual à topologia de E;*

b) *E é tonelado.*

Dem.: b)$\Rightarrow$a). É óbvio se tivermos em conta que, sendo E tonelado, toda a parte de E' fracamente limitada é equicontínua.

a)$\Rightarrow$b). Suponhamos que se verifica a) e seja T um tonel de E; então T° é parte de E' fracamente limitada, visto que $T = T^{\circ\circ}$. Mas desta relação resulta também que T é vizinhança de zero para $\beta(E,E')$ e portanto para a topologia de E, o que prova que E é tonelado. ∎

Corolário. *Se E é um espaço de Banach, a topologia de E é idêntica à topologia forte $\beta(E,E')$* ∎

B. Bidual

Dado um espaço localmente convexo separado E, chama-se *bidual* de E ao dual (sem topologia) do dual forte E'_β e representa-se por E''; $E'' = (E'_\beta)'$ é o espaço vectorial das formas lineares sobre E' que são fortemente contínuas.

Há uma injecção linear canónica $i : E \to E''$ que associa a cada $x \in E$ a forma linear $\tilde{x}$ sobre E' assim definida:

$$\tilde{x}(y) = y(x) = \langle x, y \rangle , \qquad \forall y \in E' .$$

De facto $\tilde{x}$ (como se sabe do estudo da dualidade $\langle E, E' \rangle$)(1) é contínua para a topologia fraca $\sigma(E', E)$ e, portanto, para a topologia forte $\beta(E', E)$; logo $\tilde{x} \in E''$. A linearidade de i e $\tilde{x} = 0 \Rightarrow x = 0$, são factos já conhecidos.

Assim, pode-se identificar algebricamente E com um subespaço de E'', isto é, pode-se considerar $E \subset E''$ com $x = \tilde{x}$, $\forall x \in E$.

C. Espaços semi-reflexivos e reflexivos

Um espaço localmente convexo separado E diz-se *semi-reflexivo* se a injecção canónica $i : E \to E''$ é sobrejectiva, ou seja, se é um isomorfismo algébrico de E sobre E'' (equivale a dizer que toda a forma linear sobre E' fortemente contínua é definida por um elemento $x \in E$ ou ainda, o que dá no mesmo, toda a forma linear sobre E' fortemente contínua é fracamente contínua). Neste caso pode-se identificar *algebricamente* E com E''.

Se, considerando E'' com a topologia forte e E com a topologia dada, i é um isomorfismo vectorial topológico de E sobre E'', E diz-se *reflexivo*. Equivale a dizer que E é *semi-reflexivo e que quando se identifica E com E'' a topologia de E coincide com a topologia forte* $\beta(E'', E') = \beta(E, E')$. Assim, de 2.5.1 vem imediatamente:

2.5.2 Teorema. *Um espaço localmente convexo separado é reflexivo sse é semi-reflexivo e tonelado.* ∎

(1) Note-se que $\tilde{x}$ é a forma linear com a qual se identifica x quando se considera E identificado com um subespaço de $(E')^*$ (cf. 2.1).

Corolário. *Todo o espaço de Banach semi-reflexivo é reflexivo.* ∎

Adiante ver-se-á que isto é verdadeiro para os espaços normados. Assim, na teoria dos espaços normados não se distingue espaço reflexivo de espaço semi-reflexivo.

Tem-se o seguinte teorema que caracteriza os espaços semi-reflexivos:

2.5.3 Teorema. *Se E é um espaço localmente convexo separado, são equivalentes:*

a) *E é semi-reflexivo;*

b) *A topologia forte $\beta(E', E)$ (sobre o dual) é compatível com a dualidade;*

c) *O espaço E'_τ que se obtém munindo E' com a topologia de Mackey $\tau(E', E)$ é tonelado;*

d) *Todo o subconjunto de E limitado é relativamente compacto para $\sigma(E, E')$;*

e) *E é quase completo para a topologia fraca $\sigma(E, E')$.* ∎