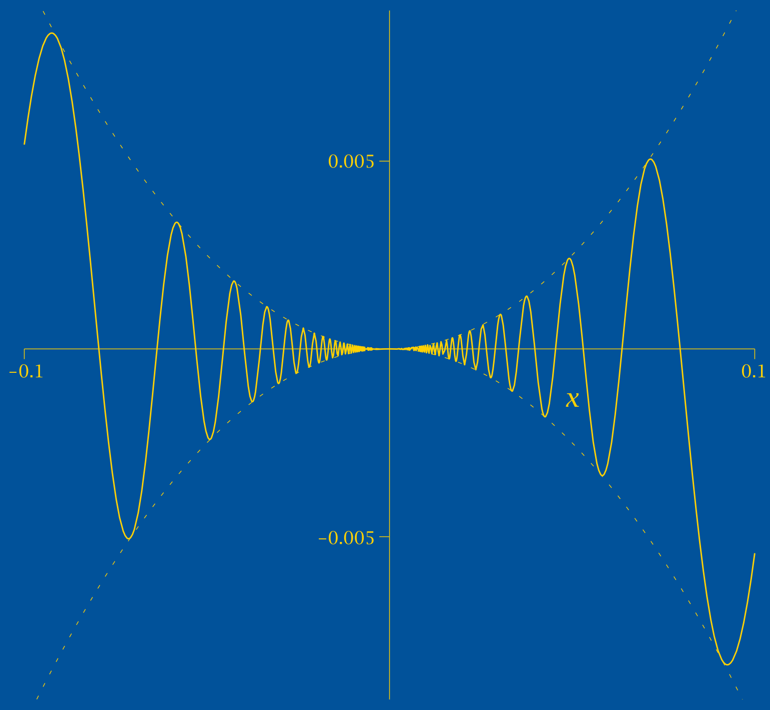
TEXTOS DE MATEMÁTICA

FUNDAMENTOS DE ANÁLISE INFINITESIMAL

(5ª edição)

Mário S. R. Figueira



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática

Textos de Matemática, Volume 5 (5.ª edição)

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2011

Editores: Gracinda Gomes Moreira da Cunha, Fernando Ferreira

Título: *Fundamentos de Análise Infinitesimal*

Autor: Mário S. R. Figueira

ISBN: 972 - 8394 - 04 - 7

No centenário do nascimento de

Vicente Gonçalves (1896-1985) *: Matemático e Linguista*

Homenagem

Aos meus Pais

Prefácio

Este volume foi escrito com base nas notas referentes à disciplina de Análise Infinitesimal do primeiro ano das licenciaturas em Matemática (ramo científico e do ensino), e por nós professada, durante alguns anos, no Departamento de Matemática da FCUL . Para além dos tradicionais temas abordados nas obras de análise matemática a uma variável (limite e continuidade, diferenciabilidade, integração e primitivação, sucessões e séries de funções) introduziu-se um capítulo sobre desenvolvimentos assintóticos, o que permite, não só atacar os limites indeterminados mas sobretudo, estruturar de forma sistemática a questão da convergência dos integrais impróprios e das séries numéricas.

O livro é dirigido especialmente aos alunos do primeiro ano das licenciaturas em Matemática e exigem-se alguns conhecimentos sobre a teoria elementar dos conjuntos (o princípio da indução, por exemplo, é por nós usado com alguma frequência) bem como alguns rudimentos de álgebra e análise elementares (essencialmente, aquilo que se espera ter sido matéria do ensino secundário).

Os números reais são introduzidos no capítulo primeiro de forma axiomática. É, na nossa opinião, o processo mais direto de apresentar o corpo **R**, quando se pretende evitar as elaboradas (e abstratas) construções dos reais. No final do capítulo, são dadas as noções básicas sobre o corpo dos números complexos; destes se fará uso em algumas partes da exposição.

No capítulo segundo, dedicado às sucessões e séries numéricas, dá-se especial atenção à noção de sucessão de Cauchy, como condição necessária e suficiente de convergência. Aqui apenas se apresentam as primeiras definições e resultados gerais sobre as séries numéricas, deixando para mais tarde, como foi já referido, a questão central da convergência.

Nos capítulos terceiro e quarto são estudadas a continuidade e diferenciabilidade das funções reais a uma variável, e no capítulo quinto é feita a construção do integral de Riemann em $\mathbf{R}$. A primitivação é apresentada como secção deste capítulo, na sequência do conceito de integral indefinido. Com base na noção de função de variação limitada define-se "comprimento de arco" de uma curva plana, o que nos permite apresentar uma definição rigorosa das funções trigonométricas e das suas inversas.

Na redação do capítulo sexto, dedicado aos desenvolvimentos assintóticos, seguimos de perto os fascículos da obra de *Bourbaki* sobre as funções reais de variável real. A exposição é ilustrada com inúmeros exemplos, tornando-se assim mais simples e acessível.

Nos últimos capítulos abordam-se as sucessões e séries de funções e apresenta-se uma introdução clássica das séries de Fourier. É com especial relevo que se analisa a noção de convergência uniforme; pretende-se que o aluno reconheça a importância deste conceito, verificando como, por exemplo, a continuidade e integrabilidade se conservam na passagem ao limite uniforme. Trata-se, com efeito, de um conceito que estabelece exemplarmente a transição da análise clássica para o estudo topológico dos espaços de funções, tema central da Análise Funcional e, mais geralmente, de toda a análise moderna.

Foram várias as pessoas, por entre colegas e alunos, que contribuíram para o aperfeiçoamento deste texto. Refiro, em particular, o meu colega Miguel Ramos, o qual me acompanhou durante alguns anos na lecionação da disciplina de Análise Infinitesimal e cujas observações e comentários, sempre pertinentes, permitiram uma maior elegância na redação matemática apresentada.

Finalmente, torna-se obrigatória uma referência a Luís Trabucho, meu colega e um dos editores desta coleção de textos. Foi o seu empenho e entusiasmo que levaram à elaboração deste volume, e foi ainda a sua competência que permitiu superar algumas dificuldades técnicas surgidas na compilação do livro. É pois com grande satisfação que aqui lhe exprimo o meu reconhecimento.

Esperamos que estas notas, agora apresentadas em livro, possam ser de alguma utilidade para todos aqueles que se interessam pelos fundamentos da Análise. Se assim for, sentir-nos-emos amplamente recompensados, e será com gratidão que evocaremos a memória de Mestre Vicente Gonçalves, de quem tivemos o privilégio de ser discípulo e admirador.

Lisboa, Dezembro de 1996

ÍNDICE GERAL

Cap. 8 Séries de Fourier.

1

O Corpo dos Números Reais

1.1. O Corpo R dos números reais. Axiomática.

O nosso ponto de partida é o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais no qual se admitem conhecidas todas as propriedades algébricas (como corpo comutativo totalmente ordenado), bem como as usuais inclusões, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, em que $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}$ representam os conjuntos dos números naturais e inteiros, respetivamente. Faremos aqui uma apresentação axiomática (não construtiva) do conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais e mostramos em seguida que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ a menos de um isomorfismo, isto é, $\mathbf{Q}$ deve ser isomorfo a um subconjunto $\tilde{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{R}$; exibiremos ainda uma representação para os elementos de $\mathbf{R}$.

Seja dado um conjunto $\mathbf{R}$, não vazio, munido de duas operações, ***soma*** e ***produto***, representadas respetivamente por $+$ e $.$ tais que

$$(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow x + y \in \mathbf{R}$$
$$(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow x.y \in \mathbf{R}$$

e de uma ***relação de ordem***

$$x \leq y,$$

satisfazendo os seguintes grupos de axiomas:

A1. $\mathbf{R}$ é um ***corpo comutativo***, isto é,

(1.1) $x+(y+z)=(x+y)+z \quad \forall x,y,z\in\mathbf{R}$ (*associatividade*
(1.2) $x+y=y+x \quad \forall x,y\in\mathbf{R}$ *e comutatividade da soma*)

(1.3) Existe um elemento $0\in\mathbf{R}$, dito *zero*, tal que
$0+x=x+0=x \quad \forall x\in\mathbf{R}$ (*elemento neutro da soma*)

(1.4) Para todo o $x\in\mathbf{R}$, existe um elemento notado $-x$ tal que
$x+(-x)=(-x)+x=0$ (*elemento simétrico*)

(1.5) $x.(y.z)=(x.y).z \quad \forall x,y,z\in\mathbf{R}$ (*associatividade do produto*)

(1.6) $x.y=y.x \quad \forall x,y\in\mathbf{R}$ (*comutatividade do produto*)

(1.7) Existe um elemento $1\in\mathbf{R}$, $1\neq 0$, dito *um* ou *elemento unitário*, tal que $1.x=x.1=x \quad \forall x\in\mathbf{R}$ (*elemento neutro do produto*)

(1.8) Para todo o $x\in\mathbf{R}, x\neq 0$, existe um elemento notado x^{-1}(ou $\frac{1}{x}$), chamado *inverso de* x, tal que $x.x^{-1}=x^{-1}.x=1$

(1.9) $x.(y+z)=x.y+x.z \quad \forall x,y,z\in\mathbf{R}$. (*propriedade distributiva*)

A2. $\mathbf{R}$ é um ***corpo totalmente ordenado***, isto é,

(2.1) $\forall x,y\in\mathbf{R}$, tem-se $x\leq y$ ou $y\leq x$

(2.2) $x=y$ se e só se $x\leq y$ e $y\leq x$

(2.3) $x\leq y$ e $y\leq z\Longrightarrow x\leq z$

(2.4) $x\leq y\Longrightarrow x+z\leq y+z \quad \forall z\in\mathbf{R}$

(2.5) $0\leq x$ e $0\leq y\Longrightarrow 0\leq x.y$.

OBSERVAÇÕES. 1. Se $x,y,z\in\mathbf{R}$, escreve-se usualmente xy por $x.y$, $x+y+z$ por $x+(y+z)=(x+y)+z$ e xyz por $x.(y.z)=(x.y).z$; escreve-se ainda $x-y$ por $x+(-y)$; se $n\in\mathbf{N}$, escreve-se nx por $x+\cdots+x$ (n vezes), x^n por $x\ldots x$ (n vezes) e x^{-n} por $x^{-1}\ldots x^{-1}$ (n vezes) $=\left(x^{-1}\right)^n$; enfim, *define-se* $x^0=1$, $\forall x\in\mathbf{R}, x\neq 0$. É agora um simples exercício mostrar que $x^{m+n}=x^m.x^n$, $\forall m,n\in\mathbf{Z}$, $\forall x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$.

2. Escreve-se $y\geq x\,(x,y\in\mathbf{R})$ se e só se $x\leq y$. Dados dois elementos $x,y\in\mathbf{R}$, usamos a notação $x<y\,(\Leftrightarrow y>x)$ para significar que $x\leq y$ e $x\neq y$.

A.3 $\mathbf{R}$ é um ***corpo arquimediano***, isto é, satisfaz o axioma de Arquimedes:

(3.1) Dados $x,y\in\mathbf{R}$ tais que $0<x$ e $0\leq y$, existe um natural $n\in\mathbf{N}$ tal que $y\leq nx$.

Antes de estabelecermos o último axioma, introduzimos algumas definições necessárias.
Dados dois quaisquer elementos $a, b \in \mathbf{R}$ tais que $a < b$, definimos *intervalo aberto* de extremos a e b e representamos por $]a, b[$ ou (a, b) como o conjunto dos elementos $x \in \mathbf{R}$ compreendidos estritamente entre a e b:

$$]a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}.$$

Analogamente, os conjuntos

$$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\} \quad \text{e} \quad [a, b[= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$$

dizem-se *intervalos semiabertos* (resp. aberto em a, fechado em b e fechado em a, aberto em b). Sendo $a \leq b$, o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$$

diz-se o *intervalo fechado* de extremos a (extremo esquerdo) e b (extremo direito). O número real $b - a$ representa a *amplitude* do intervalo.

A.4 **R** verifica o ***axioma do encaixe***:

(4.1) Dada uma sucessão $I_0 = [a_0, b_0]$, $I_1 = [a_1, b_1], \ldots, I_n = [a_n, b_n], \ldots$ de intervalos fechados tais que $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, existe pelo menos um real $x \in \mathbf{R}$ tal que $a_n \leq x \leq b_n$ para todo o valor de $n = 0, 1, 2, \ldots$, isto é (∗)

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}_0} I_n.$$

Da precedente axiomática resultam facilmente os seguintes resultados cuja demonstração é deixada como exercício:

1.
Se $a \leq b$ e $c \geq 0$, então $ac \leq bc$;
se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$ e $ac^{-1} < bc^{-1}$;
se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.

2.
Se $a_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n$, então $a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n$;
se $0 \leq a_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n$, então $a_1 \ldots a_n \leq b_1 \ldots b_n$, tendo-se a igualdade sse $a_i = b_i, i = 1, \ldots, n$ ou então $b_i = 0$ para algum i.

Em particular,

(∗) $\mathbf{N}_0$ representa o conjunto dos inteiros não negativos : $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

3.
Se $0 \le x < y$, então $0 \le x^n < y^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$; $\quad x^n = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Daqui resulta o seguinte resultado:

Sejam $a \in \mathbf{R}, a \ge 0$, e $n \in \mathbf{N}$; então existe, no máximo, um real $x \ge 0$ tal que $x^n = a$.

Com efeito, se existem $x_1 \ge 0$ e $x_2 \ge 0$: ${x_1}^n = {x_2}^n = a$, tem-se necessariamente $x_1 = x_2$ já que $0 \le x_1 < x_2 \Longrightarrow {x_1}^n < {x_2}^n$ e $0 \le x_2 < x_1 \Longrightarrow {x_2}^n < {x_1}^n$.

Observe-se que $\mathbf{Q}$ satisfaz os axiomas **A.1**, **A.2** e **A.3** ($\mathbf{Q}$ é um corpo comutativo, arquimediano, totalmente ordenado). No entanto, notaremos que **A.4** não é satisfeito em $\mathbf{Q}$; mostremos para isso a seguinte

1.1.1. Proposição. *Seja n um inteiro ≥ 2; então, para todo o número real $A \ge 0$, existe um único real $x \ge 0$ tal que $x^n = A$.*

Demonstração. A unicidade foi já vista anteriormente. Mostremos agora a existência para $n = 2$ (o caso geral é perfeitamente análogo).

Tome-se $A > 0$ (já que o caso $A = 0$ é resolvido trivialmente por $x = 0$) e construa-se a seguinte sucessão de intervalos encaixados. Ponha-se

$$a_0 = 0, \quad b_0 = A + 1 \quad \text{e seja} \quad c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{A+1}{2}.$$

Se ${c_0}^2 = A$, então $x = c_0$.

Se ${c_0}^2 < A$, faça-se $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$;

se ${c_0}^2 > A$, faça-se $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$.

Claro que $b_1 - a_1 = \dfrac{b_0 - a_0}{2}$, ${a_1}^2 < A < {b_1}^2$. Considere-se então $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ e proceda-se analogamente. Obtemos, obviamente, uma sucessão de intervalos

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

em que $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} = \dfrac{A+1}{2^n}$ e ${a_n}^2 < A < {b_n}^2$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$.
Pelo axioma do encaixe existe pelo menos um $x \in \bigcap [a_n, b_n]$, isto é, $0 \le a_n \le x \le b_n \le A + 1$, e portanto

$${a_n}^2 \le x^2 \le {b_n}^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Assim, A e x^2 pertencem a todos os intervalos $[{a_n}^2, {b_n}^2]$ $\quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Mas

$${b_n}^2 - {a_n}^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) \le \frac{A+1}{2^n}(2(A+1)) = \frac{(A+1)^2}{2^{n-1}}$$

o que implica que existe um único elemento pertencente a todos os intervalos $[a_n^2, b_n^2]$; com efeito, se existem $y' < y$ tais que ${a_n}^2 < y' < y < {b_n}^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, vem

$$0 < y - y' \leq {b_n}^2 - {a_n}^2 \leq \frac{(A+1)^2}{2^{n-1}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

e logo

$$2^{n-1}(y - y') \leq (A+1)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$$

o que contraria o axioma de Arquimedes. Como $A, x^2 \in \bigcap\limits_n [a_n, b_n]$, resulta agora que $A = x^2$. ∎

O real $x \geq 0$ tal que $x^n = A, (A \geq 0, n \in \mathbf{N})$ é representado usualmente por $\sqrt[n]{A}$ ou $A^{1/n}$.

Corolário. $\mathbf{Q}$ *não verifica o axioma do encaixe.*

Demonstração. Basta observar que não existe nenhum racional $r = \dfrac{p}{q}$ tal que $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$. Recordemos a demonstração desta asserção.
Suponhamos por absurdo que existe um racional $r = \dfrac{p}{q}$ (naturalmente considera-se r na sua representação reduzida, isto é, p e q são inteiros primos entre si) tal que $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$. Resulta daqui que $p^2 = 2q^2$ é um inteiro par e logo p terá de ser par: $p = 2k$, k inteiro. Mas então,

$$\frac{4k^2}{q^2} = 2, \quad \text{ou seja} \quad q^2 = 2k^2$$

o que implica que q^2 é par, o mesmo sucedendo com q. Assim, p e q são ambos inteiros pares o que contraria a hipótese inicial de p e q serem primos entre si. ∎

A apresentação axiomática dos números reais não nos permite estabelecer automaticamente uma relação de inclusão de $\mathbf{Q}$ em $\mathbf{R}$. Veja-se em seguida como é possível dar um significado matemático à inclusão, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, definindo uma aplicação injetiva $\varphi : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ tal que

$$\begin{cases} \varphi(r+s) = \varphi(r) + \varphi(s) \\ \varphi(rs) = \varphi(r).\varphi(s) \\ r \leq s \Longrightarrow \varphi(r) \leq \varphi(s) \end{cases} \tag{1}$$

Uma tal aplicação φ diz-se um *isomorfismo* e permite-nos identificar $\mathbf{Q}$ com $\varphi(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{R}$ (considerados como corpos totalmente ordenados):

$$(\mathbf{Q}, +, ., \leq) \overset{\varphi}{\simeq} (\varphi(\mathbf{Q}), +, ., \leq).$$

Comecemos por definir $\tilde{\varphi} : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, dada por

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(n) = 1 + 1 + \cdots + 1 \, (n \,\text{vezes}) \\ \tilde{\varphi}(0) = 0 \\ \tilde{\varphi}(-n) = (-1) + (-1) + \cdots + (-1) \, (n \,\text{vezes}) \end{cases}$$

em que $n \in \mathbf{N}$ e 1 é o elemento unitário de $\mathbf{R}$. É elementar verificar que $\tilde{\varphi}$ realiza um isomorfismo entre $\mathbf{Z}$ e $\varphi(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{R}$, e escreve-se $\tilde{\varphi}(n) = n$ para todo o $n \in \mathbf{Z}$.
Mais geralmente, define-se $\varphi : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ pondo

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \tilde{\varphi}(p).\tilde{\varphi}(q)^{-1} = p.q^{-1} \quad \text{para todos} \quad p, q \in \mathbf{Z} \, (q \neq 0)$$

e o leitor facilmente verificará que φ é injetiva e satisfaz (1), e logo realiza um isomorfismo entre $\mathbf{Q}$ e $\varphi(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{R}$.

Como consequência da proposição 1.1.1, sabemos já que existem números reais que não são racionais. Aos elementos de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ chamamos ***números irracionais***. São exemplos de números irracionais, $\sqrt{2}$, o número π, o número $e = \lim(1 + 1/n)^n$ (base dos logaritmos neperianos), etc. Veremos adiante que os números irracionais são "muito mais numerosos" do que os racionais: o subconjunto dos irracionais tem uma cardinalidade superior à de $\mathbf{Q}$.

1.2. Representação dos reais. Potência de R.

É conhecida a representação decimal dos números racionais como dízima finita ou infinita periódica. Uma representação decimal para os números reais será agora estabelecida.

Seja $a \in \mathbf{R}$, $0 \leq a < 1$, e considere-se α_1 o inteiro tal que

$$\alpha_1 \leq a.10 < \alpha_1 + 1 \tag{2}$$

É claro que $0 \leq \alpha_1 \leq 9$. Analogamente, tome-se α_2 o inteiro tal que

$$\alpha_2 \leq a.10^2 - \alpha_1.10 < \alpha_2 + 1.$$

Multiplicando (2) por 10, logo se percebe que $0 \leq \alpha_2 \leq 9$. Mais geralmente, sendo α_n o inteiro tal que

$$\alpha_n \leq a.10^n - \alpha_1.10^{n-1} - \alpha_2.10^{n-2} - \cdots - \alpha_{n-1}.10 < \alpha_n + 1,$$

verifica-se ainda facilmente que $0 \leq \alpha_n \leq 9$. Define-se então a ***representação decimal*** de $a \in [0, 1[$ pondo:

$$a = 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

Facilmente se reconhece que os inteiros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ são, por construção, únicos. Seja agora $a \in \mathbf{R}$, $a \geq 1$. O axioma de Arquimedes garante que existe um inteiro α_0 tal que $\alpha_0 \leq a < \alpha_0 + 1$. Define-se a representação decimal de a como

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

em que $0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ é a representação decimal de $a - \alpha_0$.
Se $a \in \mathbf{R}$, $a < 0$, definimos a sua representação decimal por

$$a = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots.$$

Designemos por $\mathcal{A}$ o conjunto das representações decimais

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

com $\alpha_0 \in \mathbf{Z}$ e $\alpha_i \in \mathbf{Z}$, $0 \leq \alpha_i \leq 9\,(i = 1, 2, \ldots)$, satisfazendo a condição:

i) Não se tem $\alpha_r = \alpha_{r+1} = \cdots = 9$ para um qualquer $r \geq 1$.

1.2.1. Proposição. *Existe uma correspondência bijetiva entre $\mathcal{A}$ e $\mathbf{R}$.*

Demonstração. Mostraremos que existe uma bijeção entre o conjunto dos reais positivos $\mathbf{R}^+$ e as representações decimais positivas $\mathcal{A}^+$, obtendo-se então o resultado da proposição como consequência imediata. Pelo que atrás foi dito, fica definida uma aplicação

$$\mathbf{R}^+ \xrightarrow{\Phi} \mathcal{A}^+, \quad a \in \mathbf{R}^+ \longrightarrow \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \in \mathcal{A}^+,$$

dado que nunca se verifica a representação $\alpha_0, \alpha_1 \ldots 99 \ldots$; caso contrário, ter-se-ia $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_r 9 \ldots 9 \leq a < \alpha_0, \alpha_1 \ldots (\alpha_r + 1)\, 0 \ldots 0$, ($n$ décimas) e então

$$0 < \alpha_0, \alpha_1 \ldots (\alpha_r + 1) - a < \frac{1}{10^n}, \quad \forall n > r,$$

o que contrariava o axioma de Arquimedes (porquê?).

Reciprocamente, faça-se corresponder a cada representação de $\mathcal{A}^+$,digamos, $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, $(\alpha_0 \geq 0)$, a sucessão de intervalos encaixados

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

definidos por

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_0 \\
b_0 &= \alpha_0 + 1 \\
\\
a_1 &= a_0 + \alpha_1.10^{-1} \\
b_1 &= a_0 + (\alpha_1 + 1).10^{-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= a_{n-1} + \alpha_n.10^{-n} = \\
&= a_0 + \alpha_1.10^{-1} + \cdots + \alpha_n.10^{-n} \\
b_n &= a_{n-1} + (\alpha_n + 1).10^{-n} = \\
&= a_0 + \alpha_1.10^{-1} + \cdots + (\alpha_n + 1).10^{-n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Pelo axioma do encaixe, existe pelo menos um real a pertencente a todos os intervalos; este elemento é necessariamente único, já que, se existissem $a, a' \in \mathbf{R}$, $a \neq a'$, tais que $a_n \leq a < a' \leq b_n$ para todo o $n = 0, 1, \ldots$, ter-se-ia

$$0 < a' - a < b_n - a_n = 10^{-n} \quad \text{para todo} \quad n = 0, 1, \ldots$$

contrariando o axioma de Arquimedes. Repare-se ainda que se tem necessariamente $a \in [a_n, b_n[$, $\forall n \geq 0$; de fato, se $a = b_r$ para algum r, obrigatoriamente se tinha $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = 9$ o que não é admissível em $\mathcal{A}$. Fica assim definida uma aplicação $\mathcal{A} \xrightarrow{\Psi} \mathbf{R}$, e é agora simples verificar que $\Phi.\Psi = id_{\mathcal{A}}$ e $\Psi.\Phi = id_{\mathbf{R}}$, o que termina a demonstração. ∎

Estabelecemos agora uma relação de ordem total em $\mathcal{A}$:

Se $A = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ e $B = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$ são dois elementos de $\mathcal{A}$, com $\alpha_0, \beta_0 \geq 0$, define-se $A < B$ se

a) $A \neq B$, isto é, $\alpha_i \neq \beta_i$ para algum inteiro $i \geq 0$; b) sendo m o *primeiro* inteiro em que $\alpha_m \neq \beta_m$ então $\alpha_m < \beta_m$.

Se $\alpha_0 < 0 \leq \beta_0$, então põe-se $A < B$.

Enfim, se $\alpha_0, \beta_0 < 0$, define-se $A < B$ se $-B < -A$, em que

$$-B = -\beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots \text{ e } -A = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots.$$

Se $a, b \in \mathbf{R}$ são os números reais associados pela anterior correspondência bijetiva às representações A e B, facilmente se vê que (*exercício*)

$$a < b \iff A < B.$$

É sabido que o conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é um conjunto ***numerável***, isto é, tem a *potência* ou *cardinalidade* do conjunto $\mathbf{N}$ dos naturais. Veremos adiante que $\mathbf{R}$ não é numerável: *card* $(\mathbf{R})>$*card* $(\mathbf{N})$. Antes, contudo, introduzimos a noção de valor absoluto de um número real.

Para cada $a \in \mathbf{R}$, define-se ***valor absoluto*** ou ***módulo*** de a, e representa--se por $| a |$, como

$$\begin{array}{lll} | a | = a & \text{se} & a \geq 0 \\ | a | = -a & \text{se} & a < 0 \end{array}$$

É elementar verificar as seguintes propriedades: para todo o par de reais a e b

(*i*) $\quad | a | \geq 0; \quad | a | = 0 \quad \text{sse} \quad a = 0$

(*ii*) $\quad | a | = | -a |; \quad a \leq | a |$

(*iii*) $\quad | a + b | \leq | a | + | b |$

(*iv*) $\quad | ab | = | a || b |$

(*v*) $\quad | a - b | \geq \big| | a | - | b | \big| \geq | a | - | b |$

A demonstração resulta sem qualquer dificuldade da definição de valor absoluto; observe-se que (v) se obtém como consequência de (iii); basta observar que se pode escrever $a = b + (a - b)$

Enfim, vê-se ainda sem dificuldade que

$$| a | < r \iff -r < a < r \iff a \in]-r, r[\quad (r > 0)$$

$$| a | \leq r \iff -r \leq a \leq r \iff a \in [-r, r]$$

1.2.2. Proposição. *Os conjuntos* $\mathbf{R}$ *e* $]0,1[$ *são equipotentes.*

Demonstração. Considere-se a aplicação $f :]-1,1[\to \mathbf{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - | x |}.$$

É claro que

$$x_1 < 0 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < 0 < f(x_2),$$

$$0 \leq x_1 < x_2 < 1 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

$$-1 < x_1 < x_2 < 0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Logo f é uma aplicação injetiva. Por outro lado, f é sobrejetiva: com efeito, dado $y \in \mathbf{R}$ e tomando $x = \dfrac{y}{1+ \mid y \mid} \in]-1,1[$, vê-se que $f(x) = y$. Assim, $\mathbf{R}$ e $]-1,1[$ são equipotentes. Finalmente, observando que a aplicação

$$g:]0,1[\longrightarrow]-1,1[, \quad \text{definida por} \quad g(x) = 2x - 1$$

é bijetiva, tem-se o resultado. ■

Observação. Da anterior proposição resulta, mais geralmente, que $\mathbf{R}$ é equipotente a todo o intervalo aberto $]a,b[, (a < b)$; basta construir uma aplicação bijetiva entre os intervalos $]0,1[$ e $]a,b[$: $t \in]0,1[\to a + t\,(b-a)$ (o leitor facilmente reconhecerá que se trata de uma bijeção entre $]0,1[$ e $]a,b[$).

1.2.3. Proposição. $\mathbf{R}$ *não é numerável.*

Demonstração. A demonstração é feita por absurdo; supondo que existe uma bijeção $\varphi : \mathbf{N} \to]0,1[$ ter-se-á, utilizando a representação decimal para $x \in]0,1[$,

$$\begin{array}{l} \varphi(1) = 0, a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\dots \\ \varphi(2) = 0, a_{21}a_{22}\dots a_{2n}\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(n) = 0, a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn}\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

e $\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n), \dots\} =]0,1[$. Construa-se agora

$$x_0 = 0, \beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots \in]0,1[$$

do seguinte modo:

se $0 \leq a_{11} \leq 5$ põe-se $\beta_1 = 7$; se $5 < a_{11} \leq 9$ põe-se $\beta_1 = 3$

....

$$\text{se } 0 \leq a_{nn} \leq 5 \text{ põe-se } \beta_n = 7; \quad \text{se } 5 < a_{nn} \leq 9 \text{ põe-se } \beta_n = 3$$

....

É claro que, por construção, o número $0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ não é igual a nenhum $\varphi(n)$, o que demonstra a proposição. ■

É particularmente importante a proposição que em seguida demonstramos na medida em que nos dá ideia da repartição dos números racionais no corpo **R** dos reais.

1.2.4. Proposição. *Sejam a e b dois números reais quaisquer tais que $a \neq b$. Então entre a e b existe pelo menos um número racional.*

Demonstração. Suponha-se $0 \leq a < b$ e considerem-se as suas representações decimais

$$A = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots \quad \text{e} \quad B = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots.$$

Sendo $A < B$, seja m o primeiro inteiro em que se tem $\alpha_m < \beta_m$ e seja $n > m$ um inteiro em que $\alpha_n \neq 9$.
Considerando a representação

$$C = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots\ldots(\alpha_n+1)\,0\ldots0\ldots$$

vê -se imediatamente que $A < C < B$. Mas o número real x associado a C é racional, e tem-se naturalmente $a < x < b$. Os outros casos demonstram-se trivialmente passando de x a $-x$. ■

1.2.5. Representação geométrica dos reais. Cortes de Dedekind.

Sobre uma reta r fixemos um ponto O (origem) e à sua direita um ponto U e associemos o número racional $+1$ à "medida" do segmento $\overline{OU}$. Todo o racional $p/q > 0$ será então associado ao ponto X da reta de modo a que o segmento $\overline{OX}$ seja *comensurável* com $\overline{OU}$. Por simetria, associamos os racionais negativos aos pontos à esquerda de O.

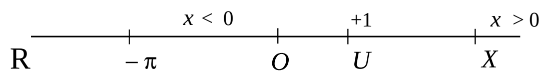


Figura 1.1

Reciprocamente, é inevitável a seguinte questão: Todo o ponto X da reta r representa um número racional? ou o que é equivalente, todo o segmento $\overline{OX}$ é comensurável com $\overline{OU}$?

A resposta a esta questão foi dada pelos matemáticos gregos da escola Pitagórica, que mostraram a existência de segmentos incomensuráveis (o que traduz a existência de números irracionais). Assim, nos *Elementos* de Euclides, pode-se apreciar a notável demonstração (puramente geométrica) de como a diagonal de um quadrado não é comensurável com o seu lado.

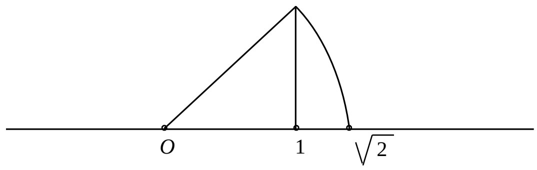


Figura 1.2

Só muito mais tarde, no século XIX, se retoma e valoriza este resultado quando Dedekind, Cantor e Weierstrass, em especial, controem rigorosamente o corpo dos números reais.

Cortes de Dedekind. A contrução dos reais apresentada por Richard Dedekind é particularmente abstracta. Veja-se resumidamente a ideia central de Dedekind. Partindo do conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais, Dedekind considera a família dos pares (A, B) de subconjuntos de $\mathbf{Q}$ que satisfazem:

i) $A \cup B = \mathbf{Q}, \quad A \cap B = \emptyset$

ii) $x < y \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$

Ao par (A, B), assim definido, chama-se *Corte de Dedekind.* Pode agora dar-se o caso de existir um "maior" elemento $a_0 \in A$ (por exemplo, $A = \{x \in \mathbf{Q} : x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Q} : x > 1\}$), ou um "mais pequeno" elemento $b_0 \in B$ (por ex., $A = \{x \in \mathbf{Q} : x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Q} : x \geq 1\}$), ou ainda pode acontecer que não exista nenhum elemento de $\mathbf{Q} = A \cup B$ que separe A e B. Neste caso, diz Dedekind, o par (A, B) representa um número irracional. Para Dedekind, o conjunto dos números reais é o conjunto dos pares (A, B), cortes de Dedekind, no qual se introduzem as operações de adição e multiplicação que o tornam um corpo arquimediano totalmente ordenado satisfazendo o axioma do encaixe.

A terminar, podemos facilmente ver como todos os pontos da reta representem geometricamente os números racionais e irracionais.

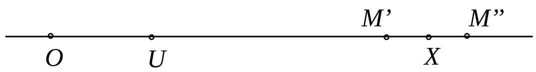


Figura 1.3

Retomando a anterior representação geométrica (cf. Fig. 1.3), seja X um ponto à direita de O tal que o segmento $\overline{OX}$ seja "incomensurável" (com $\overline{OU}$). Ora, todo o segmento comensurável $\overline{OM}$ ou é um segmento $\overline{OM'}$ contido em $\overline{OX}$ ou um um segmento $\overline{OM''}$ contendo $\overline{OX}$; se r' e r'' são os racionais associados às medidas de $\overline{OM'}$ e $\overline{OM''}$ respetivamente, obtemos naturalmente o corte de Dedekind (A', A'') o qual determina o número irracional a que é, *por definição*, medida do segmento $\overline{OX}$.
Reciprocamente, dado um irracional $a \in \mathbf{R}^+ \backslash \mathbf{Q}$, este será medida de um segmento $\overline{OM}$; com efeito, considerando todos os racionais $0 < r' < a < r''$, estes são medidas de segmentos $\overline{OM'}$ e $\overline{OM''}$ que satisfazem

1. $\overline{OM'} \subset \overline{OM''}$
2. $\forall \delta > 0$, existem segmentos $\overline{OM'}$ e $\overline{OM''}$ de medidas r' e r'' respetivamente, tais que $r'' - r' < \delta$.

Ora, sob estas condições, a existência de um único segmento $\overline{OM}$ contendo todos os $\overline{OM'}$ e contido em todos os $\overline{OM''}$ é aceite como um *postulado fundamental da geometria*. Fica assim estabelecida uma correspondência bijetiva entre o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais e os pontos de uma reta r. A reta assim definida chama-se ***reta real***.

1.3. Majorar. Minorar.

Seja $A \subset \mathbf{R}$ um subconjunto de $\mathbf{R}$ não vazio. Diz-se que $M \in \mathbf{R}$ é um ***majorante*** de A se

$$x \leq M, \quad \text{para todo o} \quad x \in A.$$

Analogamente, $m \in \mathbf{R}$ diz-se um ***minorante*** de A se

$$m \leq x, \quad \text{para todo o} \quad x \in A.$$

O conjunto A diz-se ***majorado*** ou ***limitado superiormente*** (respetivamente ***minorado*** ou ***limitado inferiormente***) se admitir majorante (respetivamente minorante). O conjunto A diz-se ***limitado*** se for majorado e minorado, isto é:

$$m \leq x \leq M, \quad \text{para todo o} \quad x \in A$$

ou seja, A é um conjunto limitado se e só se $A \subset [m, M]$; é ainda um exercício elementar verificar que A é limitado se e só se

$$\text{Existe } C \in \mathbf{R},\ C > 0, \ \text{ tal que } \ | x | \leq C \ \text{ para todo o } x \in A.$$

1.3.1. Definição. *Seja $A \subset \mathbf{R}$ um subconjunto de $\mathbf{R}$ não vazio. Diz-se que $L \in \mathbf{R}$ é o* ***supremo*** *(ou* ***limite superior****) do conjunto A e escreve-se $L = \sup A$ se:*

i) $x \leq L$ *para todo o* $x \in A$ *(L é um majorante)*
ii) *para todo o* $x \in \mathbf{R}$ *tal que* $x < L$, *existe* $a \in A$ *tal que* $x < a \leq L$.

Analogamente, $l \in \mathbf{R}$ diz-se o ***ínfimo*** *(ou* ***limite inferior****) de A e escreve-se $l = \inf A$ se:*

i′) $l \leq x$ *para todo o* $x \in A$ *(l é um minorante)*
ii′) *para todo o* $x \in \mathbf{R}$ *tal que* $l < x$, *existe* $a \in A$ *tal que* $l \leq a < x$.

Repare-se que a definição de sup (resp. de inf) de um subconjunto $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, exige que A seja majorado (resp. minorado). Observe-se ainda que o supremo, $L = \sup A$ (respetivamente o ínfimo, $l = \inf A$) se existe é ***único***. Com efeito, se L' é ainda supremo de A e $L' < L$, de *ii*) resulta que existe um elemento $a \in A$ tal que $L' < a \leq L$ o que contraria a definição de L' como supremo; do mesmo modo se vê que não se pode ter $L < L'$ e portanto $L = L'$.

A proposição seguinte dá um novo esclarecimento à noção de supremo (resp. ínfimo) de um conjunto.

1.3.2. Proposição. *O número real L é o supremo de um conjunto $A \subset \mathbf{R}$, majorado, se e só se L é o menor dos majorantes de A.*
O número real l é o ínfimo do conjunto A, minorado, se e só se l é o maior dos minorantes de A.

Demonstração. Da definição, $L = \sup A$ se e só se L é majorante de A e satisfaz a condição *ii*), a qual significa exactamente que todo o real inferior a L não é majorante de A. Isto é, $L = \sup A$ se e só se L é o menor dos majorantes de A. ■

Assim,

$$L = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} L \geq x, \ \forall x \in A \\ \qquad \text{e} \\ L' \geq x, \ \forall x \in A \Longrightarrow L' \geq L \end{cases}$$

Do mesmo modo

$$l = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} l \leq x, \ \forall x \in A \\ \qquad \text{e} \\ l' \leq x, \ \forall x \in A \Longrightarrow l' \leq l \end{cases}$$

1.3.3. Exemplos.

1. O conjunto $A = \{x \in \mathbf{R} : 1 < x \leq 2\}$ é evidentemente majorado e minorado (logo limitado) e tem-se claramente $\sup A = 2$, $\inf A = 1$.

2. O conjunto $A = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2\}$ é majorado: com efeito, se $\sqrt{2} \leq x$, vem $2 \leq x^2$ e logo $x \notin A$; assim $\sqrt{2} > x$, $\forall x \in A$ ($\sqrt{2}$ é um majorante de A). Além disso, se $x \in \mathbf{R}$ é tal que $0 \leq x < \sqrt{2}$, existe sempre um racional r tal que $0 \leq x < r < \sqrt{2}$ e logo $r^2 < 2$, isto é, $r \in A$, o que mostra que $\sup A = \sqrt{2}$.

3. Se $A \subset \mathbf{R}$ admite supremo, então $-A = \{-x : x \in A\}$ admite ínfimo e

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

Com efeito, se $\sup(A) = L$, tem-se $L \geq x$, $\forall x \in A$ e logo $-x \geq -L$, isto é, $-L$ é minorante de $-A$; além disso $l \leq -x \implies x \leq -l$, $\forall x \in A$, e logo $L \leq -l$ ou seja $l \leq -L$, o que mostra que $-\sup(A) = -L = \inf(-A)$.
Analogamente, se A admite ínfimo, $-A$ admite supremo e

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

Vê-se assim que o supremo (resp. ínfimo) de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto. Se $L = \sup A \in A$, então L diz-se o ***máximo*** do conjunto A, $L = \max A$; analogamente, se $l = \inf A \in A$, diz-se que l é o ***mínimo*** do conjunto A, $l = \min A$. Finalmente e pelo que atrás foi dito, se A é um conjunto majorado, o conjunto dos majorantes $M' = \{m' \in \mathbf{R} : m' \geq x,\ \forall x \in A\}$ é não vazio e

$$\sup A = \min M'.$$

Analogamente, se A é minorado,

$$\inf A = \max M'',$$

sendo $M'' = \{m'' \in \mathbf{R} : m'' \leq x,\ \forall x \in A\} \neq \emptyset$, o conjunto dos minorantes.

É agora pertinente saber se todo o subconjunto $A \subset \mathbf{R}$ admite supremo (resp. ínfimo). A resposta é dada no importante

1.3.4. Teorema (*Princípio do supremo e do ínfimo*). *Seja $A \subset \mathbf{R}$ um subconjunto de $\mathbf{R}$ não vazio. Se A é majorado (resp. minorado), então admite supremo (resp. ínfimo).*

Demonstração. Sendo A não vazio e majorado, escolham-se dois elementos, $a_0, b_0 \in \mathbf{R}$ tais que

— b_0 é majorante ($x \leq b_0,\ \forall x \in A$)
— existe pelo menos um $x \in A$ tal que $a_0 \leq x$.

Fazendo $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, tem-se, necessariamente, uma das duas alternativas:

$$x \leq c_0 \quad \forall x \in A$$

ou

$$c_0 < x \quad \text{para algum} \quad x \in A.$$

No primeiro caso, põe-se $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$; no segundo $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$. Em qualquer dos casos, obtém-se

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1], \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Recomeça-se o processo com $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

Repetindo sucessivamente o raciocínio, obtém-se uma sucessão de intervalos encaixados

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots, b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},$$

que satisfazem as seguintes duas condições:

a) $x \leq b_n \quad \forall x \in A$
b) $a_n < x$ para algum $x \in A$.

Pelo axioma do encaixe, existe pelo menos um elemento $a \in \bigcap [a_n, b_n]$; este elemento será necessariamente único, dado que

$$a, a' \in \bigcap [a_n, b_n] \quad \text{com} \quad a' < a \quad (\text{por ex.})$$

implicaria $a_n \leq a' < a \leq b_n$, e portanto

$$a - a' \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}, \quad \text{ou seja,} \quad (a - a')2^n \leq b_0 - a_0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

o que contrariava o axioma de Arquimedes.
Resulta agora facilmente que a é majorante de A: caso contrário, existiria um $x \in A$ tal que $a < x$ e então $a_n \leq a < x \leq b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, o que contrariava a unicidade atrás estabelecida.
Finalmente, se $x_0 \in \mathbf{R}$ é tal que $x_0 < a$, não se poderá ter, pela mesma razão, $a_n \leq x_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; portanto $x_0 < a_n$ para um certo a_n. Mas por b), existe $x \in A$, $a_n < x$, pelo que $x_0 < a_n < x \leq a$ e portanto $a = \sup A$.
A demonstração da existência de $\inf A$ (se A é minorado) resulta agora facilmente, passando de A a $-A$ (1.3.3. exemplo 3.). ∎

Por extensão de linguagem, é usual escrever $\sup A = +\infty$ para designar os conjuntos não majorados e $\inf A = -\infty$ para os conjuntos não minorados. Todavia, os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ podem ser definidos rigorosamente no quadro matemático, ampliando o conjunto $\mathbf{R}$ com dois novos elementos e introduzindo no novo conjunto

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

uma estrutura de ordem, definida do seguinte modo:

Dados $x, y \in \overline{\mathbf{R}}$, define-se $x < y$ pondo

i) se x e y são números reais, $x < y$ em $\overline{\mathbf{R}}$ se e só se $x < y$ em $\mathbf{R}$.
ii) $-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

É fácil verificar que se trata de uma relação de ordem total em $\overline{\mathbf{R}}$ (*exercício*). O novo conjunto ordenado designa-se por ***reta acabada***.

Todo o conjunto $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ (e em particular $A \subset \mathbf{R}$) é majorado e minorado em $\overline{\mathbf{R}}$ (por $+\infty$ e $-\infty$ resp.). Se A não é majorado em $\mathbf{R}$ então $\sup A = +\infty$ ($+\infty$ é claramente o mais pequeno dos majorantes em $\overline{\mathbf{R}}$); analogamente, se A não é minorado em $\mathbf{R}$, $\inf A = -\infty$. O princípio do supremo e do ínfimo pode então ser reformulado do seguinte modo:

Todo o subconjunto $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ *tem supremo e ínfimo (em* $\overline{\mathbf{R}}$*);* $\sup A \in \mathbf{R}$ *se e só se* A *é majorado em* $\mathbf{R}$ *e* $\inf A \in \mathbf{R}$ *se e só se* A *é minorado em* $\mathbf{R}$.

Definem-se ainda naturalmente os intervalos ilimitados

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\} \subset \mathbf{R}, \quad [a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : x \geq a\} \subset \overline{\mathbf{R}}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} : x > a\} \subset \mathbf{R}, \quad]a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : x > a\} \subset \overline{\mathbf{R}}.$$

Enfim, $]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$ e $[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbf{R}}$.

As operações algébricas $+$ e $.$ prolongam-se a $\overline{\mathbf{R}}$ pondo,

$$\begin{aligned} x + \infty &= +\infty & \forall x &\in]-\infty, +\infty] \\ x - \infty &= -\infty & \forall x &\in [-\infty, +\infty[\\ x.(\pm\infty) &= \pm\infty & \forall x &\in]0, +\infty] \\ x.(\pm\infty) &= \mp\infty & \forall x &\in [-\infty, 0[. \end{aligned}$$

Pomos ainda,

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathrm{R}.$$

Observação. Note-se que $+$ e $.$ não são operações binárias definidas em todo o $\overline{\mathbf{R}}$ (por ex. não se dá sentido a $+\infty + (-\infty)$). As anteriores relações são apenas ***convenções*** que nos vão ser úteis, formalmente, no que se segue.

1.3.5. Desigualdades. As desigualdades desempenham um papel determinante em qualquer nível da análise matemática. Frequentemente, o importante no desenvolvimento de um raciocínio matemático é saber, não o valor exacto de uma dada "quantidade matemática" x, mas sim ***estimar*** x, isto é, saber que x é $\leq$ (ou $\geq$) a um certo valor b (possivelmente dependente de x).
Mostremos agora algumas desigualdades numéricas válidas em $\mathbf{R}$.

1. Se $x \in \mathbf{R}$ é tal que $1+x \geq 0$, então

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (\textit{desigualdade de Bernoulli})$$

Para $n=1$ o resultado é imediato; sendo válido para n, tem-se para $n+1$, $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n.(1+x) \geq (1+nx).(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$.

2. $ab \leq \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right), \quad \forall a,b \in \mathbf{R}$

A demonstração é imediata, bastando observar que $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \geq 0$.

3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2, \qquad (a,b \in \mathbf{R})$$

Tomando $\delta > 0$, tem-se por **2.** $ab = \delta a \dfrac{b}{\delta} \leq \dfrac{\delta^2}{2}a^2 + \dfrac{1}{2\delta^2}b^2$ e a desigualdade sai fazendo $\varepsilon = \dfrac{\delta^2}{2}$ e $C_\varepsilon = \dfrac{1}{2\delta^2}$.

4.

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right),$$

$(a_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n)$*;*

em particular, $\sqrt{ab} \leq \dfrac{1}{2}(a+b), \quad (a,b \geq 0)$.

A desigualdade é um corolário do seguinte resultado numérico:

Lema - Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos tais que $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Então, tem-se

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n.$$

Uma vez mais se utiliza a indução matemática. Para $n = 1$ o resultado sai trivialmente; supondo válido o resultado para n, sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, reais positivos tais que

$$x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} = 1.$$

Então, ou todos os números são iguais a 1 e logo a soma será $n + 1$, provando a desigualdade, ou pelos menos um número será diferente da unidade; mas então deverão haver pelo menos dois reais diferentes de 1, sendo obrigatoriamente um deles > 1 e o outro < 1. Sem perda de generalidade podemos supor $x_n > 1$ e $x_{n+1} < 1$. Considerando agora os n números $x_1, x_2, \ldots, (x_n x_{n+1})$, tem-se pela hipótese da indução: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n x_{n+1} \geq n$ e logo,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} &\geq n - x_n x_{n+1} + x_n + x_{n+1} = \\ &= n + 1 + x_n(1 - x_{n+1}) + x_{n+1} - 1 = \\ &= n + 1 + x_n(1 - x_{n+1}) - (1 - x_{n+1}) = \\ &= n + 1 + (1 - x_{n+1})(x_n - 1) \geq n + 1. \end{aligned}$$

A demonstração da desigualdade enunciada em **4.** é agora tarefa fácil; sejam com efeito $a_1, a_2, \ldots, a_n$, números reais positivos, e consideremos os números

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}, \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}, \cdots, \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}.$$

Sendo estes números positivos e o seu produto igual à unidade, vem pelo lema:

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} \geq n;$$

logo

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

1.4. Funções reais de variável real. Propriedades gerais.

Uma função real de variável real é uma aplicação

$$f : D \longrightarrow \mathbf{R}, \quad D \subset \mathbf{R}, \quad x \in D \longrightarrow f(x) \in \mathbf{R}.$$

O subconjunto $D \subset \mathbf{R}$ diz-se o ***domínio*** de f. Assim, uma função f só está definida se for dado o domínio D de f, e a lei que a cada $x \in D$ faz corresponder um elemento $f(x) \in \mathbf{R}$. O conjunto $F = f(D)$ designa-se por ***conjunto imagem*** ou ***contradomínio*** da função f.

É habitual representar ***geometricamente*** (ou ***graficamente***) uma dada função $f : D \to \mathbf{R}$ num sistema de eixos cartesianos Oxy, onde se exibe o ***gráfico*** da função, isto é, o conjunto de pontos do plano $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbf{R}^2$.

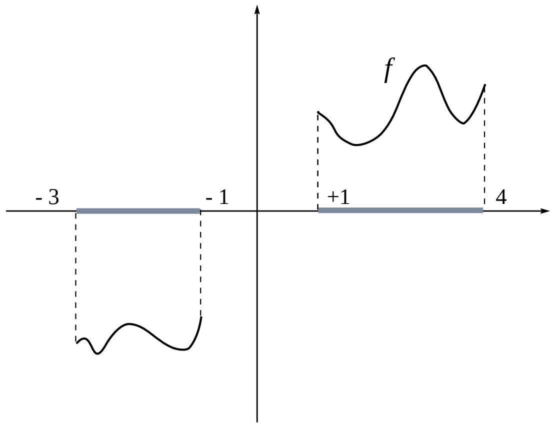


Figura 1.4 $f :]-3, -1[\cup]1, 4[\to \mathbf{R}$

1.4.1. Exemplos

1. As funções $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definidas por

$$f(x) = mx + p \quad (m, p \in \mathbf{R})$$

representam graficamente retas de declive m passando pelo ponto $(0, p)$. Dizem-se ***funções lineares***.

As funções $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, em que $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$, dizem-se ***polinómios***. Se $a_n \neq 0$, P diz-se um polinómio de grau n.

Se P e Q são polinómios, a função $R : D \to \mathbf{R}$ com domínio $D = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}$ e definida por

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

chama-se ***função racional***. Mais tarde veremos o bom comportamento destas funções.

2. Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função real definida num domínio D, simétrico em relação a 0, isto é, $x \in D \iff -x \in D$. A função f chama-se ***par*** se

$$f(x) = f(-x), \ \forall x \in D$$

e diz-se ***ímpar*** se

$$f(x) = -f(-x), \ \forall x \in D.$$

É claro que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas e o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

3. As funções trigonométricas sin e tg são aqui representadas graficamente com domínios $[-\pi/2, \pi/2]$ e $]-\pi/2, \pi/2[$, respetivamente.

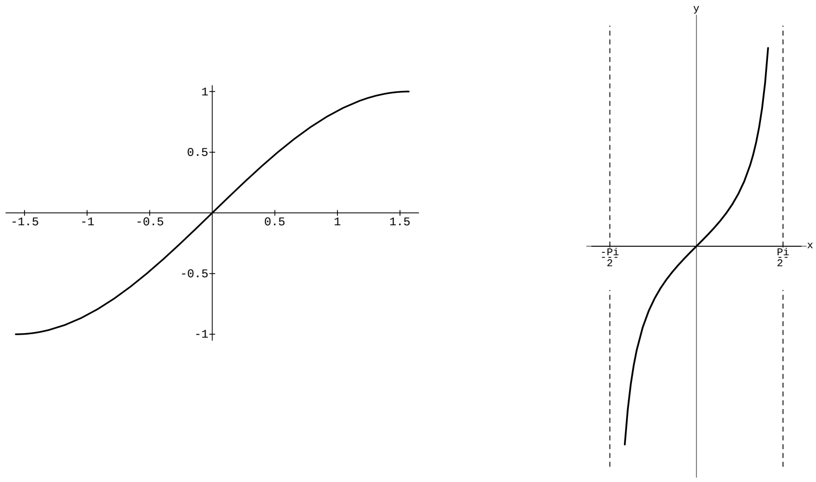


Figura 1.5

4. A função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

designa-se por ***função sinal*** e é evidentemente função ímpar.
A função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, é claramente uma função par e facilmente se vê que $x. \operatorname{Sgn} x = |x|, \ \forall x \in \mathbf{R}$.

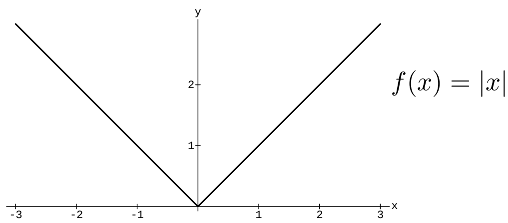


Figura 1.6

5. Uma função $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \quad n \to f(n) = u_n$, diz-se uma ***sucessão real*** ou uma ***sucessão em*** $\mathbf{R}$. As sucessões desempenham, como se sabe, um importante papel na Análise. Algumas das suas propriedades serão tratadas no capítulo seguinte.

6. Dada uma função $f : D \to \mathbf{R}$ e um subconjunto $E \subset D$ do domínio, a nova função

$$f_{|_E} : E \longrightarrow \mathbf{R}$$

definida por

$$x \in E \longrightarrow f_{|_E}(x) = f(x)$$

chama-se ***restrição*** de f a E.

1.4.2. Operações Algébricas. Consideremos $f : D \to \mathbf{R}$ e $g : E \to \mathbf{R}$, duas funções reais de variável real. Define-se a ***soma*** $f + g$ como sendo a função

$$f + g : D \cap E \longrightarrow \mathbf{R}, \quad x \longrightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Analogamente se define $f.g$, $f - g$, $| f |$, f/g; repare-se contudo que

$$f/g : D \cap E \cap \{x : g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad x \longrightarrow f(x)/g(x).$$

1.4.3. Funções Monótonas. Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma dada função. Diz-se que f é ***crescente*** (ou ***monótona crescente***) se

$$x, y \in D, \quad x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

A função f diz-se ***decrescente*** (ou ***monótona decrescente***) se

$$x, y \in D, \quad x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

Se $x, y \in D,\ x < y \implies f(x) < f(y)$, f diz -se ***estritamente crescente***. De modo idêntico, se $x, y \in D,\ x < y \implies f(x) > f(y)$, f diz -se ***estritamente decrescente***.
Enfim, f diz-se ***monótona*** se for crescente ou decrescente.

Observação. É usual dizer-se que uma função f é crescente (resp. decrescente) numa parte $A \subset D$; isso significa rigorosamente, de acordo com a definição dada, que a restrição $f_{|_A}$ é crescente (resp. decrescente). Assim, por exemplo $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$,

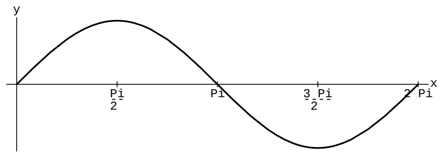


Figura 1.7

não é monótona, mas $f_{|_{[0,\pi/2]}}$ é monótona crescente e $f_{|_{[\pi/2,3\pi/2]}}$ é monótona decrescente.

1.4.4. Composição de funções. Função inversa.

Sejam $f : D \to \mathbf{R}$ e $g : E \to \mathbf{R}$ funções reais tais que $g(E) \subset D$; define-se agora a função

$$f \circ g : E \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

dita ***função composta*** de f com g. Repare-se que a composição $f \circ g$ exige que a imagem $g(E)$ esteja contida no domínio de f. Assim, por exemplo, a composição de $f :]-\infty, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x}$, com $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2$, não tem sentido, existindo no entanto $f \circ \tilde{g}$ em que $\tilde{g} = g|_{[-1,1]}$; tem-se $(f \circ \tilde{g})(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Seja agora $f : D \to \mathbf{R}$ uma função tal que, para quaisquer $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, se tem $f(x_1) \neq f(x_2)$. A função f diz-se então *biunívoca* ou *injetiva*: para cada $y \in f(D)$ existe um único $x \in D$ tal que $f(x) = y$, o que nos permite definir uma nova função

$$f^{-1} : F = f(D) \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f^{-1}(x) = y \ (\Longleftrightarrow \ f(y) = x)$$

A função f^{-1} recebe o nome de ***função inversa de*** f e o seu domínio é o contradomínio de f. As funções que admitem inversa dizem-se também *invertíveis* e estas são precisamente as funções injetivas. Das definições resulta ainda claramente que

$$f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall x \in D \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(x)) = x, \ \forall x \in E = f(D),$$

ou seja $f^{-1} \circ f = I_D$ e $f \circ f^{-1} = I_E$ com I_D e I_E, as respetivas funções identidade: $I_D(x) = x, \ \forall x \in D, \ \ I_E(x) = x, \ \forall x \in E$.
Sendo f uma função invertível, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$; basta observar que

$$(x, y) \in G(f) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in G(f^{-1}).$$

1.4.5. Supremo e Infimo de uma Função.

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função real de variável real e $A \subset D$ uma parte não vazia de D. Diz-se que f é ***majorada*** (resp. ***minorada***) em A se o conjunto $f(A)$ é majorado (resp. minorado), isto é

$$\exists\, M \in \mathbf{R} \,:\, f(x) \leq M, \quad \forall x \in A$$

$$(\text{resp.} \quad \exists\, m \in \mathbf{R} \,:\, f(x) \geq m, \quad \forall x \in A).$$

A função f diz-se ***limitada*** em A se for majorada e minorada, ou seja, se existem constantes $m, M \in \mathbf{R} \,:\, m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in A$, ou seja ainda

$$\exists\, C > 0 \,:\, | f(x) | \leq C, \quad \forall x \in A.$$

Pelo príncipio do supremo e do ínfimo, se f é majorada em A então $f(A)$ admite supremo em $\mathbf{R}$; chama-se ***supremo*** de f em A ao supremo de $f(A)$: $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup f(A)$ (escreve-se também $\sup\limits_{A} f(x)$ ou apenas $\sup\limits_{A} f$).
Do mesmo modo $\inf\limits_{x\in A} f(x) = \inf f(A)$ é o ***ínfimo*** de f em A (escreve-se também $\inf\limits_{A} f(x)$).
Se f não é majorada (resp. minorada) escreve-se $\sup\limits_{A} f(x) = +\infty$ (resp. $\inf\limits_{A} f(x) = -\infty$).
Enfim, se $\sup\limits_{x\in A} f(x) \in f(A)$ (resp. $\inf\limits_{x\in A} f(x) \in f(A)$) diz-se que f tem máximo (resp. mínimo) em A: $\max\limits_{x\in A} f(x)$ ou $\max\limits_{A} f$ (resp. $\min\limits_{x\in A} f(x)$ ou $\min\limits_{A} f$).

Da definição de supremo e ínfimo de um conjunto, resulta agora:

1.4.6. Proposição. *O número real $L \in \mathbf{R}$ é supremo de f em A se e só se:*

1) $L \geq f(x), \quad \forall x \in A$
2) *para cada $\delta > 0$, existe $x \in A$ tal que $f(x) > L - \delta$.*

O número real $l \in \mathbf{R}$ é ínfimo de f em A se e só se:

1') $l \leq f(x), \quad \forall x \in A$
2') *para cada $\delta > 0$, existe $x \in A$ tal que $f(x) < l + \delta$.*

O teorema seguinte resume algumas das propriedades do sup e inf de f em $\overline{\mathbf{R}}$

1.4.7. Teorema. *Sejam $f, g : D \to \mathbf{R}$ e $B \subset A \subset D$ duas partes não vazias de D. Tem-se:*

1) $\sup\limits_B f \leq \sup\limits_A f$; $\quad \inf\limits_B \geq \inf\limits_A f$.

2) $\sup\limits_A(-f) = -\inf\limits_A f$.

3) *Se* $f(x) > 0$, $\quad \forall x \in A$, *então* $\sup\limits_A(1/f) = \dfrac{1}{\inf\limits_A f}$.

4) *Se* $f(x) \leq g(x)$, $\quad \forall x \in A$, *então* $\sup\limits_A f \leq \sup\limits_A g$; $\quad \inf\limits_A f \leq \inf\limits_A g$.

5) $\sup\limits_A(f+g) \leq \sup\limits_A f + \sup\limits_A g$; $\quad \inf\limits_A(f+g) \geq \inf\limits_A f + \inf\limits_A g$.

6) *Se* $f(x) \geq 0$ *e* $g(x) \geq 0$ *em* A, *então:*
$\sup\limits_A(fg) \leq \left(\sup\limits_A f\right)\left(\sup\limits_A g\right)$; $\quad \inf\limits_A(fg) \geq \left(\inf\limits_A f\right)\left(\inf\limits_A g\right)$.

7) $\sup\limits_A(f+g) \geq \sup\limits_A f + \inf\limits_A g$, $\quad$ *estando definido o segundo membro.*

8) *Se* $f(x) \geq 0$ *e* $g(x) \geq 0$ *em* A,
$\sup\limits_A(fg) \geq \sup\limits_A f . \inf\limits_A g$, $\quad$ *estando definido o segundo membro.*

Demonstração. Apresentamos a demonstração das três primeiras alíneas deixando a demonstração das restantes como exercício. As desigualdades e operações algébricas serão tomadas em $\overline{\mathbf{R}}$ tendo em conta as convenções atrás referidas, no final de 1.3.4. A primeira parte de 1) resulta imediatamente da definição de supremo:

$$\sup_A f \geq f(x)\ \forall x \in A \Longrightarrow \sup_A f \geq f(x)\ \forall x \in B,$$

pelo que $\sup\limits_A f \geq \sup\limits_B f$. Do mesmo modo se vê a desigualdade respeitante ao inf. Para mostrarmos 2) observemos que $\inf\limits_A f \leq f(x)\ \forall x \in A$, donde $-\inf\limits_A f \geq -f(x)$ e portanto $-\inf\limits_A f \geq \sup\limits_A(-f)$. Por outro lado, $\sup\limits_A(-f) \geq -f(x)\ \forall x \in A$ e portanto $-\sup\limits_A(-f) \leq f(x)\ \forall x \in A$ o que implica, pela definição de inf, $-\sup\limits_A(-f) \leq \inf\limits_A f$, establecendo-se a igualdade. A demonstração de 3) segue um caminho análogo; note-se entretanto que, sendo $f(x) > 0$ em A e podendo ter-se $\inf\limits_A f = 0$, se convenciona, neste caso, $1/\inf\limits_A f = +\infty$. Assim, $\inf\limits_A f \leq f(x)\ \forall x \in A$ pelo que $1/\inf\limits_A f \geq 1/f(x)$, e portanto $1/\inf\limits_A f \geq \sup\limits_A(1/f)$; mas, $\sup\limits_A(1/f) \geq 1/f(x)\ \forall x \in A$ ou seja

$1/\sup_A(1/f) \leq f(x)$ e logo $1/\sup_A(1/f) \leq \inf_A f$, obtendo-se o resultado enunciado. Finalmente, observando que $f = (f+g) - g$, resulta de 2) e 5):

$$\sup_A f \leq \sup_A(f+g) + \sup_A(-g) = \sup_A(f+g) - \inf_A g$$

o que estabelece 7). A desigualdade 8) pode ser demonstrada de forma semelhante. ∎

1.4.8. Exemplos

1. Mostre que a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 . \operatorname{sign} x$, é invertível e escreva a função inversa.

Mostraremos que a função f é mesmo estritamente crescente e logo, em particular, injetiva. Com efeito, f pode escrever-se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

e logo se vê que $0 < x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$ i.e. $f(x) < f(y)$; do mesmo modo, $x < y < 0 \Longrightarrow 0 < -y < -x \Longrightarrow y^2 < x^2$ ou seja $-x^2 = f(x) < f(y) = -y^2$. Enfim, se $x < 0 < y$, é claro que $f(x) < f(0) < f(y)$ e f é estritamente crescente em $\mathbf{R}$.
Escrevendo $y = x^2$ para $x \geq 0\,(\Leftrightarrow y \geq 0)$, daqui resulta $x = \sqrt{y}$ para $y \geq 0$. Para $x < 0$, tem-se $y = -x^2 < 0$ e logo $x = -\sqrt{-y}$ para $y < 0$.
A função inversa de f escreve-se

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \\ -\sqrt{-x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$f^{-1}(x) = \operatorname{sign} x . \sqrt{x . \operatorname{sign} x} = \operatorname{sign} x . \sqrt{|x|}$$

2. Prove que a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$, não é injetiva. Mostre no entanto que $g = f|_{]-\infty,-1]}$ é invertível e escreva a inversa.

Escrevendo $y = x^2 + 2x - 3$, a resolução do trinómio dá-nos

$$x_1 = -1 - \sqrt{4+y}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{4+y}$$

e imediatamente se vê que para $y > -4$ existem dois valores $x_1 \neq x_2$ que fazem $f(x_1) = f(x_2) = y$, mostrando que f não é injetiva.
Restringindo f aos $x \leq -1$, é claro que $x = -1 - \sqrt{4+y}$ é o único real tal que $f(x) = y$ com $y \geq -4$; portanto, $g = f|_{]-\infty,-1]}$ é invertível e

$$g^{-1}(x) = -1 - \sqrt{4+x}.$$

3. Mostre que a função $f :]-1,1[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, é minorada mas não é majorada.

Com efeito, a função é estritamente crescente em $[0,1[$:

$$0 \leq x < y \Longrightarrow 1 - x^2 > 1 - y^2 \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Como a função é par ($f(-x) = f(x)$), resulta que é decrescente em $]-1,0[$:

$$-1 < x < y \leq 0 \implies 0 \leq -y < -x \implies f(y) < f(x).$$

É então claro que $f(0) \leq f(x)$, $\forall x \in]-1,1[$ e a função f tem um mínimo no seu domínio: $\min f = f(0) = 1$.
Por outro lado, dado um qualquer $M > 1$, existe $x \in]-1,1[$ tal que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} > M$; com efeito, se $x \in]-1,1[$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > M \Longleftrightarrow 1 - x^2 < \frac{1}{M^2} \Longleftrightarrow x^2 > 1 - \frac{1}{M^2}$$

e basta escolher x tal que $\sqrt{1 - 1/M^2} < x < 1$ para se ter $f(x) > M$, mostrando-se assim que f não é majorada.

Dado que $\sqrt{1-x^2} > 0$, $x \in]-1,1[$, poder-se-ia também usar o teorema precedente para logo se obter :

$$\sup f = \frac{1}{\inf \sqrt{1-x^2}} = +\infty, \quad \inf f = \frac{1}{\sup \sqrt{1-x^2}} = 1.$$

1.5. Introdução elementar dos números complexos.

O estudo introdutório da Análise Infinitesimal que nos propomos apresentar assenta essencialmente na estrutura do corpo $\mathbf{R}$ dos números reais. No entanto, ser-nos-ão úteis, sobretudo na análise do último capítulo (introdução às séries de Fourier), alguns conhecimentos sobre o conceito de número complexo, extensão do conceito de número real.

Como é sabido, a extensão $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, dos números naturais aos números inteiros, vem permitir, neste último conjunto, a operação de subtracção (a qual não era válida em $\mathbf{N}$); e do mesmo modo a operação de divisão fica bem definida no corpo dos racionais, extensão de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Enfim, vimos como no corpo dos reais, extensão de $\mathbf{Q}$, tem lugar a radiciação, $\sqrt[n]{a}$, ***se*** $a \geq 0$, isto é, a equação algébrica $x^n - a = 0$ tem solução em $\mathbf{R}$ se $a \geq 0$. É precisamente a necessidade de resolver uma qualquer equação algébrica que nos leva a introduzir a noção de número complexo. Em particular, pretende-se resolver a equação

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

que, claramente não tem solução em $\mathbf{R}$. A seguir veremos como o prolongamento de $\mathbf{R}$ ao conjunto dos números complexos nos permite resolver a equação (1). Mais geralmente, como se mostra na teoria das funções de variável complexa, toda a equação algébrica $P(x) = 0$, em que $P(x)$ é um polinómio com coeficientes complexos, admite solução no novo conjunto $\mathbf{C}$ dos números complexos. Este resultado é conhecido como *Teorema Fundamental da Álgebra*.

1.5.1. Definição. *No conjunto* $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) : x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$, *definam-se as seguintes duas operações :*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \quad (\textit{adição}) \\ z_1 \,.\, z_2 &= (x_1, y_1) \,.\, (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (\textit{multiplicação}) \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. *O conjunto* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, *munido das referidas operações, representa-se por* $\mathbf{C}$ *e diz-se o* ***conjunto dos números complexos***.

É um exercício elementar verificar que as operações definidas, + e ., são *comutativas, associativas* e satisfazem a lei *distributiva*. O elemento $0 = (0, 0)$ é evidentemente o elemento neutro da adição, e o elemento $1 = (1, 0)$ o elemento neutro da multiplicação:

$$\left.\begin{aligned} &(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y) \\ &(x, y) \,.\, (1, 0) = (1, 0) \,.\, (x, y) = (x, y) \end{aligned}\right. \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{C}.$$

Dado um número complexo $z = (x, y)$, o elemento $-z = (-x, -y)$ é claramente o *elemento simétrico* de z :

$$z + (-z) = (-z) + z = 0, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Mostremos agora que todo o elemento $z = (x, y) \neq (0, 0)$ admite um elemento inverso, isto é, existe $w = (a, b) \in \mathbf{C}$ tal que

$$z \,.\, w = (x, y) \,.\, (a, b) = (1, 0), \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Com efeito, isto é equivalente à resolução do sistema

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases}$$

e daqui resulta que $a = x/(x^2 + y^2)$, $b = (-y)/(x^2 + y^2)$ (repare-se que $x^2 + y^2 \neq 0$, dado que se exige que $(x, y) \neq (0, 0)$). Assim, o *elemento inverso* de $z = (x, y) \neq (0, 0)$ escreve-se

$$w = z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

A divisão do complexo z_1 pelo complexo $z_2 \neq 0$, fica então bem definida: $z_1/z_2 = z_1 . (z_2)^{-1}$. É agora imediato concluir que $(\mathbf{C}, +, .)$ constitui um corpo: o ***corpo dos números complexos***.

1.5.2. Proposição. *A aplicação*

$$x \in \mathbf{R} \xrightarrow{\psi} (x, 0) \in \mathbf{C}$$

é um isomorfismo (para a adição e multiplicação) entre $\mathbf{R}$ *e o subconjunto* $\{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{C}$.

Demonstração. A aplicação ψ é claramente biunívoca e tem-se

$$\begin{aligned} \psi(x + y) &= (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = \psi(x) + \psi(y). \\ \psi(x.y) &= (xy, 0) = (x, 0) . (y, 0) = \psi(x).\psi(y). \end{aligned}$$

Logo ψ realiza um isomorfismo entre $\mathbf{R}$ e $\psi(\mathbf{R}) = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{C}$. ∎

O isomorfismo precedente permite-nos "identificar" os números reais aos números complexos que têm a segunda componente nula : $x \equiv (x, 0)$, e uma tal identificação justifica a inclusão $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, isto é, o prolongamento do corpo dos reais ao corpo dos números complexos. É claro que para $\lambda \in \mathbf{R}$ se tem

$$\lambda . z = (\lambda, 0) . (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

1.5.3. A unidade imaginária.

O número complexo $(0, 1)$, representa-se usualmente por i e designa-se por ***unidade imaginária***. Todo o complexo $z = (x, y)$, pode agora escrever-se como

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) . (y, 0) = \\ &= x + iy, \quad x, y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

É imediato verificar que

$$i^2 = (0, 1) . (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

e logo, a equação algébrica (1) admite solução (o número i) no campo complexo. Os complexos da forma $(0,x) = ix$, $(x \in \mathbf{R})$, dizem-se ***imaginários puros*** e estão representados geometricamente no eixo cartesiano vertical; os números reais, $x = (x, 0)$, estão naturalmente representados no eixo cartesiano horizontal, chamado ***eixo real***. (cf. Fig. 1.8).

Dado o número complexo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$, o número x designa-se por *parte real de* z e y por *parte imaginária* e representam-se por $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$. Dados dois números complexos, z_1 e z_2, tem-se então

$$z_1 = z_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ e } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$$

Geometricamente, os números complexos podem ser representados no plano cartesiano, como elementos de $\mathbf{R}^2$. A adição de complexos não é mais do que a soma dos correspondentes vetores, elementos de $\mathbf{R}^2$. Adiante veremos uma interpretação geométrica simples da multiplicação e divisão.

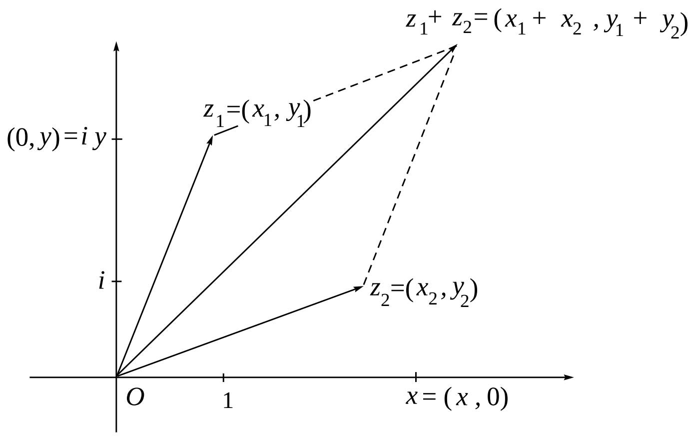


Figura 1.8

1.5.4. Complexo conjugado. Valor absoluto.

A todo o número complexo $z = (x, y) = x + iy$ associamos o complexo $\overline{z} = x - iy$, chamado ***complexo conjugado*** de z. Geometricamente, o complexo $z = (x, y)$ e o seu complexo conjugado $\overline{z} = (x, -y)$ representam-se simetricamente em relação ao eixo real. Consequência imediata das definições é a seguinte

1.5.5. Proposição. *Para todo* $z \in \mathbf{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$; $z + \overline{z}$ *é real e* $z - \overline{z}$ *é imaginário puro. Mais precisamente,*

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z, \qquad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z.$$

Para quaisquer $z_1, \ z_2 \in \mathbf{C}$, *tem-se ainda*

a) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} \, . \, \overline{z_2}$.

b) $\overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$ *se* $z_1 \neq 0$.

c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

1.5.6. Definição. *Define-se* ***valor absoluto*** *ou* ***módulo*** *do número complexo* $z = x + iy \in \mathbf{C}$, *como o número real*

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observação. Repare-se que o valor absoluto do complexo $z = x + iy$ não é mais do que a norma cartesiana do vetor (x, y) em $\mathbf{R}^2$.

É imediato verificar que $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \, . \, \overline{z}}$. Vemos ainda que

$$|\mathrm{Re}\, z| = |x| \leq |z|; \qquad |\mathrm{Im}\, z| = |y| \leq |z|.$$

1.5.7. Proposição. *Para quaisquer* $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, *tem-se*

a) $|z| = 0 \iff z = 0$.

b) $|z_1 . z_2| = |z_1| \, |z_2|$.

c) $\left|\dfrac{1}{z_1}\right| = \dfrac{1}{|z_1|}$ *se* $z_1 \neq 0$.

d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Demonstração. Mostremos *d*) a título de exemplo, deixando a demonstração das outras alíneas como exercício. Com efeito,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \, . \, \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \, . \, \overline{z_2} + z_2 \, . \, \overline{z_1}. \end{aligned}$$

Mas, $z_1 \, . \, \overline{z_2} + z_2 \, . \, \overline{z_1} = 2 \, \mathrm{Re} \, (z_1 \, . \, \overline{z_2}) \leq 2 \, |z_1| . |z_2|$, donde

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2. \quad \blacksquare$$

Observação. Repare-se que a divisão entre os complexos z_1 e z_2, $z_2 \neq 0$, vem dada por

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \, . \, \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

1.5.8. Forma trigonométrica dos números complexos.

Seja $z = x + iy \in \mathbf{C}$.

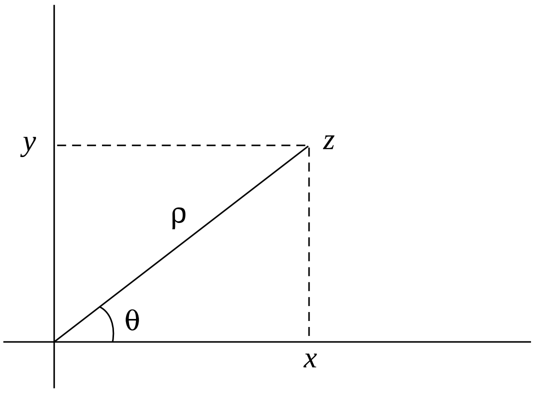


Figura 1.9

Motivados pela representação geométrica, introduzam-se as coordenadas polares : $x = \rho\,\cos\theta,\ y = \rho\,\sin\theta$, com $(\rho,\theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ $(*)$. A cada $(\rho,\theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, associe-se o número complexo

$$z = x + iy = \rho\,\cos\theta + i\,\rho\,\sin\theta = \rho\,e^{i\,\theta}$$

em que $e^{i\,\theta}$ representa o número complexo $\cos\theta + i\,\sin\theta$. Fica definida uma aplicação

$$(\rho,\theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \longrightarrow z = \rho\,e^{i\,\theta} \in \mathbf{C}$$

cuja imagem é $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Com efeito, dado $z = x + iy$, não nulo, procuremos $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbf{R}$ tal que $z = x + iy = \rho\,\cos\theta + i\,\rho\,\sin\theta$. Então

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2$$

e logo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, fica bem definido. Por outro lado, θ deve satisfazer as equações

$$\begin{cases} x = |z|\,\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}\,\cos\theta \\ y = |z|\,\sin\theta = \sqrt{x^2+y^2}\,\sin\theta \end{cases} \tag{2}$$

Ora, há uma infinidade de valores de θ que satisfazem (2), mais precisamente, $\theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, em que $-\pi < \theta_0 \le \pi$, é a solução particular de (2) tal que

$$\begin{array}{rl} \tan\theta_0 = y/x, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ \theta_0 = \pi/2, & \text{se} \quad x = 0,\ y > 0, \\ \theta_0 = -\pi/2, & \text{se} \quad x = 0,\ y < 0. \end{array}$$

$(*)$ Usamos a notação $\mathbf{R}^+$ para designar os reais positivos : $\mathbf{R}^+ =]0,+\infty[$.

1.5.9. Definição. *Seja $z = x + iy$ um complexo não nulo. O único real θ_0 que satisfaz*

$$x = |z| \cos\theta_0, \quad y = |z| \sin\theta_0, \quad -\pi < \theta_0 \leq \pi$$

chama-se ***argumento principal de*** *z e nota-se $\theta_0 = \operatorname{Arg} z$.*

O número real $\theta = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ diz-se um argumento de z e tem-se $z = |z|\, e^{i\,\theta}$.

Observação. Repare-se que

$$\left|e^{i\,\theta}\right| = |\cos\theta + i\,\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$$

A proposição seguinte dá-nos ideia da utilidade da representação trigonométrica, $z = \rho\, e^{i\,\theta}$.

1.5.10. Proposição. *Sejam $z = \rho\, e^{i\,\theta}$, $z_1 = \rho_1\, e^{i\,\theta_1}$, $z_2 = \rho_2\, e^{i\,\theta_2}$, números complexos. Então*

a) $\left(\rho_1\, e^{i\,\theta_1}\right) . \left(\rho_2\, e^{i\,\theta_2}\right) = \rho_1\rho_2\, e^{i\,(\theta_1+\theta_2)}$

b) $\left(\rho\, e^{i\,\theta}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\rho\, e^{i\,\theta}} = \dfrac{1}{\rho}\, e^{-i\,\theta} \quad (\rho \neq 0)$

c) $\dfrac{\rho_1\, e^{i\,\theta_1}}{\rho_2\, e^{i\,\theta_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i\,(\theta_1-\theta_2)} \quad (\rho_2 \neq 0).$

Demonstração. Mostremos apenas a alínea *a*). Multiplicando os números complexos do primeiro membro, e usando as conhecidas fórmulas trigonométricas, tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\rho_1\, e^{i\,\theta_1}\right). \left(\rho_2\, e^{i\,\theta_2}\right) &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) . (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\
&=\rho_1\rho_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\,(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right] \\
&=\rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)\right] = \rho_1\rho_2\, e^{i\,(\theta_1+\theta_2)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolário. *Dados os números complexos $z_1 = \rho_1\, e^{i\,\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2\, e^{i\,\theta_2}$, não nulos, tem-se*

$$\rho_1\, e^{i\,\theta_1} = \rho_2\, e^{i\,\theta_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2 \;\text{ e }\; \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,$$

para algum $k \in \mathbf{Z}$.

Demonstração. Com efeito,

$$z_1 = z_2 \quad \Longrightarrow \quad |z_1| = \rho_1 = |z_2| = \rho_2.$$

Em consequência,

$$\frac{e^{i\,\theta_1}}{e^{i\,\theta_2}} = e^{i\,(\theta_1-\theta_2)} = 1,$$

ou seja $\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\sin(\theta_1 - \theta_2) = 1$, e logo $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbf{Z}$. ∎

A formulação trigonométrica dos números complexos permite uma interpretação geométrica simples da multiplicação e da divisão em $\mathbf{C}$. Assim, para multiplicar complexos, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos; para dividir complexos, dividem-se os módulos e subtraem-se os argumentos.

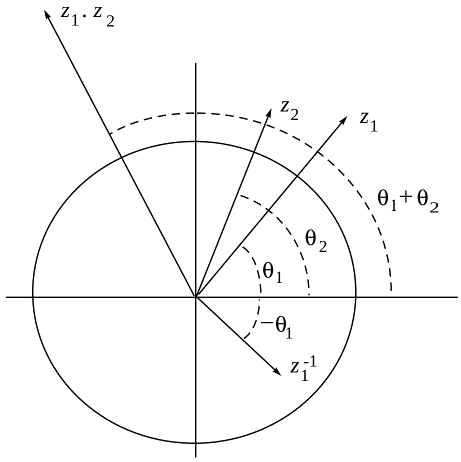


Figura 1.10

Multiplicando sucessivamente (n vezes) o complexo $z = \rho\, e^{i\,\theta}$ por si próprio, e fazendo o mesmo com $z^{-1} = (1/\rho)\, e^{-i\,\theta}$, obtemos a importante ***Fórmula de Moivre.*** :

1.5.11. Teorema. *Se* $z = \rho\, e^{i\,\theta} = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, *então*

$$z^n = \rho^n\, e^{i\,n\,\theta} = \rho^n\,(\cos n\theta + i\,\sin n\theta), \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

(para $n < 0$ *dever-se-á supor* $z \neq 0$*).*

Seja agora $w = \rho\, e^{i\,\theta} \in \mathbf{C}$ um número complexo e $n \in \mathbf{N}$ um inteiro positivo. Procuremos resolver a equação

$$z^n = w, \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{3}$$

As soluções dizem-se as ***raízes enésimas de*** w.

Escreva-se então $z = r\,(\cos\alpha + i\,\sin\alpha)$. Pela fórmula de Moivre, vem

$$z^n = r^n\,(\cos n\alpha + i\,\sin n\alpha) = w = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

e logo, $r^n = \rho \implies r = \sqrt[n]{\rho}$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ (cf. (1.5.10.), Corolário). Em conclusão, tem-se

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \tag{4}$$

e obtemos n soluções de (3) para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (repare-se que qualquer outro valor inteiro de k apenas repete os valores já obtidos).

1.5.12. Exemplos.

1. Determinemos as raízes sextas de 1 : $\sqrt[6]{1}$.

Neste caso, $1 = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, $\rho = 1$, $\theta = 0$. Fazendo $k = 0, 1, \ldots, 5$, na fórmula (4), obtemos as seis raízes da unidade :

$z_1 = e^0 = 1, \quad z_2 = e^{i\,\pi/3}$

$z_3 = e^{i\,2\pi/3}, \quad z_4 = e^{i\pi}$

$z_5 = e^{i\,4\pi/3}, \quad z_6 = e^{i5\pi/3}$

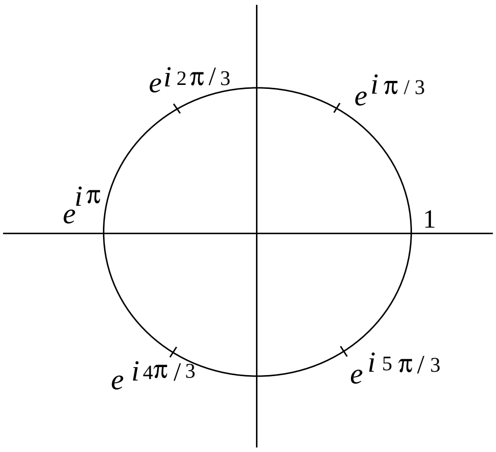


Figura 1.11

2. Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são dois complexos, $|z_1 - z_2|$ representa a distância euclidiana entre eles (considerados como pontos de $\mathbf{R}^2$). Com efeito

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

A representação complexa é por vezes útil na determinação de figuras geométricas do plano; por entre as mais simples, a circunferência de centro $P_0 = (x_0, y_0)$ e raio $R > 0$, sendo o conjunto de pontos que dista R do ponto P_0, vem representada por

$$\{z : |z - z_0| = R\} \tag{5}$$

Fazendo $z = x + iy$, o leitor facilmente obtém a equação analítica $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, equivalente a (5).
Dados $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ em $\mathbf{C}$, o conjunto dos $z \in \mathbf{C}$ tais que

$$|z - z_1| = |z - z_2| \tag{6}$$

representa claramente uma reta (a reta equidistante de z_1 e z_2). De novo se obtém a equação analítica da reta, desenvolvendo (6), com $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$.

Exercícios

1. Seja a um número racional diferente de zero e x um número irracional. Mostre que ax e $a + x$ são irracionais. Dê um exemplo de dois irracionais x e y tais que xy e $x + y$ sejam racionais.

2. Sejam a e b números racionais positivos. Prove que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se e só se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ forem ambos racionais.

3 Mostre que entre dois números reais existe sempre um irracional.

4 Seja $\mathbf{K}$ um corpo comutativo totalmente ordenado ($\mathbf{K}$ satisfaz o conjunto de axiomas **A1** e **A2**, tendo-se a natural inclusão $\mathbf{N} \subset \mathbf{K}$).

a) Mostre que são equivalentes a seguintes asserções:

i) $\mathbf{K}$ é arquimediano

ii) $\mathbf{N} \subset \mathbf{K}$ não é majorado.

b) Um corpo totalmente ordenado $\mathbf{K}$ diz-se ***completo***, se satisfaz o princípio do supremo, isto é, todo o subconjunto não vazio e majorado, $A \subset \mathbf{K}$, admite supremo.
Mostre que $\mathbf{K}$ é completo se e só se satisfaz os axiomas dos reais, **A1**, **A2**, **A3** e **A4** (corpo totalmente ordenado, arquimediano e satisfazendo o axioma do encaixe).

5. Seja $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, um polinómio com coeficientes *inteiros.*

a) Se um número racional p/q, com p e q primos entre si, é raiz de P, $P(p/q) = 0$, prove que p divide a_0 e q divide a_n.

b) Conclua que, quando $a_n = 1$, as raízes de P são inteiras ou irracionais. Em particular, considerando $x^n - a = 0$, $a > 0$, conclua que $\sqrt[n]{a}$ ou é um número inteiro ou irracional

c) Mostre que $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ é irracional.

6. Sejam $a, b, c,$ e d números racionais. Mostre que

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d$$

7. Mostre que, se a e $a + x$ são reais positivos, então

$$(a + x)^n \geq a^n + na^{n-1}x, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

8. Exprima os conjuntos seguintes como reunião de intervalos:
a) $\{x \in \mathbf{R} : | x - 2 | + | x + 3 | < 8\}$
b) $\{x \in \mathbf{R} : | x^2 - 2 | \leq 1\}$
c) $\{x \in \mathbf{R} : | 2x + 1 | \leq 1\}$
d) $\{x \in \mathbf{R} : | x - 5 | < | x + 1 |\}$
e) $\{x \in \mathbf{R} : (2x + 3)^6(x - 2) \geq 0\}$

9. Prove que, $\forall x \in \mathbf{R}$, se tem:

i) $| x - 1 | + | x - 2 | \geq 1$

ii) $| x - 1 | + | x - 2 | + | x - 3 | \geq 2$

10. Mostre que se tem, $\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$,

i) $| x_1 + \cdots + x_n | \leq | x_1 | + \cdots + | x_n |$

ii) $| x_1 \cdots x_n | = | x_1 | \cdots | x_n |$.

11. Dados $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ e $n \in \mathbf{N}$, prove que $(1 + x)^{2n} > 1 + 2nx$.

12. Sejam $x \in \mathbf{R}, x < 1$ e $n \in \mathbf{N}$; mostre que $(1 - x)^n \geq 1 - nx$.

13. Prove que, para todos os reais a e b que satisfazem $a^2 + b^2 = 1$, se tem $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

14. Mostre que para todos os reais $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, que satisfazem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 1,$$

se tem $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq 1.$

15. Prove a desigualdade: $xy \leq \dfrac{1}{\alpha}\, x^2 + \dfrac{\alpha}{4}\, y^2, \quad \forall x, y \in \mathbf{R},\ \alpha > 0.$

16. Dados dois reais positivos, $a, b > 0$, chama-se *média harmónica* ao real α tal que

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Mostre que a média harmónica é inferior ou igual à média geométrica: $\alpha \leq \sqrt{a\,b}$
Em que condições se tem a igualdade?

17. Utilize a indução finita para mostrar a fórmula do ***Binómio de Newton***

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots \binom{n}{n-1} a\,b^{n-1} + b^n,$$

$a, b \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}$, e em que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1.2\cdots p}, \quad 0 \leq p \leq n,\ (0! = 1).$$

18. Diga se existe uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ que verifique $f(x^2) = 1 + x,\ \forall x \in \mathbf{R}$. E existe $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x^3) = 1 + x,\ \forall x \in \mathbf{R}$?

19. Defina funções f e g que satisfaçam

$$a)\quad f(x^2) = 1 - |x|^3,\ \forall x \in \mathbf{R}; \qquad b)\quad g(1/x) = x^2 + 1,\ x \neq 0$$

20. Determine as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ em que

a) $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

b) $f, g : [-1, 1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

c) $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x^5,\ g(x) = x + 5$.

21. Enuncie e demonstre a associatividade

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

22. Seja $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Determine o maior domínio de f que permite definir $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n vezes); calcule a composição.

23. Determine para que valores de a e b reais, a função $f(x) = ax+b,\ x \in \mathbf{R}$, tem inversa e $f^{-1} \equiv f$.

24. Demonstre que a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2+1}}$$

tem inversa e determine-a.

25. Diga quais das seguintes funções são invertíveis e determine as inversas:

a) $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = 1 + \sqrt{x}$

b) $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{x}{x+1}.$

26. Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função não negativa $(f(x) \geq 0,\ \forall x \in D)$. Mostre que

$$\sup(f^2) = (\sup f)^2$$

($\sup f$ é evidentemente $\sup_D f$, tomado em $\overline{\mathbf{R}}$).

27. Recorde que $\mathbf{R}$ é um corpo arquimediano e considere a aplicação $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ dada por $f(n) = a^n$ com $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$. Mostre que:

a) $f(\mathbf{Z})$ não é majorado.

b) $\inf f(\mathbf{Z}) = 0$

28. Sejam $f, g : D \to \mathbf{R}$. Como é sabido

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g \text{ e } \inf(f+g) \geq \inf f + \inf g.$$

Dê exemplos em que:

a) $\sup(f+g) = \sup f + \sup g$
b) $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$
c) $\inf(f+g) = \inf f + \inf g$
d) $\inf(f+g) > \inf f + \inf g$

29. Sejam $A \subset B \subset \mathbf{R}$ dois subconjuntos de $\mathbf{R}$ não vazios. Suponha que B é majorado e que, para cada $x \in B$, existe um $y \in A$ tal que $x \leq y$. Prove então que, $\sup A = \sup B$.

30. Sejam A e B dois conjuntos não vazios e limitados de números reais.

a) Mostre que $A \cup B$ é limitado e além disso tem-se:

$$\begin{aligned} \sup(A \cup B) &= \max\{\sup A, \sup B\}, \\ \inf(A \cup B) &= \min\{\inf A, \inf B\}. \end{aligned}$$

b) Prove que $A \cap B$ é limitado e:

$$\begin{aligned} \sup\{\inf A, \inf B\} &\leq \inf(A \cap B) \leq \\ &\leq \sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup A, \sup B\}. \end{aligned}$$

Dê um exemplo em que as desigualdades são estritas.

31. Sejam A e B dois conjuntos não vazios de números reais; defina o conjunto

$$C = \{z : z = x + y, \quad x \in A,\, y \in B\}$$

a) Mostre que $\sup C = \sup A + \sup B$.

b) Estabeleça um resultado análogo para o conjunto $D = AB$ dos produtos de um elemento de A por um elemento de B.

32. Sejam $D, E \subset \mathbf{R}$ subconjuntos não vazios de $\mathbf{R}$ e considere-se a aplicação $f : D \times E \to \mathbf{R}$, $(x, y) \in D \times E \to f(x, y) \in \mathbf{R}$.
Para cada $x_0 \in D$ e $y_0 \in E$, ponha-se

$$s_1(x_0) = \sup\{f(x_0, y) : y \in E\},\ s_2(y_0) = \sup\{f(x, y_0) : x \in D\}.$$

Isto define duas aplicações: $s_1 : D \to \mathbf{R}$ e $s_2 : E \to \mathbf{R}$;
Mostre que se tem $\sup\limits_{x \in D} s_1(x) = \sup\limits_{y \in E} s_2(y)$. Isto é:

$$\sup_{x \in D}\left(\sup_{y \in E} f(x, y)\right) = \sup_{y \in E}\left(\sup_{x \in D} f(x, y)\right)$$

33. Enuncie e demonstre um resultado análogo para o inf ; mostre, em seguida, que:

$$\sup_{y}\left(\inf_{x} f(x, y)\right) \leq \inf_{x}\left(\sup_{y} f(x, y)\right)$$

Dê um exemplo em que se tenha a desigualdade estrita.

34. Calcule as partes real e imaginária dos seguintes números complexos

$$a)\quad \frac{1}{z^2}; \qquad b)\quad \frac{z-1}{z+1}; \qquad c)\quad z^3;$$

em que $z = x + iy$.

35. Mostre que

$$\mathrm{Re}\,(iz) = -\mathrm{Im}\,(z) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\,(iz) = \mathrm{Re}\,(z), \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

36. Calcule $\sqrt{\sqrt{-i}}$, sem recorrer à fórmula de Moivre. Utilize em seguida a referida fórmula e obtenha o mesmo resultado.

37. Tenha presente os axiomas de corpo ordenado (cf. axiomas dos reais). Mostre que o corpo $\mathbf{C}$ dos números complexos não pode ser totalmente ordenado.

Sug. Prove que $i \geq 0$ *(ou* $i \leq 0$*) conduz a contradição.*

38. Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ um polinómio em $z \in \mathbf{C}$ com coeficientes reais, $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbf{R}$. Mostre que

$$P(z_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(\overline{z_0}) = 0,$$

isto é, z_0 é raiz de $P(z)$ se e só se $\overline{z_0}$ o for.

39. Utilize a Fórmula de Moivre para demonstrar as seguintes igualdades trigonométricas :

$$\begin{aligned} i)&\quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta \\ ii)&\quad \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta \end{aligned}$$

40. Calcule o supremo do seguinte conjunto de números reais

$$\{\mathrm{Re}\,(iz^3 + 2) : |z| \leq 2\}.$$

41. Considere as n raízes da unidade

$$\alpha_n = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Mostre que as raízes diferentes de 1 ($n-1$ raízes), satisfazem a equação

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

42. Determine as raízes da equação

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0.$$

43. Tendo presente que $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z^2|}$, dê uma interpretação geométrica de z^{-1}. Interprete geometricamente a divisão de complexos, z_1/z_2.

44. Descreva os conjuntos de complexos que satisfazem as seguintes condições

a) $|z-i| < |z+i|$; *b*) $z + \overline{z} = 1$; *c*) $|z-1| + |z+1| = 4$.

45. Determine o conjunto de pontos de **C** da forma

$$\{z^2 : \operatorname{Im} z = 1\}$$

isto é, a imagem pela aplicação $z \to z^2$ da reta $\operatorname{Im} z = 1$.

46. Mostre que o ponto $(z-1)/(z+1)$ pertence ao eixo imaginário se e só se z pertence à circunferência de raio 1 e centro na origem.

2

Sucessões e Séries Reais

2.1. Sucessões convergentes. Sucessões de Cauchy.

Como é já conhecido da análise elementar, uma ***sucessão*** em $\mathbf{R}$ ou ***sucessão real*** é uma aplicação

$$\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N} \longrightarrow \varphi(n) \equiv x_n \in \mathbf{R},$$

usualmente representada por (x_n); x_n é o elemento da sucessão de ordem n e o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_n\}$ diz-se o conjunto dos termos da sucessão. As operações algébricas nas sucessões são naturalmente as que resultam definidas no conjunto das aplicações de $\mathbf{N}$ em $\mathbf{R}$ (cf. (1.4.2.)). Assim, soma, produto e cociente das sucessões (x_n) e (y_n) são definidas como:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n), \\ (x_n).(y_n) &= (x_n.y_n), \\ \frac{(x_n)}{(y_n)} &= \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \quad (\text{se}\, y_n \neq 0). \end{aligned}$$

Um dos conceitos fundamentais de toda a Análise Matemática é o conceito de limite, adiante definido. Trata-se de um caso particular da noção, mais geral, de limite de uma função real de variável real. No capítulo seguinte, teremos ocasião de desenvolver este conceito.

2.1.1. Definição. *Seja (x_n) uma sucessão em* $\mathbf{R}$. *Diz-se que a sucessão (x_n) é* ***convergente*** *para um elemento $a \in \mathbf{R}$, ou que o* ***limite da sucessão*** *(x_n) é $a \in \mathbf{R}$ e escreve-se $\lim x_n = a$ ou $x_n \to a$, se para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que*

$$x_n \in]a-\delta, a+\delta[\quad \textit{para todo} \quad n > n_0.$$

Uma sucessão (x_n) que não é convergente diz-se ***divergente***.

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ se e só se

$$\forall \delta > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N} : n > n_0 \Longrightarrow | x_n - a | < \delta;$$

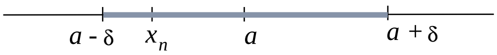


Figura 2.1

isto é, por mais pequeno que seja $\delta > 0$ (e portanto a amplitude do intervalo $]a-\delta, a+\delta[$) *todos* os termos da sucessão "caem" dentro desse intervalo a partir de certa ordem. É consequência imediata da definição que

$$\lim x_n = a \quad \text{se e só se} \quad \lim(x_n - a) = 0.$$

2.1.2. Proposição (*Unicidade do limite*). *O limite a de uma sucessão (x_n) convergente é único.*

Demonstração. Com efeito, suponha-se também que $\lim x_n = b$ e $b \neq a$. Dado $\delta > 0$ qualquer, vem

$$| x_n - a | < \delta/2 \quad \text{para} \quad n > n_0 \in \mathbf{N}$$

e

$$| x_n - b | < \delta/2 \quad \text{para} \quad n > n_1 \in \mathbf{N}.$$

Mas então, tomando $N = \max\{n_0, n_1\}$, tem-se para $n > N$ e para todo o $\delta > 0$,

$$| a - b | = | a - x_n + x_n - b | \leq | a - x_n | + | b - x_n | < \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

o que é absurdo, já que $a \neq b$. ■

2.1.3. Proposição. *Toda a sucessão (x_n) convergente é* ***limitada****, isto é, o conjunto dos termos da sucessão, $\{x_n\}$, é limitado.*

Demonstração Admitamos que $x_n \to a \in \mathbf{R}$. Tomando $\delta > 0$, resulta da definição de limite que $x_n \in]a-\delta, a+\delta[,\ \forall n > n_0$, e portanto o conjunto

$\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\} \subset]a-\delta, a+\delta[$ é limitado; como apenas restam um número finito de termos, vem necessariamente

$$| x_n | \leq C, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

em que $C = \max\{| x_1 |, \ldots, | x_{n_0} |, | a-\delta |, | a+\delta |\}$. ■

É natural estender a noção de limite de uma sucessão a $\overline{\mathbf{R}}$. Assim,

2.1.4. Definição. *Diz-se que a sucessão* (x_n) *tem* ***limite*** $+\infty$ *se para todo o* $\delta > 0$, *existe uma ordem* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow x_n > \frac{1}{\delta}.$$

Analogamente, a sucessão (x_n) *tem limite* $-\infty$ (*) *se para todo o* $\delta > 0$, *existe uma ordem* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow x_n < -\frac{1}{\delta}.$$

É claro ainda da definição e do que atrás ficou dito, que o limite de uma sucessão (x_n) em $\overline{\mathbf{R}}$, se existe, é único; assinale-se, contudo, que uma sucessão (x_n) pode não admitir limite em $\overline{\mathbf{R}}$ (veremos alguns exemplos posteriormente).

Uma classe particularmente importante de sucessões reais são as sucessões monótonas.

2.1.5. Definição. *Uma sucessão* (x_n) *diz-se* ***monótona crescente*** *(respetivamente,* ***monótona decrescente****) se*

$$x_n \leq x_{n+1},\ \forall n \in \mathbf{N} \quad (\textit{resp.} \quad x_n \geq x_{n+1},\ \forall n \in \mathbf{N}).$$

A sucessão diz-se ***monótona*** *se for monótona crescente ou monótona decrescente.*

A proposição seguinte clarifica a importância destas sucessões.

2.1.6. Proposição. *Toda a sucessão monótona limitada é convergente. Mais precisamente,*

sucessão monótona crescente e majorada (portanto limitada) é convergente ;

sucessão monótona decrescente e minorada (portanto limitada)é convergente.

(*) Não se diz que (x_n) é convergente para $+\infty$ ou $-\infty$ mas sim que (x_n) tem limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sucessão crescente e limitada. O princípio do supremo garante a existência de $a = \sup\{x_n\}$. Tomando $\delta > 0$ qualquer, da definição de supremo resulta que existe um termo da sucessão, x_{n_0}, tal que $a - \delta < x_{n_0} \leq a$. Mas sendo (x_n) crescente, vem:

$$a - \delta < x_{n_0} \leq x_n \leq a, \quad \forall n \geq n_0,$$

o que mostra que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Do mesmo modo, se (x_n) é uma sucessão decrescente e minorada, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b = \inf\{x_n\}$. ∎

Corolário. *Toda a sucessão monótona tem limite em $\overline{\mathbf{R}}$. Em particular,*

sucessão monótona crescente não limitada tem limite $+\infty$
sucessão monótona decrescente não limitada tem limite $-\infty$.

Demonstração. Se (x_n) é crescente e não limitada, dado $\delta > 0$ existe um $x_{n_0} > 1/\delta$ e logo $x_n \geq x_{n_0} > 1/\delta$, $\forall n > n_0$, isto é, $x_n \to +\infty$. Do mesmo modo se vê que $x_n \to -\infty$, se (x_n) é monótona decrescente. ∎

2.1.7. Propriedades algébricas dos limites.

Os resultados seguintes, para além do interesse teórico, têm um valor essencialmente prático.

2.1.8. Proposição. *Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões com limite em $\overline{\mathbf{R}}$. Então:*

1. $\lim x_n = 0 \Longleftrightarrow \lim \mid x_n \mid = 0; \quad \lim x_n = a \Longrightarrow \lim \mid x_n \mid = \mid a \mid$;
2. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é sucessão limitada, então* $\lim x_n . y_n = 0$;
3. $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$; $\lim(kx_n) = k \lim x_n$, $(k \in \mathbf{R})$;
4. $\lim(x_n . y_n) = \lim x_n . \lim y_n$;
5. $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$, *se* $\lim y_n \neq 0$;
6. $x_n \geq 0,\ (n \geq p) \Longrightarrow \lim x_n \geq 0$;

   $x_n \leq y_n\ (n \geq p) \Longrightarrow \lim x_n \leq \lim y_n$.

sempre que as operações do segundo membro façam sentido (em $\overline{\mathbf{R}}$).

Demonstração. Escreva-se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$. Faremos a demonstração no caso real, $a, b \in \mathbf{R}$, deixando como exercício o caso dos limites infinitos.

A primeira parte de 1. é consequência imediata da definição e a segunda sai da já conhecida desigualdade $\mid\mid x_n \mid - \mid a \mid\mid \leq \mid x_n - a \mid$.

2. Sendo (y_n) limitada, existe $C > 0$ tal que $\mid y_n \mid \leq C$, para todo o n; tomando agora um qualquer $\delta > 0$, como $x_n \to 0$, tem-se $\mid x_n \mid \leq \delta/C$ a partir de certa ordem, $n > n_0$, e logo

$$\mid x_n y_n \mid \leq C.\delta/C = \delta, \ (n > n_0).$$

3. Dado $\delta > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ tais que

$$n > n_1 \Longrightarrow \mid x_n - a \mid < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad n > n_2 \Longrightarrow \mid y_n - b \mid < \frac{\delta}{2}.$$

Se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e $n > n_0$, tem-se naturalmente

$$\mid (x_n + y_n) - (a + b) \mid = \mid (x_n - a) + (y_n - b) \mid \leq \mid x_n - a \mid + \mid y_n - b \mid < \delta,$$

o que mostra que $\lim(x_n + y_n) = a + b$. A segunda parte de 3. é um caso particular de 4.

4. Observemos que

$$(x_n y_n - ab) = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b.$$

Mas (x_n) é uma sucessão limitada e $\lim{(y_n - b)} = 0$; então de 2., vem $\lim[x_n(y_n - b)] = 0$. Do mesmo modo se tem $\lim[(x_n - a)b] = 0$. Utilizando 3. resulta agora:

$$\lim{(x_n y_n - ab)} = \lim{[x_n(y_n - b)]} + \lim{[(x_n - a)b]} = 0,$$

pelo que $\lim x_n y_n = ab$.

5. Notemos desde logo que $y_n b \to b^2 > 0$ (por hipótese, $b \neq 0$), e portanto, escolhendo δ suficientemente pequeno, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow y_n b > b^2 - \delta > 0$. Assim, para $n > n_0$ tem-se $0 < \dfrac{1}{y_n b} < \dfrac{1}{b^2 - \delta}$ e logo a sucessão $\left(\dfrac{1}{y_n b}\right)$ é limitada. Como se tem

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{b x_n - a y_n}{y_n b} = (b x_n - a y_n)\frac{1}{y_n b},$$

e como $\lim{(b x_n - a y_n)} = ba - ab = 0$, segue-se que

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0, \quad \text{donde} \quad \lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

6. Supondo $\lim x_n = a < 0$, é possível escolher um $\delta > 0$ tal que $a + \delta < 0$ (por ex. $\delta = -a/2$). Mas então existe um $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow a - \delta < x_n < a + \delta < 0$, o que contradiz a hipótese de $x_n \geq 0$ para $n \geq p$. Assim, se $x_n \geq 0$, $(n \geq p)$ tem-se $\lim x_n \geq 0$. A última parte de 6. resulta agora trivialmente de 3. ∎

2.1.9. Proposição (*sucessões enquadradas*). Sejam $(x_n), (y_n)$ e (z_n) sucessões tais que $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo o $n \geq p$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ então $\lim z_n = a$.

Demonstração. Dado $\delta > 0$ qualquer, existem $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ tais que

$$n > n_1 \Longrightarrow x_n \in]a-\delta, a+\delta[\quad \text{e} \quad n > n_2 \Longrightarrow y_n \in]a-\delta, a+\delta[.$$

Pondo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tem-se claramente para $n > n_0$:

$$a - \delta < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \delta,$$

pelo que $\lim z_n = a$. ■

2.1.10. Exemplos.

1. A sucessão $x_n = \dfrac{1}{n}$ é decrescente: $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$ e converge para 0:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \delta \quad \text{para} \quad n > n_0 \geq \frac{1}{\delta}$$

2. Já a sucessão $x_n = 2 + (-1)^n$, *não é convergente.* Basta observar que para todo o $n \in \mathbf{N}$, $|\ x_n - x_{n+1}\ | = 2$ e logo, tomando um qualquer $\delta < 1$, não existe uma ordem a partir da qual os termos da sucessão estejam no intervalo $]a-\delta, a+\delta[$.

3. Seja $a \in \mathbf{R}$ um real e considere-se a sucessão $x_n = a^n$.

a) Se $a = 0$ ou $a = 1$, a sucessão é constante e naturalmente convergente para 0 ou 1, respetivamente.

b) Se $a > 1$, a sucessão é claramente monótona crescente; escrevendo $a = 1 + h, h > 0$, resulta da conhecida desigualdade de Bernoulli (cf. (1.3.5.)) que

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \longrightarrow +\infty$$

e pelas sucessões enquadradas conclui-se que $\lim a^n = +\infty$.

c) Considerando $0 < a < 1$, a sucessão é agora decrescente; como $\dfrac{1}{a} > 1$, tem-se, pelo que atrás se disse,

$$\lim \frac{1}{a^n} = \lim \left(\frac{1}{a}\right)^n = +\infty$$

e portanto

$$\lim a^n = \frac{1}{\lim \left(\frac{1}{a}\right)^n} = 0.$$

d) Sendo agora $-1 < a < 0$, reconhece-se imediatamente que (a^n) não é monótona (os termos de ordem par sendo positivos e os de ordem ímpar negativos). Contudo, porque $\mid a^n \mid = \mid a \mid^n$ com $0 <\mid a \mid< 1$, resulta que $\lim \mid a^n \mid = \lim \mid a \mid^n = 0$ e portanto $\lim a^n = 0$ (cf. (2.1.8.), (1.)).

e) Enfim, se $a < -1$, a sucessão tem de novo termos alternadamente positivos e negativos; tal como em b), a^n é ilimitada: $\mid a^n \mid = \mid a \mid^n$ com $\mid a \mid> 1$, o que nos leva a concluir que a sucessão, neste caso, não é monótona nem admite limite em $\overline{\mathbf{R}}$.

4. Seja $x_n \neq 0$ a partir de certa ordem. Existindo $n_0 \in \mathbf{N}$ e $c \in \mathbf{R}$ tais que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq c < 1, \quad n > n_0,$$

então $\lim x_n = 0$. Tendo-se,

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq c > 1, \quad n > n_0,$$

então $\lim |x_n| = +\infty$. Com efeito, no primeiro caso, a sucessão $|x_n|$ é estritamente decrescente e portanto convergente já que, $0 \leq |x_{n+1}| \leq c|x_n| < |x_n|$; pondo $a = \lim |x_n|$, vem então $0 \leq a \leq c.a$ o que implica que $a = \lim |x_n| = 0$ (se fosse $a > 0$ vinha $c \geq 1$, negando a hipótese) e logo $\lim x_n = 0$. Analogamente se conclui no segundo caso. Como aplicação imediata, resulta que

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbf{R}); \qquad \lim \frac{n^p}{n!} = 0 \quad (p \in \mathbf{N}).$$

5. Dado $a \in \mathbf{R}$, com $-1 < a < 1$, considere-se a sucessão $x_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $a \neq 1$. Se $0 \leq a < 1$, a sucessão é crescente, já que $x_{n+1} = x_n + a^{n+1}$; se $-1 < a < 0$, a sucessão deixa de ser monótona. No entanto, em qualquer dos casos, tem-se:

$$\lim x_n = \lim (1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = \frac{1}{1 - a}.$$

6. É particularmente importante em Análise a sucessão de termo geral

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Trata-se claramente de uma sucessão crescente e além disso limitada, dado que

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1/2} < 3, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

7. Consideremos agora a sucessão de termo geral $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. A fórmula do ***binómio de Newton*** (cf. exercício 17, Cap.1) dá-nos:

$$\begin{aligned} b_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\dots 2.1}{n!}\frac{1}{n^n}, \end{aligned}$$

ou seja

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Desta última representação se vê que b_n é soma de parcelas positivas, cada uma das quais crescente com n. Como o número de parcelas também cresce com n, logo se conclui que (b_n) é sucessão crescente. Constata-se ainda que $b_n < a_n < 3$, em que (a_n) é a sucessão referida no exemplo anterior.
Assim, as duas sucessões consideradas são ambas crescentes e limitadas e portanto convergentes. Como $b_n < a_n$ para todo o n, resulta desde logo que $\lim b_n \leq \lim a_n$. Por outro lado, fixando $p \in \mathbf{N}$, tem-se para todo o $n > p$,

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right).$$

Passando ao limite $n \to \infty$ (e mantendo p fixo) vê-se que o segundo membro da anterior desigualdade converge para a_p. A proposição 2.1.6. garante agora que $\lim b_n \geq a_p$ para todo o $p \in \mathbf{N}$. Passando de novo ao limite, agora em $p \to \infty$, a mesma proposição permite-nos concluir que $\lim b_n \geq \lim a_n$. Logo,

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Mais tarde veremos a importância que este número e, irracional e transcendente(*), desempenha.

(*) Um número $a \in \mathbf{R}$ diz-se *algébrico* se for solução de uma equação algébrica $P_n(x)=0$ em que $P_n(x)$ representa um polinómio de grau n com coeficientes inteiros; diz-se que a é *transcendente* se não for algébrico.

8. Sucessões definidas por recorrência ou *sucessões recorrentes* são frequentes (especialmente em análise numérica). A sua definição assenta no princípio da indução: conhecidos os termos $x_1, \ldots, x_n$ da sucessão, o termo x_{n+1} é expresso em função daqueles. Em particular, uma sucessão recorrente fica definida por

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = f(x_n), \ n \geq 1 \end{cases}$$

em que f é uma dada função e $a \in D(f)$; (naturalmente, a condição $x_n \in D(f)$, deve ser satisfeita para todo o n).
Mas recorrentes são ainda as sucessões:

$$\begin{cases} x_1 = a > 0, \ \ y_1 = b > 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n), \quad y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \end{cases} \tag{1}$$

Vejamos, neste exemplo, o comportamento das sucessões. Repare-se que a fórmula recorrente (1) está bem definida, isto é, $x_n + y_n \neq 0, \ \forall n$. Com efeito, por indução, facilmente se vê que $x_n > 0$ e $y_n > 0, \ \forall n$. De (1) resulta então que

$$x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n, \qquad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}}, \ \forall n \tag{2}$$

e logo

$$x_n y_n = x_1 y_1 = ab, \quad \forall n. \tag{3}$$

Por outro lado, $y_{n+1} \leq x_{n+1}, \ n \geq 1$, dado que

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n + y_n)^2 - 4x_n y_n}{2(x_n + y_n)} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} \geq 0$$

e logo, resulta de (1) que $x_{n+1} \leq x_n, \ n > 1$, é sucessão monótona decrescente e de (2) sai que (y_n) é monótona crescente. Como $y_n \leq x_n, \ n > 1$, conclui-se que $\lim y_n = y \leq x = \lim x_n$. Passando ao limite a primeira fórmula recorrente em (1), obtemos $2x = x + y$ ou seja $x = y = l$ e finalmente de (3) obtemos $l^2 = ab$; assim, $l = \lim x_n = \lim y_n = \sqrt{ab}$.

A definição seguinte tem considerável importância teórica, na medida em que permite estabelecer uma condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão em $\mathbf{R}$.

2.1.11. Definição. *Diz-se que uma sucessão (x_n) em* $\mathbf{R}$ *é uma* ***sucessão de Cauchy*** *se para todo o $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbf{N}$ tal que*

$$| x_{n+k} - x_n | < \delta \text{ para todo } n > p \text{ e todo } k \in \mathbf{N}.$$

A definição precedente é claramente equivalente a esta outra: a sucessão (x_n) é de Cauchy se

$$\forall \delta > 0, \quad \exists p \in \mathbf{N} : | x_m - x_n | < \delta \quad \forall m, n > p.$$

Observação. Da definição de sucessão de Cauchy, resulta imediatamente que a sucessão $u_n = x_{n+k} - x_n$ (fixando $k \in \mathbf{N}$ qualquer) é convergente para 0. Tenha-se, no entanto, o cuidado de ***não cair no erro*** (por vezes frequente) de definir uma sucessão de Cauchy como uma sucessão (x_n) tal que $x_{n+k} - x_n$ converge para 0 ($n \to \infty$), $\forall k \in \mathbf{N}$ (veja-se o próximo exemplo 4.).

2.1.12. Teorema (*Princípio de Cauchy-Bolzano*). *A condição necessária e suficiente para que uma sucessão (x_n) em* $\mathbf{R}$ *seja convergente é que (x_n) seja uma sucessão de Cauchy.*

Demonstração. A condição é necessária: sendo $x_n \to a \in \mathbf{R}$ uma sucessão convergente em $\mathbf{R}$, dado $\delta > 0$, existe um $p \in \mathbf{N}$ tal que $| x_n - a | < \dfrac{\delta}{2}$, $\forall n > p$. Logo,

$$| x_m - x_n | = | x_m - a + a - x_n | \leq | x_m - a | + | x_n - a | < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

para todo $m, n > p$, e portanto (x_n) é de Cauchy.

Condição suficiente: Seja então (x_n) uma sucessão de Cauchy e tomemos $\delta = 1$. Da definição resulta, em particular, que existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $| x_n - x_m | < 1$ para todo $m, n > p$ e logo

$$| x_n | - | x_m | < | x_n - x_m | < 1,$$

o que implica

$$| x_n | < 1 + | x_m | .$$

Fixando $m > p$, vê-se que o conjunto $\{x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots\}$ é limitado e portanto o mesmo sucede ao conjunto $\{x_n\}$ dos termos da sucessão. Para cada $n \in \mathbf{N}$, ponha-se

$$\alpha_n = \inf_{k > n} \{x_k\}, \qquad \beta_n = \sup_{k > n} \{x_k\};$$

($\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{R}$ pelo princípio do supremo e do ínfimo).

É fácil constatar que

$$[\alpha_n, \beta_n] \supset [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}], \quad \forall n.$$

Por outro lado, sendo (x_n) de Cauchy, para cada $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $x_{n_0} - \dfrac{\delta}{2} < x_k < x_{n_0} + \dfrac{\delta}{2}$ para todo $k > n_0$, donde

$$x_{n_0} - \frac{\delta}{2} \leq \alpha_{n_0} \leq \beta_{n_0} \leq x_{n_0} + \frac{\delta}{2}$$

e portanto

$$\beta_n - \alpha_n \leq \beta_{n_0} - \alpha_{n_0} \leq \delta \quad (n > n_0).$$

Daqui resulta que existe um único elemento $a \in \bigcap [\alpha_n, \beta_n]$. Tem-se, finalmente, $[\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}] \subset [a - \delta, a + \delta]$ e é óbvio que para $k > n_0$,

$$x_k \in [\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}] \subset \, [a - \delta, a + \delta]\,,$$

o que mostra que $x_n \to a$. ■

2.1.13. Exemplos.

1. A sucessão $x_n = \dfrac{1}{n}$ é de Cauchy já que,

$$\left| \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \quad \forall k = 1, 2, \ldots,$$

desde que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\delta}{2}$, ou seja $n > n_0 \geq \dfrac{2}{\delta}$.

2 A sucessão

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$$

satisfaz:

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} + \cdots + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2^{n+p}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) = \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} . \frac{1 - 1/2^p}{1 - 1/2} < \frac{1}{2^n} < \delta, \quad \forall p
\end{aligned}$$

desde que $n > n_0 = n_0(\delta)$. A sucessão (x_n) é portanto de Cauchy e logo convergente.

3. Consideremos agora a sucessão dada por recorrência,

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}. \end{cases}$$

Mostre que se tem $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$. Mostre em seguida que x_n é convergente e calcule o seu limite.

Como $x_n \geq 1$, logo se vê pela fórmula de recorrência que $x_{n+1}x_n = x_n + 1 \geq 2$. Então

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|1 + \frac{1}{x_{n+1}} - \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)\right| = \\ &= \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}x_n}\right| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|. \end{aligned}$$

Resulta agora facilmente que, para $n \geq 1$,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_2 - x_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Mostramos finalmente que (x_n) é de Cauchy e logo convergente. Com efeito,

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+p-2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left[1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right], \end{aligned}$$

e tal como no exemplo anterior, conclui-se que $|x_{n+p} - x_n| < (1/2)^{n-2} < \delta$, $\forall p$, desde que $n > n(\delta)$. Logo, (x_n) é de Cauchy e portanto convergente: $\lim x_n = x$. Passando ao limite na fórmula de recorrência, obtemos $x = 1 + 1/x$, pelo que $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$; como $x_n \geq 1$ logo se conclui que $x = \lim x_n = (1 + \sqrt{5})/2$.

4. Considere-se a sucessão

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Verifica-se que

$$| S_{2n} - S_n | = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

o que mostra que (S_n) não é sucessão de Cauchy. No entanto, fixando $k \in \mathbf{N}$ qualquer, a sucessão

$$S_{n+k} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+k}$$

converge evidentemente para 0 quando $n \to \infty$. A sucessão (S_n) não sendo de Cauchy não será convergente. No parágrafo seguinte voltaremos a referir esta sucessão.

2.2. Séries reais. Generalidades e primeiros resultados.

O conceito de série aparece para dar significado matemático à grosseira expressão de "soma infinita" de números reais: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$. O que está subjacente é de novo a noção de limite. Seguidamente apresentaremos as primeiras definições, alguns exemplos e resultados gerais; a questão da convergência e dos seus critérios terá adequado desenvolvimento num futuro capítulo.

2.2.1. Definição. Designa-se por ***série real*** todo o par formado por duas sucessões(*) em $\mathbf{R}$, (u_n) e (S_n), em que

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Os reais $u_0, u_1, \cdots$, chamam-se ***termos da série***, sendo u_n chamado ***termo geral da série***. A sucessão $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ designa-se por ***sucessão associada*** ou ***sucessão das somas parciais***. Correntemente as séries são representadas por

$$\sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \text{ou} \quad \sum u_n.$$

2.2.2. Definição. *A série $\sum u_n$ diz-se **convergente** se a sucessão das somas parciais, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, for convergente; caso contrário a série diz-se **divergente**. Se a série é convergente, o limite*

$$S = \lim S_n = \lim(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$$

*diz-se a **soma** da série e escreve-se*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots.$$

(*) As sucessões poderão ser indiciadas não só em $n \in \mathbf{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, mas também em $\mathbf{N}$ ou ainda, mais geralmente, em $\mathbf{N}_k = \{k,k+1,k+2,\cdots\}$.

O estudo das séries comporta dois grande temas: determinação da convergência ou divergência da série e, sendo a série convergente, o cálculo da sua soma. Esta última questão é de dificuldade considerável podendo mesmo ser impossível o cálculo exacto da soma da série (recorre-se neste caso à aproximação numérica). O problema da convergência das séries é uma questão central da análise clássica, obtendo-se importantes resultados, particularmente em certas classes de séries (por ex. as séries de termos positivos), que mais tarde trataremos com algum desenvolvimento.

2.2.3.Proposição (*Condição de Cauchy*). *A condição necessária e suficiente para que uma série $\sum u_n$ seja convergente é que para todo o $\delta > 0$, exista uma ordem $p \in \mathbf{N}$ tal que*

$$| S_{n+k} - S_n | = | u_{n+1} + \cdots + u_{n+k} | < \delta,$$

para todo o $n > p$ e para cada $k \in \mathbf{N}$.

A proposição anterior resulta trivialmente do teorema 2.1.12.. Em particular, fazendo $k = 1$, vê-se que (u_{n+1}), e logo (u_n), é convergente para zero, pelo que

2.2.4. Corolário (*Condição necessária de convergência*). *Se $\sum u_n$ é uma série convergente então $u_n \to 0$.*

Repare-se que a condição $u_n \to 0$ é necessária mas ***não é suficiente*** da convergência da série. Com efeito, um exemplo notável é dado pela série, designada por ***série harmónica***,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}.$$

Trata-se de uma série divergente, tendo-se contudo $u_n = 1/n \to 0$ (cf. ex.1. seguinte). O corolário anterior é especialmente importante na prática, na medida em que estabelece uma condição suficiente de divergência de uma série, a saber:

uma série $\sum u_n$ é divergente se o seu termo geral u_n não converge para 0.

É claro que a série $\sum_{n \geq 0} u_n$ é convergente se e só se a série $\sum_{k \geq n+1} u_k \equiv u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ for convergente e neste caso, escrevendo $S = \sum u_n$ e $R_n = \sum_{k \geq n+1} u_k$, tem-se

$$S - S_n = R_n.$$

Em caso de convergência, R_n diz-se o ***resto de ordem*** n da série $\sum u_n$ e o seu valor absoluto, $|R_n|$, determina o *erro* obtido ao substituir S por S_n.

Dado que $S_n \to S \iff R_n \to 0$ e não sendo elementar o cálculo da soma da série, é então razoável ter-se uma estimativa do erro

$$|S - S_n| = |R_n| \leq \epsilon_n,$$

tanto "mais fina" quanto menor for ϵ_n. Alguns exemplos serão apresentados.

2.2.5. Exemplos.

1. A série harmónica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ é divergente já que a sua sucessão associada,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

não é de Cauchy (cf. exemplo 4.(2.1.13.)). Dado que S_n é crescente ter-se-á obrigatoriamente, $\lim S_n = +\infty$.

2. ***Série geométrica.*** A série

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

é chamada série geométrica de razão $a \in \mathbf{R}$. A sucessão das somas parciais será naturalmente:

$$S_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

se $a \neq 1$, e se $a = 1, S_n = 1 + \cdots + 1 = n + 1$.
Se for $\mid a \mid < 1$, porque $a^n \to 0$ (cf. exemplo 3.(2.1.10.)), a série resulta convergente com soma

$$S = \frac{1}{1 - a}.$$

Se $\mid a \mid \geq 1$, então $\mid a \mid^n \geq 1$ e portanto o termo geral a^n não pode convergir para 0, sendo a série divergente.

3. Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. O termo geral da série pode escrever-se $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e logo a sucessão das somas parciais toma a forma

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Conclui-se facilmente que a série é convergente e tem soma igual a 1. Trata-se de um caso particular de uma classe de séries, $\sum u_n$, em que o termo geral é da forma $u_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$. As somas parciais,

$$S_n = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = \alpha_1 - \alpha_{n+1},$$

são convergentes se e só se α_n tem limite finito, sendo neste caso a soma da série igual a $\alpha_1 - \lim \alpha_n$. Tais séries são conhecidas pelo nome de séries de ***Mengoli***.

Propriedades algébricas das séries. São de simples demonstração as proposições que em seguida enunciamos.

2.2.6. Proposição. *Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries tais que $u_n = v_n$ a partir de certa ordem $p \geq 0$. Então as séries são da mesma natureza, isto é, são ambas convergentes ou ambas divergentes.*

2.2.7. Proposição. *Se existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $v_n = u_{n+k}$, a partir de certa ordem, então as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são da mesma natureza.*

2.2.8. Proposição. *Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries convergentes de somas U e V respetivamente. Então:*

a) $\sum (u_n + v_n)$ é convergente e a sua soma igual a $U + V$;

b) para cada real $\lambda \in \mathbf{R}$, $\sum \lambda u_n$ é convergente e a sua soma igual a λU.

A demonstração das proposições precedentes é deixada como exercício.

Observação. Poder-se-ia igualmente pensar que, sendo $\sum u_n$ e $\sum v_n$ séries convergentes, a série $\sum u_n v_n$ seria ainda convergente; não é de maneira nenhuma o caso. Mais adiante regressaremos a este assunto.

2.2.9. Séries de termos positivos.

Uma série $\sum u_n$ diz-se de ***termos positivos*** se $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}$. Tendo-se apenas $u_n \geq 0$ para $n \geq p$, esta série é da mesma natureza que uma série de termos positivos, bastando para isso alterar o sinal dos p primeiros termos de forma a torná-los positivos (cf.(2.2.6.)). Nesta grande classe de séries, o estudo da convergência (e divergência) torna-se mais simples, obtendo-se critérios que serão apresentados de forma sistemática num futuro capítulo. De momento apresentamos os seguintes dois resultados de grande generalidade:

2.2.10. Proposição. *Uma série $\sum u_n$ de termos positivos é convergente se e só se a sucessão das somas parciais for limitada.*

Demonstração. Basta observar que, sendo $u_n \geq 0$ para todo o n, a sucessão das somas parciais $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ é crescente e portanto será convergente se e só se for limitada. ■

2.2.11. Proposição. *Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ séries de termos positivos tais que $u_n \leq v_n$ para $n \geq p$. Então*

$$\sum v_n \text{ convergente} \Longrightarrow \sum u_n \text{ convergente.}$$
$$\sum u_n \text{ divergente} \Longrightarrow \sum v_n \text{ divergente.}$$

Demonstração. Podemos supor $u_n \leq v_n$ para todo o n que não há perda de generalidade (veja-se 2.2.6.). Sendo

$$U_n = u_0 + \cdots + u_n \quad \text{e} \quad V_n = v_0 + \cdots + v_n$$

as respetivas somas parciais, tem-se $U_n \leq V_n$. Então, tendo em conta a proposição precedente:

$$\sum v_n \text{ convergente} \Longleftrightarrow V_n \text{ limitada} \Longleftrightarrow V_n \leq V$$

$$\Longrightarrow U_n \leq V_n \leq V \Longrightarrow U_n \text{ limitada} \Longleftrightarrow U_n \text{ convergente.} \blacksquare$$

2.2.12. Exemplos

1. Analisemos a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Trata-se naturalmente de uma série de termos positivos; observando que

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n}, \quad n \geq 2$$

resulta que a série dada converge, já que $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ é termo geral de uma série de Mengoli convergente. Enfim, uma estimativa do resto resto de ordem n é facilmente obtida:

$$R_n = \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}.$$

2. Sendo $\sum u_n$ e $\sum v_n$ séries de termos positivos convergentes, então a série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ é convergente; basta observar que

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

e aplicar as anteriores proposições 2.2.8. e 2.2.11.

Não sendo $\sum u_n$ de termos positivos e à parte alguns exemplos notáveis (de que se conhece a convergência ou divergência diretamente), tenta-se analisar a série dos módulos, $\sum |u_n|$, esta de termos positivos. Isto motiva a seguinte definição:

2.2.13. Definição. *A série $\sum u_n$ diz-se* ***absolutamente convergente*** *se a série $\sum \mid u_n \mid$ for convergente.*

A importância desta noção deriva da seguinte

2.2.14. Proposição. *Toda a série, $\sum u_n$, absolutamente convergente é convergente e tem-se*

$$\left|\sum u_n\right| \leq \sum \mid u_n \mid .$$

Demonstração. Consideremos $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ e $\overline{S}_n = |u_0| + \cdots + |u_n|$, as sucessões das somas parciais das séries $\sum u_n$ e $\sum |u_n|$, respetivamente. Tem-se então

$$\begin{aligned} \mid S_{n+k} - S_n \mid \quad &= \mid u_{n+k} + \cdots + u_{n+1} \mid \leq \\ &\leq \mid u_{n+k} \mid + \cdots + \mid u_{n+1} \mid = \overline{S}_{n+k} - \overline{S}_n . \end{aligned} \tag{1}$$

Sendo $\sum u_n$ absolutamente convergente, resulta da proposição 2.2.3. que dado $\delta > 0$ qualquer, existe uma ordem $p \in \mathbf{N}$ tal que $\overline{S}_{n+k} - \overline{S}_n < \delta$, para todo o $n > p$ e para todo o $k \in \mathbf{N}$. Mas então por (1), obtém-se

$$\mid S_{n+k} - S_n \mid < \delta \quad \forall n > p \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

e logo, pela mesma proposição, $\sum u_n$ é convergente. Finalmente, notando que

$$-\overline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$$

obtém-se a conclusão passando ao limite $n \to \infty$. ∎

Veremos adiante que uma série $\sum u_n$ pode ser convergente sem ser absolutamente convergente. Neste caso, diz-se que a série é ***simplesmente convergente*** ou ***semi-convergente***.

Dada a série $\sum u_n$, ponha-se

$$\begin{cases} p_n = u_n & \text{se} \quad u_n > 0 \\ p_n = 0 & \text{se} \quad u_n \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} q_n = -u_n & \text{se} \quad u_n < 0 \\ q_n = 0 & \text{se} \quad u_n \geq 0 \end{cases}$$

Tem-se claramente, $u_n = p_n - q_n$, $|u_n| = p_n + q_n$, $\forall n$; e tem-se ainda $|u_n| = u_n + 2q_n$, $|u_n| = 2p_n - u_n$. As séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ dizem-se respetivamente, a ***parte positiva*** e a ***parte negativa*** de $\sum u_n$;

são evidentemente séries de termos positivos ($p_n, q_n \geq 0$). Como $|u_n| = p_n + q_n$, *a série* $\sum u_n$ *é absolutamente convergente se e só se* $\sum p_n$ *e* $\sum q_n$ *são convergentes.*
Por outro lado, *se* $\sum u_n$ *é simplesmente convergente, então* $\sum p_n$ *e* $\sum q_n$ *divergem.* Com efeito, se uma delas convergisse ($\sum p_n$, por ex.), a série $\sum u_n$ seria absolutamente convergente, dado que $|u_n| = 2p_n - u_n$.

2.2.15. Séries alternadas. Séries de Dirichlet.

Vejamos alguns resultados referentes à convergência simples de certas séries notáveis.

2.2.16.Teorema (*Abel, Dirichlet*). *Seja* $\sum u_n$ *uma série (não necessariamente convergente) cuja sucessão das somas parciais* $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ *é limitada e seja* (v_n) *uma sucessão decrescente com* $\lim v_n = 0$. *Então a série* $\sum u_n v_n$ *é convergente.*

Demonstração. Dado que $|S_n| \leq C$, tem-se

$$|S_{n+p} - S_n| \leq |S_{n+p}| + |S_n| \leq 2C, \quad \forall n, p \in \mathbf{N}.$$

Por outro lado, se W_n são as somas parciais de $\sum u_n v_n$, tem-se

$$W_{n+p} - W_n = u_{n+1}v_{n+1} + \cdots + u_{n+p}v_{n+p} =$$

$$= u_{n+1}(v_{n+1} - v_{n+2}) + (u_{n+1} + u_{n+2})(v_{n+2} - v_{n+3}) + \cdots + \\ + (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})\, v_{n+p}.$$

Mas como v_n é decrescente e $v_n \to 0$, resulta

$$|W_{n+p} - W_n| \leq 2C \sum_{k=1}^{p-1}(v_{n+k} - v_{n+k+1}) + 2Cv_{n+p} = 2Cv_{n+1} < \varepsilon$$

$\forall n > n_0$ e $\forall p$, o que mostra que $\sum u_n v_n$ converge (cf. (2.2.3.)). ■

Corolário (*Leibniz*). *Seja* (u_n) *uma sucessão decrescente com* $\lim u_n = 0$. *Então a série* ***alternada*** $\sum(-1)^n u_n$ *é convergente.*

Demonstração. Com efeito, a sucessão das somas parciais da série (não convergente) $\sum(-1)^n$ é claramente limitada. Como a sucessão u_n é decrescente para 0 a conclusão segue-se do teorema. ■

Observação. Tenha-se presente que a condição u_n *decrescente* para 0 não pode ser retirada; sem a monotonia de u_n, a série pode divergir: tomando

$u_n = \dfrac{1}{n}(2 + (-1)^n)$, convergente para 0 (mas não de forma monótona), a série alternada $\sum(-1)^n u_n$ diverge (porquê?).

2.2.17. Exemplos.

1. A série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ é evidentemente uma série alternada convergente; não é contudo absolutamente convergente, dado que a série dos módulos tem como somas parciais:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

em que o segundo membro diverge para $+\infty$ (cf.(2.2.5.) e (2.2.11.)). Assim, $S_n \to +\infty$ e a série é apenas simplesmente convergente.

2. As séries de Dirichlet

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n}\ (x\in \mathbf{R}) \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n} \quad (x\in\mathbf{R}, x\neq 2k\pi),$$

são convergentes, já que as somas $S_n = \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)$ e $S'_n = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$ são limitadas; isto pode ver-se facilmente utilizando o conhecimento dos números complexos. Com efeito, se $x = 2k\pi (k\in\mathbf{Z})$, é imediato para S_n ; se $x \neq 2k\pi$, tem-se:

$$S_n = \mathrm{Im}\left[1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + \cdots + (e^{ix})^n\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right],$$

com $e^{ix} \neq 1 (\Longleftrightarrow x \neq 2k\pi)$ e portanto, vem para todo n

$$\mid S_n \mid = \left|\mathrm{Im}\left(\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right)\right| \leq \left|\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}\right| \leq \frac{2}{\mid 1-e^{ix}\mid}.$$

Do mesmo modo se via a limitação de S'_n tomando a parte real.

2.2.18. Comutatividade e associatividade das séries.

Comecemos por definir o que se entende por "alterar a ordem dos termos de uma série". Dada uma série $\sum u_n$ e uma bijeção $\varphi : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ (ou então $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$), a série $\sum v_n$ em que $v_n = u_{\varphi(n)}$, $n \in \mathbf{N}_0$, diz-se uma ***reordenação*** de $\sum u_n$.

Sendo $\sum u_n$ uma série convergente, coloca-se agora a questão de saber se uma (qualquer) reordenação $\sum v_n$, $v_n = u_{\varphi(n)}$, é ainda convergente e em caso afirmativo se $\sum u_n = \sum v_n$. A resposta é em geral negativa; um clássico contraexemplo é o seguinte: seja S a soma da série alternada (e convergente) $\sum(-1)^{n+1}1/n$,

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum\left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) = \quad (1)$$

$$= \sum\left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m}\right) \quad (2)$$

Multiplicando (1) por 1/2 e somando (2) obtemos (cf. (2.2.8.))

$$\frac{3S}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum\left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right)$$

como soma de uma reordenação da série inicial. Assim, a alteração da ordem dos termos numa série convergente, pode alterar a sua soma (e mesmo a sua natureza (cf.(2.2.22.)). Todavia, havendo convergência absoluta da série $\sum u_n$, os resultados são positivos. É o que veremos de seguida.

2.2.19. Definição. *Dada uma série* $\sum u_n$ *e uma aplicação injetiva* $\varphi : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$*, a série* $\sum v_n$*,* $v_n = u_{\varphi(n)}$*, diz-se uma* ***subsérie*** *de* $\sum u_n$*. Em particular, se* φ *é bijetiva,* $\sum v_n$ *é uma reordenação de* $\sum u_n$*.*
A série $\sum u_n$ *diz-se* ***comutativamente convergente****, se toda a reordenação de* $\sum u_n$ *é convergente para a mesma soma.*

2.2.20. Proposição. *Seja* $\sum u_n$ *uma série absolutamente convergente. Então toda a subsérie,* $\sum v_n$*, é absolutamente convergente e*

$$\left|\sum v_n\right| \le \sum |v_n| \le \sum |u_n|.$$

Demonstração Seja $\varphi : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ uma aplicação injetiva e $v_n = u_{\varphi(n)}$. Dado $n \in \mathbf{N}_0$, seja $N = \max\{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$. Então

$$\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |v_k| \le \sum_{k=0}^{N} |u_k| \le \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$

o que implica a convergência de $\sum_{k=0}^{n} |v_k|$. Logo $\sum v_n$ é absolutamente convergente e tem-se a desigualdade enunciada. ∎

2.2.21. Proposição. *Toda a série absolutamente convergente é comutativamente convergente.*

Demonstração. Seja $\sum u_n$ uma série absolutamente convergente de soma S e $\sum v_n$ uma qualquer reordenação: $v_n = u_{\varphi(n)}$. Para cada n, sendo

$U_n = u_0 + \cdots + u_n$ as somas parciais de $\sum u_n$, existe naturalmente N suficientemente grande ($N = \max\{\varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(n)\}$) tal que $V_N = v_0 + \cdots + v_N$ contenha todos os termos de U_n. Então

$$|U_n - V_N| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| = \overline{R}_n$$

em que $\overline{R}_n$ representa a soma do resto de ordem n da série dos módulos, $\sum |u_n|$, convergente por hipótese. Como $\overline{R}_n \to 0$ e $U_n \to S$, obtém-se $\sum v_n = S$ como se queria. ∎

A recíproca é também verdadeira. É consequência do notável teorema de Riemann:

2.2.22.Teorema (*Riemann*). *Seja $\sum u_n$ uma série simplesmente convergente. Então, para todo o $A \in \overline{\mathbf{R}}$, existe uma reordenação de $\sum u_n$, digamos $\sum v_n$, tal que $\sum v_n = A$.*

O leitor interessado poderá ver a demonstração do precedente teorema em algumas das obras citadas na bibliografia ([**4**], [**6**] ou [**8**], por exemplo).

2.2.23. Concluimos este tema com alguns comentários sobre a *associatividade* nas séries (ou introdução de parênteses nos seus termos). Seja

$$\sum u_n \equiv u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

uma série convergente e consideremos, por exemplo, a nova série

$$\underbrace{(u_0 + u_1)}_{v_0} + \underbrace{(u_2 + u_3)}_{v_1} + \cdots + \underbrace{(u_{2n} + u_{2n+1})}_{v_n} + \cdots$$

A sucessão associada da nova série, $V_n = v_0 + \cdots + v_n$, é claramente uma subsucessão de U_n ($V_n = U_{2n+1}$) e logo, dado que U_n converge para a soma $S = \sum u_n$, também V_n converge para o mesmo limite. Assim, *a introdução de parênteses numa série convergente conduz a uma nova série também convergente e com a mesma soma da original.*

Todavia, o procedimento inverso não conserva necessariamente a convergência. Um exemplo flagrante é o seguinte: escreva-se $\sum u_n$, série convergente, como

$$(u_0 + 1 - 1) + (u_1 + 1 - 1) + (u_2 + 1 - 1) + \cdots$$

Eliminando os parênteses, obtemos a série

$$u_0 + 1 - 1 + u_1 + 1 - 1 + \cdots$$

claramente divergente, dado que o termo geral não tende para zero.

2.2.24. Produto de séries.

Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries convergentes. Não é de esperar que a série $\sum u_n v_n$ seja convergente (por exemplo, $u_n = v_n = (-1)^n\, 1/\sqrt{n}$); mas mesmo sendo convergente, a sua soma não é igual (necessariamente) ao produto das somas de $\sum u_n$ e $\sum v_n$. Já no caso elementar de uma soma finita, tem-se em geral

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \neq \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right).$$

Um dos resultados centrais da multiplicação de séries é expresso no teorema que segue:

2.2.25.Teorema. *Sejam $\sum u_n$ e $\sum v_n$ duas séries absolutamente convergentes. Seja*

$$w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0, \quad n \geq 0.$$

Então, a série $\sum w_n$ é absolutamente convergente e tem-se

$$\sum w_n = \left(\sum u_n\right) \cdot \left(\sum v_n\right).$$

*A série $\sum w_n$ diz-se o **produto de Cauchy** das séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$.*

Demonstração. Representemos por U_n, V_n, W_n, as somas parciais de $\sum u_n$, $\sum v_n$ e $\sum w_n$ respetivamente e por $\overline{U}_n, \overline{V}_n, \overline{W}_n$ as somas parciais das correspondentes séries dos módulos. É claro que

$$\overline{W}_n \leq \overline{U}_n . \overline{V}_n \leq \overline{U} . \overline{V}, \ \ \forall n$$

em que $\overline{U} = \sum |u_n|$ e $\overline{V} = \sum |v_n|$. Logo, $\sum w_n$ é absolutamente convergente, já que a sucessão $\overline{W}_n$ é limitada.
Por outro lado, para cada n e $m \geq 2n$, todos os produtos de $U_n.V_n$ encontram-se em W_m e logo, a diferença $W_m - U_n V_n$ apenas compreende produtos $u_i v_j$ em que $i > n$ ou $j > n$. Fazendo, no primeiro caso, $|u_i v_j| \leq |u_i| . \overline{V}$ e no segundo, $|u_i v_j| \leq \overline{U} . |v_j|$, obtemos

$$|W_m - U_n V_n| \ \leq \ \sum_{k>n} |u_k|\, \overline{V} \ + \ \overline{U} \sum_{k>n} |v_k|.$$

Passando ao limite, $n \to \infty$, tem-se o resultado: $W_m \to W = UV$. ∎

Observações. Repare-se que a série produto de Cauchy, $\sum w_n$, faz intervir todos os produtos $u_i v_j$, mas ordenados e associados de forma particular (o termo w_n é a soma de todos os $u_i v_j$ com $i+j=n$). Pode no entanto mostrar-se (cf.[**6**]) que, sendo $\sum u_n$ e $\sum v_n$ absolutamente convergentes para U e V, respetivamente, e sendo $\sum t_n$ a série formada por todos os produtos $u_i v_j$ ordenados de forma arbitrária, esta série é ainda absolutamente convergente para UV.
Qual então o interesse da escolha particular da série produto de Cauchy? A razão é que esta série verifica um certo número de resultados de grande generalidade. Apenas enunciamos dois desses resultados (cf.[**6**]):

I. *Se $\sum u_n$, $\sum v_n$ e $\sum w_n$ (produto de Cauchy) convergem para U, V e W respetivamente, tem-se $W = UV$.*

II. *Se $\sum u_n$ converge para U e $\sum v_n$ converge absolutamente para V, então $\sum w_n$ converge absolutamente para $W = UV$.*

2.2.26. Exemplos

1. O produto de Cauchy da série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ por si própria diverge. Com efeito, o termo geral do produto de Cauchy escreve-se

$$w_n = (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right].$$

Em particular,

$$w_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Logo, $w_{2n} \geq \dfrac{2n+1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}$ que não converge para zero, e a série $\sum w_n$ é divergente.

2. Procuremos a natureza da série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \cdots$$

Associando os termos dois a dois, obtém-se a nova série

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{n} + \cdots,$$

a qual diverge (série harmónica). Recordando o que se disse sobre a associatividade dos termos de uma série (cf.(2.2.23.)), a série inicial terá de divergir (caso contrário, esta última convergia).

2.3. Elementos de topologia em R.

A noção básica da topologia é a noção de vizinhança. Em seguida definimos vizinhança de um ponto $a \in \mathbf{R}$ e logo aí veremos a íntima relação entre este conceito e o de limite.

2.3.1. Definição. *Seja $a \in \mathbf{R}$ um número real; chama-se* ***vizinhança*** *de centro a e raio ε e representa-se por $V_\varepsilon(a)$, ao intervalo aberto $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.*

Assim, $x \in V_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ se e só se $|x-a| < \varepsilon$.

Observação. A definição de limite de uma sucessão pode agora ser reformulada do seguinte modo: $x_n \to a$ se e só se

para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $n > p \Longrightarrow x_n \in V_\varepsilon(a)$.

2.3.2. Definição. *Seja $X \subset \mathbf{R}$ um subconjunto não vazio; um ponto $a \in \mathbf{R}$ diz-se* ***interior*** *a X se existe uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ tal que $V_\varepsilon(a) \subset X$. O ponto a diz-se* ***exterior*** *a X se existe uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ tal que $V_\varepsilon(a) \cap X = \emptyset$. Um ponto diz-se* ***fronteiro*** *a X se não for interior nem exterior, isto é, $\forall \varepsilon > 0, V_\varepsilon(a) \cap X \neq \emptyset$ e $V_\varepsilon(a) \cap (\mathbf{R} \setminus X) \neq \emptyset$.*

O conjunto dos pontos interiores de um conjunto X chama-se ***interior*** de X e representa-se por $\operatorname{int}(X)$; o conjunto dos pontos exteriores diz-se o ***exterior*** de X e representa-se por $\operatorname{ext}(X)$; enfim, o conjunto dos pontos fronteiros de X diz-se a ***fronteira*** de X e representa-se por $\operatorname{fr}(X)$.
Da definição resulta imediatamente que $\operatorname{int}(X), \operatorname{ext}(X)$ e $\operatorname{fr}(X)$ são conjuntos disjuntos dois a dois e $\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{ext}(X) \cup \operatorname{fr}(X) = \mathbf{R}$. Da definição se vê ainda que

$$\operatorname{ext}(X) = \operatorname{int}(\mathbf{R} \setminus X) \quad \text{e} \quad \operatorname{fr}(X) = \operatorname{fr}(\mathbf{R} \setminus X).$$

2.3.3. Exemplos.

1. Considerando o intervalo aberto $X =]a, b[$, é imediato verificar que $\operatorname{int}(X) = X$, $\operatorname{fr}(X) = \{a, b\}$ e $\operatorname{ext}(X) = \mathbf{R} \setminus [a, b]$.

2. Se $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \mathbf{R}$ é um conjunto finito, tem-se naturalmente: $\operatorname{fr}(X) = X$, $\operatorname{int}(X) = \emptyset$ e $\operatorname{ext}(X) = \mathbf{R} \setminus X$.

3. Se $X = \mathbf{Q}$, é claro que $\operatorname{fr}(X) = \mathbf{R}$, $\operatorname{int}(X) = \emptyset$ e $\operatorname{ext}(X) = \emptyset$.

2.3.4. Definição. *Um conjunto $A \subset \mathbf{R}$ não vazio diz-se* ***aberto*** *se $\operatorname{int}(A) = A$, isto é, A é formado apenas por pontos interiores. Convenciona-se que o conjunto $\emptyset$ é aberto.*

É um exercício bastante simples a demonstração do seguinte resultado:

2.3.5. Proposição. *A família $\mathcal{A}$ dos conjuntos abertos de $\mathbf{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\emptyset, \mathbf{R} \in \mathcal{A}$.

ii) Se $A_i \in \mathcal{A}(i \in \mathrm{I})$ *então* $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \in \mathcal{A}$ *(a união de um qualquer número de abertos é aberto).*

iii) Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *então* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ *(a interseção de um número finito de abertos é aberto).*

Observação. Repare-se que a interseção de um número qualquer de abertos pode não ser aberto; por exemplo, se $A_n = \left]-1/n, 1/n\right[$, tem-se $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-1/n, 1/n\right[= \{0\}$, que não é aberto.

2.3.6. Definição. *Um ponto* $a \in \mathbf{R}$ *diz-se um* ***ponto aderente*** *ao conjunto* $X \subset \mathbf{R}\,(X \neq \emptyset)$ *se para todo* $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(a) \cap X \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se ***fecho*** *ou* ***aderência*** *de X e representa-se por* $\overline{X}$. Assim,

$$a \in \overline{X} \iff \forall \varepsilon > 0,\ V_\varepsilon(a) \cap X \neq \emptyset.$$

Observação. Resulta trivialmente da definição que $X \subset \overline{X}$. Reciprocamente, se $a \in \overline{X} \setminus X$ então a é fronteiro, o que nos permite concluir:

$$\overline{X} = X \cup \mathrm{fr}\,(X) = \mathrm{int}\,(X) \cup \mathrm{fr}\,(X).$$

2.3.7. Definição. *Um conjunto não vazio* $F \subset \mathbf{R}$ *diz-se* ***fechado*** *se contém todos os pontos aderentes, ou seja,* $F = \overline{F}$. *Admite-se que o conjunto vazio é fechado.*

2.3.8. Exemplos.

1. Seja $F \subset \mathbf{R}$ um conjunto fechado, isto é, $F = \overline{F} = \mathrm{int}\,(F) \cup \mathrm{fr}\,(F)$. Então, $\mathbf{R} \setminus F = \mathrm{ext}\,(F) = \mathrm{int}\,(\mathbf{R} \setminus F)$ e portanto $\mathbf{R} \setminus F$ é aberto. Reciprocamente, se $A \subset \mathbf{R}$ é aberto tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \setminus A = \mathbf{R} \setminus \mathrm{int}\,(A) \quad &= \mathrm{ext}\,(A) \cup \mathrm{fr}\,(A) = \\ &= \mathrm{int}\,(\mathbf{R} \setminus A) \cup \mathrm{fr}\,(\mathbf{R} \setminus A) = \overline{\mathbf{R} \setminus A} \end{aligned}$$

e logo $\mathbf{R} \setminus A$ é fechado. Assim:

Um conjunto $A \subset \mathbf{R}$ *é aberto se e só se* $\mathbf{R} \setminus A$ *é fechado.*

Um conjunto $F \subset \mathbf{R}$ *é fechado se e só se* $\mathbf{R} \setminus F$ *é aberto.*

2. O conjunto $X = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ não é evidentemente aberto já que todo o ponto de X é fronteiro; por outro lado 0 é ainda ponto aderente de X: basta observar que $\frac{1}{n} \to 0$ e portanto toda a vizinhança de 0 contém pontos de X. Enfim, o leitor pode mostrar sem dificuldade que $\overline{X} = X \cup \{0\}$.

3. Um conjunto $X \subset \mathbf{R}$ diz-se ***denso*** em $\mathbf{R}$ se $\overline{X} = \mathbf{R}$. Os conjuntos $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ são densos. Com efeito, para todo o real a, existem racionais e irracionais em $V_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ o que significa que $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ e $\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \mathbf{R}$

4. Um ponto $a \in X$ diz-se ***isolado*** se existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(a) \cap X = \{a\}$. O conjunto referido no anterior exemplo 2. é claramente formado apenas por pontos isolados.

5. Seja X um subconjunto fechado e majorado de $\mathbf{R}$ e seja $L = \sup X$. Da definição de supremo sai que $\forall \delta > 0$, existe um elemento $x \in X$ tal que $L - \delta < x \leq L$, e portanto $V_\delta(L) \cap X \neq \emptyset$; ou seja, $L \in \overline{X} = X$ e o supremo de X é máximo.
Analogamente, se X é fechado e minorado então $\inf X = \min X \in X$.

2.3.9. Proposição. *Seja $X \subset \mathbf{R}$ um subconjunto não vazio. Então $a \in \overline{X}$ se e só se é limite de uma sucessão de pontos de X.*

Demonstração. Se $a \in \overline{X}$, então existem pontos $x_n \in V_{1/n}(a) \cap X$; logo $| x_n - a | \leq 1/n$, e x_n converge para a. A recíproca resulta imediatamente da definição de limite. ∎

2.3.10. Definição. *Um elemento $a \in \mathbf{R}$ diz-se um **ponto de acumulação** do conjunto $X \subset \mathbf{R}\,(X \neq \emptyset)$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe pelo menos um $x \in X$, $x \neq a$, tal que $x \in V_\varepsilon(a)$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$,*

$$(V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto X designa-se por ***conjunto derivado*** e representa-se por X'.

Observações. 1. Repare-se que a definição precedente é equivalente a esta outra:

um ponto $a \in \mathbf{R}$ é ponto de acumulação do conjunto X se e só se para todo $\varepsilon > 0$ existem infinitos pontos de X em $V_\varepsilon(a)$;

com efeito, se $(V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, fazendo

$$\delta = \min\{| a - x_1 |, \ldots, | a - x_n |\}$$

logo se vê que a vizinhança $V_\delta(a)$ não contém pontos de X diferentes de a, contrariando a definição de ponto de acumulação. Em consequência, conjunto finito não tem pontos de acumulação.
Da definição resulta ainda imediatamente que um ponto $a \in X$ ou é ponto isolado ou ponto de acumulação de X.

2. Tenha-se em atenção a diferença entre ponto de acumulação e ponto aderente: se bem que todo o ponto de acumulação seja aderente nem todo o ponto aderente a um conjunto é de acumulação; por ex., se X é um conjunto finito, todos os pontos de X são aderentes embora não haja pontos de acumulação. Porém, é um simples exercício mostrar que se $X \subset \mathbf{R}$ ($X \neq \emptyset$), então:

$$X \cup X' = X \cup \mathrm{fr}\,(X) = \overline{X}.$$

3. Reconhece-se sem dificuldade que o raciocínio da proposição 2.3.9. se aplica identicamente para mostrar que:

a é ponto de acumulação de um conjunto X se e só se é limite de uma sucessão de elementos de X diferentes de a.

Seja dada a sucessão $(x_n) : n \in \mathbf{N} \to x_n \in \mathbf{R}$, e considere-se uma aplicação $n \in \mathbf{N} \to \alpha_n \in \mathbf{N}$ estritamente crescente. A composição das duas aplicações

$$n \in \mathbf{N} \longrightarrow \alpha_n \in \mathbf{N} \longrightarrow x_{\alpha_n} \in \mathbf{R}$$

chama-se ***subsucessão*** de (x_n) e representa-se por (x_{α_n}). Assim (x_{2n}) é a subsucessão dos termos pares e (x_{2n+1}) é a subsucessão dos termos ímpares. Se $x_{\alpha_n} \to a \in \mathbf{R}$, diz-se que a é ***sublimite*** de (x_n). Por exemplo, tomando a sucessão $\dfrac{n}{2+(-1)^n n}$, é imediato verificar que

$$x_{2n} = \frac{2n}{2+2n} \longrightarrow 1 \quad \text{e} \quad x_{2n+1} = \frac{2n+1}{2-(2n+1)} \longrightarrow -1.$$

Da definição de limite, resulta naturalmente que se (x_n) tem limite, todos os sublimites de (x_n) coincidem com o limite.

A proposição seguinte põe em evidência a relação entre sublimite de (x_n) e ponto de acumulação de $\{x_n\}$.

2.3.11. Proposição. *O número real $a \in \mathbf{R}$ é sublimite de (x_n) se e só se a é um elemento da sucessão que se repete infinitas vezes ou é ponto de acumulação do conjunto dos termos $\{x_n\}$.*

Demonstração. Seja $a = \lim x_{\alpha_n}$, sublimite de (x_n). Se a não é um elemento de (x_n) que se repete infinitas vezes, então $x_{\alpha_n} \neq a$ a partir de certa ordem ($n > p$). Mas como $x_{\alpha_n} \to a$, para cada $\delta > 0$ existe uma

ordem n_0 tal que $n > n_0 \Longrightarrow x_{\alpha_n} \in V_\delta(a)$ e logo, em particular, a é de acumulação de $\{x_n\}$.
Reciprocamente, seja $a \in \{x_n\}$ repetindo-se infinitas vezes; tem-se então obviamente $a = x_{\alpha_n}$ e a é sublimite. Sendo a de acumulação de $\{x_n\}$, construa-se a subsucessão (x_{α_n}) do seguinte modo: tome-se $x_{\alpha_1} \in V_1(a)$; escolha-se em seguida $x_{\alpha_2} \in V_{1/2}(a)$ com $\alpha_2 > \alpha_1; x_{\alpha_3} \in V_{1/3}(a)$ com $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$ e assim sucessivamente. Repare-se que tal construção é possível porque a é ponto de acumulação de $\{x_n\}$. É agora elementar ver que $x_{\alpha_n} \to a$. ∎

É sabido que uma sucessão (x_n) em $\mathbf{R}$ pode ser convergente ou não. A questão agora é de saber em que condições (x_n) admite pelo menos um sublimite em $\mathbf{R}$. A resposta deriva de um dos mais importantes teoremas da topologia de $\mathbf{R}$:

2.3.12. Teorema (*Bolzano-Weierstrass*). *Todo o conjunto $X \subset \mathbf{R}$ infinito e limitado admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. Dado que $X \subset \mathbf{R}$ é limitado, escolha-se $a_1, b_1 \in \mathbf{R}$, $a_1 < b_1$, tal que $X \subset [a_1, b_1]$ e faça-se $\xi_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. É claro que um dos intervalos $[a_1, \xi_1]$ e $[\xi_1, b_1]$ contém infinitos pontos de X; seja $[a_2, b_2]$ tal intervalo. Tem-se portanto

$$X \cap [a_2, b_2] \text{ infinito} \quad \text{e} \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Repita-se o processo fazendo $\xi_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$ e representando por $[a_3, b_3]$ um dos intervalos $[a_2, \xi_2], [\xi_2, b_2]$ tal que $X \cap [a_3, b_3]$ é infinito.
Continuando o raciocínio, obtemos uma sucessão de intervalos encaixados:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

tais que

i) $X \cap [a_n, b_n]$ é infinito, $\forall n \in \mathbf{N}$

ii) $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$.

O axioma do encaixe garante a existência de um ponto $c \in \bigcap [a_n, b_n]$; tem-se ainda $\lim a_n = \lim b_n = c$, já que

$$a_n \leq c \leq b_n \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0 \, (n \to \infty) \\ 0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0 \, (n \to \infty) \end{cases}$$

Enfim, da definição de limite resulta que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbf{N} : n > p \Longrightarrow a_n, b_n \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[,$$

ou seja $[a_n, b_n] \subset]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$. Como $[a_n, b_n] \cap X$ é infinito, é claro que $X \cap]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ é infinito ($\forall \varepsilon > 0$) e logo c é ponto de acumulação de X. ■

Corolário. *Seja (x_n) uma sucessão limitada em $\mathbf{R}$; então existe pelo menos uma subsucessão convergente.*

Demonstração. Se o conjunto dos termos da sucessão, $\{x_n\}$, é finito, existe pelo menos um elemento $a = x_{\alpha_n}$ que se repete infinitas vezes e logo é sublimite. Se $\{x_n\}$ é um conjunto infinito, sendo limitado, o teorema de Bolzano-Weierstrass garante a existência de pelo menos um ponto de acumulação e portanto de sublimite (cf. (2.3.11.)). ■

Topologia de $\overline{\mathbf{R}}$. Foi dada anteriormente a noção de $\lim x_n = +\infty$ e $\lim x_n = -\infty$. No sentido de unificar de um ponto de vista topológico a noção de limite, é conveniente estender a noção de vizinhança a cada elemento de $\overline{\mathbf{R}}$. Assim, para cada $a \in \overline{\mathbf{R}}$ e $\varepsilon > 0$, chama-se vizinhança de centro a e raio ϵ, ao conjunto $V_\varepsilon(a)$ definido do seguinte modo:

i) se $a \in \mathbf{R}$, $V_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbf{R} : | x - a | < \varepsilon\}$
(coincidindo portanto com a noção de vizinhança já definida em $\mathbf{R}$)

ii)

$$V_\varepsilon(+\infty) = \left\{x \in \overline{\mathbf{R}} : x > \frac{1}{\epsilon}\right\} = \left]\frac{1}{\epsilon}, +\infty\right],$$
$$V_\varepsilon(-\infty) = \left\{x \in \overline{\mathbf{R}} : x < -\frac{1}{\epsilon}\right\} = \left[-\infty, -\frac{1}{\epsilon}\right[.$$

Pode agora escrever-se, $\lim x_n = a$ em $\overline{\mathbf{R}}$ se e só se:

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbf{N} : n > p \Longrightarrow x_n \in V_\delta(a).$$

Trata-se, formalmente, da mesma definição que foi dada em $\mathbf{R}$; contudo, abrangemos agora os casos $a = +\infty$ e $a = -\infty$. Assim, por ex., $\lim x_n = +\infty$ se e só se:

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbf{N} : n > p \Longrightarrow x_n \in V_\delta(+\infty),$$

isto é

$$\forall \delta > 0\, \exists p \in \mathbf{N} : n > p \Longrightarrow x_n > \frac{1}{\delta}.$$

A noção de ponto de acumulação estende-se naturalmente a $\overline{\mathbf{R}}$: *um elemento* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *diz-se um ponto de acumulação de um conjunto* $X \subset \overline{\mathbf{R}}$ *se para todo* $\delta > 0$, $(V_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset$, ou seja, para cada $\delta > 0$ a vizinhança $V_\delta(a)$ contém infinitos pontos de X.

É agora claro que um conjunto X é não majorado (resp. não minorado) em $\mathbf{R}$ se e só se $+\infty$ (resp. $-\infty$) é ponto de acumulação de X. O teorema de Bolzano-Weierstrass toma então a forma:

Todo o conjunto infinito $X \subset \overline{\mathbf{R}}$ *tem pelo menos um ponto de acumulação (em* $\overline{\mathbf{R}}$*).*

Como consequência imediata resulta que *toda a sucessão* (x_n) *em* $\overline{\mathbf{R}}$ *tem pelo menos um sublimite em* $\overline{\mathbf{R}}$, ou seja o conjunto $\mathcal{L}$ dos sublimites de uma sucessão (x_n) é não vazio. No que se segue, mostramos que por entre os sublimites de (x_n) em $\overline{\mathbf{R}}$ há um maior e um mais pequeno.

Tomemos (x_n) em $\overline{\mathbf{R}}$ e escreva-se:

$$v_n = \sup_{k \geq n}\{x_k\}, \quad u_n = \inf_{k \geq n}\{x_k\}.$$

Tem-se naturalmente,

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1.$$

As novas sucessões (u_n) e (v_n), sendo monótonas, admitem limite em $\overline{\mathbf{R}}$. Assim,

2.3.13. Definição. *Chama-se* ***limite superior*** *de uma sucessão* (x_n) *em* $\overline{\mathbf{R}}$ *e representa-se por* $\limsup x_n$ *ou* $\overline{\lim}\, x_n$ *ao limite da sucessão* (v_n)*. Chama-se* ***limite inferior*** *de* (x_n) *e representa-se por* $\liminf x_n$ *ou* $\underline{\lim}\, x_n$ *ao limite da sucessão* (u_n)*:*

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim v_n = \inf\{v_n\}, \quad \underline{\lim}\, x_n = \lim u_n = \sup\{u_n\}.$$

Consequência imediata da definição é a relação: $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.

A definição apresentada tem valor essencialmente teórico. Na prática, a determinação dos limites superior ou inferior de uma dada sucessão faz uso de caracterizações mais manejáveis.

2.3.14. Proposição. $L \in \mathbf{R}$ *é limite superior de uma sucessão* (x_n) *se e só se:*

i) *para todo* $\delta > 0$ *existe* $p \in \mathbf{N}$ *tal que* $x_n < L + \delta, \quad \forall n > p$*;*
ii) *existe uma subsucessão* x_{α_n} *convergente para* L*.*

Do mesmo modo, $l \in \mathbf{R}$ *é limite inferior de* (x_n) *se e só se:*

i') *para todo* $\delta > 0$ *existe* $p' \in \mathbf{N}$ *tal que* $x_n > l - \delta, \quad \forall n > p'$*;*
ii') *existe uma subsucessão* x_{β_n} *convergente para* l*.*

Demonstração. Seja $\overline{\lim}\, x_n = \lim v_n = L \in \mathbf{R}$, com $v_n = \sup\limits_{k\geq n}\{x_k\}$. Então, dado $\delta > 0$

$$L - \delta < v_n < L + \delta \quad \text{para} \quad n \geq p$$

e logo $x_k < L + \delta$ para todo o $k > p$, o que mostra *i)*.
Construa-se agora x_{α_n} do seguinte modo: para $\delta = 1$, tem-se $L - 1 < v_n < L + 1$ a partir de certa ordem e portanto, pela definição de supremo, existe α_1 tal que $L - 1 < x_{\alpha_1} < L + 1$; sendo $n_2 > \alpha_1$ tal que $L - \frac{1}{2} < v_{n_2} < L + \frac{1}{2}$ escolha-se x_{α_2} tal que

$$L - \frac{1}{2} < x_{\alpha_2} < L + \frac{1}{2}$$

com $\alpha_2 \geq n_2 > \alpha_1$, e assim sucessivamente. É agora claro que $x_{\alpha_n} \to L$.

Reciprocamente, de $i)$ sai que $v_n \leq L + \delta$ para $n > p_1$. Como por outro lado existe $x_{\alpha_n} \to L$, tem-se $L - \delta < x_{\alpha_n} < L + \delta$ para $\alpha_n \geq p_2$ e logo $L - \delta < v_n\, (n > p_2)$. Portanto, dado $\delta > 0$ qualquer, tem-se:

$$L - \delta < v_n \leq L + \delta \quad \text{para} \quad n > p = \max\{p_1, p_2\}$$

o que mostra que $\lim v_n = \overline{\lim}\, x_n = L$. Analogamente para o limite inferior. ■

2.3.15. Proposição. *Uma sucessão (x_n) admite limite em $\overline{\mathbf{R}}$ se e só se*

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Em particular, (x_n) é convergente se e só se

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a \in \mathbf{R}.$$

Demonstração. Se $\lim x_n = a \in \mathbf{R}$, tem-se $a - \delta/2 < x_n < a + \delta/2$ para $n > p$ e logo $a - \delta < u_n \leq v_n < a + \delta\, (n > p)$, o que mostra que $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a$. Reciprocamente, tendo-se esta igualdade, a conclusão sai como consequência imediata das condições $i)$ e $i')$ da proposição anterior. ■

Os resultados precedentes mostram, em particular, que *o limite superior e o limite inferior de uma sucessão (x_n) são respetivamente o maior e o mais pequeno dos sublimites de (x_n) em $\overline{\mathbf{R}}$*. Assim, por exemplo, para a sucessão $x_n = \sqrt{n} - (-1)^n\sqrt{n} - 1$, que tem apenas os dois sublimites $x_{2k} \to -1$ e $x_{2k+1} \to +\infty$, resulta naturalmente que $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ e $\underline{\lim}\, x_n = -1$. Os limites superior e inferior de uma sucessão são um caso particular dos limites superior e inferior de uma função num ponto. No próximo capítulo regressaremos a este assunto.

Terminamos com a demonstração de um resultado que tem importância prática considerável no cálculo dos limites de certas sucessões.

2.3.16. Proposição. *Seja (x_n)uma sucessão de números reais positivos. Tem-se*

$$\underline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}\,\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\,\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\,\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Em particular, existindo $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, *existe também* $\lim \sqrt[n]{x_n}$ *e os dois limites são iguais.*

Lema. *Seja $k > 0$ um real positivo. Tem-se* $\lim \sqrt[n]{k} = \lim k^{1/n} = 1$.

Demonstração. Se $k = 1$ o resultado é trivial. Se $0 < k < 1$, a sucessão $k^{1/n}$ é crescente e majorada por 1; sendo $k > 1$ a sucessão é decrescente e minorada (por 1, naturalmente). Em qualquer dos casos existe limite $\lim k^{1/n} = l \neq 0$. Considerando a subsucessão $k^{1/n(n+1)}$, tem-se por um lado $l = \lim k^{1/n(n+1)}$ e por outro:

$$\lim k^{1/n(n+1)} = \lim k^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{k^{1/n}}{k^{1/n+1}} = \frac{l}{l} = 1$$

pelo que $l = 1$.

Demonstração da proposição. Mostremos a desigualdade referente ao limite superior; a desigualdade referente ao limite inferior tem demonstração semelhante. Raciocinando por absurdo, suponhamos que não se tinha $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\,\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. Sendo assim, existiria um real c tal que $\overline{\lim}\,\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < c < \overline{\lim}\,\sqrt[n]{x_n}$. Mas então, pela primeira destas desigualdades, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $n \geq p \Longrightarrow \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < c$ (cf. (2.3.14.)). Logo , ter-se-ia

$$\frac{x_{p+1}}{x_p} < c,\ \frac{x_{p+2}}{x_{p+1}} < c,\ \ldots,\ \frac{x_n}{x_{n-1}} < c.$$

Multiplicando termo a termo resulta $\dfrac{x_n}{x_p} < c^{n-p}$; portanto, tem-se

$$x_n < (x_p/c^p).c^n.$$

Fazendo $k = x_p/c^p$, número real fixo, obtém-se para todo o $n > p$, $x_n < k\,c^n$ e logo $\sqrt[n]{x_n} < c\,\sqrt[n]{k}$. Como $\lim \sqrt[n]{k} = 1$, segue-se que

$$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\ c\,\sqrt[n]{k} = \lim\ c\,\sqrt[n]{k} = c$$

o que é contraditório. ■

2.3.17. Exemplos.

1. Procure-se o limite da sucessão: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Tem-se $x_n = \sqrt[n]{y_n}$ em que $y_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Pela proposição precedente, tem-se $\lim x_n = \lim \dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ se este último existir. Como

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

2. Consideremos $y_n > 0$, $\forall n$, e admita-se que $\sum\limits_n y_n = +\infty$. Supondo que $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$, mostremos que

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = a.$$

Seja então $\epsilon > 0$ qualquer. Da hipótese resulta que existe uma ordem N tal que $a - \epsilon < x_n/y_n < a + \epsilon$, $n > N$, ou seja

$$ay_n - \epsilon\, y_n < x_n < ay_n + \epsilon\, y_n, \quad \text{se} \quad n > N.$$

Somando termo a termo, tem-se

$$a\,(y_{N+1} + \cdots + y_n) - \epsilon\,(y_{N+1} + \cdots + y_n) < x_{N+1} + \cdots + x_n <$$
$$< a\,(y_{N+1} + \cdots + y_n) + \epsilon\,(y_{N+1} + \cdots + y_n)$$

e portanto,

$$a\left(1 - \frac{y_1 + \cdots + y_N}{y_1 + \cdots + y_n}\right) - \epsilon\left(1 - \frac{y_1 + \cdots + y_N}{y_1 + \cdots + y_n}\right) <$$
$$< \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} <$$
$$< a\left(1 - \frac{y_1 + \cdots + y_N}{y_1 + \cdots + y_n}\right) + \epsilon\left(1 - \frac{y_1 + \cdots + y_N}{y_1 + \cdots + y_n}\right).$$

Como $\sum y_n = +\infty$, os limites, $n \to \infty$, à esquerda e à direita, são respetivamente $a - \epsilon$ e $a + \epsilon$; logo

$$a - \epsilon \le \overline{\lim} \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} \le a + \epsilon$$

e analogamente para o limite inferior. Sendo ϵ qualquer, tem-se então

$$\overline{\lim} = \underline{\lim} = \lim \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} = a.$$

A conclusão sai agora da decomposição

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} = \frac{x_1 + \cdots + x_N}{y_1 + \cdots + y_n} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n}$$

e de $\sum y_n = +\infty$.

Exercícios

1. Seja (x_n) uma sucessão convergente, com $\lim x_n > 0$. Mostre que todos os termos da sucessão, excepto possivelmente um número finito, são positivos.
Prove, com um exemplo, que a recíproca é falsa.

2. Indique quais das seguintes sucessões são majoradas, minoradas ou limitadas:

a) $\dfrac{n + (-1)^n}{n}$; *b)* $(-1)^n n^2$; *c)* $n^{(-1)^n}$; *d)* $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$;

e) $u_1 = 0, u_2 = 1, u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$;

f) $u_1 = -1, u_{n+1} = -2u_n$.

3. Dê exemplos de sucessões (x_n) e (y_n) tais que $\lim x_n = \lim y_n$ e

a) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$; *b)* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 1$; *c)* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$;

d) $\lim \dfrac{x_n}{y_n}$ não existe.

4. Suponha que $\lim x_n . y_n = 0$. Poder-se-á concluir que pelo menos uma das sucessões (x_n) ou (y_n) tende para 0?

5. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim x_n = x,\ x_n \neq 0,\ \forall n$.

a) Mostre, apresentando um exemplo, que não existe necessariamente $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

b) Demonstre que, se existe $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a$, então $|a| \leq 1$.

6. Seja (x_n) uma sucessão limitada. Ponha-se

$$y_n = \max_{1\leq k\leq n}\{x_k\}, \quad z_n = \min_{1\leq k\leq n}\{x_k\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Mostre que as sucessões (y_n) e (z_n) convergem.

7. Seja (x_n) uma dada sucessão e $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ uma bijeção. Pondo $y_n = x_{\varphi(n)}$, mostre que (x_n) é convergente se e só se (y_n) o for.

8. Considere uma sucessão u_n crescente e uma sucessão v_n decrescente e suponha que $u_n \leq v_n$ para todo o $n \in \mathbf{N}$.

a) Mostre que as sucessões u_n e v_n são convergentes e que se tem $\lim u_n \leq \lim v_n$.
Se, além disso, a sucessão $v_n - u_n$ tiver limite 0, mostre que as duas sucessões atrás referidas têm o mesmo limite.

b) Aplique os resultados precedentes às sucessões u_n e v_n definidas por u_0 e v_0, $0 < u_0 < v_0$, e por:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

9. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim x_n = 0$ e para cada n ponha

$$y_n = \min\{|\ x_1\ |, |\ x_2\ |, \ldots, |\ x_n\ |\}$$

Prove que $y_n \to 0$.

10. Seja (x_n) uma sucessão que satisfaz

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C\,k^n, \ \ 0 < k < 1, \ n \in \mathbf{N}, \ C \in \mathbf{R}.$$

Mostre que (x_n) é de Cauchy.

11. Diz-se que uma sucessão (x_n) tem *variação limitada* quando a sucessão (v_n), dada por $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$, é limitada. Prove que, nesse caso, (v_n) converge. Prove ainda que:

a) Se (x_n) tem variação limitada, então x_n é convergente.
b) Se

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c\,|x_{n+1} - x_n|\,, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ \text{com} \quad 0 \leq c < 1,$$

então (x_n) tem variação limitada.

c) Sendo (x_n) de variação limitada e considerando a sucessão $w_n = v_n + x_n$ então w_n é crescente e limitada.
Conclua que (x_n) é uma sucessão de variação limitada se e só se $x_n = y_n - z_n$ em que (y_n) e (z_n) são sucessões crescentes e limitadas.

12. Considere a sucessão, definida por recorrência,

$$a_1 = 1, \; a_{n+1} = a_n + (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

Mostre que (a_n) é uma sucessão de Cauchy e portanto convergente.
Conclua que (a_n) é exemplo de uma sucessão convergente que não tem variação limitada.

13. Ponha $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$. Mostre que a sucessão (x_n), assim definida, é monótona e limitada. Determine $\lim x_n$.

14. Defina-se a sucessão recorrente (x_n) por

$$\begin{cases} x_1 = a \\ \\ x_{n+1} = q x_n + d \end{cases} \qquad a, q, d \in \mathbf{R}, \; n \in \mathbf{N}.$$

(x_n) diz-se uma progressão aritmético-geométrica.

a) Se $|q| < 1$, mostre que a sucessão (x_n) converge e calcule o seu limite.

b) Se $|q| > 1$ e $a \neq d/(1-q)$, mostre que a sucessão (x_n) diverge.

c) Supondo $q \neq 1$, considere-se a sucessão

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n, \; n \in \mathbf{N}.$$

Calcule $\lim \dfrac{S_n}{n}$ e $\lim(S_n - n x_n)$.

15. Considere-se a sucessão

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ \\ x_{n+1} = a\,(x_n + 1/x_n) \end{cases} \qquad n \in \mathbf{N}, \; a \in \mathbf{R}.$$

a) Demonstre que $\lim x_n = +\infty$ se $a \geq 1$

b) Se $0 < a < 1$, mostre que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c\,|x_{n+1} - x_n|, \quad 0 < c < 1, \quad \forall n > 1.$$

c) Sempre na hipótese de $0 < a < 1$, utilize o exercício 10. para mostrar que (x_n) é sucessão de Cauchy.
Conclua que $\lim x_n = \sqrt{a/(1-a)}$.

16. Utilize o método das sucessões enquadradas para determinar o limite das seguintes sucessões:

a) $\dfrac{n!}{n^n}$; *b*) $\dfrac{2^n}{n!}$; *c*) $\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ $(a \in \mathbf{R})$; *d*) $\dfrac{a^n}{n!}(a \in \mathbf{R})$;

e) $\dfrac{(n-p)!}{n!}(p \in \mathbf{N})$; *f*) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$.

17. Determine os limites das sucessões de termos gerais:

a) $\dfrac{(-1)^n n^3 + 1}{n^2 + 2}$; *b*) $\dfrac{a^n b^n}{a^n + b^n}$, $a > 0, b > 0$.

c) $\dfrac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{n^2}$.

18. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim x_n = a$. Pondo,

$$y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

mostre que $\lim y_n = a$. Apresente um exemplo de uma sucessão (x_n) divergente para a qual existe $\lim y_n$.

19. Seja (y_n) uma sucessão estritamente crescente tal que $\lim y_n = +\infty$. Utilize o exemplo 2.(2.3.17.) para mostrar que:

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a \Longrightarrow \lim \frac{x_n}{y_n} = a.$$

20. Aplique o resultado anterior na determinação do limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}.$$

21. Estude quanto à convergência as sucessões seguintes, indicando os limites das que são convergentes:

a) $x_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots 2n}$; *b*) $x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n + \dfrac{1}{2}}$;

c) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}$;

d) $x_n = \dfrac{3^n}{\sqrt[n]{2n+(3n)^n}}$;

e) $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)\dfrac{n^3+3}{4n^3+4}$; *f)* $x_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n\sin\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)}$.

22. Determine $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}\,\alpha^n} = 2.$$

23. Seja $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ uma sucessão de números naturais. Mostre a equivalência das seguintes asserções:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$.

b) Para todo $k \in \mathbf{N}$, $\varphi^{-1}(k)$ é um subconjunto finito de $\mathbf{N}$.

c) Para todo o subconjunto finito $F \subset \mathbf{N}$, $\varphi^{-1}(F)$ é finito.

Em particular, se φ for injetiva, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$.

(*Poderá mostrar: a)* $\implies$ *b)* $\implies$ *c)* $\implies$ *a)*.)

24. Seja (x_n) uma sucessão em $\mathbf{R}$ tal que as subsucessões (x_{2n}), (x_{2n+1}) e (x_{3n}) são convergentes. Mostre que (x_n) é convergente.

25. Mostre que uma sucessão (x_n) é convergente para $a \in \mathbf{R}$ se e só se de toda a subsucessão (x_{α_n}) é possível extrair uma subsucessão convergente para a.

26. Seja (x_n) uma sucessão limitada. Demonstre que a sucessão $y_n = n\,(x_{n+1} - x_n)$ não pode ter limite $+\infty$. Dê um exemplo de uma sucessão (x_n) convergente e tal que $\lim |\,n\,(x_{n+1} - x_n)\,| = +\infty$.

27. Seja x_n uma sucessão majorada, satisfazendo a condição

$$x_{n+1} - x_n \geq a_n,\ n \in \mathbf{N},$$

em que a_n é tal que $\sum a_n$ é uma série convergente. Mostre que a sucessão (x_n) converge.

Sug. Tenha presente a demonstração do resultado que estabelece o limite de sucessão monótona limitada.

28. Estude a natureza das séries de Mengoli, $\sum (a_n - a_{n+k}),\ k \in \mathbf{N}$. Como aplicação, calcule
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+6n+5}.$$

29. Mostre que, sendo a série $\sum u_n^2$ convergente, então $\sum u_n/n$ é absolutamente convergente.

30. Se $\sum u_n,\ u_n \geq 0$, é série convergente, mostre que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. Demonstre que a recíproca também é verdadeira se (u_n) for sucessão monótona.

31. Mostre a convergência das séries

a) $\sum(-1)^n \dfrac{\sin(nx)}{n}$; *b)* $\sum(-1)^n \dfrac{\sin(x/n)}{n}$;

c) $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} - \cdots$

32. Considere a série alternada, $\sum(-1)^n u_n$, com u_n decrescente para 0. Prove a seguinte estimação do resto de ordem n,
$$|R_n| \leq u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3}.$$
Aplique o resultado às séries
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n!}$$
e diga qual o menor número de termos que tem de somar para obter um erro inferior a $1/1000$, ao substituir a soma da série por S_n.

33. Seja $A \subset \mathbf{R}$ um subconjunto majorado de $\mathbf{R}$ e seja $L = \sup A$.
Prove que existe uma sucessão (x_n), com $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbf{N}$, convergente para L. Mostre ainda que, se A não tem máximo, a sucessão (x_n) pode ser escolhida estritamente crescente.

34. Determine os pontos interiores, exteriores, fronteiros, de acumulação e isolados dos seguintes subconjuntos de $\mathbf{R}$, indicando os que são abertos e fechados:

a) $\mathbf{N}$ *b)* $\mathbf{Q}$ *c)* $\mathbf{R}$-$\mathbf{Q}$ *d)* $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$

e) $\left(\left[\dfrac{1}{2}, \pi\right] - \mathbf{Q}\right) \cup (\mathbf{Q} \cap [1,3])$ *f)* $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : (n,m) \in \mathbf{N}^2\right\}$.

35. Seja $A \subset \mathbf{R}$ um aberto de $\mathbf{R}$. Prove que, para todo o $x \in \mathbf{R}$, o conjunto:

$$x + A = \{x + y : y \in A\}$$

é aberto. Do mesmo modo, se $x \neq 0$, mostre que o conjunto:

$$x.A = \{xy : y \in A\}$$

é aberto.

36. Sejam A e B subconjuntos abertos em $\mathbf{R}$. Mostre que os conjuntos:

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\} \quad \text{e} \quad A.B = \{xy : x \in A, y \in B\}$$

são abertos.

37. Considere as funções $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dadas por

$$f(x) = ax + b\,(a \neq 0), \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3.$$

Mostre que, para cada aberto $A \subset \mathbf{R}$, $f^{-1}(A), g^{-1}(A)$ e $h^{-1}(A)$ são abertos.
Dê um exemplo de um conjunto A aberto tal que $g(A)$ não seja aberto.

38. Determine os limites superior e inferior das sucessões:

a) $n^{(-1)^n+1}$; *b)* $\cos \dfrac{n\pi}{8}$; *c)* $\sqrt{n} - (-1)^n\sqrt{n} - 1$.

39. Construa uma sucessão real em que o conjunto dos sublimites é um dado conjunto finito, $\{l_1, \ldots, l_m\} \subset \mathbf{R}$

40. Construa uma sucessão (x_n) de números reais tal que todo o inteiro positivo seja limite de uma subsucessão de (x_n).

41. Seja (x_n) uma sucessão limitada tal que

$$\lim\,(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Seja $a = \underline{\lim}\, x_n$ e $b = \overline{\lim}\, x_n$, com $a < b$. Mostre que todo o número do intervalo $[a, b]$ é sublimite de (x_n).

42. Seja $X \subset \mathbf{R}$ um subconjunto não vazio de $\mathbf{R}$. Mostre que $\mathrm{int}(X)$ é um aberto. Mostre em seguida que $\overline{X}$ é fechado.

43. Seja $\mathcal{A}$ uma família de abertos e $\mathcal{F}$ uma família de fechados em $\mathbf{R}$.

a) Se $A_i \in \mathcal{A}(i \in I)$, mostre que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ é aberto. Se $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$, mostre que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é aberto.

b) Se $F_i \in \mathcal{F}(i \in I)$, mostre que $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ é fechado. Se $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{F}$, mostre que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é fechado.

c) Dê contraexemplos mostrando que a interseção de um número qualquer de abertos não é necessariamente aberto e a reunião de um número qualquer de fechados não é necessariamente fechado.

44. Seja $X \subset \mathbf{R}$ um subconjunto não vazio e considere o seu conjunto derivado X'. Demonstre :

a) X' é fechado, isto é $(X')' \subset X'$.

b) Se $X \subset Y$ então $X' \subset Y'$.

c) $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$.

d) $(\overline{X})' = X'$

45. Mostre que todo o conjunto aberto $A \subset \mathbf{R}$ é união numerável de intervalos abertos.

46. Seja $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uma colecção numerável de conjuntos fechados e não vazios em $\mathbf{R}$, e tais que

$$\begin{cases} i) & F_{n+1} \subset F_n, \quad n = 1, 2, \ldots \\ ii) & \text{Cada } F_n \text{ é fechado e } F_1 \text{ é limitado.} \end{cases}$$

Mostre que $\displaystyle\bigcap_{n} F_n$ é fechado e não vazio.

47. Mostre que o conjunto de racionais, $\mathbf{Q}\cap]0,1[$, não pode ser interseção numerável de conjuntos abertos.

Conclua que $\mathbf{Q}$ não é interseção numerável de abertos e logo, o conjunto dos irracionais, $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$, não é união numerável de fechados.

Sug. Escreva $\mathbf{Q}\cap]0,1[= \{q_1, q_2, \ldots\} = \displaystyle\bigcap_{n} A_n$, A_n *aberto, e verifique que pode ter* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$. *Para cada* n, *construa um fechado* $F_n \subset A_n$ *e tal que* $q_n \notin F_n$. *Utilize o exercício precedente.*

3

Limite e Continuidade

3.1. Noção de limite. Propriedades gerais.

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função real de variável real e $a \in \overline{D}$ um ponto de $\mathbf{R}$ aderente ao domínio $D \subset \mathbf{R}$.

3.1.1. Definição. *Diz-se que o* ***limite*** *de f no ponto $a \in \overline{D}$ é $b \in \mathbf{R}$ e escreve-se $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ se para todo $\delta > 0$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, se $x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ então $f(x) \in V_\delta(b)$ ou seja,*

$$x \in D \quad \text{e} \quad | x - a | < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad | f(x) - b | < \delta.$$

Observação importante. Repare-se que se $a \in D$ e se existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ então necessariamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Com efeito, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, como $a \in D$ satisfaz $| a - a | < \varepsilon$, ter-se-á então $| f(a) - b | < \delta$ para todo o $\delta > 0$ e logo $f(a) = b$. Assim

$$a \in D \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} f(x) \, \text{existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Para muitos autores, o limite de f em $a \in \overline{D}$ não faz intervir o valor de f em a, isto é, o limite de f quando x tende para a é b se e só se $\forall \delta > 0$, $\exists \epsilon > 0 : x \in D$ e $0 < |x - a| < \epsilon \implies |f(x) - b| < \delta$. Esta definição corresponde ao que nós chamaremos, limite de f quando x tende para a por valores diferentes de a.

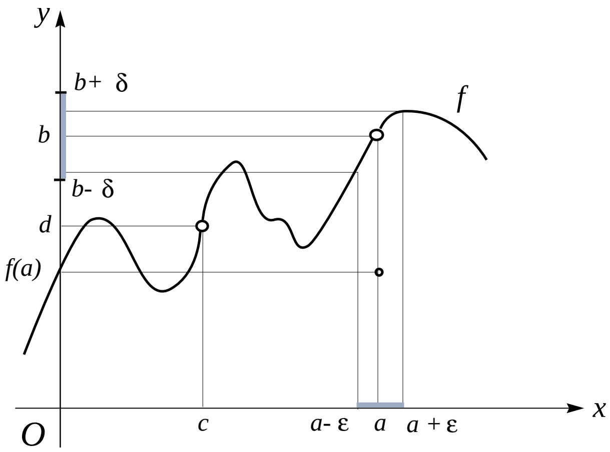


Figura 3.1

Na figura representada, f não tem limite em $a \in D$ $(f(a) \notin V_\delta(b))$, mas tem limite em $c \in \overline{D} \backslash D$: $\lim_{x \to c} f(x) = d$.

3.1.2. Proposição. *Sejam $f, g : D \to \mathbf{R}$ funções reais de variável real e $a \in \overline{D}$.*

1. *Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então é único (**unicidade do limite**).*
2. *Se $f(x) = g(x) \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ e existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então $\lim_{x \to a} g(x)$ existe e tem-se:*
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$
3. *Se $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que:*
$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in V_\varepsilon(a).$$
4. *Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$, então*
$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x),$$
caso existam os limites considerados.
5. *Se $h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$ e se $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e*
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

Demonstração. Comecemos por ver 1. (unicidade do limite). Tendo-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{x \to a} f(x) = b'$, para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$| f(x) - b | < \delta/2 \quad \text{e} \quad | f(x) - b' | < \delta/2$$

desde que $x \in D$ e $| x - a | < \varepsilon$; escolhendo um $x \in D$ nestas condições (o qual existe já que $a \in \overline{D}$) tem-se

$$\begin{aligned} | b - b' | = &| b - f(x) + f(x) - b' | \leq \\ &\leq | f(x) - b | + | f(x) - b' | < \delta/2 + \delta/2 = \delta, \end{aligned}$$

para todo o $\delta > 0$, o que implica que $b = b'$.
A demonstração de 2. e 5. resulta facilmente da definição de limite e 4. é conseqência imediata de 3. que passamos a demonstrar; seja

$$\lim_{x \to a} f(x) = b < \lim_{x \to a} g(x) = c$$

e escolha-se $\delta : 0 < \delta < \dfrac{c - b}{2}$ (portanto $b + \delta < c - \delta$). Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $x \in V_\varepsilon(a) \cap D$, se tem

$$b - \delta < f(x) < b + \delta \quad \text{e} \quad c - \delta < g(x) < c + \delta$$

e portanto, em particular,

$$f(x) < b + \delta < c - \delta < g(x), \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D. \blacksquare$$

Limites em $\overline{\mathbf{R}}$. A noção de limite é agora estendida ao caso em que a é $+\infty$ ou $-\infty$ (limites no infinito); de seguida contemplamos o caso em que o limite da função possa ser $+\infty$ ou $-\infty$ (limites infinitos).

3.1.3. Definição. *Se $+\infty$ é ponto de acumulação de D (isto é, D não é majorado), diz-se que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbf{R}$ se*

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 : x \in D, \, x > \frac{1}{\varepsilon} \implies | f(x) - b | < \delta.$$

Se $-\infty$ é ponto de acumulação de D (isto é, D não é minorado), diz-se que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbf{R}$ se

$$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 : x \in D, \, x < -\frac{1}{\varepsilon} \implies | f(x) - b | < \delta.$$

3.1.4. Definição. *Diz-se que o limite de f em a é $+\infty$ (resp. $-\infty$) se*

$$\forall \delta > 0 \, \exists \varepsilon > 0 : x \in V_\varepsilon(a) \cap D \implies f(x) > \frac{1}{\delta} \quad (\text{resp.}\, f(x) < -\frac{1}{\delta})$$

e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$).

De uma maneira geral: se $a \in \overline{D}$ *e* $b \in \overline{\mathbf{R}}$, *diz-se que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *se*

$$(L) \qquad \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : x \in V_\varepsilon(a) \cap D \Longrightarrow f(x) \in V_\delta(b).$$

Observação. Note-se que se $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n$, é uma sucessão real, o limite $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)$ coincide com a noção de limite de uma sucessão, já de nós conhecida.

Definição de limite pelas sucessões. A definição de limite de função num ponto, atrás estabelecida com base no conceito topológico de vizinhança, pode ser reformulada no quadro das sucessões, o que nos permite tirar partido do conhecimento já adquirido das propriedades algébricas e topológicas das sucessões reais. Mostraremos então a equivalência das duas definições.

3.1.5. Definição. *Sejam* $a \in \overline{D}$ *e* $b \in \overline{\mathbf{R}}$. *Diz-se que o* ***limite*** *de* f *em* a *é* b *e escreve-se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *se para toda a sucessão* $x_n \in D$ *tal que* $x_n \to a$, *então* $f(x_n) \to b$, *isto é*

$$(L') \qquad x_n \in D,\ x_n \longrightarrow a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \longrightarrow b.$$

Mostremos a ***equivalência das duas definições*** ou seja: $(L) \Longleftrightarrow (L')$.

Seja $x_n \in D$ com $x_n \to a$; então, dado $\delta > 0$, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que

$$n > p \Longrightarrow x_n \in V_\varepsilon(a) \cap D$$

em que $\varepsilon > 0$ é dado pela definição (L); e daqui resulta que $f(x_n) \in V_\delta(b)$ para $n > p$, isto é, $f(x_n) \to b$, o que mostra que $(L) \Longrightarrow (L')$.
Reciprocamente, mostremos por absurdo que $(L') \Longrightarrow (L)$. Com efeito, se não se verifica (L), isto significa que existe $\delta > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe

$$x \in V_\varepsilon(a) \cap D \quad \text{e} \quad f(x) \notin V_\delta(b).$$

Em particular, fazendo $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, escolha-se um elemento $x_n \in V_{1/n}(a) \cap D$ tal que $f(x_n) \notin V_\delta(b)$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Mas então $x_n \to a$ e $f(x_n)$ não converge para b o que contraria (L').

3.1.6. Proposição. *Para que exista limite* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *é necessário e suficiente que* $f(x_n)$ *tenha limite, para toda a sucessão* $x_n \in D$ *tal que* $\lim x_n = a$.

Demonstração. Trata-se apenas de mostrar que dadas duas sucessões em D, x_n e y_n com limite a então $f(x_n)$ e $f(y_n)$ têm o mesmo limite.

Com efeito, construindo a sucessão z_n como $z_{2n} = x_n$ e $z_{2n+1} = y_n$, tem-se naturalmente $z_n \to a$ e logo, existindo limite de $f(z_n)$ todos os sublimites são iguais:

$$\lim f(z_{2n}) = \lim f(z_{2n+1}) \Longrightarrow \lim f(x_n) = \lim f(y_n). \blacksquare$$

3.1.7. Proposição (*Critério de Cauchy*). *A condição necessária e suficiente para que f tenha limite finito no ponto a é que para todo $\delta > 0$ exista um $\varepsilon > 0$ tal que*

$$(C) \qquad x, y \in V_\varepsilon(a) \cap D \Longrightarrow | f(x) - f(y) | < \delta.$$

Demonstração. Se existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbf{R}$, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$x, y \in V_\varepsilon(a) \cap D \Longrightarrow | f(x) - b | < \delta/2, \quad | f(y) - b | < \delta/2$$

e portanto

$$| f(x) - f(y) | \leq | f(x) - b | + | b - f(y) | < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Reciprocamente, suponhamos satisfeita esta condição e tomemos $x_n \to a$. Então $f(x_n)$ é sucessão de Cauchy: com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $n, m > p \Longrightarrow x_n, x_m \in V_\varepsilon(a)$ e logo por (C),

$$| f(x_n) - f(x_m) | < \delta.$$

Sendo de Cauchy $f(x_n)$ é convergente e a conclusão sai da proposição precedente. $\blacksquare$

Das propriedades algébricas dos limites das sucessões resulta agora:

3.1.8. Teorema (*Propriedades algébricas dos limites*). *Admitindo que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, tem-se*

i) $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = b + c,$

ii) $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = b.c,$

iii) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$

iv) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{b}{c} \quad \text{se}\, c \neq 0.$

v) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0.$

3.1.9. Exemplos.

1. Seja $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,\ a_n \neq 0$ um polinómio de grau n com coeficientes reais. P_n representa uma função definida em $\mathbf{R}$ que admite limite em cada ponto $a \in \mathbf{R}$. Com efeito, pelas propriedades algébricas dos limites, se $x \to a$ então $x^n \to a^n$ e logo

$$\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a).$$

2. Nós supomos conhecidas as funções trigonométricas bem como as suas relações algébricas. Mais tarde teremos ocasião de apresentar uma definição rigorosa destas funções. Recordemos entretanto a introdução geométrica elementar das funções $\sin x$ e $\cos x$. O número real x representa o comprimento do arco de circunferência de raio 1 associado ao ângulo θ; $\sin x$ representa a medida do segmento $\overline{CB}$ enquanto $\cos x$ representa a medida do segmento $\overline{OC}$ (cf. Figura 3.2).

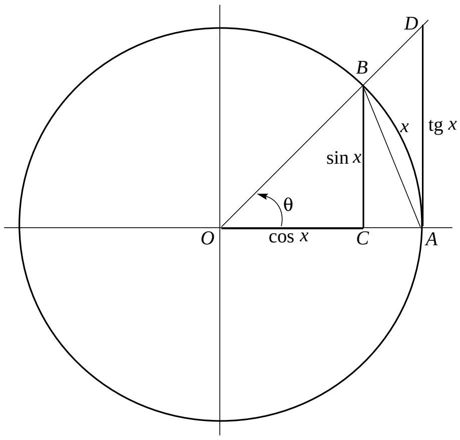


Figura 3.2

Consideremos agora a função $f : \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x}.$$

Como o segmento $\overline{AB}$ tem uma medida inferior a $x \in]0, \pi/2[$ (medida do arco AB), tira-se do teorema de Pitágoras:

$$x^2 > \overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = (1-\cos x)^2 + \sin^2 x = 2 - 2\cos x$$

e logo, $0 < \dfrac{1-\cos x}{x} < \dfrac{x}{2}$.

Dado que $\cos(-x) = \cos x$, tem-se $0 < \left|\dfrac{1-\cos x}{x}\right| < \left|\dfrac{x}{2}\right|$, para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}$, donde (prop. 3.1.2.(5.)):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Repare-se ainda (cf. Figura 3.2) que

$$0 < \sin x < x, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

e mais geralmente (dado que $\sin(-x) = -\sin x$)

$$0 < |\sin x| \leq |x|, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Recordando agora a identidade

$$\sin u - \sin v = 2 \sin \frac{u-v}{2} \cos \frac{u+v}{2},$$

tem-se

$$|\sin x - \sin a| \leq 2 \left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leq |x-a|$$

e logo (3.1.2.(5.))

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a.$$

3. Considere-se a função $f :]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Sendo a medida do arco AB inferior à soma das medidas dos segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ (cf. Figura 3.2), tem-se para $x \in]0, \pi/2[$:

$$x < 1 - \cos x + \sin x < 1 - \cos x + x$$

e portanto

$$1 < \frac{1-\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} < \frac{1-\cos x}{x} + 1,$$

ou seja

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{1-\cos x}{x} = \left|\frac{1-\cos x}{x}\right|.$$

Dado que $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$, a desigualdade anterior é válida para $x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}$ e, pelo resultado do exemplo anterior, podemos concluir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

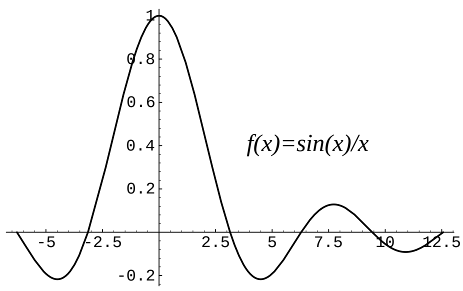


Figura 3.3

4. Considere-se a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Trata-se de uma função que não tem limite em nenhum ponto $a \in \mathbf{R}$. Com efeito, basta observar que, tomando sucessões $x_n \in \mathbf{Q} \to a$ e $x'_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \to a$ se tem, respetivamente, $f(x_n) \to 1$ e $f(x'_n) \to 0$ o que mostra, de acordo com a definição de limite pelas sucessões, que f não pode ter limite em a.

5. Tomemos a função $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (cf. Figura 3.4).

Tem-se obviamente

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq | x |,$$

pelo que

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

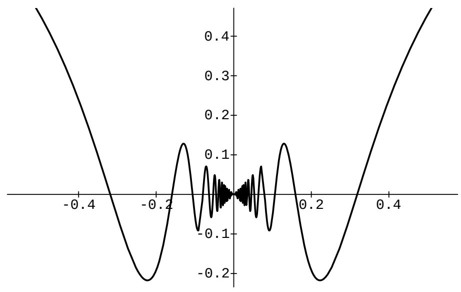


Figura 3.4

6. Considerando agora a função $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (cf. Figura 3.5) logo se vê que a função não admite limite na origem :

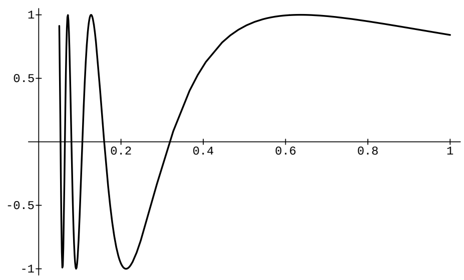


Figura 3.5

tomando $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ e $x'_n = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2}$, tem-se $\lim x_n = \lim x'_n = 0$; como $\lim f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$ e $\lim f(x'_n) = \sin(2n\pi + \pi/2) = 1$, f não tem limite em $x = 0$.

Limites relativos. Limites laterais. Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma dada função e considere-se uma parte $A \subset D$; seja $a \in \overline{A}$ (fecho de A em $\overline{\mathbf{R}}$).

3.1.10. Definição. *Chama-se* ***limite de*** f ***em*** a ***relativo a*** A *e representa-se por* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$, *ao limite (quando existe) :*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \lim_{x\to a} \left(f_{|A}\right)(x).$$

3.1.11. Proposição. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *então* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$ *para toda a parte* $A \subset D$ *tal que* $a \in \overline{A}$.

A demonstração é imediata; repare-se que, reciprocamente, uma função f pode admitir limite em a relativo a alguns subconjuntos do seu domínio sem que no entanto tenha limite no ponto $a :$ retomando o exemplo 3.1.9.(4.)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

embora não haja limite em nenhum ponto, tem-se

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbf{Q}}} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}} f(x) = 0 \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Casos especialmente importantes:

1. $A = D \setminus \{a\}$; note-se desde logo que $a \in \overline{A}$ significa aqui que a é ponto de acumulação de D. Sob esta condição, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ diz-se o ***limite de*** f ***quando*** x ***tende para*** a ***por valores diferentes de*** a e representa-se por

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x).$$

2. $A = \{x \in D, x < a\} = D_a^-$; se $a \in \overline{A}$, o que significa que a é de acumulação de D_a^-, então $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D_a^-}} f(x)$ diz-se o ***limite lateral à esquerda de*** f ***no ponto*** a e representa-se por

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \quad \text{ou} \quad f(a^-).$$

3. $A = \{x \in D, x > a\} = D_a^+$; sendo a de acumulação de D_a^+, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in D_a^+}} f(x)$ diz-se o ***limite lateral à direita de*** f ***no ponto*** a e representa-se por

$$\lim_{x \to a^+} f(x), \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ou} \quad f(a^+).$$

Observações.1. Repare-se que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ (caso exista) significa

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : x \in D,\ a - \varepsilon < x < a \Longrightarrow f(x) \in V_\delta(b)$$

e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ é equivalente a

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : x \in D,\ a < x < a + \varepsilon \Longrightarrow f(x) \in V_\delta(b).$$

2. Se a é ponto de acumulação de D_a^- e D_a^+ (e portanto de D) é um simples exercício mostrar que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b$ se e só se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existem e são iguais a b. Observe-se no entanto que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ***não implica*** que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (cf. Figura 3.1). Enfim, se $a \in D$, podemos concluir que existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se e só se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Mudança de variável: limite da função composta.

Sejam $f : D \to \mathbf{R}$ e $\varphi : T \to \mathbf{R}$ funções tais que $\varphi(T) \subset D$. Consideremos a composição,

$$f \circ \varphi : T \longrightarrow \mathbf{R}, \quad t \in T \longrightarrow f(\varphi(t)).$$

3.1.12. Teorema. *Se* $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$ *e* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existe, então* $f \circ \varphi$ *tem limite em* t_0 *e*

$$\lim_{t \to t_0} (f \circ \varphi)(t) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Observação. Deverá admitir-se que $t_0 \in \overline{T}$ e $x_0 \in \overline{D}$. Contudo basta supor que $t_0 \in \overline{T}$ dado que tal hipótese implica $x_0 \in \overline{D}$ (***exercício***).

Demonstração. Tomemos $t_n \to t_0$; como $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$ vem $\varphi(t_n) \to x_0$ e como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe, $f(\varphi(t_n)) \to \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Logo, a definição de limite pelas sucessões dá o resultado. ∎

O teorema do limite da função composta generaliza-se imediatamente (com as devidas hipóteses) ao caso dos limites relativos e em particular aos limites laterais. Vejamos o seguinte exemplo de aplicação:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t^2}{t};$$

na prática toma-se a mudança de variável $t^2 = x$, que se traduz na composição da aplicação $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, com a aplicação $\varphi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x = \varphi(t) = t^2$, isto é, $\dfrac{\sin t^2}{t} = f(\varphi(t))$; como $x = \varphi(t) \to 0^+$ quando $t \to 0$, tem-se

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t^2}{t} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}.\frac{\sin x}{x}\right) = 0.$$

Limite de funções monótonas. Recordemos a noção de função monótona (cf. (1.4.3.)). Tem-se agora o seguinte importante

3.1.13. Teorema. *Toda a função monótona $f : D \to \mathbf{R}$ tem limites laterais à esquerda (resp. à direita) em todo o ponto a em que tais limites possam ser definidos: a ponto de acumulação de D_a^- (resp. a ponto de acumulação de D_a^+).*

Demonstração. Seja $f : D \to \mathbf{R}$ e a um ponto de acumulação de $D_a^- = \{x \in D : x < a\}$. Mostremos primeiro que

se f é monótona crescente então $\quad f(a^-) = \sup_{x\in D_a^-} f(x)$

se f é monótona decrescente então $\quad f(a^-) = \inf_{x\in D_a^-} f(x)$

Seja $L = \sup_{x\in D_a^-} f(x) \in \mathbf{R}$ (finito); se $L = +\infty$ a demonstração é análoga. Da definição de supremo, para todo $\delta > 0$ existe um $x_0 \in D_a^-$ tal que $f(x_0) > L - \delta$. Sendo f crescente, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in]x_0, a[\cap D$ e logo

$$L - \delta < f(x_0) \leq f(x) \leq L \quad \forall x \in]x_0, a[\cap D$$

ou seja $L = f(a^-)$.

Se f é monótona decrescente então é claro que $-f$ é monótona crescente. Utilizando o resultado já demonstrado e o teorema 1.4.7.(2.), tira-se

$$f(a^-) = -\lim_{x\to a^-} (-f(x)) = -\sup_{x\in D_a^-} (-f(x)) = \inf_{x\in D_a^-} f(x).$$

Analogamente

$$f(a^+) = \inf_{x \in D_a^+} f(x) \quad \text{se } f \text{ é monótona crescente}$$

$$f(a^+) = \sup_{x \in D_a^+} f(x) \quad \text{se } f \text{ é monótona decrescente.} \blacksquare$$

Função monótona crescente:

$$f(a^-) = \sup_{x \in D_a^-} f(x)$$

$$f(a^+) = \inf_{x \in D_a^+} f(x).$$

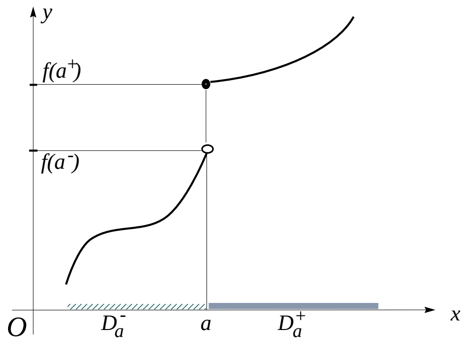


Figura 3.6

Corolário 1. *Se $f : D \to \mathbf{R}$ é monótona e $a \in D$, então $f(a^-)$ e $f(a^+)$ são finitos e tem-se*

$$f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+) \quad \textit{se } f \textit{ é crescente.}$$

$$f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+) \quad \textit{se } f \textit{ é decrescente.}$$

Corolário 2. *Se $f : D \to \mathbf{R}$ é monótona e $+\infty$ (resp. $-\infty$) é ponto de acumulação de D então existem os limites de f em $+\infty$ (resp. em $-\infty$) e tem-se*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_D f \quad \textit{se } f \textit{ é crescente}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf_D f \quad \textit{se } f \textit{ é decrescente}$$

respetivamente:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf_D f \quad \textit{se } f \textit{ é crescente}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup_D f \quad \textit{se } f \textit{ é decrescente.}$$

Observação. Aplicando o corolário precedente à sucessão $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = x_n$, obtemos os resultados já conhecidos sobre os limites das sucessões monótonas (cf. (2.1.6.)).

3.1.14. Limite superior e inferior de uma função.

Consideremos $f : D \to \mathbf{R}$ e $a \in \overline{D}$ (em particular $a = +\infty$ ou $-\infty$). Suponhamos f majorada numa dada vizinhança $V_\delta(a)$ e para todo $\varepsilon > 0$ ($\epsilon \leq \delta$), consideremos

$$L(a, \varepsilon) = \sup_{x \in V_\varepsilon(a) \cap D} f(x).$$

É claro que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Longrightarrow L(a, \varepsilon_1) \leq L(a, \varepsilon_2)$ e logo

$$L(a, \varepsilon) :]0, \delta[\longrightarrow \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in]0, \delta[\longrightarrow L(a, \varepsilon)$$

define uma função crescente (e portanto, como vimos, com limite lateral em cada ponto). Define-se ***limite superior*** de f em a e representa-se por $\overline{\lim_{x \to a}} f(x)$, como

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} L(a, \varepsilon) \equiv \overline{\lim_{x \to a}} f(x).$$

Analogamente, sendo f minorada numa dada vizinhança $V_\delta(a)$ e pondo

$$l(a, \varepsilon) = \inf_{x \in V_\varepsilon(a) \cap D} f(x) \quad (\epsilon \leq \delta),$$

obtém-se uma função, agora decrescente,

$$l(a, \varepsilon) :]0, \delta[\longrightarrow \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in]0, \delta[\longrightarrow l(a, \varepsilon)$$

e define-se ***limite inferior*** de f em a como

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} l(a, \varepsilon) \equiv \underline{\lim_{x \to a}} f(x).$$

Assim, tem-se

$$\overline{\lim_{x \to a}} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\sup_{x \in V_\varepsilon(a) \cap D} f(x) \right) = \inf_{\varepsilon > 0} \left(\sup_{x \in V_\varepsilon(a) \cap D} f(x) \right)$$

e

$$\underline{\lim_{x \to a}} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\inf_{x \in V_\varepsilon(a) \cap D} f(x) \right) = \sup_{\varepsilon > 0} \left(\inf_{x \in V_\varepsilon(a) \cap D} f(x) \right).$$

Se f não for majorada em nenhuma vizinhança de a, então define-se $\overline{\lim_{x \to a}} f(x) = +\infty$; do mesmo modo, se f não é minorada em nenhuma vizinhança de a, define-se $\underline{\lim_{x \to a}} f(x) = -\infty$.

Observações. 1. No caso particular de uma sucessão $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = x_n$ e $a = +\infty$, a definição de limite superior significa

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\, f(x) = \inf_{\varepsilon>0}\left(\sup_{n\in V_\varepsilon(+\infty)} x_n\right) = \inf_{\varepsilon>0}\left(\sup_{n>1/\varepsilon} x_n\right)$$

que é igual a

$$\inf_{p\in\mathbf{N}}\left(\sup_{n\geq p} x_n\right) = \overline{\lim}\, x_n$$

ou seja, o limite superior de uma sucessão, anteriormente definido (cf. (2.3.13.)). Do mesmo modo se recupera a noção de limite inferior de uma sucessão.

2. Dado que $l(a,\varepsilon) \leq L(a,\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, tem-se então

$$\underline{\lim_{x\to a}}\, f(x) \leq \overline{\lim_{x\to a}}\, f(x).$$

À semelhança do que acontece com as sucessões, temos agora

3.1.15. Proposição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ e $a \in \overline{\mathbf{R}}$. A função f tem limite no ponto a se e só se $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$, tendo-se então*

$$\underline{\lim_{x\to a}}\, f(x) = \overline{\lim_{x\to a}}\, f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Demonstração. Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbf{R}}$. Então

$$\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0 : x \in V_\varepsilon(a) \cap D \Longrightarrow f(x) \in V_{\delta/2}(A)$$

e portanto

$$l(a,\varepsilon), L(a,\varepsilon) \in V_\delta(A).$$

Tomando uma sucessão $\delta_n \to 0$, é então possível escolher $\varepsilon_n \to 0$ tal que $l(a,\varepsilon_n), L(a,\varepsilon_n) \in V_{\delta_n}(A)$ e portanto $l(a,\varepsilon_n) \to A$ e $L(a,\varepsilon_n) \to A$, o que implica

$$\underline{\lim_{x\to a}}\, f(x) = \overline{\lim_{x\to a}}\, f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = A. \qquad (l)$$

Reciprocamente, suponha-se a condição (l) satisfeita com $A \in \mathbf{R}$ (o caso $A = \pm\infty$ tem demonstração semelhante). Dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$A - \delta < L(a,\varepsilon) < A + \delta \quad \text{e} \quad A - \delta < l(a,\varepsilon) < A + \delta.$$

Mas,

$$L(a,\varepsilon) - A < \delta \Longrightarrow f(x) - A < \delta \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D,$$

$$A - l(a,\varepsilon) < \delta \Longrightarrow A - f(x) < \delta \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D.$$

Logo
$$| f(x) - A | < \delta \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$$
ou seja, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. ■

3.1.16. Proposição. *Sejam $f, g : D \to \mathbf{R}$ e $a \in \overline{D}$. Então tem-se*

1. *Se* $f(x) \leq g(x) \quad (x \in V_\varepsilon(a) \cap D)$,

   $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x) \leq \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, g(x); \quad \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x) \leq \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, g(x);$

2. $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,(-f(x)) = -\underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x);$

3. *Se* $f(x) > 0 \ (x \in V_\varepsilon(a) \cap D), \quad \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)};$

4. $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,(f(x) + g(x)) \leq \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x) + \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, g(x);$

   $\underline{\lim\limits_{x\to a}}\,(f(x) + g(x)) \geq \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x) + \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, g(x);$

   $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,(f(x) + g(x)) \geq \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x) + \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, g(x);$

5. *Se* $f(x), g(x) \geq 0 \quad (x \in V_\varepsilon(a) \cap D)$,

   $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,(f(x)g(x)) \leq \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)\, \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, g(x);$

   $\underline{\lim\limits_{x\to a}}\,(f(x)g(x)) \geq \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)\, \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, g(x);$

   $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,(f(x)g(x)) \geq \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x)\, \underline{\lim\limits_{x\to a}}\, g(x);$

6. *Se existe* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

   $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,(f(x) + g(x)) = \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x);$

7. *Se* $f(x), g(x) \geq 0 \quad (x \in V_\varepsilon(a) \cap D)$ *e se existe* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$,

   $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\,(f(x)g(x)) = \overline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x);$

   sempre que os segundos membros façam sentido em $\overline{\mathbf{R}}$.

Demonstração. Observe-se desde logo que 6. e 7. são consequência imediata de 4. e 5. respetivamente. A demonstração resulta facilmente das definições de limite superior e inferior e da aplicação do teorema 1.4.7.. A título ilustrativo vejamos, por exemplo, a primeira desigualdade de 4.. Com efeito,

$$\overline{\lim_{x\to a}}(f(x)+g(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\sup_{x\in V_\varepsilon(a)\cap D} f(x)+g(x)\right);$$

como, por 1.4.7.(5.), se tem

$$\sup_{x\in V_\varepsilon(a)\cap D}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in V_\varepsilon(a)\cap D} f(x) + \sup_{x\in V_\varepsilon(a)\cap D} g(x)$$

a conclusão sai trivialmente de 3.1.2. e 3.1.8. ■

3.1.17. Exemplo. Retomando o já conhecido exemplo

$$f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbf{R},\quad f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

vemos que

$$\left.\begin{aligned} L(0,\varepsilon) &= \sup_{x\in V_\varepsilon(0)\setminus\{0\}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1, \\ l(0,\varepsilon) &= \inf_{x\in V_\varepsilon(0)\setminus\{0\}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \end{aligned}\right. \quad \forall\varepsilon>0$$

e logo

$$\overline{\lim_{x\to a}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1,\quad \underline{\lim_{x\to a}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=-1.$$

3.2. Funções contínuas. Primeiras propriedades.

3.2.1. Definição. *Seja $f:D\to\mathbf{R}$ e $a\in D$. Diz-se que f é uma **função contínua no ponto** a se $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, isto é*

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0: x\in D,\ |\ x-a\ |<\varepsilon \Longrightarrow |\ f(x)-f(a)\ |<\delta.$$

Observações. 1. De acordo com a definição dada de limite, a função f ***é contínua no ponto*** a ***se e só se*** f ***tem limite em*** a (como vimos, se a função tem limite em $x=a\in D$, este não pode deixar de ser $f(a)$).
A definição de limite pelas sucessões permite também acrescentar que f é contínua em a se e só se

$$\forall x_n\in D,\ x_n\longrightarrow a \Longrightarrow f(x_n)\longrightarrow f(a).$$

2. É claro que toda a função f é contínua em todo o ponto isolado do seu domínio.

3. Se $a \in D$ é ponto de acumulação, e portanto é possível definir o limite quando x tende para a por valores diferentes de a, resulta das definições que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$$

e logo f é contínua em a se e só se $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$ (admitindo ser possível definir os limites laterais).

As duas proposições seguintes são consequência imediata dos correspondentes resultados sobre limites.

3.2.2. Proposição (*Propriedades algébricas*). *Sejam f, g, funções contínuas em $a \in D \subset \mathbf{R}$. Então $f+g$, $f.g$, $|\ f\ |$ e $-f$ são contínuas em a. Se $g(a) \neq 0$, f/g é também contínua em a.*

3.2.3. Proposição (*Continuidade da função composta*). *Consideremos $\varphi : D \to \mathbf{R}$ e $f : E \to \mathbf{R}$ funções tais que $\varphi(D) \subset E$. Se φ é contínua em $a \in D$ e f é contínua em $\varphi(a) \in E$ então $f \circ \varphi$ é contínua em a.*

3.2.4. Definição. *Uma função $f : D \to \mathbf{R}$ diz-se* ***contínua em*** *D (ou apenas contínua) se for contínua em todos os pontos de D. Uma função $f : D \to \mathbf{R}$ diz-se contínua numa parte $C \subset D$ se $f_{|C}$ for contínua.*

3.2.5. Descontinuidades.

Seja dada uma função $f : D \to \mathbf{R}$; diz-se que $a \in D$ é uma ***descontinuidade*** ou um ***ponto de descontinuidade*** se f não é contínua em a.

Diz-se que a função f possui uma ***descontinuidade de primeira espécie*** em a se f é descontínua em a e admite os limites laterais *finitos*, $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a^-)$. (Se a é somente de acumulação de D_a^+ ou D_a^-, isto é, se $a \in (D_a^+)'$ ou $a \in (D_a^-)'$, apenas se exige a existência do limite lateral finito correspondente). Um ponto de descontinuidade diz-se de ***segunda espécie*** se não for de primeira espécie.

A análise do conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função é um tema particularmente relevante; teremos ocasião de regressar a este assunto quando adiante estudarmos o integral de Riemann.

Por vezes, é conveniente definir o ***salto*** de f, $\sigma(a)$, num ponto $a \in D$ que admita os limites laterais $f(a^+)$ e $f(a^-)$. Assim, por definição,

$$\sigma(a) = \max\{|f(a^+) - f(a)|,\ |f(a^-) - f(a)|\}, \quad \text{se} \quad a \in (D_a^+)' \cap (D_a^-)';$$

se apenas $a \in (D_a^+)'$, respetivamente $a \in (D_a^-)'$, pomos

$$\sigma(a) = |f(a^+) - f(a)|, \quad \text{respetivamente} \quad \sigma(a) = |f(a^-) - f(a)|.$$

Enfim, se $a \notin (D_a^+)' \cup (D_a^-)'$, ($a$ é um ponto isolado em D), pomos $\sigma(a) = 0$. É claro que $\sigma(a) \geq 0$ e $\sigma(a) = 0$ se e só se f é contínua em a.

Seja agora f uma função monótona; as suas descontinuidades serão necessariamente de primeira espécie (cf. 3(.1.13.), Corolário.). Além disso,

3.2.6. Proposição. *Se $f : D \to \mathbf{R}$ é uma função monótona, então o conjunto das suas descontinuidades é finito ou numerável.*

Demonstração. Fixando $a, b \in D$, $a < b$, quaisquer, basta provar que o conjunto das descontinuidades de f em $D \cap [a, b]$ é numerável (porquê ?). Seja então $D_n = \{x \in D \cap [a, b] : \sigma(x) \geq 1/n\}$. O conjunto das descontinuidades de f em $D \cap [a, b]$ é obviamente $\bigcup\limits_n D_n$, e este será numerável se todos os D_n forem, em particular, finitos. Admitindo que f é monótona crescente (o caso decrescente é similar), sejam $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq b$, m discontinuidades de f em D_n. Então,

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma(x_k) \leq \sum_{k=1}^{m} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] \leq f(b^+) - f(a^-)$$

e como $\sigma(x_k) \geq 1/n$ é claro que D_n terá de ser finito (ou vazio), para todo o n, o que prova o resultado. ■

3.2.7. Exemplos.

1. A função Sgn : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, chamada ***função sinal de*** x e dada por

$$\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

tem em 0 uma descontinuidade de primeira espécie:

$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{Sgn}(x) = \mathrm{Sgn}(0^+) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \mathrm{Sgn}(x) = \mathrm{Sgn}(0^-) = -1.$$

2. Um clássico exemplo é dado pela função, já conhecida: dado $x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = x_0$.

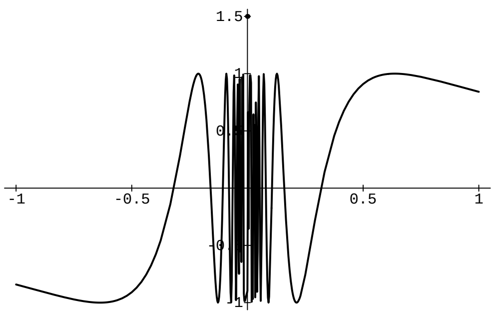


Figura 3.7

A função f tem uma descontinuidade de segunda espécie em 0: não existem $f(0^+)$ e $f(0^-)$.

3. A função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos $x \in \mathbf{R}$, os quais são descontinuidades de segunda espécie : para todo $a \in \mathbf{R}$, existem sucessões $x_n > a$, $y_n > a$, $x_n \in \mathbf{Q}$, $y_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, convergentes para a, tendo-se então $f(x_n) \to 1$ e $f(y_n) \to 0$, o que mostra que não existe $f(a^+)$; do mesmo modo se via que não existe $f(a^-)$.

4.

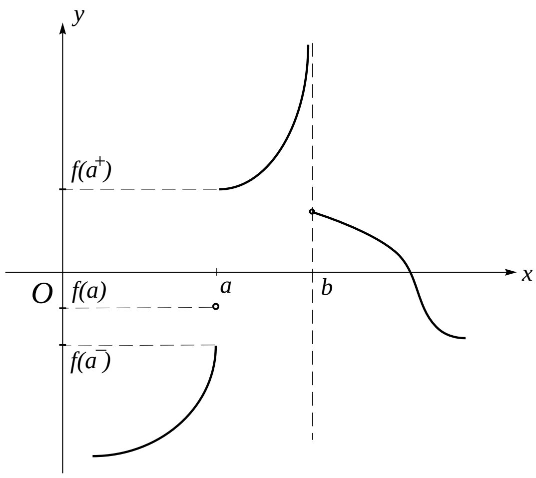


Figura 3.8

A função representada na figura admite uma descontinuidade em a de primeira espécie e uma descontinuidade em b de segunda espécie. $f(a^+), f(a^-) \in \mathbf{R}$, $f(b^-) = +\infty$.

5. Consideremos a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \\ 1/q & \text{se} \quad x = p/q \in \mathbf{Q} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

sendo p/q uma fracção irredutível, isto é, $p, q \in \mathbf{Z}$, são primos entre si e $q > 0$. Mostremos que existe $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = 0$, para todo o $a \in \mathbf{R}$.

Bastará mostrar que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbf{Q}}} f(x) = 0$, ou seja

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \ : \ |p/q - a| < \varepsilon \implies 1/q < \delta \ (\Leftrightarrow q > 1/\delta).$$

Ora, os inteiros positivos $q \leq 1/\delta$ são em número finito; designemos por $B = \{q_1, \ldots, q_m\}$ o seu conjunto. Existe então uma mais pequena fracção com denominador em B, p'/q_i, tal que $p'/q_i > a$; analogamente, seja p''/q_j a maior fracção com denominador em B e tal que $p''/q_j < a$. Fazendo $\varepsilon = \min\{a - p''/q_j, p'/q_i - a\}$, é agora claro que todo o racional $p/q \neq a$, tal que $a - \varepsilon < p/q < a + \varepsilon$, deverá satisfazer $q \notin B$, ou seja $1/q < \delta$ como se queria.
Como f é nula nos irracionais, tem-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = 0$ se $a \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$; a função f é um exemplo de função contínua no conjunto dos irracionais e descontínua no conjunto dos racionais. No entanto não existe nenhuma função f que seja contínua nos racionais e descontínua nos irracionais (cf. exercício 30.).

3.3. Teoremas fundamentais da continuidade.

Os teoremas apresentados nesta secção constituem resultados centrais da Análise Real. São resultados ***globais***, isto é, determinam o comportamento das funções $f : D \to \mathbf{R}$ em todo o seu domínio e derivam da conjunção dos seguintes dois aspectos:

1. A função f é contínua.
2. O domínio D de f tem uma determinada “forma topológica”.

Funções contínuas em intervalos.

Comecemos por observar que um conjunto $I \subset \mathbf{R}$ é um intervalo (limitado, não limitado, aberto, fechado ou semiaberto) se e só se para quaisquer $x, y \in I$ com $x \leq y$ se tem $[x, y] \subset I$.

3.3.1. Teorema (*Existência de zeros*). *Sejam $a, b \in \mathbf{R}$ números reais tais que $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Se $f(a).f(b) < 0$, existe pelo menos um $\xi \in]a, b[$ tal que $f(\xi) = 0$; tal ξ diz-se um* ***zero de*** *f.*

Demonstração. Seja então $f(a).f(b) < 0$, isto é, $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários. Tomemos $c = (a + b)/2$; se $f(c) = 0$ então $c = \xi$, senão $f(a).f(c) < 0$ ou $f(c).f(b) < 0$ (cf. Fig. 3.9). Seja por exemplo $f(a).f(c) < 0$; ponha-se então $a_1 = a, b_1 = c$ e escolha-se de novo o ponto intermédio, $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Se $f(c_1) = 0$ então $c_1 = \xi$; caso contrário, ter-se-á $f(a_1).f(c_1) < 0$ ou $f(c_1).f(b_1) < 0$. Seja (por ex.) $f(c_1).f(b_1) < 0$; faz-se então $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$.

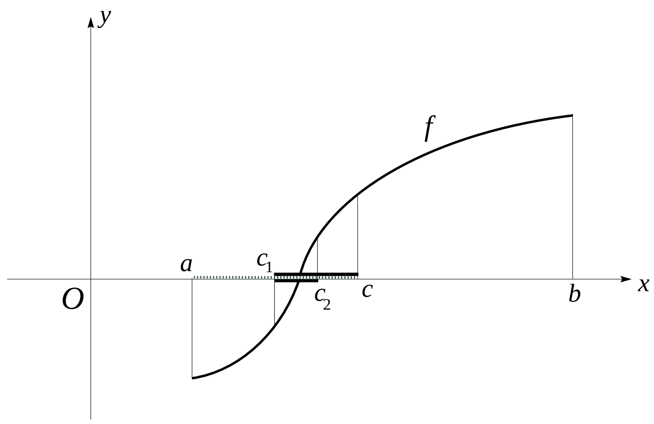


Figura 3.9

Prosseguindo o raciocínio, ou terminamos num número finito de passos: $c_n = \xi$; ou obtemos uma sucessão de intervalos encaixados

$$[a_0, b_0] = [a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

tais que, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Mas então existirá um único ponto ξ comum a todos os intervalos (axioma do encaixe). Como por construção se tem

$$f(a_n) < 0 \quad \text{e} \quad f(b_n) > 0,$$

ou

$$f(a_n) > 0 \quad \text{e} \quad f(b_n) < 0$$

conclui-se em qualquer dos casos

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0 \Longrightarrow f(\xi) = 0$$

ou

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0 \Longrightarrow f(\xi) = 0. \ \blacksquare$$

O corolário seguinte, devido a Bolzano, exprime a ideia intuitiva de que uma função contínua definida num intervalo "não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios".

Corolário (*Bolzano*). *Sejam $a, b \in \mathbf{R}$ números reais tais que $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, isto é, se (por ex.) $f(a) < f(b)$,*

$$\forall y_0 \text{ tal que } f(a) < y_0 < f(b),\ \exists x_0 \in]a, b[\text{ tal que } f(x_0) = y_0.$$

Demonstração. Admitindo (por ex.) que $f(a) < f(b)$ e tomando um qualquer y_0 tal que $f(a) < y_0 < f(b)$, a função

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = f(x) - y_0$$

está nas condições do teorema, pelo que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ e logo $f(x_0) = y_0$. ∎

Observações 1. O método utilizado na demonstração do teorema precedente é um clássico método de aproximação numérica dos zeros de uma função. Repare-se que, quando aplicado à função $f(x) = x^n - A$, reproduz precisamente a demonstração da proposição 1.1.1. (existência da raiz n de um real positivo). Existem outros métodos de aproximação das raízes de $f(x) = 0$; este importante tema é objecto de desenvolvimento na disciplina de Análise Numérica.

2. A função $f : [-1, +1] \to \mathbf{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in [-1, 0[\\ \\ +1 & \text{se} \quad x \in [0, +1] \end{cases}$$

embora tenha como domínio um intervalo, não toma valores entre $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$. Com efeito, a função f é ***descontínua*** em $x = 0$.

Tomemos agora a função $f : [-1, 0] \cup [1, 2] \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x$; embora se trate de uma função contínua, f não toma todos os valores valores entre $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$: neste caso o seu domínio ***não é um intervalo***.

3.3.2. Teorema (*Bolzano*). *Seja $f : I \to \mathbf{R}$, uma função contínua num intervalo $I \subset \mathbf{R}$. Então $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração. Sejam $y_1, y_2 \in f(I)$ tais que $y_1 < y_2$. Tem-se $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ com $x_1, x_2 \in I$. Como f é contínua em $[x_1, x_2]$ (ou $[x_2, x_1]$ no caso de $x_2 < x_1$), resulta do corolário anterior que $[y_1, y_2] \subset f(I)$ e logo $f(I)$ é um intervalo. ∎

Observação. Repare-se que o teorema de Bolzano não se pronuncia sobre a natureza do intervalo $f(I)$; o intervalo $f(I)$ terá necessariamente como extremos $\inf_I f$ e $\sup_I f$ que poderão pertencer ou não a $f(I)$, isto é, o intervalo $f(I)$ pode ser fechado, aberto ou semiaberto. Assim, por exemplo a função

$$f : I = [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin x$$

é contínua e tem-se $f(I) = [-1, 1]$ (intervalo fechado). Tomando agora a função

$$f : I =]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = | x |,$$

também contínua em I, obtém-se como imagem o intervalo $f(I) = [0, 1[$ (intervalo semiaberto).

3.3.3. Proposição. *Seja $I \subset \mathbf{R}$ um intervalo de $\mathbf{R}$ e $f : I \to \mathbf{R}$ uma função contínua e injetiva. Então f é estritamente monótona.*

Demonstração. Se $I = \{x_0\}$ o resultado é trivial.
Sejam então $x_0, y_0 \in I$ dois quaisquer elementos de I tais que $x_0 < y_0$. Como $f(x_0) \neq f(y_0)$, ter-se-à $f(x_0) < f(y_0)$ ou $f(y_0) < f(x_0)$. No primeiro caso mostra-se que f é estritamente crescente e no segundo estritamente decrescente. Suponha-se então $f(x_0) < f(y_0)$ (no segundo caso a demonstração é idêntica) e mostremos em primeiro lugar que, para todo x tal que $x_0 < x < y_0$ se tem $f(x_0) < f(x) < f(y_0)$. Com efeito, se assim não for, tem-se

$$(a) \quad f(x) < f(x_0) < f(y_0)$$

ou

$$(b) \quad f(x_0) < f(y_0) < f(x).$$

Mas, tendo-se (a), o teorema de Bolzano implica que existe $\xi \in]x, y_0[$ tal que $f(\xi) = f(x_0)$ o que contraria a injetividade de f. (cf. Fig. 3.10)

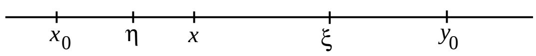


Figura 3.10

Tendo-se (b), de novo o teorema de Bolzano implica a existência de um $\eta \in]x_0, x[$ tal que $f(\eta) = f(y_0)$, contrariando ainda a injetividade de f. Logo

$$f(x_0) < f(x) < f(y_0).$$

Finalmente, se $x_0 < x < y < y_0$, pela parte atrás demonstrada, tira-se que $f(x_0) < f(y) < f(y_0)$; mas como $x_0 < x < y$ e $f(x_0) < f(y)$, tem-se ainda pela parte anterior

$$f(x_0) < f(x) < f(y).$$

Logo, $f_{|[x_0, y_0]}$ é estritamente crescente e portanto f também o será já que x_0 e y_0 são quaisquer em I. ∎

3.3.4. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função monótona no intervalo I; se $f(I)$ é um intervalo então f é contínua.*

Demonstração. Suponhamos f crescente e seja $x_0 \in I$ (se f é decrescente o raciocínio é semelhante). Pelo corolário 1. de 3.1.13. tem-se

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

Se fosse $f(x_0^-) < f(x_0^+)$, então $f(I)$ não podia ser um intervalo já que todo o $\xi \in \left]f(x_0^-), f(x_0^+)\right[$ com $\xi \neq f(x_0)$ não está em $f(I)$. Logo os limites laterais são iguais e f é contínua. ■

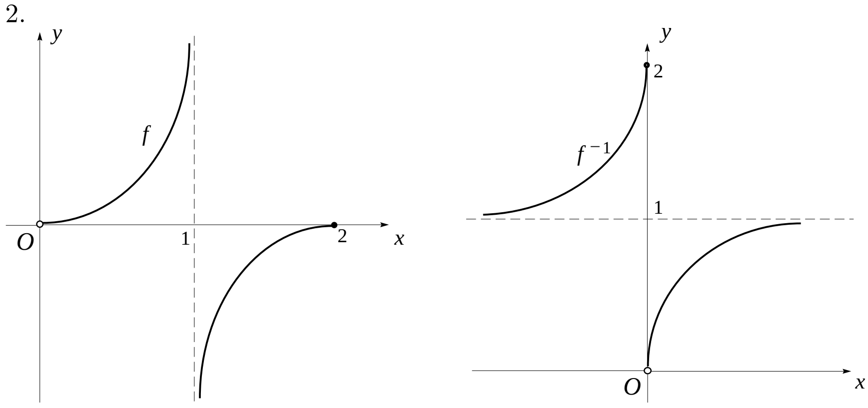
Podemos agora estabelecer o importante teorema da continuidade da função inversa. A questão é a de saber se para uma função f contínua e injetiva a função inversa é ainda contínua. A resposta, em geral, é negativa (veja-se a Figura 3.11);

3.3.5. Teorema (*continuidade da função inversa*). *Seja f uma função contínua e injetiva definida num intervalo $I \subset \mathbf{R}$. Então f^{-1} é contínua.*

Demonstração. Pela proposição 3.3.3. f vem estritamente monótona e portanto também f^{-1} é estritamente monótona. Mas f^{-1} está definida em $f(I)$ que é um intervalo (teorema 3.3.2. (Bolzano)) e a sua imagem, im $f^{-1} =$ dom $f = I$, ainda é um intervalo. Resulta agora da proposição anterior que f^{-1} é contínua. ■

Observações. 1. A função f nas condições do teorema é portanto uma *bijeção* de um intervalo I sobre um intervalo J e é *bicontínua*, isto é, f e f^{-1} são ambas contínuas; por isso, f diz-se um ***homeomorfismo*** de I sobre J.

2.



f:$]0,1[\cup]1,2]\longrightarrow\mathbf{R}$ é contínua. f^{-1}:$\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ é descontínua em 0.

Figura 3.11

A função f da figura precedente embora seja contínua e injetiva não tem inversa contínua (f^{-1} é descontínua em $x = 0$). De acordo com o teorema da função inversa, o que falha neste exemplo é o facto de o domínio de f ***não ser um intervalo.***

3.3.6. Funções contínuas em compactos.

Na anterior secção vimos como as funções contínuas, quando definidas em intervalos, têm notáveis propriedades. No que se segue, são apresentados novos resultados referentes a funções contínuas definidas em conjuntos compactos.

3.3.7. Definição. *Um conjunto $D \subset \mathbf{R}$ diz-se um* ***conjunto compacto*** *se for limitado e fechado.*

Antes de apresentarmos algumas caracterizações dos conjuntos compactos em $\mathbf{R}$, introduza-se a noção de cobertura de um conjunto $D \subset \mathbf{R}$.

Uma família de conjuntos $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ diz-se uma ***cobertura*** *de D se* $D \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. Uma subfamília, $\{I_\beta\}_{\beta\in B}$, $B \subset A$, que seja ainda uma cobertura de D, diz-se uma *subcobertura* de $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

3.3.8. Proposição(*) *Seja $D \subset \mathbf{R}$ um subconjunto de $\mathbf{R}$. São equivalentes*

a) D é compacto

b) Toda a cobertura $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de D formada por intervalos abertos contém uma subcobertura finita.

c) Para toda a sucessão (x_n) em D existe uma subsucessão (x_{α_n}) convergente para um ponto de D.

Demonstração. *a)* $\Longrightarrow$ *b)*. Seja $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura de D formada por intervalos abertos e suponhamos (por absurdo) que não é possível cobrir D com um número finito de tais intervalos. Sendo D limitado, $D \subset [a,b]$ $(a < b)$; dividindo o intervalo ao meio, pelo menos um dos dois subintervalos obtidos, J_1, é tal que $D \cap J_1$ não é coberto com um número finito de intervalos I_α. Prosseguindo o raciocínio, obtemos uma sucessão de intervalos encaixados,

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset \cdots, \quad J_n = [a_n, b_n],$$

com $b_n - a_n \to 0$ e tais que $J_n \cap D$ não é coberto com um número finito de intervalos I_α. Pelo axioma do encaixe, existe $x_0 \in \bigcap J_n$, que será ponto de acumulação de D (porquê?). Dado que D é fechado, $x_0 \in D$ e logo $x_0 \in I_{\alpha_0}$, para algum $\alpha_0 \in A$. Como $a_n, b_n \to x_0$ e I_{α_0} é um intervalo

(*) A implicação *a)* $\Longrightarrow$ *b)* é usualmente designada na literatura matemática por *Lema da cobertura* ou *Lema de Borel - Lebesgue.*

aberto, a partir de certa ordem $n > N$, vem $J_n \subset I_{\alpha_0}$ o que é contraditório (os conjuntos $J_n \cap D$ não podiam ser cobertos com um número finito de intervalos I_α).

b) $\Longrightarrow$ *c*). Seja (x_n) uma sucessão em D; como D satisfaz a propriedade *b*) (também chamada propriedade da cobertura), terá de ser necessariamente limitado (bastará tomar a cobertura $\{\ ]x-1,\ x+1[\ \}_{x\in D}$ e aplicar *b*)). A sucessão (x_n) é então limitada e logo (cf. (2.3.12.), Corolário.) existe uma subsucessão convergente, $x_{\alpha_n} \to x_0,\ x_0 \in \overline{D}$. Afirmamos que $x_0 \in D$. Caso contrário, a família de intervalos abertos

$$\{\ ]x_0 - 1/n, x_0[,\quad]x_0, x_0 + 1/n[,$$

$$]-\infty, x_0 - 1/2[,\ \ ]x_0 + 1/2, +\infty[\ \}_{n\in\mathbf{N}}$$

é uma cobertura de D e não contém nenhuma subcobertura finita.

c) $\Longrightarrow$ *a*). Se D não é limitado, existe $x_n \in D$ tal que $x_n \to +\infty$ (ou $x_n \to -\infty$) e tal sucessão não pode ter sublimite finito (e portanto pertencente a D).
Enfim, D é fechado, já que todo $x_0 \in \overline{D}$ é limite de uma sucessão de pontos de D (cf. (2.3.9.)) e logo, pela hipótese *b*), $x_0 \in D$. ■

Observação. O leitor reconhecerá imediatamente que não é possível extrair nenhuma subcobertura finita nos exemplos seguintes:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}\ ]-n, n[,$$

$$]0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbf{N}}\ ]1/n, 2].$$

Com efeito, $\mathbf{R}$ não é limitado e $]0,1]$ não é fechado.

3.3.9. Proposição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função contínua definida num conjunto compacto $D \subset \mathbf{R}$. Então $f(D)$ é compacto.*

Demonstração. Tendo presente a anterior caracterização, trata-se de mostrar que para toda a sucessão (y_n) de pontos de $f(D)$ se pode extrair uma subsucessão convergente para um ponto de $f(D)$. Tomando $y_n \in f(D)$ tem-se $y_n = f(x_n)$ com $x_n \in D$. Como D é um conjunto compacto, existe uma subsucessão $x_{\alpha_n} \to x_0 \in D$. Logo, sendo f contínua

$$y_{\alpha_n} = f(x_{\alpha_n}) \longrightarrow f(x_0) \in f(D)$$

e portanto y_{α_n} é uma subsucessão de y_n convergente para um ponto de $f(D)$, como se queria. ■

Corolário 1. *Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é uma função contínua definida num intervalo limitado e fechado (intervalo compacto), a sua imagem é um intervalo limitado e fechado :*

$$f([a, b]) = [\alpha, \beta].$$

Demonstração. Consequência imediata da proposição anterior e do teorema 3.3.2.(Bolzano).

Corolário 2. (***Teorema de Weierstrass***). *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função contínua num compacto $D \subset \mathbf{R}$. Então f tem máximo e mínimo.*

Demonstração. Basta observar que $\sup\limits_D f,\ \inf\limits_D f \in \overline{f(D)} = f(D)$.

3.3.10. Continuidade uniforme.

Uma classe particular de funções contínuas são as funções uniformemente contínuas.

3.3.11. Definição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função real de variável real. Diz-se que f é* ***uniformemente contínua*** *em D se para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$x_1, x_2 \in D \text{ e } \mid x_1 - x_2 \mid < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \delta.$$

Resultado imediatamente da definição que *uma função uniformemente contínua é contínua* : basta fixar $x_1 = x_0 \in D$. A recíproca é ***falsa*** :

Contraexemplo. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$; trata-se claramente de uma função contínua. No entanto f não é uniformemente contínua em $\mathbf{R}$; com efeito, se assim fosse, dado $\delta = 1$, existia ε tal que

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \mid x_1 - x_2 \mid < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \mid x_1^2 - x_2^2 \mid < 1.$$

Escolhendo $x_1 = \dfrac{1}{\varepsilon}$ e $x_2 = \dfrac{1}{\varepsilon} + \dfrac{\varepsilon}{2}$, vinha $\mid x_1 - x_2 \mid < \varepsilon$ e

$$\mid x_1^2 - x_2^2 \mid = \left| \frac{1}{\varepsilon^2} - \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{4} + 1 \right) \right| = 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} > 1$$

o que é absurdo.

3.3.12. Dois exemplos notáveis.

1. Uma função $f : D \to \mathbf{R}$ diz-se ***lipschitziana em*** D se existe $K > 0$ tal que
$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq K \mid x - y \mid \quad \forall x, y \in D.$$

A constante K diz-se a constante de Lipschitz. Uma função lipschitziana com constante de Lipschitz $K \leq 1$ diz-se uma ***contração*** e se $K < 1$, diz-se uma ***contração estrita***.

2. Uma função $f : D \to \mathbf{R}$ diz-se ***hölderiana de ordem*** $\alpha \in]0,1[$ ***em*** D se existe uma constante $H_\alpha > 0$ tal que

$$| f(x) - f(y) | \leq H_\alpha | x - y |^\alpha \quad \forall x, y \in D.$$

A constante H_α diz-se a constante de Hölder de ordem $\alpha \in]0,1[$. É imediato verificar que as funções lipschitzianas e hölderianas em D são uniformemente contínuas em D.

3.3.13. Proposição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função uniformemente contínua e (x_n) uma sucessão de Cauchy em D. Então $f(x_n)$ é uma sucessão de Cauchy.*

Demonstração. Dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$x, y \in D \quad \text{e} \quad | x - y | < \varepsilon \implies | f(x) - f(y) | < \delta.$$

Como (x_n) é de Cauchy, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $| x_n - x_m | < \varepsilon \quad \forall n, m > p$ e portanto $| f(x_n) - f(x_m) | < \delta \quad (n, m > p)$, o que mostra o resultado. ∎

Corolário. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uniformemente contínua. Então para todo $a \in \overline{D} \cap \mathbf{R}$, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ e é finito.*

Demonstração. Com efeito, toda a sucessão $x_n \to a$ com $x_n \in D$, sendo convergente é de Cauchy; logo $f(x_n)$ é de Cauchy e portanto convergente. Portanto, o $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e é finito (cf. (3.1.6.)). ∎

Observações. 1. Sabíamos já que uma função contínua em D transforma sucessões *convergentes em D* em sucessões convergentes; no entanto, não transforma sucessões de Cauchy em sucessões de Cauchy : uma sucessão de Cauchy em D (que é convergente em $\mathbf{R}$) não é necessariamente convergente para um ponto de D. Por exemplo, a função $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}, \ f(x) = 1/x$, é contínua e transforma a sucessão de Cauchy $1/n$ na sucessão divergente, $f(1/n) = n$. A propriedade de transformar sucessões de Cauchy em sucessões de Cauchy é privilégio das funções uniformemente contínuas.

2. Útil na prática é a contra-recíproca do corolário precedente :

Se para algum $a \in \overline{D} \cap \mathbf{R}$ não existe $\lim_{x \to a} f(x)$ finito, então f não é uniformemente contínua.

3.3.14. Teorema (*Cantor*). *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função contínua num compacto $D \subset \mathbf{R}$. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se f não é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbf{N}$ existem elementos $x_n, y_n \in D$ satisfazendo

$$| x_n - y_n |< \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad | f(x_n) - f(y_n) |\geq \delta.$$

Mas sendo D compacto, a sucessão (x_n) possui uma subsucessão (x_{α_n}) convergente para um elemento $x_0 \in D$ e pela condição anterior resulta que $\lim y_{\alpha_n} = x_0$.
Como f é contínua, tem-se então

$$\lim f(x_{\alpha_n}) = \lim f(y_{\alpha_n}) = f(x_0)$$

o que contraria a desigualdade $| f(x_{\alpha_n}) - f(y_{\alpha_n}) |\geq \delta$. ■

3.3.15. Exemplos

1. Seja $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$. É uma função contínua no compacto $[0,1]$ e portanto uniformemente contínua. Todavia não é lipschitziana: com efeito

$$\sup_{x,y\in[0,1]} \frac{| \sqrt{x} - \sqrt{y} |}{| x - y |} = \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = +\infty.$$

Tomemos agora a função $g : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$, definida por $g(x) = \sqrt{x}$. Trata-se evidentemente de uma função contínua mas, o seu domínio não sendo compacto, não é aplicável o teorema de Cantor. No entanto, $g_{[1,+\infty[}$ é lipschitziana (e logo uniformememnte contínua) :

$$| g(x) - g(y) |= \frac{| x - y |}{| \sqrt{x} + \sqrt{y} |} \leq \frac{1}{2} | x - y |, \quad \forall x, y \geq 1.$$

Como $g_{[0,1]} = f$ é uniformemente contínua, conclui-se sem dificuldade que g é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$x_1, x_2 \in [0,1], \quad | x_1 - x_2 |< \varepsilon_1 \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) |< \frac{\delta}{2}$$

e existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$x_1, x_2 \in [1,+\infty[, \quad | x_1 - x_2 |< \varepsilon_2 \Longrightarrow | f(x_1) - f(x_2) |< \frac{\delta}{2}$$

e logo, para $x_1 \in [0,1]$, $x_2 \in [1,+\infty]$, $|x_1 - x_2| < \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, tem-se

$$| f(x_1) - f(x_2) |\leq | f(x_1) - f(1) | + | f(1) - f(x_2) |< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

2. A já conhecida função $f\ :]0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é contínua mas não uniformemente contínua; basta aplicar o anterior corolário e observar que f não admite limite quando $x \to 0^+$.

3.4. As funções exponencial e logarítmica.

Se a é um real positivo, recordemos que $a^{1/q} (q \in \mathbf{N})$ foi definido (cf. (1.1.1.)) como o *único real* $x > 0$ tal que $x^q = a$. Tomando agora um racional $\dfrac{p}{q} > 0$, define-se $a^{p/q}$ como $\left(a^{1/q}\right)^p$; define-se ainda $a^{-p/q}$ pondo

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}.$$

Enfim, convenciona-se que $a^0 = 1$.

Observação. Tem-se naturalmente $a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = (a^p)^{1/q}$. Com efeito,

$$\left[\left(a^{1/q}\right)^p\right]^q = \left[\left(a^{1/q}\right)^q\right]^p = a^p$$

donde a conclusão.

Fica assim definida uma aplicação $r \in \mathbf{Q} \to a^r \in \mathbf{R}$ que satisfaz o seguinte conjunto de propriedades :

$$(P_{\mathbf{Q}}) \quad \begin{cases} 1. \quad a^r > 0 \quad \forall r \in \mathbf{Q}; \\[2ex] 2. \quad a^0 = 1, \quad a^{r+s} = a^r . a^s, \quad (a^r)^s = a^{rs} \quad \forall r, s \in \mathbf{Q}; \\[2ex] 3. \quad \text{se} \quad a > 1, \quad r \in \mathbf{Q} \to a^r \quad \text{é estritamente crescente;} \\ \quad\;\; \text{se} \quad a < 1, \quad r \in \mathbf{Q} \to a^r \quad \text{é estritamente decrescente;} \\ \quad\;\; \text{se} \quad a = 1, \quad a^r = 1^r = 1 \quad \forall r \in \mathbf{Q}. \end{cases}$$

A demonstração destas propriedades é bastante elementar e segue-se dos correspondentes resultados já conhecidos para $a^r\,(r \in \mathbf{Z})$. À guisa de exemplo, veja-se a segunda iguldade de 2.; fazendo $r = p/q$, $s = p'/q'$, tem-se

$$(a^r.a^s)^{qq'} = \left((a^p)^{1/q}\right)^{qq'} . \left(\left(a^{p'}\right)^{1/q'}\right)^{qq'} = a^{pq'}.a^{p'q} = a^{pq'+p'q}$$

pelo que $a^{p/q}.a^{p'/q'} = a^{(pq'+p'q)/qq'} = a^{r+s}$.

O nosso objectivo é estender a aplicação $r \in \mathbf{Q} \to a^r\ (a > 0)$ a todo o $\mathbf{R}$ (definindo assim a potenciação: a^x, $x \in \mathbf{R}$).

Definição de $x \in \mathbf{R} \to a^x$.

Defina-se a aplicação $x \in \mathbf{R} \to a^x$, ***prolongando por continuidade*** a todo o $\mathbf{R}$ a aplicação $r \in \mathbf{Q} \to a^r$.

Lema. *Seja $a > 0$ um número real. Tem-se $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r\in\mathbf{Q}}} a^r = 1$. Em consequência, a aplicação $r \in \mathbf{Q} \to a^r$ é contínua.*

Demonstração. Se $a = 1$ o resultado é imediato. Se $a > 1$, resulta das propriedades $(P_{\mathbf{Q}})$ que $r \in \mathbf{Q} \to a^r$ é estritamente crescente e portanto existem os limites laterais em 0. Como

$$\lim_{r\to 0^+} a^r = \lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1; \quad \lim_{r\to 0^-} a^r = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1$$

tem-se o resultado. Se $a < 1$, então $\dfrac{1}{a} > 1$ e a conclusão sai de

$$\lim_{r\to 0} a^r = \lim_{r\to 0} \frac{1}{(1/a)^r} = 1.$$

Finalmente, a continuidade sai de

$$a^r - a^{r_0} = a^{r_0}\left(a^{r-r_0} - 1\right) \overset{r\to r_0}{\longrightarrow} 0. \quad \blacksquare$$

Eis agora o resultado que nos permite prolongar por continuidade a aplicação $r \in \mathbf{Q} \to a^r$:

3.4.1. Proposição. *A aplicação $r \in \mathbf{Q} \to a^r$ $(a > 0)$ admite limite finito em todo o ponto $x \in \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$*

Demonstração. Seja $x \in \mathbf{R}$ e fixemos racionais s_0, s_1 tais que $s_1 < x < s_0$. Tem-se então para todo o par de racionais r, s tais que $s_1 < r,\ s < s_0$

$$|a^r - a^s| = \left|a^s\left(a^{r-s} - 1\right)\right| < M\left|\left(a^{r-s} - 1\right)\right|$$

em que $M = \max\{a^{s_0}, a^{s_1}\}$. Por outro lado sai do lema precedente que, dado $\delta > 0$ existe um $\varepsilon > 0$, tal que

$$r, s \in \mathbf{Q}, \quad | \, r - s \, | < \varepsilon \Longrightarrow \left|a^{r-s} - 1\right| < \delta/M$$

e logo

$$r, s \in \mathbf{Q}, \quad r, s \in V_{\varepsilon/2}(x) \Longrightarrow |a^r - a^s| < M\left|\left(a^{r-s} - 1\right)\right| < \delta.$$

O critério de Cauchy 3.1.7. estabelece a conclusão. $\blacksquare$

Se $x = p/q \in \mathbf{Q}$, a continuidade de a^r, $r \in \mathbf{Q}$, implica $\displaystyle\lim_{\substack{r \to p/q \\ r \in \mathbf{Q}}} a^r = a^{p/q}$.

Portanto, ***é natural definir*** a^x ($x \in \mathbf{R}$) como o limite

$$a^x = \lim_{\substack{r \to x \\ r \in \mathbf{Q}}} a^r.$$

A aplicação $x \in \mathbf{R} \to a^x$ diz-se a ***função exponencial de base*** a ($a > 0$).

3.4.2. Teorema. *A função exponencial* $x \in \mathbf{R} \to a^x$ $(a > 0)$ *é contínua e satisfaz as propriedades:*

$$(P) \quad \begin{cases} 1. \quad a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}; \\[2ex] 2. \quad a^{x+y} = a^x . a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}; \\[2ex] 3. \quad \text{se} \quad a > 1, \quad x \in \mathbf{R} \to a^x \quad \text{é estritamente crescente;} \\ \quad \text{se} \quad a < 1, \quad x \in \mathbf{R} \to a^x \quad \text{é estritamente decrescente;} \\ \quad \text{se} \quad a = 1, \quad a^x = 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Demonstração. A demonstração de (P) é simples consequência das propriedades algébricas dos limites e das propriedades $(P_{\mathbf{Q}})$. A título de exemplo vejamos que a^x, $a > 1$, é estritamente crescente. Sejam $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$ e fixem-se racionais r_1, r_2 tais que $x < r_1 < r_2 < y$. Tomando as sucessões $r_n \in \mathbf{Q} \to x$ e $s_n \in \mathbf{Q} \to y$ tem-se (a partir de certa ordem n_0) $r_n < r_1 < r_2 < s_n$ e logo

$$a^x = \lim a^{r_n} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq \lim a^{s_n} = a^y.$$

Finalmente, a continuidade de $x \in \mathbf{R} \to a^x$ sai do mesmo argumento que o utilizado no lema anterior para mostrar a continuidade da exponencial racional. ■

No que se segue faremos o estudo da função exponencial fixando uma determinada base, a saber, o número

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

número de Neper, já nosso conhecido: $e = 2.718\,281\,828\,459\,045\ldots$. No final deduz-se facilmente o comportamento da exponencial $x \in \mathbf{R} \to a^x$, $\forall a > 0$. Veremos mais tarde a razão da eleição do número e para base da função exponencial. Mostremos entretanto

3.4.3. Proposição. *Tem-se*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Demonstração. Vejamos primeiro o limite em $+\infty$. Seja $x > 1$ e designemos por $I(x)$ o maior inteiro $\leq x$. Tem-se $I(x) \leq x < I(x) + 1$ e logo

$$1 + \frac{1}{I(x)} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{I(x)+1}$$

o que implica, pela monotonia da exponencial de base maior que 1

$$\left(1 + \frac{1}{I(x)}\right)^{1+I(x)} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1 + \frac{1}{I(x)+1}\right)^{I(x)}.$$

Pondo $n = I(x)$, vem então

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{I(x)}\right)^{1+I(x)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$
$$= \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} . \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

Analogamente, fazendo $n = I(x) + 1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{I(x)+1}\right)^{I(x)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} =$$
$$= \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \Big/ \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

Finalmente, para obter o resultado com $x \to -\infty$, faça-se $x_1 = -(1 + x)$; tem-se então

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x_1\to+\infty}\left(\frac{x_1}{x_1+1}\right)^{-1-x_1} =$$
$$= \lim_{x_1\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{x_1} . \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\right] = e. \blacksquare$$

3.4.4. Proposição. *Tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0.$$

Demonstração. Pondo $e = 1 + h\,(h > 0)$, resulta do binómio de Newton,

$$\frac{e^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} > \frac{1}{n} + h + \frac{(n-1)}{2}h^2$$

pelo que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$. Fazendo $n = I(x)$, tem-se $n \leq x < n+1$ e portanto

$$\frac{e^x}{x} > \frac{e^n}{n+1} = \frac{1}{e}\,\frac{e^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

donde a conclusão. Resulta agora facimente que

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{y\to+\infty} -ye^{-y} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0. \ \blacksquare$$

Corolário. *Para todo o $k \in \mathbf{R}$ tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \mid x \mid^k e^x = 0$$

Diz-se por isso que, " e^x ***é um infinito superior a todas as potências de** x".*

Demonstração. O limite em $-\infty$ sai do primeiro fazendo a mudança de variável já utilizada na proposição. Veja-se então o limite em $+\infty$. Se $k \leq 0$ o resultado é trivial; para $k > 0$, observando que

$$\frac{e^x}{x^k} = \left(\frac{e^{x/k}}{x}\right)^k$$

sai da proposição

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/k}}{x} = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{ku} = \frac{1}{k} \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty. \ \blacksquare$$

Em consequência do que foi dito, resulta que a aplicação $x \in \mathbf{R} \to e^x$ é uma bijeção de $\mathbf{R}$ sobre $\mathbf{R}^+ =]0, +\infty[$. A aplicação inversa chama-se ***função logaritmo*** e representa-se por

$$\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}.$$

A função $\log x$, sendo a inversa de e^x, é portanto *estritamente crescente* e *contínua* (continuidade da função inversa). O conhecimento da função exponencial permite-nos enunciar o seguinte conjunto de propriedades:

3.4.5. Teorema *A função $x \in]0, +\infty[\to \log x$ satisfaz*

1. $\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbf{R}; \quad e^{\log x} = x \quad \forall x \in]0, +\infty[;$
2. $\log(x.y) = \log x + \log y; \quad \log\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log x \quad \forall x, y \in]0, +\infty[;$
3. *Para* $a > 0\,(a \in \mathbf{R}), \quad a^x = e^{x \log a} \quad \forall x \in \mathbf{R};$

4. $\log(x^y) = \log\left(e^{y\log x}\right) = y\log x \quad \forall x > 0, \forall y \in \mathbf{R}$.

Demonstração. Escreva-se $\log x = y$ e note-se que

$$\log x = y \Longleftrightarrow x = e^y.$$

As propriedades válidas para a função exponencial permitem obter sem dificuldade os resultados enunciados. Veja-se, por exemplo, 2. Tem-se, com efeito

$$x.y = e^{\log x}.e^{\log y} = e^{\log x + \log y}$$

e logo, $\log(x.y) = \log x + \log y$. Enfim,

$$0 = \log 1 = \log(x.x^{-1}) = \log x + \log x^{-1}$$

e portanto, $\log x^{-1} = -\log x$. ■

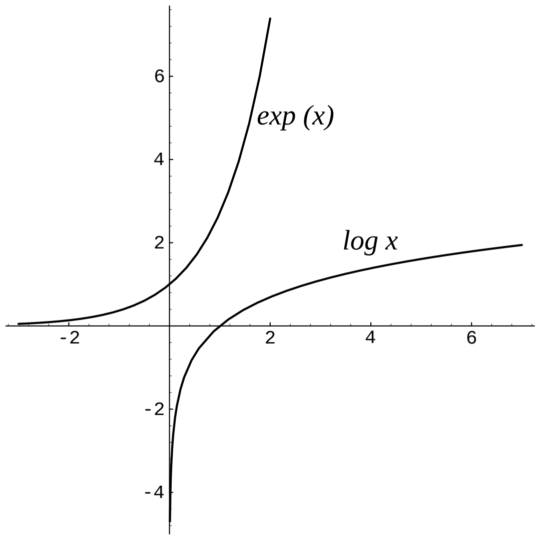


Figura 3.12

3.4.6. Proposição. *Para todo $k > 0$, tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^k} = 0.$$

Isto é, " $\log x$ ***é um infinito inferior a todas as potências de*** x*".*

Tem-se ainda

$$\lim_{x\to 0} x^k \log x = 0 \quad \forall k > 0.$$

Demonstração. A demonstração sai facilmente do correspondente resultado para a função exponencial (3.4.4. corolário); com efeito, fazendo $y = k \log x = \log x^k$ tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^k} = \frac{1}{k} \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Finalmente,

$$\lim_{x \to 0} x^k \log x = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^k \log\left(\frac{1}{y}\right) = -\lim_{y \to +\infty} \frac{\log y}{y^k} = 0. \ \blacksquare$$

Sublinhe-se uma vez mais que $\log x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais lentamente do que qualquer potência *arbitrariamente pequena* de x. Vejam-se as figuras abaixo em que se comparam as funções $\log x$ e $x^{0.2}$.

Na vizinhança do ponto $x = 3.65$ a função log "ultrapassa" a função $x^{0.2}$, dando a ideia geométrica *falsa* de que o crescimento do log é mais rápido.

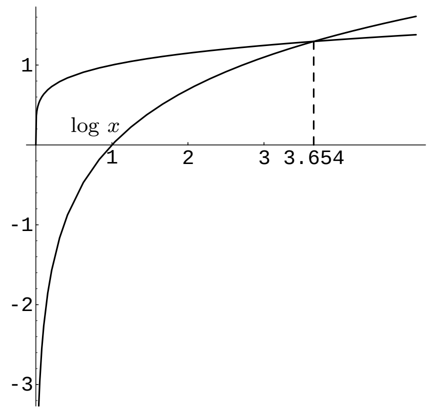


Figura 3.13

No entanto para grandes valores de x, ($x = 332105$ (!!)), $x^{0.2}$ torna-se enfim superior a $\log x$.

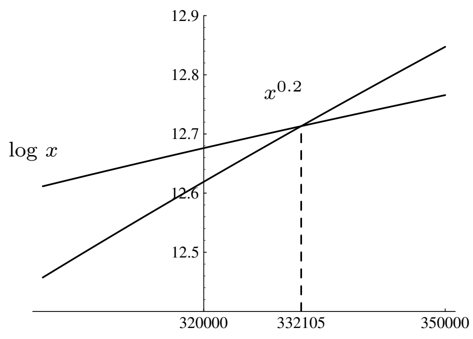


Figura 3.14

3.4.7. Proposição. *Tem-se*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

Demonstração. De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ vem $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, e pela continuidade da função log resulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log\left[(1+x)^{1/x}\right]=\log e=1.$$

Finalmente, de $y=e^x-1 \iff x=\log(1+y)$ sai

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)}=1. \ \blacksquare$$

O estudo da exponencial de base $a>0$, a^x, reduz-se agora à exponencial e^x pela relação $a^x=e^{x\log a}$.

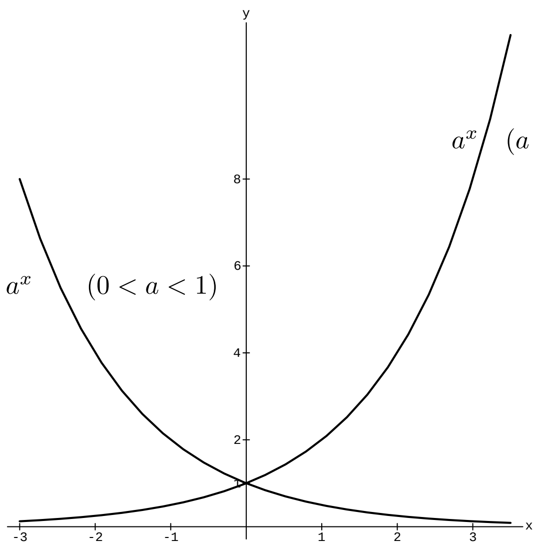


Figura 3.15

Tem-se então:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log a} = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\log a} = 0 \end{cases} \qquad (a>1)$$

e

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\log a} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\log a} = +\infty \end{cases} \qquad (0 < a < 1)$$

Corolário. *Para todo* $x \in \mathbf{R}$*, se* $x_n \to x$ *e* $u_n \to +\infty$*, então*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^x.$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} \log\left[\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n}\right] &= u_n \log\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right) = \\ &= x_n \,.\, \frac{\log\left(1+\dfrac{x_n}{u_n}\right)}{\dfrac{x_n}{u_n}} \xrightarrow{n\to\infty} x.1 = x \end{aligned}$$

dado que $x_n/u_n \to 0$ (cf. (3.4.7.)); pela continuidade de $x \to e^x$, sai finalmente

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\log(1+x_n/u_n)^{u_n}} = e^x. \blacksquare$$

Exercícios

1. Sejam $X = Y \cup Z$ subconjuntos de $\mathbf{R}$ e $a \in \overline{Y} \cap \overline{Z}$. Dada $f : X \to \mathbf{R}$, tomemos $g = f_{|Y}$ e $h = f_{|Z}$. Mostre que, se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

2. Analise os limites quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ da função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por

$$f(x) = x + \frac{x}{2}\sin x.$$

3. Para todo o real x represente-se por $\mathrm{I}(x)$ o maior inteiro $\leq x$. Mostre que se a e b são números positivos então

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\,\mathrm{I}\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\,\mathrm{I}\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

Prove também que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{a}\,\mathrm{I}\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x}\,\mathrm{I}\left(\frac{x}{a}\right) = +\infty.$$

4. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por $f(x) = x + ax\sin x\ (a \in \mathbf{R})$. Mostre que se $|\,a\,| < 1$ então $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

5. Discuta a existência de limite em $a \in \overline{\mathbf{R}}$ da função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \in \mathbf{Q} \\ x & \text{se} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

6. Analise os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{|\,x\,|}{x}\ (a \in \overline{\mathbf{R}})$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+x}} - x\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \left(\sqrt{1+\mathrm{tg}x} - \sqrt{\mathrm{tg}x}\right)$.

7. Dê um exemplo de funções $f : D \to \mathbf{R}$ e $g : f(D) \to \mathbf{R}$ tais que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, exista $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x)$ e não exista $\lim\limits_{y\to b} g(y)$.

8. Mostre que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (em $\overline{\mathbf{R}}$) sse para toda a sucessão $x_n \to a$, existe uma subsucessão x_{α_n} tal que $f(x_{\alpha_n}) \to b$.

9. Mostre que a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \\ \\ q & \text{se} \quad x = p/q,\ \ p, q \in \mathbf{Z},\ \ q > 0 \end{cases}$$

com p/q fracção irredutível, é ilimitada em qualquer intervalo não degenerado.

Sug. Reveja o exemplo 5. (3.2.7.).

10. Calcule os limites superior e inferior das seguintes funções nos pontos indicados

a) $|\sin x|$ no ponto $+\infty$;

b) $\operatorname{tg} \dfrac{1}{x^2}$ no ponto 0;

c) $\dfrac{1}{x} - \mathrm{I}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ no ponto 0;

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbf{Q} \\ \\ \mathrm{I}(x) - x & \text{se} \quad x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$ num ponto $a \in \mathbf{R}$.

11. Seja $f : [x_0, +\infty[\to \mathbf{R}$ uma função limitada em cada conjunto limitado do seu domínio. Mostre que

a)

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = a \in \mathbf{R} \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

b) Mais geralmente, se existe limite em $\overline{\mathbf{R}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

mostre que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}}.$$

12. Seja $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ um polinómio não constante. Dado $b \in \mathbf{R}$, suponha que existe uma sucessão (x_n) tal que $P(x_n) \to b$. Mostre que (x_n) é uma sucessão limitada. Prove, em particular, que se existe (x_n) tal que $P(x_n) \to 0$, então P admite pelo menos uma raiz real.

13. Demonstre que *não existe* uma função racional $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P e Q polinómios de coeficientes inteiros, que satisfaça a seguinte propriedade: para todo o racional $r \in \mathbf{Q}$ existe um inteiro $k \in \mathbf{Z}$ tal que $R(k) = r$.

14. Determine os pontos de continuidade e descontinuidade (indicando as descontinuidades de primeira e segunda espécie) das funções :

a) $f :]-1, 3] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{se} \quad x \in]-1, 0] \\ \mathrm{I}(x) + x & \text{se} \quad x \in]0, 3] \end{cases}$$

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \in \mathbf{Q} \\ x^2 + 1 & \text{se} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

15. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

a) Mostre que $f(rx) = r.f(x), \quad \forall r \in \mathbf{Q}, \forall x \in \mathbf{R}$.

b) Suponha que f é limitada numa vizinhança de zero. Mostre que f é contínua em $x = 0$ e conclua que f é contínua em $\mathbf{R}$.

c) Prove que existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) = c.x, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

16. Mostre que uma função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é contínua se e só se a imagem inversa de qualquer aberto de $\mathbf{R}$ é um aberto de $\mathbf{R}$. Mostre também que f é contínua se e só se a imagem inversa de todo conjunto fechado de $\mathbf{R}$ é um fechado. Conclua que o conjunto dos zeros de uma função contínua em $\mathbf{R}$ é um conjunto fechado.

17. Sejam $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ funções contínuas. Se $f(1) = g(0)$, prove a continuidade da função $h : [0, 1] \to \mathbf{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/2 \\ g(2x - 1) & \text{se} \quad 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

18. Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função contínua em D e sejam $a, b \in \mathbf{R}$ com $a < b$. Mostre que a função

$$h : D \to \mathbf{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad a \le f(x) \le b \\ a & \text{se} \quad f(x) < a \\ b & \text{se} \quad f(x) > b \end{cases}$$

é contínua em D.

19. Seja $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ um polinómio, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ com $a_n > 0$ e n par. Mostre que P tem um mínimo em $\mathbf{R}$, isto é, existe $x_0 \in \mathbf{R} : P(x_0) \leq P(x),\ \forall x \in \mathbf{R}$. Se $P(x_0) < 0$, mostre que P admite pelo menos duas raízes reais.

20. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua $(a < b)$. Prove que as funções $m(x)$ e $M(x)$ dadas por

$$m(x) = \min_{[a,x]} f \quad \text{e} \quad M(x) = \max_{[a,x]} f$$

estão bem definidas e são contínuas em $[a, b]$.

21. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Prove que são equivalentes as seguintes condições:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} | f(x) | = \lim\limits_{x \to -\infty} | f(x) | = +\infty$;

b) Se $| x_n | \to +\infty$, então $| f(x_n) | \to +\infty$;

c) Se K é compacto, então $f^{-1}(K)$ é compacto.

22. Mostre que a equação

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0$$

tem pelo menos uma raíz no intervalo $]0, \pi[$.

23. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R} \quad (a < b)$ uma função definida no intervalo limitado e fechado $[a, b]$ e satisfazendo a seguinte propriedade:

para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ e para todo o número C entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ existe um ξ entre x_1 e x_2 tal que $f(\xi) = C$.

a) Dê um exemplo de uma função com tal propriedade mas que não seja contínua em $[a, b]$.

b) Mostre que toda a função que satisfaz a propriedade indicada não pode ter descontinuidades de primeira espécie.

24. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Suponha que para todo o aberto $A \subset \mathbf{R}$, $f(A)$ é aberto. Mostre que então f é injetiva (e logo monótona).

25. Dê um exemplo de uma função injetiva, contínua em x_0 e tal que f^{-1} é descontínua em $y_0 = f(x_0)$.

26. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b] \subset \mathbf{R}$ e tal que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

a) Mostre que f tem pelo menos um *ponto fixo*, isto é, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

b) Suponha agora que f é uma contração estrita:

$$\exists K,\ 0 < K < 1\ :\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Mostre que f admite um único ponto fixo, c. Mostre ainda que, dado um qualquer $x_0 \in [a, b]$, a sucessão definida por recorrência, $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 1$, converge para c.

27. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ uma função tal que $f([a, b]) \subset [a, b]$ e satisfazendo a condição

$$|\ f(x) - f(y)\ | < |\ x - y\ |, \quad \forall x, y \in [a, b],\ (x \neq y).$$

a) Mostre que a equação $f(x) = x$ tem uma única solução θ.

b) Defina a sucessão x_n por recorrência dando x_0 e $x_n = f(x_{n-1})$, com $n \in \mathbf{N}$.
Mostre que $|\ x_n - \theta\ |$ é decrescente e tem limite l.

c) Mostre que se pode extrair da sucessão (x_n) uma subsucessão convergente para $\theta + \varepsilon l$ em que $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$.

d) Mostre que $|\ f(\theta + \varepsilon l) - \theta\ | = l$
Conclua que $l = 0$ e logo $x_n \to \theta$.

28. Dizemos que a função $f : D \to \mathbf{R}$ é *semi-contínua superiormente* no ponto $a \in D$ se $\forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0$ tal que

$$x \in D,\ |x - a| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(a) + \delta.$$

A função f diz-se semi-contínua superiormente em D se o for em todos os pontos de D.

a) Defina função *semi-contínua inferiormente* em $a \in D$ e mostre que f é contínua em $a \in D$ se e só se f é semi-contínua superiormente e inferiormente em a.

b) Mostre que f é semi-contínua superiormente em $a \in D$ se e só se $\overline{\lim_{x \to a}} f(x) = f(a)$. Enuncie e demonstre a correspondente caracterização para as funções semi-contínuas inferiormente.

29. Seja $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ uma função contínua num intervalo aberto $]a, b[\subset \overline{\mathbf{R}}$ e sejam $l = \underline{\lim}_{x \to b} f(x)$, $L = \overline{\lim_{x \to b}} f(x)$, $L > l$.
Demonstre que para todo C, $l < C < L$, a equação $f(x) = C$ tem infinitas raízes em qualquer vizinhança de b.

30. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função arbitrária definida em $\mathbf{R}$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, represente por C_n o conjunto dos pontos $a \in \mathbf{R}$ com a seguinte propriedade: existe um intervalo aberto I contendo a e tal que

$$x, y \in I \implies |f(x) - f(y)| < 1/n.$$

a) Prove que cada C_n é um conjunto aberto.

b) Mostre que f é contínua em a se e só se $a \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} C_n$. Conclua que o conjunto dos pontos de continuidade de qualquer função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é uma interseção numerável de abertos. Conclua finalmente que não existe uma função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, contínua nos racionais e descontínua nos irracionais. (cf. exerc. 47, Cap.2.).

31. Considere as sucessões $x_n = \sqrt{\pi/2 + 2n\pi}$ e $y_n = \sqrt{2n\pi}$

a) Mostre que $x_n - y_n \to 0\,(n \to \infty)$.

b) Mostre que a função $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \sin(x^2)$ não é uniformemente contínua.

32. Seja $g : \mathbf{R} \to]-1, 1[$ o inverso do homeomorfismo $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$, $x \in]-1, 1[$. Mostre que g é uniformemente contínua mas $g^{-1} = f$ não o é.

33. Seja $D \subset \mathbf{R}$ um conjunto não fechado. Dê um exemplo de uma função contínua, $f : D \to \mathbf{R}$, que não se estenda contínuamente a $\overline{D}$.

34. Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função uniformemente contínua. Mostre que existe uma única função contínua $\varphi : \overline{D} \to \mathbf{R}$ extensão de f, isto é, tal que $\varphi_{|D} = f$.

35. Mostre que a função $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, dada por $\sqrt[n]{x}$, não é lipschitziana num intervalo da forma $[0, a], (a > 0)$, embora seja aí uniformemente contínua.
Mostre ainda que f é lipschitziana no intervalo $[a, +\infty[$. Conclua que f é uniformemente contínua em $[0, +\infty[$.

36. Mostre que toda a função contínua, monótona e limitada, definida num intervalo $I \subset \mathbf{R}$, é uniformemente contínua.

37. Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ contínua e tal que existe e é finito $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Mostre que f é uniformemente contínua.

38. Dê um exemplo de uma função limitada e contínua num intervalo e que não seja uniformemente contínua.

39. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uniformemente contínua. Mostre que existem constantes $a, b \geq 0$ tais que

$$|f(x)| \leq a\,|x| + b, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

4

Introdução ao Cálculo Diferencial

4.1 Derivação de funções reais. Definições e exemplos.

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função real de variável real e $a \in D$ um ponto de acumulação de D.

4.1.1. Definição. *Diz-se que f é **derivável** ou **diferenciável** em a se existe (e é finito) o limite:* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (*). *Tal limite (quando existe) diz-se a **derivada de f no ponto** a e representa-se por*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

A derivada de f em a pode ainda representar-se por $Df(a)$ ou ainda por $\dfrac{df}{dx}(a)$.

Newton e Leibnitz introduzem a noção matemática de derivada com o objectivo de dar uma definição rigorosa (analítica) da noção de ***velocidade***. Todavia, foi Fermat um dos primeiros matemáticos a definir o conceito

(*) Repare-se que o limite em $a \in D$ é o limite por valores diferentes; com efeito, o domínio da razão incremental, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, é precisamente $D \setminus \{a\}$.

de derivada ao interessar-se em determinar o máximo e o mínimo de uma função $y = f(x)$. Geometricamente, a interpretação do conceito de derivada é bastante clara e permite em particular definir rigorosamente tangente a uma curva (que seja gráfico de uma função $y = f(x)$). Intuitivamente, (cf. Fig. 4.1), a tangente no ponto $A = (a, f(a))$, é obtida como o "limite geométrico" da secante AX quando o ponto $X = (x, f(x))$ se "aproxima" de A, isto é, quando $x \to a$; como a secante AX é determinada pelo ponto A e pelo seu declive, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, tal limite geométrico existirá se e só se existir o limite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Assim, a tangente $T_a f$ no ponto $A = (a, f(a))$ está definida se e só se f admite derivada em a; $T_a f$ é então definida pelo ponto A e pelo coeficiente angular $f'(a)$, e a sua equação vem dada por:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

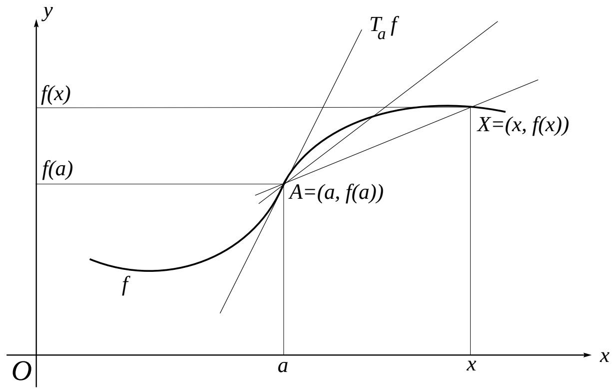


Figura 4.1

Derivadas laterais.

Retomemos a nossa função $f : D \to \mathbf{R}$ e seja $a \in D$ um ponto de acumulação de $D_a^- = \{x \in D : x < a\}$.

Diz-se que f é ***derivável (ou diferenciável) à esquerda em*** a se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f_e'(a).$$

Seja agora $a \in D$ um ponto de acumulação de $D_a^+ = \{x \in D : x > a\}$.

Diz-se que f é ***derivável (ou diferenciável) à direita em*** a se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f_d'(a).$$

Resulta imediatamente das definições que, se a é ponto de acumulação de D_a^+ e D_a^-, *f é derivável em a se e só se f é derivável à esquerda e à direita em a e $f'_e(a) = f'_d(a)$.* À semelhança do que se disse com a noção de derivada, função derivável à esquerda em a implica a existência de ***tangente à esquerda*** ao gráfico de f no ponto $A = (a, f(a))$; analogamente, função derivável à direita em a implica a existência de ***tangente à direita*** ao gráfico de f no ponto A.

Do mesmo modo que uma função f pode não ter derivada num ponto a, embora admita as derivadas laterais, assim a curva, gráfico de f, pode não ter tangente no ponto A e admitir as tangentes à esquerda e à direita em A.

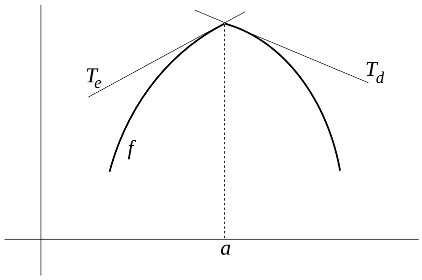


Figura 4.2

Extensão a $\overline{\mathbb{R}}$: derivadas infinitas.

Diz-se que a derivada de f em a é $+\infty$ (resp. $-\infty$) se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \,(\text{resp.} - \infty).$$

Do mesmo modo se definem as derivadas infinitas à esquerda e à direita de a. Geometricamente, se f tem derivada infinita em a, o gráfico da função admite tangente em $(a, f(a))$, paralela ao eixo dos yy, e a mesma interpretação é dada para as derivadas laterais. As figuras abaixo exibem exemplos de derivadas infinitas ($+\infty$ e $-\infty$ respetivamente): a derivada em a é $+\infty$ (resp. $-\infty$) sendo a tangente, paralela ao eixo dos yy, aproximada por secantes com declive positivo (resp. com declive negativo).

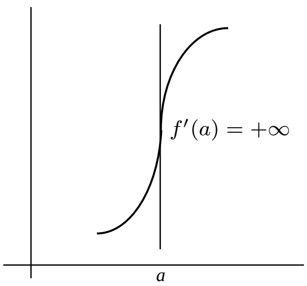


Figura 4.3 (a)

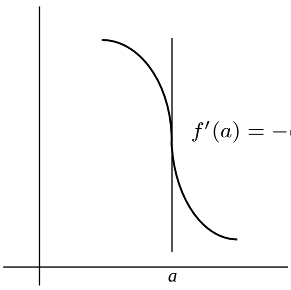


Figura 4.3 (b)

Na figura em baixo, o gráfico de f não admite tangente em $(a, f(a))$: a tangente à esquerda corresponde a $f'_e(a) = +\infty$ enquanto a tangente à direita corresponde a $f'_d(a) = -\infty$. Contudo, geometricamente, as duas tangentes sobrepõem-se.

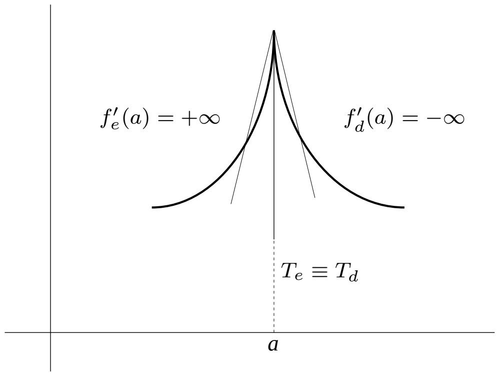


Figura 4.4

4.1.2. Definição. *Diz-se que a função $f : D \to \mathbf{R}$ é **derivável (ou diferenciável) em** D se for derivável em todo o ponto de D (*) e à nova função $f' : D \to \mathbf{R}$, $\quad x \to f'(x)$, chama-se **derivada de** f; representa-se também por Df ou $\dfrac{df}{dx}$.*

4.1.3. Proposição. *Se $f : D \to \mathbf{R}$ é uma função derivável em $a \in D$, então é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Com efeito, para $x \in D$, $(x \neq a)$ tem-se

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} . (x - a)$$

e logo $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - f(a)] = f'(a).0 = 0$ o que mostra a continuidade de f em a. ∎

Observação importante. A existência de derivada infinita, $f'(a) = +\infty$ ou $f'(a) = -\infty$, não garante a continuidade de f em a. Por exemplo, a função $f(x) = \mathrm{Sgn}(x)$ (cf.(1.4.1.)), descontínua em 0, tem derivada $f'(0) = +\infty$.

(*) Se $a \in D$ for somente ponto de acumulação de D_a^+ ou D_a^-, apenas se exige que a função tenha aí a derivada lateral finita correspondente.

4.1.4. Teorema. *Sejam $f, g : D \to \mathbf{R}$ funções deriváveis em $a \in D$; então*

$f + g$ é derivável em a e

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$

$f.g$ é derivável em a e

$$(f.g)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a);$$

em particular, f^n é derivável em a e tem-se

$$(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a), \quad n \in \mathbf{N};$$

se $g(a) \neq 0$, f/g é ainda derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Demonstração. Demonstremos apenas a derivação do produto, deixando a cargo do leitor a demonstração das outras alíneas. Observemos que

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Como g é derivável em a, é aí contínua; passando ao limite $x \to a$, obtém-se o resultado. ∎

4.1.5. Exemplos.

1. A função linear $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ (a e b constantes reais) é claramente derivável em todo o ponto $x \in \mathbf{R}$: $f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbf{R}$; a função derivada é a função constante, $f' \equiv a$.

2. Resulta imediatamente das regras da derivação atrás enunciadas que a função $f(x) = x^n$, ($n \in \mathbf{N}$), admite derivada em todo o ponto $x \in \mathbf{R}$ igual a nx^{n-1}. Mais geralmente, o polinómio

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

é derivável em $\mathbf{R}$ e a sua derivada é ainda um polinómio, agora de grau $n-1$:

$$P'(x) = a_1 + \cdots + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + a_nnx^{n-1}.$$

3. A função $\sin x$, definida em $\mathbf{R}$, é derivável em todos os pontos; com efeito, da relação trigonométrica

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$$

e de (3.1.9.(3.)), tira-se

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} . \cos \frac{x+a}{2} = 1. \cos a = \cos a$$

e portanto, $(\sin x)' = \cos x$.

4. Consideremos agora a função exponencial $e^x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e um ponto $a \in \mathbf{R}$ qualquer. Sai de (3.4.7.) que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^a . e^h - e^a}{h} = e^a . \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a . 1 = e^a$$

o que mostra que a função exponencial é derivável em todo o ponto da reta e a sua derivada coincide com a própria função: $(e^x)' = e^x$.

5. De modo análogo se vê a diferenciabilidade da função $\log : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$. Com efeito, se $a > 0$, tem-se

$$\frac{\log(a+h) - \log a}{h} = \frac{\log \frac{a+h}{a}}{h} = \frac{\log \left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h}$$

e por (3.4.7.),

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{a} . \frac{\log \left(1 + \frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}} = \frac{1}{a} . 1 = \frac{1}{a}.$$

Assim, $\log x$ é derivável no seu domínio e a sua derivada: $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

6. Vimos anteriormente que função derivável num ponto é contínua nesse ponto. Reciprocamente, sublinhe-se que nem toda a função contínua é derivável. Assim, por exemplo, a função $f(x) = \mid x \mid$, claramente contínua em todo o ponto $x \in \mathbf{R}$, não é derivável na origem, dado que

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\mid x \mid - 0}{x - 0} = -1, \quad f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mid x \mid - 0}{x - 0} = 1.$$

Poder-se-á mesmo ter uma função contínua que nem tão pouco derivadas laterais possua num determinado ponto; é o caso da função, já nossa conhecida,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

em que, por exemplo, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sin \dfrac{1}{x}$, não existe.

O resultado seguinte dá uma caracterização (condição necessária e suficiente) de diferenciabilidade de uma função num ponto.

4.1.6. Proposição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função real e $a \in D$ um ponto de acumulação do domínio. Então f é derivável em a se e só se existe $l \in \mathbf{R}$ tal que*

$$f(x) = f(a) + l(x - a) + \theta(x), \quad (x \in D),$$

em que θ é uma função que satisfaz: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\theta(x)}{x - a} = 0$. Sendo assim, l é único e $l = f'(a)$.

Demonstração. Seja $f(x) = f(a) + l(x - a) + \theta(x)$, em que $\theta(x)$ satisfaz a condição do enunciado; então,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l + \frac{\theta(x)}{x - a}$$

e logo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l + \lim_{x \to a} \frac{\theta(x)}{x - a} = l.$$

Portanto f é derivável em a e $f'(a) = l$.

Reciprocamente, seja f derivável em a e faça-se $\theta(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. Resulta então que

$$\lim_{x \to a} \frac{\theta(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right] = 0$$

o que conclui a demonstração. ∎

Observação. A relação $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\theta(x)}{x - a} = 0$ exprime-se dizendo que $\theta(x)$ é um infinitésimo de ordem superior a $x - a$ e escreve-se $\theta(x) = o(x - a)$

(esta notação, devida a Landau, será mais tarde desenvolvida). Observe--se ainda que, escrevendo $\dfrac{\theta(x)}{x-a} = \alpha(x)$, se tem $\theta(x) = (x-a)\alpha(x)$ com $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Assim, f é derivável em a se e só se

$$f(x) = f(a) + l(x-a) + o(x-a)$$

ou ainda, f é derivável em a se e só se

$$f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\alpha(x), \quad \alpha(x) \xrightarrow{x\to a} 0.$$

Note-se enfim que a anterior caracterização se estende naturalmente às derivadas laterais.

4.1.7. Proposição (*Derivação da função composta*). *Consideremos as funções $f : D \to \mathbf{R}$ e $\varphi : E \to \mathbf{R}$, tais que $\varphi(E) \subset D$. Se φ é diferenciável em $t_0 \in E$ e f é diferenciável em $x_0 = \varphi(t_0) \in D$, então $f \circ \varphi : E \to \mathbf{R}$ é diferenciável em t_0 e tem-se*

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0).$$

Demonstração. Sendo f diferenciável em x_0, tem-se pela anterior proposição

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\alpha(x), \quad (\alpha(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0).$$

Fazendo $x = \varphi(t)$ e $x_0 = \varphi(t_0)$, obtém-se

$$f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0)) = (\varphi(t) - \varphi(t_0))f'(\varphi(t_0)) + (\varphi(t) - \varphi(t_0))\alpha(\varphi(t))$$

e portanto

$$\frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t-t_0} = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0}\left(f'(\varphi(t_0)) + \alpha(\varphi(t))\right).$$

Como φ é contínua em t_0, resulta que $x = \varphi(t) \to \varphi(t_0) = x_0$ $(t \to t_0)$ e logo $\alpha(\varphi(t)) \to 0$ $(t \to t_0)$. Então

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to t_0} \frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t-t_0} = \\
&= \lim_{t\to t_0} \frac{(\varphi(t) - \varphi(t_0))}{t-t_0}. \lim_{t\to t_0} \left(f'(\varphi(t_0)) + \alpha(\varphi(t))\right) = \\
&= \varphi'(t_0).f'(\varphi(t_0))
\end{aligned}$$

o que mostra o resultado. ■

4.1.8. Exemplos.

1. A função $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, sendo composição da função $\sin x$ e da função $x + \dfrac{\pi}{2}$, é diferenciável em todos os pontos e a sua derivada

$$(\cos x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).1 = -\sin x.$$

A derivabilidade da função $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ sai agora trivialmente das regras de derivação:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

2. Se $\varphi : D \to \mathbf{R}$ é uma função diferenciável, a função composta, $e^{\varphi} : D \to \mathbf{R}$ é ainda diferenciável; com efeito, $x \to e^x$ é derivável em todos os pontos tendo como derivada a própria função exponencial, pelo que

$$(e^{\varphi})'(t) = e^{\varphi(t)}\varphi'(t), \quad (t \in D).$$

3. Do mesmo modo, se $\varphi : D \to \mathbf{R}$ é uma função diferenciável tal que $\varphi(t) > 0$, $\forall t \in D$, a composta $\log\varphi : D \to \mathbf{R}$ é diferenciável e a sua derivada

$$(\log\varphi)'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}, \quad (t \in D).$$

4. Tomemos de novo $\varphi : D \to \mathbf{R}$, função diferenciável tal que $\varphi(t) > 0$, $\forall t \in D$, e para $\alpha \in \mathbf{R}$ considere-se a função $\varphi^{\alpha} = e^{\alpha \log \varphi}$; trata-se de uma dupla composição:

$$t \longrightarrow \varphi(t) \longrightarrow \alpha \log\varphi(t) \longrightarrow e^{\alpha \log \varphi(t)}.$$

Dos exemplos anteriores resulta agora que

$$(\varphi^{\alpha})'(t) = \left(e^{\alpha \log \varphi}\right)'(t) = e^{\alpha \log \varphi(t)}.\alpha\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \alpha\varphi^{\alpha-1}(t)\varphi'(t).$$

É de sublinhar o caso particular $\alpha = 1/n$, $n \in \mathbf{N}$, isto é,

$$(\sqrt[n]{\varphi})'(t) = \frac{\varphi'(t)}{n\sqrt[n]{\varphi^{n-1}(t)}}.$$

5. Tomemos enfim a exponencial de base $a > 0$, $a^x = e^{x \log a}$. Pelo que se disse, é claramente uma função diferenciável e a sua derivada

$$(a^x)' = \left(e^{x \log a}\right)' = e^{x \log a}.\log a = a^x.\log a,$$

o que mostra que a única função exponencial (de base a) que admite derivada igual a si própria é a exponencial de base e. Tal é a razão da escolha de e^x como função exponencial privilegiada.

4.1.9. Proposição (*Derivação da função inversa*). *Seja f uma função diferenciável e injetiva definida num intervalo $I \subset \mathbf{R}$. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) \neq 0$; então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstração. Faça-se $y = f(x)$ e note-se que $y \neq y_0 \Longrightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) = x_0$ (f é injetiva). Pode então escrever-se

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f\left[f^{-1}(y)\right] - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}.$$

Mas como f é diferenciável (e portanto contínua) e está definida num intervalo, f^{-1} é contínua (continuidade da função inversa) e portanto $y \to y_0 \Longrightarrow f^{-1}(y) \to x_0$; a conclusão sai agora do conhecido resultado sobre limites:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{f\left[f^{-1}(y)\right] - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Observações. 1. A anterior proposição é ainda válida para funções f definidas em domínios gerais (não necessariamente intervalos). Bastará para isso (apercebe-se da demonstração) acrescentar a hipótese de continuidade da função inversa f^{-1}, em $y_0 = f(x_0)$.

2. Note-se que a hipótese $f'(x_0) \neq 0$ é fundamental. Caso contrário o resultado não é necessariamente verdadeiro. Tome-se, por exemplo, a função bijetiva: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por $f(x) = x^3$; a função inversa, $\sqrt[3]{x}$ não é derivável na origem: $\left(\sqrt[3]{x}\right)'_{x=0} = +\infty$. (cf. Fig.4.5).

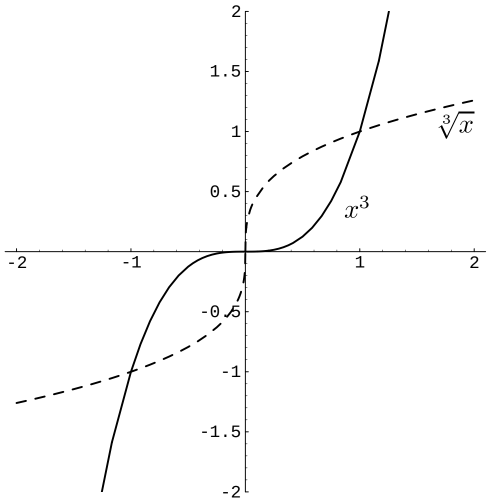


Figura 4.5

4.1.10. Derivação de funções monótonas. Pontos críticos. Extremos locais.

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função monótona crescente, isto é,

$$x, y \in D, \quad x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y).$$

Se f é derivável em $a \in D$, porque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$, resulta obviamente

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0.$$

Do mesmo modo, se f é monótona decrescente e derivável em $a \in D$, a sua derivada $f'(a) \le 0$. Assim,

f *monótona crescente e derivável* $\Longrightarrow f'(x) \ge 0$;

f *monótona decrescente e derivável* $\Longrightarrow f'(x) \le 0$.

Observe-se contudo que, função estritamente monótona e derivável não tem necessariamente derivada > 0 (ou < 0); basta ter presente o exemplo $f(x) = x^3$, função estritamente crescente mas com derivada nula na origem. Veremos adiante que, reciprocamente, função derivável num ***intervalo*** com derivada positiva (ou negativa) em todos os pontos é monótona. Entretanto, analisemos o que se passa na vizinhança de um ponto em que a derivada lateral nesse ponto é positiva ou negativa.

4.1.11. Proposição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ e $a \in D$ um ponto de acumulação. Então*

1. *se* $f'_d(a) > 0$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $f(x) > f(a)$

   $\forall x \in]a, a+\varepsilon[\cap D$;

2. *se* $f'_d(a) < 0$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $f(x) < f(a)$

   $\forall x \in]a, a+\varepsilon[\cap D$;

3. *se* $f'_e(a) > 0$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $f(x) < f(a)$

   $\forall x \in]a-\varepsilon, a[\cap D$;

4. *se* $f'_e(a) < 0$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $f(x) > f(a)$

   $\forall x \in]a-\varepsilon, a[\cap D$.

OBSERVAÇÃO. Note-se que $f'_d(a)$ e $f'_e(a)$ representam as derivadas laterais de f, finitas ou infinitas.

Demonstração. Veja-se a demonstração de 1. (a demonstração dos restantes pontos é perfeitamente análoga). Dado que

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

resulta de 3.1.2. que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \qquad \forall x \in]a, a+\varepsilon[\cap D;$$

como $x - a > 0$, a conclusão é agora imediata. ∎

OBERVAÇÃO. Note-se que $f'_d(a) > 0$ não implica que f seja crescente nalguma vizinhança, $]a, a+\varepsilon[$. Considere-se, com efeito, a função (cf. Fig. 4.6)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x}{2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Tem-se $f'(0) = f'_d(0) = 1/2$ e portanto, a proposição anterior garante que existe $\varepsilon > 0 : 0 < x < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$. No entanto, dado que $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{2}$, existem pontos arbitrariamente perto de 0, $\left(x_n = \dfrac{1}{2n\pi}, x_m = \dfrac{1}{2m\pi + \pi/2}\right)$, que fazem $f'(x_n) = -\dfrac{1}{2} < 0$

e $f'(x_m) > 0$ e logo, de acordo com o que se disse no início desta secção, f não será crescente nem decrescente em nenhum intervalo $]0, \varepsilon[$.

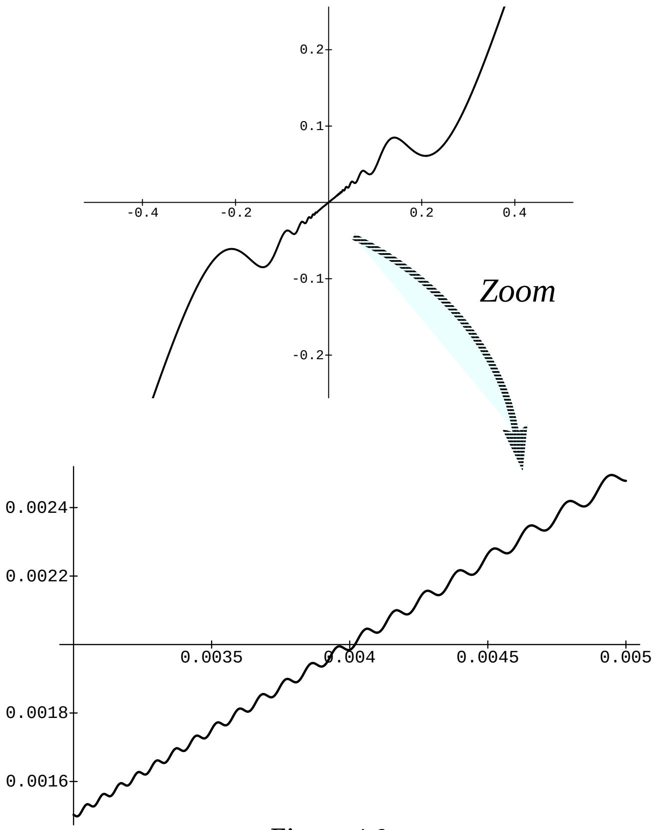


Figura 4.6

Em particular, se a é de acumulação de D_a^+ e D_a^- e $f'(a) > 0$, como $f'(a) = f'_d(a) = f'_e(a)$, a proposição apenas nos garante que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$a - \varepsilon < x < a < y < a + \varepsilon \Longrightarrow f(x) < f(a) < f(y)$$

sem que f seja necessariamente crescente em $]a - \varepsilon, a[$ ou $]a, a + \varepsilon[$.

Da mesma maneira, se $f'(a) < 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$a - \varepsilon < x < a < y < a + \varepsilon \Longrightarrow f(x) > f(a) > f(y)$$

sem que f seja necessariamente decrescente em $]a - \varepsilon, a[$ ou $]a, a + \varepsilon[$.

As precedentes considerações vão-nos ser de grande utilidade na busca de máximos e mínimos locais de funções diferenciáveis. Comecemos por introduzir estas noções.

4.1.12. Definição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ e $a \in D$. Diz-se que f tem em a um* ***máximo local (ou relativo)*** *se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.*

Do mesmo modo, diz-se que f tem em a um ***mínimo local (ou relativo)*** *se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.*

Máximo ou mínimo local diz-se ***extremo local (ou relativo)****.*

Consequência imediata da proposição 4.1.11. é o seguinte resultado:

4.1.13. Proposição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função com derivada em $a \in D$,* ***ponto de acumulação de*** *D_a^+* ***e*** *D_a^-. Se f tem em a um extremo local, então*

$$f'(a) = 0,$$

isto é, f tem um ***ponto crítico*** *em a.*

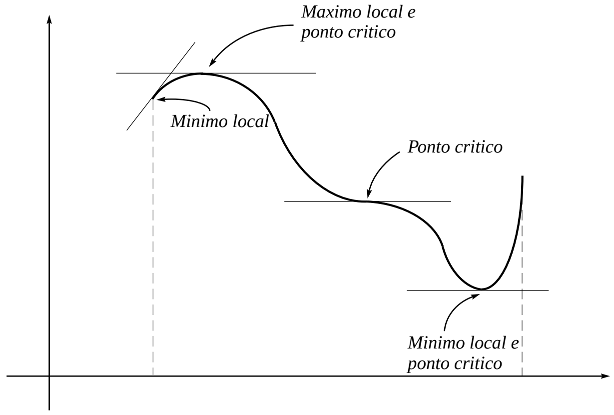


Figura 4.7

Observação. A proposição estabelece uma ***condição necessária*** de extremo local para uma função diferenciável. Sublinhe-se uma vez mais a hipótese de $a \in D$ ser de acumulação de D_a^+ e D_a^-; se apenas uma derivada lateral estiver definida, o ponto a não será necessariamente crítico, mesmo que a seja extremo local (cf. Fig. 4.7).

Reciprocamente, a pode ser um ponto crítico ($f'(a) = 0$) e não ser extremo local; é o caso do ponto assinalado na Fig. 4.7, ou ainda o ponto $x = 0$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Tem-se $f'(0) = 0$, mas claramente f não tem máximo nem mínimo locais em $x = 0$ (cf. Fig. 4.8).

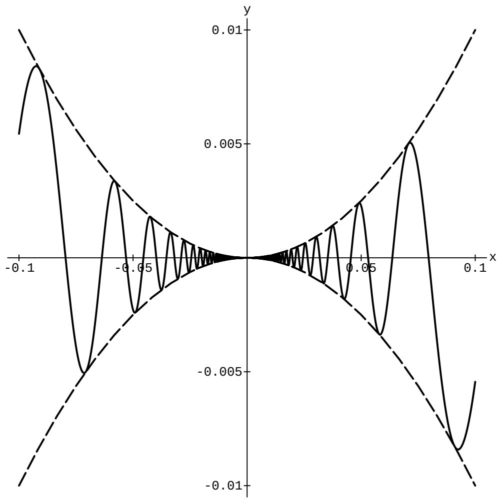


Figura 4.8

A determinação dos extremos de uma função diferenciável (condições suficientes de extremo) será analisada mais adiante.

4.2. Teoremas globais do cálculo diferencial.

Tal como acontecera com a continuidade, o facto de o domínio de funções diferenciáveis ser um ***intervalo*** vai ser determinante na obtenção de novos resultados fundamentais. Eis os teoremas:

4.2.1. Teorema de Rolle. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *uma função contínua no intervalo limitado e fechado* $[a, b]$ *e com derivada (finita ou infinita) em todos os pontos do seu interior,* $]a, b[$. *Se* $f(a) = f(b)$, *então existe pelo menos um ponto crítico* $\xi \in]a, b[$, *isto é,* $f'(\xi) = 0$.

Demonstração. Sendo f contínua no compacto $[a, b]$, f tem máximo e mínimo absolutos, e logo relativos (teorema de Weierstrass). Se o máximo e mínimo são atingidos nos extremos do intervalo, como $f(a) = f(b)$, ter-se-á $f \equiv$ constante e portanto qualquer $c \in]a, b[$ satisfaz $f'(c) = 0$.
Caso contrário, o máximo ou mínimo é atingido num ponto interior $\xi \in]a, b[$ e logo, por 4.1.13., $f'(\xi) = 0$. ∎

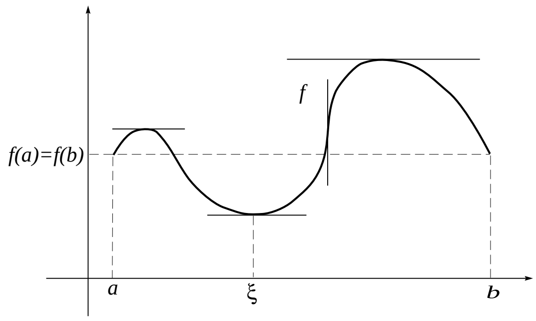


Figura 4.9

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função diferenciável em D, o que nos permite definir a função $f' : D \to \mathbf{R}$, $x \to f'(x)$. A função f diz-se de ***classe*** C^1 em D se f' é contínua em D e escreve-se $f \in C^1(D)$ ou apenas $f \in C^1$. Nem todas as funções diferenciáveis são de classe C^1; por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

admite derivada finita em todos os pontos,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

mas f' é descontínua na origem: $\lim\limits_{x \to 0} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ não existe.

Consideremos agora uma função $f \in C^1([a, b])$; sendo f' contínua no intervalo $[a, b]$, o teorema de Bolzano garante que $f'(x)$ toma todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$. Contudo, não sendo f' contínua em $[a, b]$, tal conclusão (que à priori não estaria garantida) continua a ser válida: é o que exprime o notável teorema de Darboux.

4.2.2. Teorema (*Darboux*). *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua com derivada (finita ou infinita) no intervalo limitado e fechado $[a, b]$. Então $f'(x)$ assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.*

Demonstração. Seja y_0 um real entre $f'(a)$ e $f'(b)$ (elementos de $\overline{\mathbf{R}}$) e admita-se, por exemplo, que $f'(a) < y_0 < f'(b)$. Mostremos que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = y_0$.

Para isso, considere-se a função $g(x) = f(x) - y_0 x$; sendo uma função contínua, g admite um mínimo em $c \in [a, b]$ (teorema de Weierstrass). Por outro lado, $g'(x) = f'(x) - y_0$ e logo

$$g'(a) = g'_d(a) = f'(a) - y_0 < 0,$$
$$g'(b) = g'_e(b) = f'(b) - y_0 > 0.$$

Pela prop. 4.1.11., existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$g(x) < g(a) \quad \forall x \in]a, a+\varepsilon[,$$

$$g(x) < g(b) \quad \forall x \in]b-\varepsilon, b[.$$

Assim, o ponto de mínimo c, não sendo nem a nem b, terá de ser um ponto interior, $c \in]a, b[$ e aí, $g'(c) = 0$ (4.1.13.). ■

4.2.3. Teorema do Valor Médio de Lagrange.(∗) *Seja* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *uma função contínua no intervalo limitado e fechado* $[a, b]$ *e com derivada (finita ou infinita) no interior* $]a, b[$*. Então, existe pelo menos um ponto* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

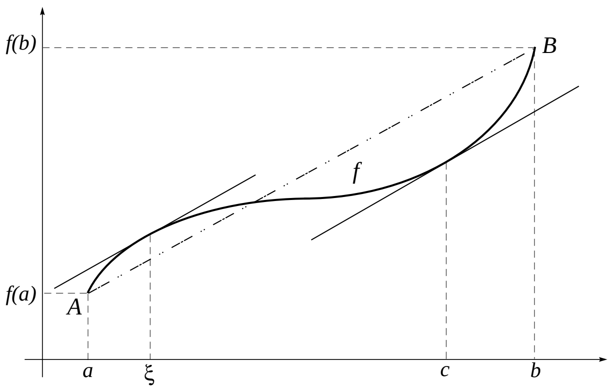


Figura 4.10

A interpretação geométrica do teorema é simples: em pelo menos um ponto interior ao intervalo, a tangente ao gráfico de f deverá ser paralela à corda que liga os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Demonstração. Considere-se a função

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

(∗) O teorema de Lagrange também é designado por *teorema dos acréscimos finitos.*

Tal como f, a função φ é contínua em $[a, b]$ e tem derivada em $]a, b[$. Além disso, tem-se

$$\begin{aligned}\varphi(b) =& f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,[(b-a)+a] = \\ =& f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,a = \varphi(a).\end{aligned}$$

O teorema de Rolle garante então que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

o que conclui a demonstração. ■

Seja agora $f : I \to \mathbf{R}$ uma função contínua num intervalo I qualquer e com derivada no seu interior, $\text{int}(I)$; fixando $a \in I$, o teorema de Lagrange permite-nos escrever:

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(c) \quad \text{para algum } c \text{ entre } a \text{ e } x$$

ou seja,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a + \theta(x-a)) \quad \text{para algum } \theta \text{ entre 0 e 1;}$$

basta aplicar o teorema de Lagrange ao intervalo $[a, x]$ ou $[x, a]$, conforme $a < x$ ou $x < a$; note-se que $\theta \in]0, 1[$ depende de a e x. De modo equivalente, pode ainda escrever-se, $\forall h \in \mathbf{R}$ tal que $a + h \in I$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad \text{para algum } \theta \text{ entre 0 e 1.}$$

O teorema de Lagrange é rico em consequências. Vejamos algumas delas:

Corolário 1. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função contínua em I e com derivada em* $\text{int}\,(I)$. *Então*

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{int}\,(I) \Longrightarrow f = \text{Const.}$$

Corolário 2. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função contínua em I e com derivada em* $\text{int}\,(I)$. *Então*

$$\begin{aligned}&f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{int}\,(I) \Longleftrightarrow f \text{ é crescente;}\\ &f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \text{int}\,(I) \Longleftrightarrow f \text{ é decrescente.}\end{aligned}$$

Tem-se ainda

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \operatorname{int}(I) \Longrightarrow f \text{ é estritamente crescente;}$$
$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \operatorname{int}(I) \Longrightarrow f \text{ é estritamente decrescente.}$$

Demonstração. Vimos já atrás que, se f é monótona crescente (resp. decrescente) e derivável então $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$). Reciprocamente, se f está nas condições do enunciado, tomando $x, y \in I$, com $x < y$, tem-se

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c), \quad (x < c < y).$$

Então, $f'(c) \geq 0 \Longrightarrow f(y) - f(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0 \Longrightarrow f(y) - f(x) > 0$) ou seja, f é crescente (resp. estritamente crescente). Do mesmo modo se conclui o caso decrescente. ■

OBSERVAÇÃO. Note-se que para as duas últimas implicações, a recíproca é falsa; bastará recordar o exemplo, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$, função estritamente crescente em $\mathbf{R}$ mas com derivada nula na origem.

É de demonstração imediata o seguinte

Corolário 3. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função contínua em I e com derivada em* $\operatorname{int}(I)$. *Se existe $K > 0$ tal que $| f'(x) | \leq K$, $\forall x \in \operatorname{int}(I)$, então f é K-lipschitziana:*

$$| f(x) - f(y) | \leq K \mid x - y \mid \quad \forall x, y \in I.$$

Corolário 4. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função contínua em I e $c \in I$ um ponto do intervalo. Se f tem derivada em $I \setminus \{c\}$ e se existe $\lim\limits_{x \to c^+} f'(x) = L$ (finito ou infinito) então existe $f'_d(c)$ e tem-se $f'_d(c) = L$.*
Do mesmo modo para a derivada à esquerda. Em particular, se existe $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = L$ (finito ou infinito) então existe $f'(c)$ e tem-se $f'(c) = L$.

Demonstração. Seja $x_n \to c$, $c < x_n$, $x_n \in I$; pelo teorema de Lagrange, existe y_n, $c < y_n < x_n$ tal que

$$\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(y_n).$$

Mas $x_n \to c \Longrightarrow y_n \to c$ e portanto $f'(y_n) \to L$ o que mostra que

$$f'_d(c) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = \lim_{n \to \infty} f'(y_n) = L. \ ■$$

4.2.4. Exemplos.

1. Tomemos a função $\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R}$. Como $(\sin x)' = \cos x > 0$ $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$, resulta que $\sin x$ é estritamente crescente e portanto invertível; a função inversa, definida em $[-1,1]$, designa-se por

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R}$$

e é derivável (derivação da função inversa) em $]-1,1[$; escrevendo $y = \sin x,\ x \in]-\pi/2, \pi/2[$, tem-se

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Finalmente, dado que

$$\lim_{y\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \lim_{y\to -1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = +\infty$$

o anterior corolário 4. diz-nos que

$$\left.\frac{d(\arcsin y)}{dy}\right|_{y=\pm 1} = +\infty.$$

2. Analogamente, a função $\cos : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ tem derivada $-\sin x < 0$ $\forall x \in]0,\pi[$ e logo, sendo estritamente decrescente é invertível; a função inversa,

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow \mathbf{R},$$

é derivável no interior do domínio:

$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} =$$
$$= -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Tem-se ainda

$$\left.\frac{d(\arccos y)}{dy}\right|_{y=\pm 1} = -\infty.$$

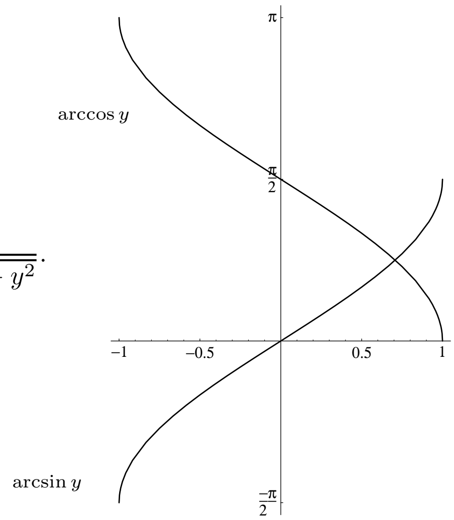


Figura 4.11

3. Considere-se enfim, a função trigonométrica

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbf{R}.$$

Sendo diferenciável, com derivada $(\tan x)' = \sec^2 x > 0$, a função tangente é uma bijeção estritamente crescente sobre $\mathbf{R}$, sendo a função inversa representada por

$$\arctan : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$

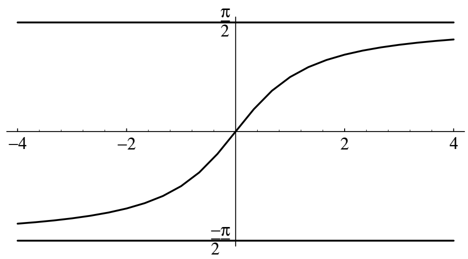


Figura 4.12

De novo, utilizando o teorema da derivação da função inversa e dado que $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$,

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

4.2.5. Teorema do Valor Médio de Cauchy. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$, funções contínuas no intervalo limitado e fechado $[a,b]$ e com derivada (finita ou infinita) no interior $]a,b[$. Então, se $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Considerando a função

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.g(x),$$

a demonstração é agora similar à do teorema de Lagrange. ∎

Observação. O teorema do valor médio de Cauchy generaliza o teorema de Lagrange e reduz-se a este quando $g(x) = x$. Repare-se ainda que o enunciado do teorema está bem definido, isto é, $g(b) \neq g(a)$; com efeito, se $g(b) = g(a)$, o teorema de Rolle implicava a existência de um ponto $\xi \in]a, b[$ com $g'(\xi) = 0$ o que contrariava a hipótese.

Aplicação ao cálculo dos limites nas indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

4.2.6. Proposição (*Regra de L'Hospital*). *Sejam $f, g : D \to \mathbf{R}$, funções diferenciáveis em $a \in D$; suponha-se que, nalguma vizinhança de a, $g(x) \neq 0$, $x \in (V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap D$. Se $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe e tem-se*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração. Para $x \in (V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap D$ tem-se

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Bigg/ \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

e passando ao limite $x \to a$, obtém-se o resultado. ■

Observações. 1. A regra é ainda válida se $f'(a) = \pm\infty$ e $g'(a) = k \in \mathbf{R}$; neste caso,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{k}.$$

Ou ainda se $f'(a) = k \in \mathbf{R}$ e $g'(a) = \pm\infty$, tendo-se agora

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{k}{\pm\infty} = 0.$$

2. Se $g'(a) = 0$ e $f'(a) \neq 0$ é claro que o resultado não é conclusivo; apenas podemos acrescentar que

$$\lim_{x\to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty.$$

Um outro resultado, porventura ainda de maior aplicação (já que permite atacar as indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$) é a regra de Cauchy.

4.2.7. Proposição (*Regra de Cauchy*). *Seja $I \subset \mathbf{R}$ um intervalo qualquer de $\mathbf{R}$ e $a \in \overline{I}$ (*); sejam $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ funções diferenciáveis e admita-se que $g'(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{a\}$. Suponha-se agora que*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty \end{cases} \quad e \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad existe.$$

Então, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe e tem-se*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. Seja $L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e admita-se que $L \in \mathbf{R}$; o caso $L = \pm\infty$ tem demonstração similar. Então, dado um qualquer $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$L - \delta \leq \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \delta, \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap I. \tag{1}$$

Do teorema do valor médio de Cauchy, dados $x, y \in V_\varepsilon(a) \cap I$, existe um c entre x e y (e logo $c \in V_\varepsilon(a) \cap I$) tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

e portanto, de (1) sai

$$L - \delta \leq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \leq L + \delta \quad \forall x, y \in V_\varepsilon(a) \cap I. \tag{2}$$

1º caso : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Fixando x em (2) e passando ao limite $y \to a$, vem então

$$L - \delta \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \delta \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap I,$$

(*) Note-se que a pode pertencer ou não a I; neste último caso, a será um extremo do intervalo, podendo ser $+\infty$ ou $-\infty$.

ou seja

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2º caso : $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Dado que, neste caso, $g(x) \neq 0$, $x \in V_\varepsilon(a)\cap I$, as desigualdades (2) podem escrever-se

$$L-\delta \leq \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(y)}{g(x)}}{1 - \dfrac{g(y)}{g(x)}} \leq L+\delta \qquad \forall x,y\in V_\varepsilon(a)\cap I. \tag{3}$$

Fixado $y\in V_\varepsilon(a)\cap I$, tem-se $\lim_{x\to a}\frac{g(y)}{g(x)} = 0$ e portanto $1-\frac{g(y)}{g(x)}$ é positivo quando x é vizinho de a; sendo assim, (3) pode escrever-se

$$(L-\delta)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) \leq \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} \leq (L+\delta)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right).$$

Tomando os limites superior e inferior (quando $x \to a$) e utilizando (3.1.16.), obtemos

$$\left.\begin{array}{l} L-\delta \leq \overline{\lim_{x\to a}}\,\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq L+\delta \\[2ex] L-\delta \leq \underline{\lim_{x\to a}}\,\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq L+\delta \end{array}\right. \qquad \forall\delta>0$$

e logo

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \overline{\lim_{x\to a}}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \underline{\lim_{x\to a}}\,\frac{f(x)}{g(x)} = L. \ \blacksquare$$

Observação. Aplicada a regra de Cauchy a $\dfrac{f}{g}$, se

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f'(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = 0 \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ \lim_{x\to a} g'(x) = \pm\,\infty \end{cases}$$

e se $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ está nas condições de aplicação da regra de Cauchy, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Assim, por exemplo, sendo α e β constantes reais positivas, o cálculo do $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log(1+\alpha x)}{\log(1+\beta x)}$ pode ser feito utilizando sucessivamente a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+\alpha x)}{\log(1+\beta x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\dfrac{1}{1+\alpha x}}{\beta\dfrac{1}{1+\beta x}} =$$
$$= \frac{\alpha}{\beta}.\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\beta x}{1+\alpha x} = \frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

4.3. A Fórmula de Taylor. Aplicações.

4.3.1. Derivação de ordem superior.

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função diferenciável em D. Se f' é diferenciável em $a \in D$ então diz-se que f é duas vezes diferenciável em a: a segunda derivada de f em a representa-se por $f''(a)$ ou $D^2 f(a)$ ou ainda por $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(a)$ e vem dada por

$$f''(a) = (f')'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}.$$

Mais geralmente, se existem $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ em D e $f^{(n-1)}$ é derivável em a, então diz-se que f ***tem derivada de ordem n em*** a :

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

A função f diz-se de ***classe*** C^n e escreve-se $f \in C^n(D)$ se f é n vezes diferenciável em D e a função $f^{(n)}$ é contínua em D. Por extensão de linguagem, escreve-se $f \in C^0(D)$ para designar f como função contínua. Se f admite derivadas de todas as ordens em D, então dizemos que f é ***indefinidamente diferenciável*** ou de ***classe*** C^∞.

4.3.2. Exemplos.

1. A função e^x é de classe C^∞ em $\mathbf{R}$ já que

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

2. A função x^n, $(n \in \mathbf{N})$ é ainda de classe C^∞; com efeito,

$$\begin{aligned} D^p(x^n) &= n(n-1)\ldots(n-p+1)x^{n-p} \quad (p<n) \\ D^n(x^n) &= n! \\ D^p(x^n) &= 0 \quad (p>n). \end{aligned}$$

Resulta agora que o polinómio de grau n,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in C^\infty.$$

3. A função $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é derivável em todos os pontos de $\mathbf{R}$ mas a sua derivada, $f_1'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f_1'(x) = 0$ se $x = 0$, não é contínua na origem. Assim, f_1 é derivável mas não é de classe C^1. Mais geramente, a função $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é n vezes diferenciável mas não é de classe C^n (*exercício*).

4. Se $f, g : D \to \mathbf{R}$ são n vezes deriváveis em $x \in D$, então $f + g$ e $f.g$ são n vezes deriváveis e tem-se

i) $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$;

ii) $D^n(f.g)(x) =$

$$f(x)D^n g(x) + nDf(x)D^{n-1}g(x) + \binom{n}{2} D^2 f(x) D^{n-2} g(x) +$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n-1} D^{n-1} f(x) Dg(x) + D^n f(x) g(x) =$$
$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} D^p f(x) D^{n-p} g(x). \qquad (\textit{\textbf{Fórmula de Leibnitz}}).$$

A demonstração da fórmula de Leibnitz pode ser feita por indução em n. (*exercício*).

5. A função $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, é C^∞ ; a derivada de ordem n:

$$D^n \frac{1}{x} = (-1)(-2)\cdots(-n)\, x^{-1-n} = (-1)^n \frac{n!}{x^{1+n}}.$$

6. Como $\log :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ é derivável com derivada igual a $1/x$, resulta que $\log x \in C^\infty$ e

$$D^n \log x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

7. Consideremos a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2 e^{-\dfrac{1}{x^2}} \longrightarrow 0 \quad (x \to 0)$ e portanto $f'(0) = 0$ (cf. (4.2.3.), Cor. 4.).

Mais geralmente, mostremos por indução em n que

$$f^{(n)}(x) = P(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^l e^{-\dfrac{1}{x^2}}$$

em que $P(x)$ é um polinómio e l um inteiro positivo dependentes de n. Com efeito, a fórmula é válida para $n = 1$ como vimos; admitindo-a válida para n, a derivada de ordem $n+1$ de f virá dada por

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = P'(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^l e^{-\dfrac{1}{x^2}} + & \qquad (1) \\ + P(x)\, l \left(\frac{1}{x^2}\right)^{l-1} (-2x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 e^{-\dfrac{1}{x^2}} + & \qquad (2) \\ + P(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^l e^{-\dfrac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}. & \qquad (3) \end{aligned}$$

Mas

$$(1) = x^4 P'(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^{l+2} e^{-\dfrac{1}{x^2}} = P_1(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^{l+2} e^{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$(2) = -2x^3 P(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^{l+2} e^{-\dfrac{1}{x^2}} = P_2(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^{l+2} e^{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$(3) = 2x P(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^{l+2} e^{-\dfrac{1}{x^2}} = P_3(x) \left(\frac{1}{x^2}\right)^{l+2} e^{-\dfrac{1}{x^2}}$$

e logo

$$f^{(n+1)}(x) = Q(x)\left(\frac{1}{x^2}\right)^{l+2} e^{-\dfrac{1}{x^2}}$$

em que $Q(x)$ é o polinómio $P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$. Isto termina a demonstração; como

$$f^{(n)}(x) = P(x)\left(\frac{1}{x^2}\right)^{l} e^{-\dfrac{1}{x^2}} \longrightarrow 0 \qquad (x \to 0)$$

conclui-se que $f^n(0) = 0$. Assim, $f \in C^\infty$ e $f^n(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

4.3.2. A Fórmula de Taylor.

Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função diferenciável em $a \in I$ (sendo I um intervalo arbitrário de $\mathbf{R}$). Recordemos que (cf. (4.1.6.))

$$(F_1) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \theta(x), \qquad x \in I,$$

em que $\theta(x) = o(x-a)$ é um infinitésimo de ordem superior a $x - a$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\theta(x)}{x-a} = 0$. Isto é, a função f é aproximada pelo polinómio de primeiro grau, $f(a) + f'(a)\,(x-a)$, com um “erro” determinado por $\theta(x) = o(x-a)$. No que se segue, procuramos uma melhor aproximação de f na vizinhança de a: o erro será determinado por $o((x-a)^n)$; tal aproximação vem dada pela fórmula de Taylor, de que (F_1) é um caso particular.

4.3.3. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função n vezes diferenciável em $a \in I$. Se $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Para $n = 1$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} = f'(a) = 0.$$

Suponha-se agora o resultado válido para $n-1\,(n>1)$ e seja f tal que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$. A hipótese da indução aplicada a f' implica $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$. Aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \ \blacksquare$$

4.3.4. Teorema (*Fórmula de Taylor*).(*) *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função n vezes diferenciável em $a \in I$. Então, $\forall x \in I$ tem-se*

$$(F_n) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n(x)$$

em que

$$R_n(x) = o((x-a)^n), \quad \textit{isto é,} \quad \lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

O polinómio $T_a^n(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$ diz-se o ***polinómio de Taylor****. A função $R_n(x)$ é designada por* ***resto de ordem*** *n.*

Demonstração. Designe-se por $g(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$ o polinómio de Taylor; trata-se então de demonstrar que $f(x) - g(x) = o((x-a)^n)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) \\ g'(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ g^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

e o resultado sai agora trivialmente da anterior proposição. ■

Dado que $\alpha(x) = \dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n} \longrightarrow 0 \quad (x \to 0)$, tem-se $R_n(x) = (x-a)^n.\alpha(x)$ em que $\alpha(x) = o(1) \xrightarrow{x\to a} 0$, e a fórmula de Taylor pode escrever-se

$$(F_n') \quad f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + (x-a)^n\alpha(x).$$

Se $a = 0 \in I$, a fórmula de Taylor na origem escreve-se

$$(M_n) \qquad f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o(x^n)$$

(*) A fórmula de Taylor é também chamada desenvolvimento limitado de Taylor ou apenas desenvolvimento de Taylor; desenvolvimento limitado, porque faz intervir um número limitado (ou finito) de termos, contrariamente à série de Taylor, noção que será abordada mais tarde.

e designa-se por ***fórmula de Mac-Laurin***.

4.3.5. Proposição (*Unicidade do Desenvolvimento Tayloriano*). *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função n vezes diferenciável em $a \in I$. Se existem constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ tais que*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \widetilde{R}_n(x) \tag{1}$$

em que $\widetilde{R}_n(x) = o((x-a)^n)$, então

$$c_0 = f(a),\ c_1 = \frac{f'(a)}{1!},\ \cdots,\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Demonstração. Subtraindo (1) de (F_n) obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= (c_0 - f(a)) + (c_1 - f'(a))(x-a) + \cdots \\ &+ \left(c_n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)(x-a)^n + (\widetilde{R}_n(x) - R_n(x)) \end{aligned}$$

onde claramente, $(\widetilde{R}_n(x) - R_n(x)) = o((x-a)^n)$. Passando ao limite $(x \to a)$, obtém-se imediatamente $c_0 = f(a)$. Dividindo agora por $x - a$ e passando de novo ao limite $(x \to a)$, vem $c_1 = f'(a)$ e assim sucessivamente, obtendo-se o resultado quando, pela n-ésima vez, se divide por $(x-a)$ e se passa ao limite $x \to a$. ■

Conhecidas as derivadas de ordem n na origem, podemos escrever os desenvolvimentos de Mac-Laurin :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\,;$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad (x > -1)\,;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$(\alpha \in \mathbf{R}$, $(x > -1)\,;$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\,;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função $n+1$ ***vezes diferenciável em*** $a \in I$. A fórmula de Taylor escreve-se

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} + R_{n+1}(x)$$

em que $R_{n+1}(x) = \alpha(x)\,(x-a)^{n+1}$, com $\alpha(x) \to 0 \quad (x \to a)$. Associando os dois últimos termos da anterior fórmula de Taylor, obtemos o resto de ordem n na forma

$$(R_P) \qquad R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\Big(f^{(n+1)}(a) + o(1)\Big)$$

com $o(1) = (n+1)!\,\alpha(x) \to 0 \quad (x \to a)$. O resto dado por (R_P) designa-se por ***resto de Peano*** e a fórmula de Taylor associada

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \\ + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\Big(f^{(n+1)}(a) + o(1)\Big)$$

é designada por ***fórmula de Taylor-Peano***.

Exija-se agora que $f \in C^{(n)}(I)$ e que $f^{(n)}$ admita derivada (finita ou infinita) no $\operatorname{int}(I)$. Fixado $a \in I$, defina-se, para cada $x \in I$, a função $\varphi : [a,x] \subset I \to \mathbf{R}$, se $x > a$, (ou então $\varphi : [x,a] \to \mathbf{R}$ se $x < a$) por

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - (x-t)\,f'(t) - \cdots - \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n)}(t) - \\ - \frac{K}{(n+1)!}\,(x-t)^{n+1} \tag{1}$$

em que K é uma constante a fixar. A função φ assim definida é evidentemente contínua, com derivada em $]a,x[$ (ou $]x,a[$). Além disso, um simples cálculo permite ver que

$$\varphi'(t) = \frac{K - f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \tag{2}$$

Escolha-se então K, em (1), tal que $\varphi(a) = 0$. Como $\varphi(x) = 0 = \varphi(a)$, o teorema de Rolle garante que existe c entre a e x tal que $\varphi'(c) = 0$ e logo

de (2) se tira que $K = f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(a + \theta_n(x-a))$, $\quad (0 < \theta_n < 1)$.
Finalmente, sendo $\varphi(a) = 0$, de (1) vem

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_n(x-a))}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

fórmula de Taylor de f no ponto a com resto

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta_n(x-a)), \qquad (0 < \theta_n < 1),$$

dito ***resto de Lagrange***.

Um exemplo clássico : seja $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ um polinómio de grau n. Como $P^{(n+1)}(x) = 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$, o resto de Lagrange (de ordem n) vem identicamente nulo e logo a correspondente fórmula de Taylor num ponto $a \in \mathbf{R}$, toma a forma

$$P(x) = P(a) + P'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n,$$

que não é mais do que o desenvolvimento do polinómio $P(x)$ em potências de $x - a$. A fórmula de Mac-Laurin

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

vem dada pelo próprio polinómio (consequência de 4.3.5.) :

$$P(0) = a_0,\ P'(0) = a_1, \ldots, \frac{P^{(n)}(0)}{n!} = a_n.$$

4.3.6. Aplicação ao estudo do comportamento de uma função : *extremos locais, pontos de inflexão e concavidade local.*

Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função diferenciável e $a \in \text{int}\ (I)$ um ponto de máximo ou mínimo local; então é sabido que a é um ponto crítico : $f'(a) = 0$.
Reciprocamente, sabemos já que um ponto crítico a pode não ser ponto de extremo local. No entanto,

4.3.7. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função n vezes diferenciável num ponto a* ***interior*** *ao intervalo I. Admita-se que $f'(a) = 0$ e designemos por $f^{(n)}$ $(n > 1)$ a primeira das sucessivas derivadas de f que não se anulam em a :*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n > 1).$$

Então,

$$n \textit{ par} \begin{cases} \textit{se} \quad f^{(n)}(a) > 0, \quad a \quad \textbf{\textit{é ponto de mínimo local}} \\ \\ \textit{se} \quad f^{(n)}(a) < 0, \quad a \quad \textbf{\textit{é ponto de máximo local}} \end{cases}$$

$$n \textit{ ímpar}: \; a \;\; \textbf{\textit{não é ponto de extremo local}}$$

Demonstração. Escreva-se a fórmula de Taylor-Peano (de ordem $n - 1$) no ponto a,

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(a) + o(1)\right).$$

Como $o(1) \to 0 \quad (x \to a)$, vê-se que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{(n)}(a) + o(1)$ tem o sinal de $f^{(n)}(a)$ se $x \in V_\varepsilon(a)$. Logo, se n é ímpar, $(x-a)^n$ muda de sinal em $V_\varepsilon(a)$ consoante $x > a$ ou $x < a$ o mesmo acontecendo a $f(x) - f(a)$ e portanto f não admite extremo local em a. Se n é par, $(x-a)^n$ é sempre positivo e logo $f(x) - f(a)$ tem o sinal de $f^{(n)}(a)$, o que termina a demonstração. ∎

Corolário. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função duas vezes diferenciável num ponto $a \in int\,(I)$, ponto crítico de f, $(f'(a) = 0)$. Então,*

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad a: \textbf{\textit{ponto de mínimo local}} \\ \\ f''(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad a: \textbf{\textit{ponto de máximo local.}} \end{cases}$$

Sentido da concavidade. A noção de função convexa (ou côncava) pode ser estabelecida para funções em geral (não apenas para funções diferenciáveis) e constitui a base de um importante domínio da Análise Matemática dos nossos dias: a Análise Convexa. Todavia, nós limitar-nos-emos apenas a definir rigorosamente, para funções diferenciáveis, o sentido da concavidade num ponto. Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função diferenciável em $a \in I$; o gráfico de f admite então tangente no ponto $A = (a, f(a))$ (cf. Fig. 4.13). Intuitivamente, é razoável dizer que f tem a concavidade voltada para baixo (resp. a concavidade voltada para cima) no ponto a, se nalguma vizinhança de a o gráfico de f estiver "abaixo" (resp. "acima") da tangente em A.

Escreva-se a equação da tangente em $A = (a, f(a))$: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ e faça-se $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$; assim,

4.3.8. Definição. *Diz-se que f tem a **concavidade voltada para baixo no ponto** a se existe $\varepsilon > 0$ tal que $r(x) < 0, \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.*

*Diz-se que f tem a **concavidade voltada para cima no ponto** a se existe $\varepsilon > 0$ tal que $r(x) > 0, \quad \forall x \in V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.*

*Diz-se que $a \in \operatorname{int}(I)$ é **ponto de inflexão** se existe $\varepsilon > 0$ tal que, num dos intervalos $]a-\varepsilon, a[$ e $]a, a+\varepsilon[$ se tenha $r(x) > 0$ e no outro $r(x) < 0$.*

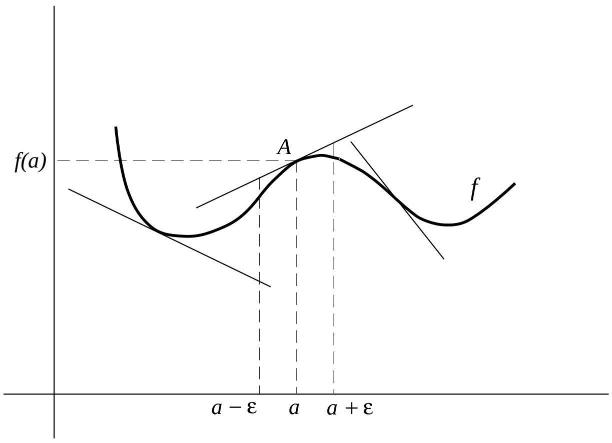


Figura 4.13

Como analisar a concavidade de f em $a \in I$?

Seja f duas vezes diferenciável em $a \in I$ e admita-se que $f''(a) \neq 0$. Escrevendo a fórmula de Taylor-Peano

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\left(f''(a) + o(1)\right)$$

tira-se que

$$r(x) = \frac{(x-a)^2}{2!}\left(f''(a) + o(1)\right).$$

Como o sinal de $f''(a) + o(1)$, numa vizinhança de a, é o de $f''(a)$ (note-se que $o(1) \to 0 \; (x \to a)$), o sinal de $r(x)$ será portanto, na dita vizinhança, o de $f''(a)$ o que nos permite concluir:

4.3.9. Proposição. *Se $f : I \to \mathbf{R}$ é duas vezes diferenciável em $a \in I$, então f tem a concavidade voltada para baixo nos pontos $a \in I$ tais que $f''(a) < 0$ e a concavidade voltada para cima nos pontos $a \in I$ tais que $f''(a) > 0$*

Corolário. *Se $f : I \to \mathbf{R}$ é duas vezes diferenciável em $a \in \operatorname{int}(I)$ e a é ponto de inflexão, então $f''(a) = 0$.*

O corolário diz-nos que, para uma função duas vezes diferenciável, os pontos $a \in I$ candidatos a pontos de inflexão são os que anulam a segunda derivada de f; no entanto ***a recíproca é falsa*** (cf. Fig. 4.14) : a segunda derivada de $f(x) = x^4$ anula-se na origem que no entanto não é ponto de inflexão (a análise direta da função permite concluir imediatamente que $f(x) = x^4$ tem a concavidade voltada para cima em $x = 0$).

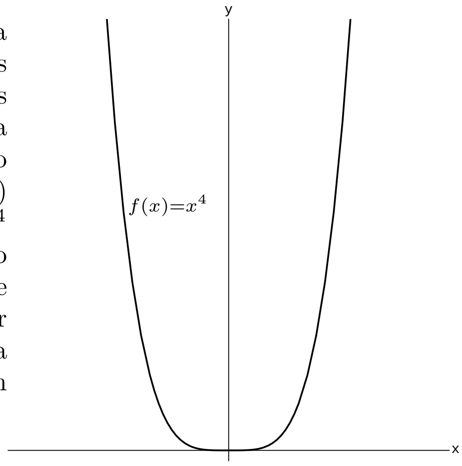


Figura 4.14

Tal como a análise das derivadas superiores de f foi determinante para encontrar os pontos de extremo local por entre os pontos críticos, também agora o uso da fórmula de Taylor permitirá decidir, por entre os pontos que anulam a segunda derivada, quais os pontos de inflexão.

4.3.10. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$, uma função n vezes diferenciável $(n > 2)$ em $a \in \operatorname{int}(I)$, tal que*

$$f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Então,

$$n\ par \begin{cases} f^{(n)}(a) > 0 \;\Rightarrow\; \textbf{\textit{concavidade voltada para cima em}}\ a. \\ \\ f^{(n)}(a) < 0 \;\Rightarrow\; \textbf{\textit{concavidade voltada para baixo em}}\ a. \end{cases}$$

n ímpar : a ***é ponto de inflexão.***

Demonstração. Basta observar que se tem

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + o(1)\right]$$

e portanto

$$r(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + o(1)\right].$$

Dado que $o(1) \to 0$, quando $x \to a$, $f^{(n)}(a) + o(1)$ terá, numa vizinhança de a, o sinal de $f^{(n)}(a)$. Logo, se n é par, $r(x)$ terá o sinal de $f^{(n)}(a)$ o que mostra a primeira parte. Se n é ímpar, como $(x-a)^n$ muda de sinal em qualquer vizinhança de a, o mesmo sucede a $r(x)$ e a será ponto de inflexão.

■

4.3.11. Noção de assíntota.

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função definida num domínio D contendo uma vizinhança de $+\infty$: $V_\varepsilon(+\infty) \subset D$ (resp. $V_\varepsilon(-\infty) \subset D$). Diz-se que a reta $y = ax + b$ é ***assíntota*** ao gráfico de f em $+\infty$ (resp. $-\infty$) se

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \tag{1}$$

(resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$).

Faça-se $\omega(x) = f(x) - (ax+b)$; se $y = ax + b$ é assíntota em $+\infty$ então, como

$$a = \frac{f(x)}{x} - \frac{\omega(x)+b}{x},$$

tem-se

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{2}$$

e de (1) resulta ainda que

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax). \tag{3}$$

Reciprocamente, existindo os limites (2) e (3), a reta $ax + b$ é assíntota em $+\infty$, dado que

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) - b = 0,$$

como se vê imediatamente de (3). Resultado semelhante se estabelece para a assíntota em $-\infty$.

A análise do gráfico de uma função completa-se, introduzindo a noção de ***assíntota vertical*** ao gráfico de f : se $a \in \overline{D} \cap \mathbf{R}$ e se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty,$$

dizemos que o gráfico de f admite em a uma *assíntota vertical*.

4.3.12. Exemplos.

1. Tomemos a função

$$f :]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, \qquad f(x) = \frac{x^2}{4(1-x)}.$$

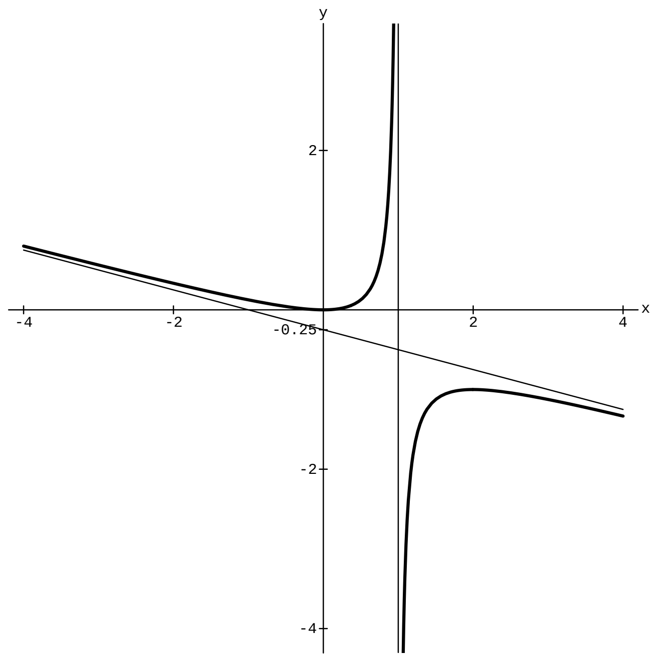


Figura 4.15

Tem-se

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{4(1-x)} = -1/4$$

e logo

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-1/4)x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{4(1-x)} + \frac{x}{4} = -1/4$$

pelo que $-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ e em $-\infty$; finalmente, é claro que $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f (cf. Fig. 4.15).

2. ***Estudo das funções hiperbólicas.***

Em várias aplicações da Análise, desempenham papel importante as chamadas funções hiperbólicas. São definidas do seguinte modo:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R} \qquad \textit{seno hiperbólico}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R} \quad \textit{cosseno hiperbólico}$$

Como se pode ver, a função $\sinh x$ é ímpar e $\cosh x$ é par. Claramente que

$$(\sinh x)' = \cosh x \quad \text{e} \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

e portanto $\sinh x$ é função estritamente crescente em todo o seu domínio; a função $\cosh x$ é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$, admitindo um mínimo (absoluto) em $x = 0$. É ainda claro que ambas as funções tendem para $+\infty$ (quando $x \to +\infty$) do mesmo modo que a função exponencial; em $-\infty$, a função $\sinh x$, sendo ímpar, tende (exponencialmente) para $-\infty$ e $\cosh x$, função par, tende exponencialmente para $+\infty$. Enfim, a análise das segundas derivadas, mostra um ponto de inflexão em $x = 0$ para a função $\sinh x$: $(\sinh x)'' = \sinh x$, enquanto a função $\cosh x$ tem a segunda derivada sempre positiva : $(\cosh x)'' = \cosh x$.

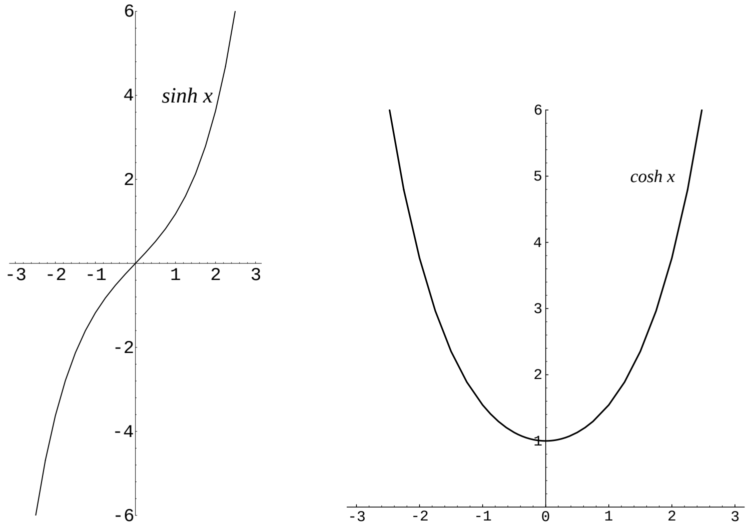


Figura 4.16

Foi referido que, quando $x \to +\infty$, as funções $\sinh x$ e $\cosh x$ tendem para $+\infty$ exponencialmente; mais precisamente,

$$\sinh x - \frac{1}{2}\, e^x = -\frac{1}{2}\, e^{-x}$$

$$\cosh x - \frac{1}{2}\, e^x = \frac{1}{2}\, e^{-x}.$$

Como e^{-x} tende rapidamente para 0, os gráficos de $\sinh x$, $\cosh x$ e $(1/2)e^x$, tendem a identificar-se para $x > x_0$.

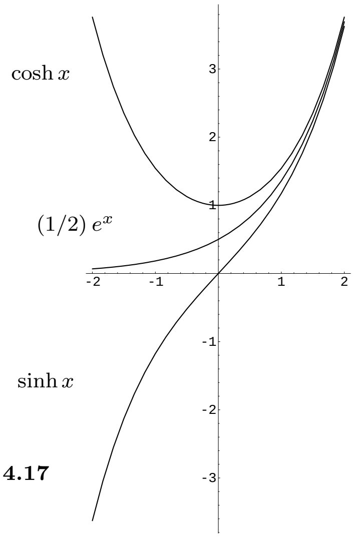


Figura 4.17

Defina-se agora a função *tangente hiperbólica* de x :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

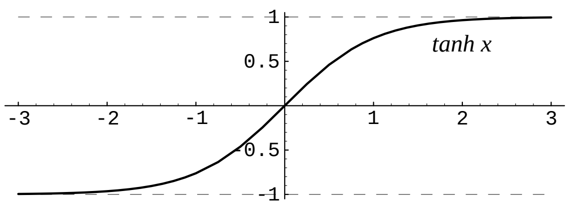


Figura 4.18

A função $\tanh x$ é ímpar, positiva se $x > 0$ e negativa em $x < 0$, e tem-se $0 \le \tanh x < 1,\ x \ge 0$. Tem-se ainda

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1.$$

Derivando, $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$, pelo que a função é estritamente crescente. A segunda derivada, $(\tanh x)'' = -2\tanh x\,(1 - \tanh^2 x)$, mostra que se tem um ponto de inflexão em $x = 0$ e que o gráfico apresenta a concavidade voltada para baixo em $x > 0$ e voltada para cima em $x < 0$. Finamente, como $\lim_{x \to \pm\infty} \tanh x / x = 0$, as retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas em $+\infty$ e $-\infty$, respetivamente.

À semelhança das funções trigonométricas, as funções hiperbólicas satisfazem um certo número de relações algébricas. Exibimos algumas, deixando a demonstração como exercício.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1}$$

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \tag{2}$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \tag{3}$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \tag{4}$$

Fazendo $x = \cosh t$ e $y = \sinh t$, a anterior relação (1) mostra que o ponto $P(\cosh t, \sinh t)$ do plano Oxy, descreve a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ (quando t percorre $\mathbf{R}$). Esta a razão pela qual as funções descritas são designadas por ***funções hiperbólicas***:

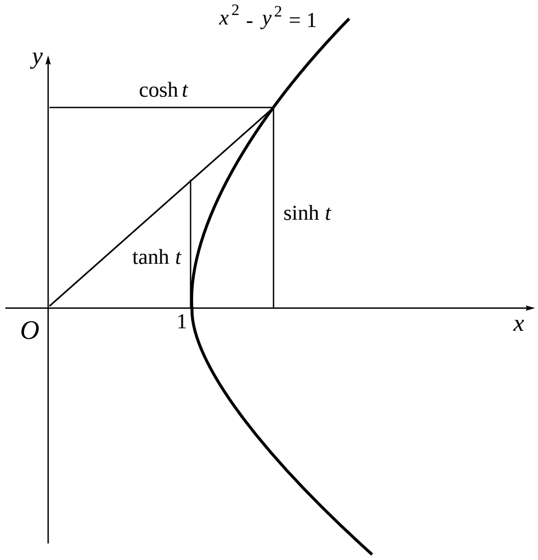


Figura 4.19

3. As aplicações do cálculo diferencial à determinação de máximos e mínimos das funções constituem a versão elementar de um domínio da Matemática especialmente importante designado por Cálculo das Variações. Vejamos um simples (mas clássico) exemplo tirado da Geometria elementar.

Problema. Por entre os triângulos com um dado perímetro $P > 0$, quais são aqueles de maior área?

a) Consideremos em primeiro lugar o problema de determinar os triângulos de maior área por entre aqueles que têm o perímetro P e um lado de comprimento dado, digamos $2r$ $(r > 0)$. No plano cartesiano Oxy representemos o dito triângulo conforme a figura

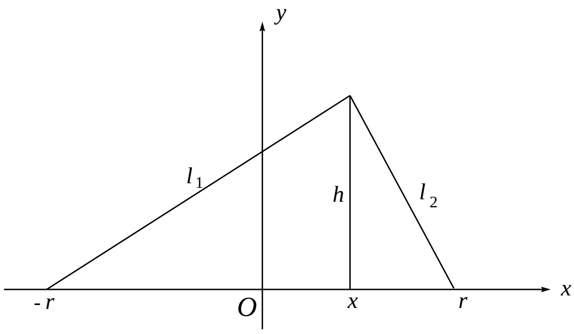


Figura 4.20

Como a área do triângulo vem dada por $A = r.h$, maximizar a área é maximizar $h = h(x)$ (ou se quisermos $h^2(x)$). Ora

$$h^2 = l_1^2 - (x+r)^2 = l_2^2 - (x-r)^2 \tag{1}$$

e daqui tira-se

$$l_1^2 - l_2^2 - 4rx = 0. \tag{2}$$

Mas $l_1 + l_2 + 2r = P$; fazendo $P - 2r = k$, tem-se

$$l_1^2 = (k - l_2)^2 = k^2 - 2kl_2 + l_2^2 \tag{3}$$

e portanto, de (2) e (3) obtemos $l_2 = (k^2 - 4rx)/2k$. Trata-se assim de maximizar a função

$$f(x) = h^2(x) = l_2^2 - (x-r)^2 = \frac{(k^2-4rx)^2}{4k^2} - (x-r)^2.$$

Derivando,

$$f'(x) = \frac{-2r(k^2-4rx)}{k^2} - 2(x-r) = \frac{(8r^2-2k^2)x}{k^2} = \\ = \frac{2P(4r-P)x}{k^2}$$

e portanto, $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Como $4r - P < 0$, é agora imediato concluir que $x = 0$ é ponto de máximo (absoluto) de $h^2(x)$, e logo é ponto de máximo da área $A(x)$. Assim, por entre os triângulos com um dado perímetro e um dado lado, são os isósceles ($l_1 = l_2 = l$) os que têm área máxima.

b) Para um qualquer triângulo de perímetro P, a cada $r > 0$ associamos a área máxima do triangulo isósceles de perímetro P e lado de comprimento $2r$, a qual vem dada por $A(r) = r.h = r.\sqrt{l^2 - r^2}$. Como $P = 2l + 2r$, i.e., $l = P/2 - r$, trata-se agora de maximizar a função

$$A(r) = r\sqrt{\left(\frac{P}{2} - r\right)^2 - r^2} = r\sqrt{\frac{P^2}{4} - Pr}.$$

Dado que

$$A'(r) = \frac{(P^2/2) - 3Pr}{2\sqrt{\dfrac{P^2}{4} - Pr}}\,, \tag{4}$$

o único ponto crítico, ponto de máximo, é $r = P/6$, o que significa que $2r = P/3 = l$, e portanto os triângulos de perímetro P com área máxima são precisamente os equiláteros.

Observação. Repare-se que o denominador de (4) é sempre positivo dado que o lado de comprimento $2r$ terá naturalmente de ser inferior a $P/2$ e logo o domínio de $A(r)$ é $0 < r < P/4$.

Exercícios

1. Calcule as derivadas das seguintes funções, indicando o maior domínio de diferenciabilidade :

a) $\arcsin(1-x)$;

b) $\sqrt[5]{x^2-1}$;

c) $\log(\log x)$;

d) $(x^x)^x$;

e) $(1+x^2)^x$.

2. Determine os números naturais p para os quais a função, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) é derivável em $\mathbf{R}$;

b) tem derivada contínua em $\mathbf{R}$.

3. Mostre que se f é derivável num ponto x_0, então a sucessão

$$\left(n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]\right)$$

converge. Mostre, com um exemplo, que a recíproca não é verdadeira.

4. Sejam f e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \mid x \mid .$$

Mostre que f e g não são deriváveis no ponto zero mas que $f \circ g$ é derivável nesse ponto.

5. Considere a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \cos x$.

a) Mostre que f é invertível.

b) Calcule a derivada de f^{-1} no ponto $y = 5\pi/2$. Determine os pontos em que a função inversa tem derivada $+\infty$.

6. Diga para que valores de α e β ($\beta > 0$) a função

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(1/|x|^\beta) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

no ponto $x = 0$ é:

a) contínua; b) tem derivada; c) tem derivada contínua.

7. Determine os valores de α e β para os quais a função

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \alpha x & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ \beta \operatorname{sign} x + \dfrac{x-1}{2} & \text{se} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

tem derivada

a) no ponto $x = 1$; b) no ponto $x = -1$.

8. Estude a derivabilidade das funções :

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 2|x| - 1 & \text{se} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$

9. Prove que $x^3 + 3x - 1$ tem um só zero em $\mathbf{R}$, ficando esse zero situado no intervalo $]0, 1[$.

10. Seja f uma função real três vezes diferenciável em $\mathbf{R}$ e tal que

$$f'''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Determine o número máximo de zeros de f.

11. Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função derivável num ponto a interior a D. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Prove, com um exemplo, que a existência do anterior limite não implica tão pouco a continuidade de f em a.

12. Prove que a aplicação $f : [0,2] \to \mathbf{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

satisfaz as condições do teorema de Lagrange em $[0,2]$ e determine os valores $c \in [0,2]$ tais que

$$f(2) - f(0) = 2f'(c).$$

13. Determine os seguintes limites

$$a) \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad a, b > 0; \qquad b) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x(1 - \log x)}{\log(1-x)};$$

$$c) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}; \qquad d) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin \dfrac{1}{x}}{e^x - 1};$$

$$e) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(ax) - ax}{\tan(bx) - bx}; \qquad f) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}{e^{1/\log x} - 1}$$

$$g) \quad \lim_{x \to 0} x^{1/x}; \qquad h) \quad \lim_{x \to \pi/4} (\tan x)^{\tan(2x)}.$$

14. Dê um exemplo de funções $f, g :]0,1[\to \mathbf{R}$ com derivadas finitas em $]0,1[$, $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in]0,1[$, e verificando

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{não existe.}$$

15. Mostre, utilizando o teorema do valor médio de Lagrange, que para $0 < b \le a$,

$$\frac{a-b}{a} \le \log \frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b}.$$

16. Utilize o teorema de Lagrange para mostrar

a) $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad$ com $x > 0$.

b) $\tan x \ge x, \qquad x \in [0, \pi/2[$.

17. Mostre que

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2} \qquad (0 < a < b).$$

18. Mostre que se tem

$$x^{\alpha}|\log x| \leq \frac{1}{\alpha e}$$

para todo $0 < x < 1$ e para todo $\alpha > 0$.

19. Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ uma função contínua no seu domínio, diferenciável em $]a, +\infty[$ e satisfazendo as condições

$$\begin{cases} f(a) < 0 \\ \\ f'(x) \geq m > 0 \quad \forall x \in]a, +\infty[\end{cases}$$

a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ admite uma única raiz real em $]a, +\infty[$.

b) Verifique, com um exemplo, que a condição $f'(x) \geq m > 0$, com $x \in]a, +\infty[$, não pode ser substituida pela condição $f'(x) > 0$.

c) Mostre que a raiz da equação pertence ao intervalo $\left]a, a - \dfrac{f(a)}{m}\right]$.

20. Mostre que a equação

$$e^x - a - bx^3 = 0, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

não pode ter mais de quatro raízes reais.

21. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função nas condições do teorema de Rolle. Mostre que se f não é constante, existem $\xi_1, \xi_2 \in]a, b[$ tais que $f'(\xi_1) < 0$ e $f'(\xi_2) > 0$.

22. Mostre que se tem

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}}, \quad x \geq 0,$$

em que $1/4 \leq \theta(x) \leq 1/2$. Mostre ainda que

$$\lim_{x \to 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

23. Seja f derivável em $[a, b] \subset \mathbf{R}$ e tal que $f(a) = f(b)$. Mostre que existe $\xi \in]a, b[$ tal que

$$f(a) - f(\xi) = \xi\, f'(\xi).$$

Sug. Repare que $[xf(x)]' = f(x) + xf'(x)$; aplique o teorema de Rolle a uma conveniente função.

24.

a) Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$, função derivável tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Demonstre que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

b) Mostre com um exemplo que a recíproca não é verdadeira. No entanto tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

25. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função derivável e suponha-se que a equação $x = f(x)$ tem uma única raiz, $c \in [a, b]$.
Defina-se a sucessão recorrente

$$u_n = f(u_{n-1}), \quad u_0 \in [a, b] \text{ dado.}$$

a) Mostre que, se

$$0 \le f'(x) \le 1, \quad \forall x \in [a, b],$$

então $u_n \in [a, b]$, $\forall n$, e a sucessão (u_n) é monótona e convergente para c.

b) Mostre que, se

$$-1 \le f'(x) \le 0, \ \forall x \in [a, b], \quad \text{e} \quad u_1 \in [a, b],$$

então $u_n \in [a, b]$, $\forall n$, e as subsucessões u_{2n}, u_{2n+1}, são monótonas e convergentes para raízes da equação

$$x = (f \circ f)(x).$$

Mostre finalmente que c é a única raiz da anterior equação, se $-1 < f'(x) \le 0$.

26. Estude as seguintes funções, determinando os limites nos pontos de descontinuidade e nos pontos $+\infty$ e $-\infty$, assíntotas, máximos e mínimos, sentido da concavidade e pontos de inflexão; esboce os gráficos;

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; *b*) $\log|\log x|$;

c) $\begin{cases} x(\log x)^2 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$; *d*) $\arcsin \dfrac{2x}{x^2+1}$;

e) $x\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$; *f*) $\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{se} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$

27. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ duas vezes derivável e suponha-se que $f'(a) = f'(b) = 0$. Mostre que existe $\xi \in]a,b[$ tal que

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\,|f(b) - f(a)|.$$

Sug. Considere o desenvolvimento de Taylor de f em a e em b e considere o ponto intermédio $c = (a+b)/2$.

28. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^∞. Suponha que se tem,

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}_0 \qquad \text{e} \qquad \sup_{x\in\mathbf{R}} \mid f^{(n)}(x) \mid \leq n!k^n$$

em que $k > 0$ é um número real fixo. Utilize Mac-Laurin para mostrar que f é nula no intervalo $[-1/k, 1/k]$.

Mostre finalmente que f é idênticamente nula em $\mathbf{R}$.

29. Prove que a função $f(x) = \mid x \mid^{2n+1}$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ é de classe C^{2n} em $\mathbf{R}$, mas não é $2n+1$ vezes diferenciável.

30. Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^{n+1} e $a \in I$. Escreva-se a fórmula de Taylor-Lagrange de ordem $n-1$,

$$\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.h^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n)}(a+\theta_n.h)}{n!}.h^n \end{aligned}$$

em que $0 < \theta_n = \theta_n(h) < 1$. Mostre que, se $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, então

$$\lim_{h\to 0} \theta_n(h) = \frac{1}{n+1}.$$

31. Seja $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ duas vezes diferenciável tal que $f(0) = f(1) = 0$. Suponha-se que a segunda derivada de f é limitada e seja $M > 0$: $|f''(x)| \leq M,\ \forall x \in [0,1]$. Mostre então que $|f'(x)| \leq M/2,\ \forall x \in [0,1]$.

Sug. Escreva o desenvolvimento de Taylor de f num ponto $x_0 \in [0,1]$.

32. Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função duas vezes diferenciável num ponto $a \in \operatorname{int} I$.

a) Utilize convenientemente a fórmula de Taylor para mostrar que

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2\,f(a)}{h^2}.$$

b) Dê um exemplo em que exista o limite acima indicado mas $f'(a)$ não exista.

33. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Suponha-se que f e f'' são funções limitadas em $\mathbf{R}$ e ponha-se $M_0 = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ e $M_2 = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f''(x)|$.

a) Mostre que f' é limitada em $\mathbf{R}$ e que se tem

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f'(x)| = M_1 \leq \frac{M_0}{a} + \frac{a\, M_2}{2}, \quad \forall a > 0.$$

Sug. Escreva o desenvolvimento de Taylor de f no ponto x e aplique-o aos pontos $x + a$ e $x - a$.

b) Minimize a aplicação $x \in]0, +\infty[\longrightarrow \dfrac{M_0}{x} + \dfrac{x\, M_2}{2}$ e conclua que

$$M_1 \leq \sqrt{2}\,\sqrt{M_0\, M_2}.$$

c) Seja agora $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função p vezes diferenciável, $p \geq 2$, e suponha-se que f e $f^{(p)}$ são funções limitadas em $\mathbf{R}$. Pondo $M_0 = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ e $M_p = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(p)}(x)|$, utilize a indução e o resultado precedente para mostrar que

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)| = M_k \leq 2^{\frac{k\,(p-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{p}} M_p^{\frac{k}{p}}, \quad 1 \leq k \leq p - 1.$$

34. Determine o retângulo de área máxima inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad a, b > 0.$$

35. Dados dois pontos A e B representando dois focos luminosos de intensidades p (o ponto A) e q (o ponto B), determine o ponto X da reta AB menos iluminado (sabendo que a iluminação de um ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao foco luminoso).

36. Dados dois pontos A e B no semi-plano superior, Oxy, $y > 0$, determine o ponto M no eixo dos x que torna mínimo o comprimento da linha quebrada $AM+MB$. Verifique que o ponto M é o único ponto que satisfaz $\alpha = \beta$, sendo α e β os ângulos $\widehat{AMC}$, respetivamente $\widehat{CMB}$, formados pelos segmentos AM e MB com a vertical ao eixo dos x.

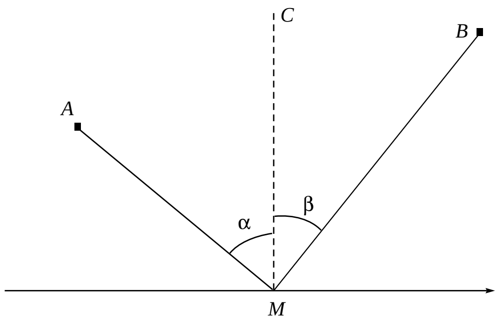


Figura 4.21. Fenómeno da reflexão.

37. Sejam P e Q dois pontos situados respetivamente nos semi-planos superior e inferior de Oxy. Suponha que um ponto material de desloca de P para Q segundo uma linha quebrada PMQ, em que M é um ponto do eixo dos x. Se v_1 é a velocidade no semi-plano superior e v_2 a velocidade no semi-plano inferior, mostre que o ponto M para o qual é mínimo o tempo de deslocamento ao longo de PMQ é tal que

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

sendo α (respetivamente β) o ângulo de vértice M, formado pelo segmento PM (respetivamente MQ) com a vertical ao eixo dos x.

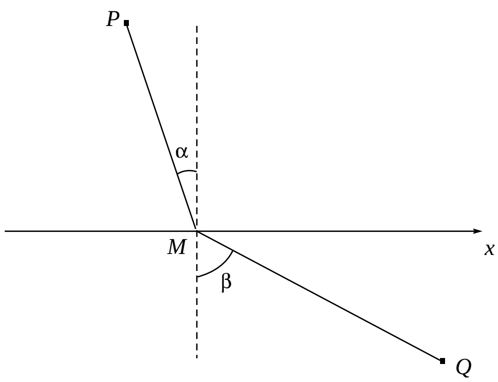


Figura 4.22. Fenómeno da refracção.

5

O Integral de Riemann

O conceito de integral, historicamente anterior ao de derivada, nasce com o objectivo de definir rigorosamente a noção intuitiva de “área” de uma região do plano limitada por uma curva fechada. Embora o processo de integração remonte à Antiguidade Clássica, é só no século XVII, com Newton e Leibnitz, que os conceitos de integral e derivada aparecem relacionados, descoberta decisiva para o desenvolvimento fulgurante do Cálculo. Contudo, a apresentação sistemática da teoria do integral só é feita em todo o rigor no século XIX (com Riemann, em particular), fenómeno que podemos perceber se tivermos presente que é apenas no século passado que o conceito de limite é rigorosamente formulado.

No capítulo que segue, será exposta a teoria do integral de Riemann para funções (limitadas) definidas em intervalos compactos $[a, b] \subset \mathbf{R}$. A integração de funções ilimitadas em $[a, b]$ ou de funções definidas em intervalos ilimitados, $]-\infty, b], [a, +\infty[$, será exposta na parte final do capítulo (integrais impróprios). Ponto central da teoria do integral é o Teorema Fundamental do Cálculo, em que se mostra como a integração é a “operação inversa” da derivação; isto leva-nos a definir o conceito de primitiva e a apresentar com algum desenvolvimento as técnicas de primitivação.

5.1. Primeiras definições. Motivação geométrica.

Considere-se uma função $f : [a, b] \to \mathbf{R}\ (a < b)$ definida num intervalo limitado e fechado $[a, b] \subset \mathbf{R}$ e admita-se que $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$. O nosso objectivo é associar à função f um número real que "represente a área" da região do plano limitada pelo gráfico de f e o eixo dos xx. Neste sentido, decompomos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \cdots, n-1)$ determinados pelos pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, e escolhemos arbitrariamente em cada um dos subintervalos um ponto $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ (cf. Fig. 5.1).

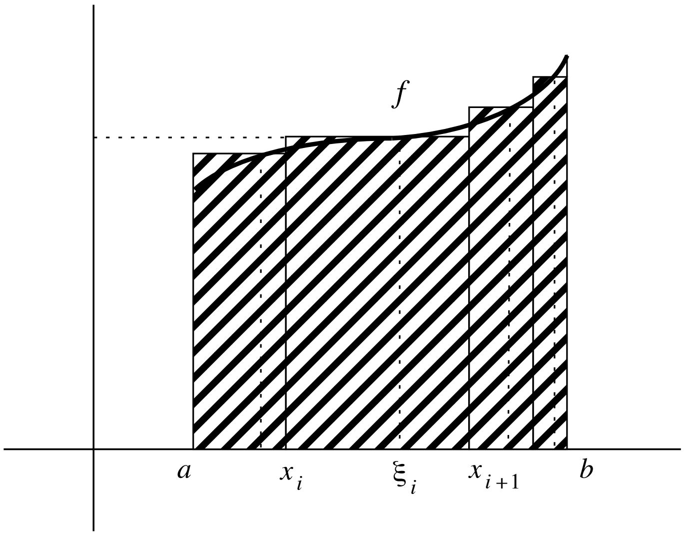


Figura 5.1

Considere-se então a soma das áreas dos retângulos de base $[x_i, x_{i+1}]$ e altura igual a $f(\xi_i)$:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i).$$

É claro que o valor de S representa uma aproximação grosseira da "área" limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos xx; todavia, intuitivamente, é razoável esperar que para intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ com uma amplitude suficientemente pequena a soma das áreas dos retângulos, S, se aproxime da área procurada. Esta é, com efeito, a ideia subjacente à noção de integral de f, a qual permitirá definir rigorosamente a área do subconjunto de $\mathbf{R}^2$ limitada pelo gráfico de $f \geq 0$ e pelo eixo dos xx.

Em toda a teoria que se segue, o domínio das funções consideradas, $[a,b] \subset \mathbf{R}$, é um intervalo compacto de $\mathbf{R}$ não degenerado, isto é, $a < b$.

5.1.1. Definição. *Seja $[a,b] \subset \mathbf{R}$ um intervalo limitado e fechado em $\mathbf{R}$. Chama-se* ***partição*** *de $[a,b]$ ao conjunto $P=\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ em que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Os elementos $x_0, x_1, \cdots, x_n$, dizem-se os* ***vértices da partição****. Os intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ chamam-se* ***intervalos da partição*** *e a maior das amplitudes destes intervalos diz-se o* ***diâmetro da partição*** *e representa-se por $|P| = \max\limits_{i=0,\cdots,n-1} |x_{i+1} - x_i|$.*

Dadas duas partições de $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e $Q = \{y_0, y_1, \cdots, y_m\}$, diz-se que Q é ***mais fina*** *do que P se todo o vértice de Q é um vértice de P.*

Assim, para o intervalo $[0,1]$, a partição $Q = \{0, 1/3, 1/2, 1\}$ é evidentemente mais fina do que a partição $P = \{0, 1/2, 1\}$. Dadas duas partições P e Q de $[a,b]$, é fácil constatar que existe sempre uma partição mais fina do que P e Q; com efeito, bastará considerar a partição $R = P \cup Q$ formada pelos vértices de P e pelos vértices de Q; por exemplo, relativamente ao intervalo $[0,1]$ e às partições $P = \{0, 1/2, 1\}$ e $Q = \{0, 1/3, 1\}$, a partição $R = P \cup Q = \{0, 1/3, 1/2, 1\}$ é claramente mais fina do que P e Q.

Seja agora $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, uma função definida no intervalo limitado e fechado $[a,b]$; considere-se uma partição $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e escolha-se arbitráriamente um elemento $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ em cada um dos intervalos da partição. A soma

$$S_P = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

é designada por ***soma de Riemann*** relativa à função f no intervalo $[a,b]$ e associada à partição P e à escolha dos ξ_i.

5.1.2. Definição. *Diz-se que a função $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ é* ***integrável à Riemann*** *ou R-****integrável****, se existe um número real I satisfazendo a seguinte condição:*

$$\textit{para todo } \delta > 0, \quad \textit{existe } \epsilon > 0 \quad \textit{tal que} \quad |S_P - I| < \delta$$

para toda a partição *P de $[a,b]$ tal que $|P| < \epsilon$ e* ***qualquer que seja a escolha dos pontos*** *$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.*

Exprime-se a condição precedente dizendo que existe "limite" das somas de Riemann quando o diâmetro da partição tende para zero:

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) = I.$$

O número I é designado por ***integral de Riemann*** ou ***integral definido*** (à Riemann) de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad I = \int_a^b f.$$

A função f diz-se a ***função integranda***.

Observações 1. É um elementar exercício verificar que, para uma função R-integrável f em $[a, b]$, o integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$ é único; o leitor poderá utilizar um raciocínio similar ao utilizado para mostrar a unicidade do limite para funções reais de variável real.

2. Se $f \geq 0$ em $[a, b]$ é integrável à Riemann, é agora natural definir a área do subconjunto de $\mathbf{R}^2$ limitado pelo gráfico de f e pelo segmento do eixo dos xx entre a e b como o número:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Não sendo f R-integrável, diremos que o subconjunto de $\mathbf{R}^2$ em questão não tem área definida (no sentido de Riemann).

O teorema seguinte é particularmente importante na medida em que nos permite restringir o desenvolvimento da teoria do integral de Riemann a uma classe particular de funções : as funções limitadas; com efeito,

5.1.3. Teorema. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função R-integrável. Então f é limitada.*

Demonstração. Sendo f uma função R-integrável em $[a, b]$, dado $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que para toda a partição P com $|P| < \epsilon$ as correspondentes somas de Riemann satisfazem:

$$|S_P| = |S_P - I + I| \leq |S_P - I| + |I| < \delta + |I|.$$

Façamos agora um raciocínio por absurdo, supondo que f é ilimitada em $[a, b]$. Consideremos uma partição P de $[a, b]$ com $|P| < \epsilon$ e considere-se a correspondente soma de Riemann, $S_P = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$. Sendo f ilimitada em $[a, b]$ então será ilimitada num dos intervalos da partição, digamos $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$, e podemos escrever:

$$S_P = f(\xi_{i_0})\,(x_{i_0+1} - x_{i_0}) + \sum_{j \neq i_0} f(\xi_j)\,(x_{j+1} - x_j). \tag{1}$$

Fixemos os ξ_j $(j \neq i_0$) e designemos por B a soma que figura à direita do segundo membro de (1). Tem-se naturalmente,

$$|S_P| \geq |f(\xi_{i_0})|\,(x_{i_0+1} - x_{i_0}) - |B|.$$

Dado agora um qualquer $N \in \mathbf{N}$ (arbitrariamente grande), como f é ilimitada em $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$, existe um ξ_{i_0} tal que:

$$|f(\xi_{i_0})| > \frac{N + |B|}{(x_{i_0+1} - x_{i_0})}$$

e logo

$$|S_P| \geq |f(\xi_{i_0})|\,(x_{i_0+1} - x_{i_0}) - |B| > N, \quad \forall N \in \mathbf{N};$$

mas então, pelo que se disse no início da demontração, f não seria R-integrável. ∎

5.2. Somas de Darboux.

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada no intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbf{R}$ e considere-se uma qualquer partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Ponha-se

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad (i = 0, 1, \cdots n-1)$$

e tomemos as somas

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,(x_{i+1} - x_i) \quad \text{e} \quad \overline{S}_P(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(x_{i+1} - x_i).$$

As somas $\underline{S}_P(f)$ e $\overline{S}_P(f)$ são chamadas respetivamente, ***somas de Darboux inferiores e superiores***. São números reais bem definidos (f é função limitada) que dependem evidentemente de f e de P. Geometricamente:

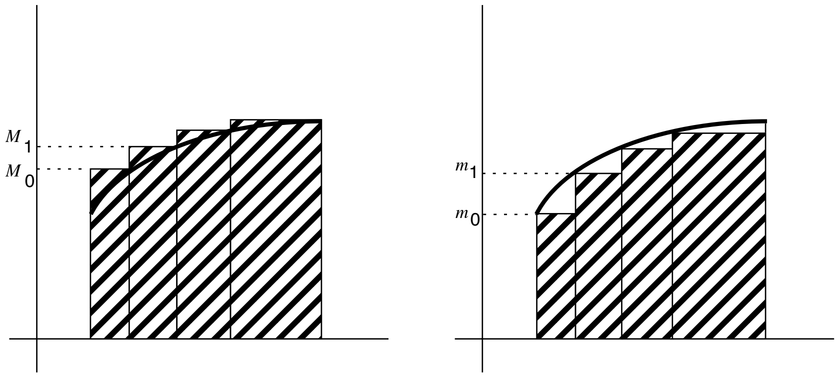


Figura 5.2

É imediato constatar que $\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f)$ para toda a partição P de $[a,b]$. Mais geralmente:

5.2.1. Proposição. *Se P_1 e P_2 são duas partições quaisquer de $[a,b]$, então $\underline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f)$.*

Demonstração. Comecemos por mostrar que se P é uma partição de $[a,b]$ e P' uma partição mais fina do que P, então

$$\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_P(f). \tag{1}$$

Por simplicidade, admita-se que a partição P' tem o número de vértices de P mais um, isto é, se $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, faça-se $P' = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < t < x_{i+1} < \cdots < x_n = b\}$. Seja agora

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M' = \sup_{x \in [x_i, t]} f(x), \quad M'' = \sup_{x \in [t, x_{i+1}]} f(x).$$

Então,

$$\begin{aligned}\overline{S}_{P'}(f) = M_0\,(x_1 - x_0) + \cdots + M'\,(t - x_i) + \\ M''\,(x_{i+1} - t) + \cdots + M_{n-1}\,(x_n - x_{n-1}).\end{aligned}$$

Como $M' \leq M_i$ e $M'' \leq M_i$, é claro que $M'\,(t - x_i) + M''\,(x_{i+1} - t) \leq M_i\,(x_{i+1} - x_i)$ e logo $\overline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_P(f)$. Analogamente se via que $\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_{P'}(f)$; repetindo o raciocínio, obtém-se (1) para qualquer partição P' mais fina do que P.
A proposição resulta agora facilmente se observarmos que a partição $P_1 \cup P_2$ é mais fina do que P_1 e P_2 e logo

$$\underline{S}_{P_1} \leq \underline{S}_{P_1 \cup P_2} \leq \overline{S}_{P_1 \cup P_2} \leq \overline{S}_{P_2}. \ \blacksquare$$

A proposição anterior significa, em particular, que o conjunto das somas inferiores de Darboux,

$$\underline{\sum}(f) = \{\underline{S}_P(f) : P \text{ é partição de } [a,b]\,\},$$

é majorado (qualquer soma superior é um majorante); do mesmo modo, o conjunto das somas superiores de Darboux,

$$\overline{\sum}(f) = \{\overline{S}_P(f) : P \text{ é partição de } [a,b]\,\},$$

é minorado (qualquer soma inferior é um minorante). Podemos então estabelecer:

5.2.2. Definição. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *uma função limitada. Define-se* ***integral inferior*** *de* f *em* $[a,b]$ *e representa-se por* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ *ou* $\underline{\int_a^b} f$ *como o supremo das somas inferiores, supremo tomado relativamente a todas as partições* P *de* $[a,b]$ *:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup \underline{\sum}(f) = \sup_P \underline{S}_P(f).$$

Analogamente, define-se ***integral superior*** *de* f *em* $[a,b]$ *e representa-se por* $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ *ou* $\overline{\int_a^b} f$ *como o ínfimo das somas superiores de Darboux:*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf \overline{\sum}(f) = \inf_P \overline{S}_P(f).$$

Consequência da anterior proposição e da precedente definição são as seguintes propriedades:

1. Para qualquer partição P de $[a,b]$, tem-se

$$\underline{S}_P(f) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{S}_P(f).$$

2. Se $m \le f(x) \le M, \quad \forall x\in[a,b]$, então

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Em particular, se $|f(x)|\le K,\ \forall x\in[a,b]$, vem

$$\left|\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \le K(b-a) \quad \text{e} \quad \left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \le K(b-a),$$

já que $|f(x)|\le K \Longleftrightarrow -K\le f(x)\le K$.

5.2.3. Exemplos.

1. Seja $f:[a,b]\to \mathbf{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad x \quad \text{é irracional} \quad (x\in[a,b]\cap(\mathbf{R}-\mathbf{Q})) \\ \\ 1 \quad \text{se} \quad x \quad \text{é racional} \qquad (x\in[a,b]\cap\mathbf{Q}) \end{cases}$$

Tomando uma qualquer partição $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ de $[a,b]$, é claro que

$$m_i=\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)=0 \quad \text{e} \quad M_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)=1.$$

Logo, $\underline{S}_P(f)=0$ e $\overline{S}_P(f)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 1.(x_{i+1}-x_i)=b-a$ e portanto

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=0 \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=b-a.$$

Intuitiva e geometricamente, poder-se-ia pensar que os integrais inferior e superior de Darboux são iguais para uma qualquer função; este exemplo mostra bem que não é assim.

2. Seja agora $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $f(x)=K$, $\forall x\in[a,b]$, a função constante. Então, $m_i=M_i=K$ e logo

$$\underline{S}_P(f)=\overline{S}_P(f)=\sum_{i=0}^{n-1}K(x_{i+1}-x_i)=K(b-a)$$

para toda a partição P de $[a,b]$, donde

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=K(b-a).$$

5.2.4. Teorema. *Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ duas funções limitadas. Então,*

1. $$\underline{\int_a^b} f+\underline{\int_a^b} g\le \underline{\int_a^b}(f+g)\le \overline{\int_a^b}(f+g)\le \overline{\int_a^b} f+\overline{\int_a^b} g.$$

2. *Para $c>0$, tem-se*

$$\underline{\int_a^b} c.f=c.\underline{\int_a^b} f \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} c.f=c.\overline{\int_a^b} f.$$

3. *Para $c < 0$, tem-se*

$$\underline{\int_a^b} c.f = c.\overline{\int_a^b} f \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} c.f = c.\underline{\int_a^b} f.$$

Em particular,

$$\underline{\int_a^b}(-f) = -\overline{\int_a^b} f \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f.$$

A demonstração do teorema utiliza o seguinte lema elementar, cuja prova é deixada ao leitor como exercício.

Lema 1. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbf{R}$ não vazios e limitados; sejam*

$$A + B = \{z = x + y : x \in A, y \in B\} \text{ e } c.A = \{cx : x \in A\} \ (c \in \mathbf{R}).$$

Então, tem-se

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B, \quad \sup(A + B) = \sup A + \sup B;$$

$$\inf(c.A) = c \inf A, \quad \sup(c.A) = c \sup A, \quad \text{se} \quad c > 0;$$

$$\inf(c.A) = c \sup A, \quad \sup(c.A) = c \inf A, \quad \text{se} \quad c < 0.$$

Demonstração do teorema. Mostremos a primeira desigualdade de 1. (a desigualdade à direita de 1., prova-se de modo idêntico). Tomemos uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ e designemos por $m_i(f)$, $m_i(g)$, $m_i(f + g)$ os ínfimos, respetivamente de f, g e $f + g$, no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq n - 1)$. Como é sabido, $m_i(f + g) \geq m_i(f) + m_i(g)$ e logo $\underline{S}_P(f + g) \geq \underline{S}_P(f) + \underline{S}_P(g)$, pelo que

$$\underline{S}_P(f) + \underline{S}_P(g) \leq \underline{\int_a^b}(f + g)$$

para toda a partição P de $[a, b]$. Por outro lado, dadas duas quaisquer partições P e Q, como $P \cup Q$ é mais fina do que P e Q, vem (cf. Prop. 5.2.1. (1)) :

$$\underline{S}_P(f) + \underline{S}_Q(g) \leq \underline{S}_{P \cup Q}(f) + \underline{S}_{P \cup Q}(g) \leq \underline{\int_a^b}(f + g)$$

e do lema precedente, resulta

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g = \sup \underline{\sum}(f) + \sup \underline{\sum}(g) = \sup \left(\underline{\sum}(f) + \underline{\sum}(g) \right) =$$

$$= \sup_{P,Q} \left(\underline{S}_P(f) + \underline{S}_Q(g) \right) \le \underline{\int_a^b} (f+g).$$

Para mostrar 2. observemos que se tem

$$\begin{array}{llll} m_i(c.f) = c\, m_i(f), & M_i(c.f) = c\, M_i(f) & \text{se} & (c>0) \\ m_i(c.f) = c\, M_i(f), & M_i(c.f) = c\, m_i(f) & \text{se} & (c<0). \end{array}$$

Então, para $c > 0$

$$\underline{S}_P\,(c.f) = \sum_i m_i(c.f)\,(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= c. \sum_i m_i(f)\,(x_{i+1} - x_i) = c.\, \underline{S}_P(f).$$

Aplicando de novo o lema, tira-se que

$$\underline{\int_a^b} c.f = \sup_P \underline{S}_P\,(c.f) = \sup_P\,[c.\, \underline{S}_P(f)] =$$

$$= c. \sup_P\,(\underline{S}_P(f)) = c. \underline{\int_a^b} f.$$

Analogamente se obtêm as outras igualdades. ■

Antes de apresentarmos o teorema central que põe em relação a noção de integral de Riemann com as de integral inferior e superior de Darboux, introduzimos a noção de oscilação de uma função f num conjunto.

5.2.5. Definição. *Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada e $X \subset [a,b]$ um subconjunto do domínio $[a,b]$. Define-se **oscilação** de f no conjunto X como o número real:*

$$\omega(f;X) = \sup_X f - \inf_X f = \sup f(X) - \inf f(X).$$

O lema seguinte permite-nos dar um outro esclarecimento à noção de oscilação de f em X.

Lema 2. *Seja $A \subset \mathbf{R}$ um conjunto de reais não vazio e limitado; faça-se $M = \sup A$ e $m = \inf A$. Então,*

$$M - m = \sup\{|x - y| : x \in A,\ y \in A\}.$$

Demonstração. Seja $C = \{|x - y| : x \in A, y \in A\}$. Dados dois quaisquer elementos $x, y \in A$ (podemos naturalmente supor $x \geq y$), tem-se $m \leq y \leq x \leq M$ e logo $|x - y| = (x - y) \leq M - m$, isto é, $M - m$ é um majorante de C. Tomemos agora um arbitrário $\epsilon > 0$; então existe $x \in A$ tal que $x > M - \epsilon/2$ e existe $y \in A$ tal que $y < m + \epsilon/2$, pelo que

$$|x - y| \geq x - y > M - \epsilon/2 - (m + \epsilon/2) = M - m - \epsilon$$

ou seja, $M - m = \sup C$. ■

Pode então dizer-se que a oscilação $\omega(f; X)$ vem dada por:

$$\omega(f; X) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x \in X, y \in X\}.$$

5.2.6. Teorema. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada. Então são equivalentes:*

I. $\displaystyle\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$

II. *Para todo $\delta > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que*

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \delta. \tag{1}$$

III. *Para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que a desigualdade (1) é verificada para toda a partição P de $[a, b]$ satisfazendo $|P| < \epsilon$.*

IV. *Para todo o $\delta > 0$, existe uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i\,(x_{i+1} - x_i) < \delta,$$

em que $\omega_i = \omega\,(f; [x_i, x_{i+1}])$ representa a oscilação de f no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

V. *f é R-integrável e tem-se*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Demonstração. Como

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \,(x_{i+1} - x_i) = \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f)$$

é imediato que II. $\Longleftrightarrow$ IV.

Vejamos agora que I. $\Longrightarrow$ II.
Da definição de integral inferior e superior, para $\delta > 0$, existem partições P_1 e P_2 tais que

$$\underline{\int_a^b} f \;\; - \frac{\delta}{2} < \underline{S}_{P_1} \quad \text{e} \quad \overline{S}_{P_2} < \overline{\int_a^b} f \;\; + \frac{\delta}{2}.$$

Como $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$ vem, tomando a partição $P = P_1 \cup P_2$ e tendo presente a Prop. 5.2.1. (1) :

$$I - \frac{\delta}{2} < \underline{S}_{P_1} \le \underline{S}_P \le \overline{S}_P \le \overline{S}_{P_2} < I + \frac{\delta}{2},$$

o que dá o resultado.

II.$\Longrightarrow$ I.

Seja $\delta > 0$ qualquer e P uma partição que satisfaça (1). Como

$$\underline{S}_P(f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \overline{S}_P(f),$$

tem-se

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \delta, \quad \forall \delta > 0, \quad \text{ou seja} \quad \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

III.$\Longrightarrow$II. É imediato.

II.$\Longrightarrow$III.

Seja então $\delta > 0$ um qualquer número positivo; por II., existe uma partição $Q = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ tal que $\overline{S}_Q(f) - \underline{S}_Q(f) < \delta/2$. Escolha-se agora $\epsilon > 0$ tal que $8n\epsilon K < \delta$, sendo $K = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, e escreva-se para toda a partição P de $[a, b]$,

$$\begin{aligned}\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = &\sum_{\alpha} (M_\alpha - m_\alpha)\,(x_{\alpha+1} - x_\alpha) + \\ &+ \sum_{\beta} (M_\beta - m_\beta)\,(x_{\beta+1} - x_\beta),\end{aligned}$$

em que $\sum_\alpha$ se estende a todos os intervalos da partição P que contêm algum vértice da partição Q e $\sum_\beta$ corresponde a todos os outros intervalos da partição P. Facilmente se constata que $\sum_\alpha$ não pode conter mais do que $2n$ parcelas. Tomando então P tal que $|P| < \epsilon$, tem-se

$$\sum_\alpha (M_\alpha - m_\alpha)\,(x_{\alpha+1} - x_\alpha) \le 2K\,2n\epsilon < \delta/2.$$

Analisemos agora a soma $\sum_\beta$ correspondente aos intervalos de P estritamente contidos nalgum intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ da partição Q. Designando por $[x_{\beta_i}, x_{\beta_{i+1}}]$ os intervalos de P contidos (estritamente) no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{\beta_i} (M_{\beta_i} - m_{\beta_i})\,(x_{\beta_i+1} - x_{\beta_i}) &\le (M_i - m_i) \sum_{\beta_i} (x_{\beta_i+1} - x_{\beta_i}) < \\ &< (M_i - m_i)\,(x_{i+1} - x_i)\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\sum_\beta (M_\beta - m_\beta)\,(x_{\beta+1} - x_\beta) &= \sum_i \sum_{\beta_i} (M_{\beta_i} - m_{\beta_i})\,(x_{\beta_i+1} - x_{\beta_i}) < \\ &< \sum_i (M_i - m_i)\,(x_{i+1} - x_i) = \\ &= \overline{S}_Q(f) - \underline{S}_Q(f) < \delta/2.\end{aligned}$$

Em conclusão, tem-se

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

para toda a partição P tal que $|P| < \epsilon$, o que mostra a implicação.

III.$\Longrightarrow$V.

Seja $\delta > 0$ e escolha-se $\epsilon > 0$ satisfazendo III. Como foi já visto que III.$\Longleftrightarrow$I. tem-se $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$. Tomando agora uma partição P tal que $|P| < \epsilon$, tem-se

$$\underline{S}_P(f) \le \sum_i f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) \le \overline{S}_P(f)$$

com ξ_i arbitrariamente escolhido no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Dado que $\underline{S}_P(f) \le I \le \overline{S}_P(f)$, podemos então escrever

$$\left| I - \sum_i f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) \right| \le \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \delta,$$

o que mostra que f é R-integrável e

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

V.$\Longrightarrow$III.

Sendo f uma função R-integrável, dado $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\int_a^b f \ - \frac{\delta}{2} < \sum_i f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) < \int_a^b f \ + \frac{\delta}{2}$$

para toda a partição $P\,:\,|P| < \epsilon$ e para quaisquer $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Tomando o ínfimo e o supremo das somas $\sum_i f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$ relativamente a todos os $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ e usando o lema 1, obtemos

$$\int_a^b f \ - \frac{\delta}{2} \leq \ \underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f) \ \leq \int_a^b f \ + \frac{\delta}{2},$$

o que mostra III. O teorema está demonstrado. ∎

As propriedades algébricas do integral.

Dados os resultados obtidos sobre os integrais inferior e superior de Darboux, com relativa facilidade se demonstra um conjunto de propriedades algébricas satisfeitas pelo integral de Riemann e condensadas no seguinte teorema:

5.2.7. Teorema. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funções R-integráveis. Então,*

(*i*) *Se $a < c < b$, $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ são R-integráveis e*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{1}$$

Reciprocamente, se $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ são R-integráveis, então f é R-integrável em $[a, b]$ e verifica-se (1).

(*ii*) *Para todo o $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda.f$ é R-integrável e tem-se*

$$\int_a^b \lambda.f = \lambda.\int_a^b f. \tag{2}$$

(*iii*) *$f + g$ é R-integrável e tem-se*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{3}$$

(*iv*) *Se* $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,b]$, *então* $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.

Se $f(x) \geq g(x), \ \forall x \in [a,b]$, *então* $\displaystyle\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

(*v*) $|f|$ *é* R*-integrável e tem-se*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Em particular, se $|f(x)| \leq K, \ \forall x \in [a,b]$, *então*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq K\,(b-a).$$

Demonstração. Comecemos por mostrar (*i*). Consideremos uma sucessão de partições P_n, de $[a,b]$, tal que $|P_n| \to 0\,(n \to \infty)$ e tal que o ponto c seja vértice de cada uma das partições P_n. Cada partição P_n determina naturalmente duas partições, P_n' e P_n'' de $[a,c]$ e $[c,b]$ respetivamente, e tem-se

$$\overline{S}_{P_n}(f) - \underline{S}_{P_n}(f) = \left(\overline{S}_{P_n'}(f) - \underline{S}_{P_n'}(f)\right) + \left(\overline{S}_{P_n''}(f) - \underline{S}_{P_n''}(f)\right). \qquad (*)$$

Como f é R-integrável em $[a,b]$, o teorema 5.2.6. (III.) garante que o lado esquerdo da igualdade $(*)$ tende para zero com $n \to \infty$ pelo que, cada uma das parcelas (positivas) do lado direito converge também para zero $(n \to \infty\ )$; de novo o teorema 5.2.6. (II.) garante agora que $f_{|_{[a,c]}}$ e $f_{|_{[c,b]}}$ são R-integráveis.
Finalmente, escrevendo as somas de Riemann, tem-se

$$S_{P_n}(f) = S_{P_n'}(f) + S_{P_n''}(f)$$

e passando ao limite $n \to \infty$, obtemos (1).
Reciprocamente, se $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ são R-integráveis, tomando arbitrárias partições P_n' e P_n'' de $[a,c]$ e $[c,b]$ respetivamente, e tais que $|P_n'| \to 0$, $|P_n''| \to 0$ com $n \to \infty$, o mesmo sucede à partição P_n de $[a,b]$ formada pelos vértices de P_n' e P_n'' : $|P_n| \to 0\,(n \to \infty)$. Mais uma vez o teorema 5.2.6. (III.) garante a convergência para zero da parte direita de $(*)$, e logo da parte esquerda, o que implica (teorema 5.2.6. (II.)) a integrabilidade de f em $[a,b]$.
As alíneas (*ii*) e (*iii*) saem trivialmente do teorema 5.2.4. e (*iv*) é de demonstração elementar. Resta-nos mostrar (*v*); como

$$|\ |f(x)| - |f(y)|\ | \leq |f(x) - f(y)|, \quad \forall x, y \in [a,b],$$

sai do lema 2 que, para toda a parte $X \subset [a,b]$, se tem $\omega(|f|;X) \leq \omega(f;X)$. Tomando uma partição P de $[a,b]$, tem-se em particular, $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$ (recorde-se que ω_i representa a oscilação relativa ao intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ associado a P). Sendo f R-integrável, o teorema 5.2.6. (IV.) garante então que $|f|$ é R-integrável.
Finalmente, sendo $|f|$ R-integrável e tendo-se

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a,b],$$

sai de (ii) e (iv) :

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

ou seja,

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|. \ \blacksquare$$

5.3. Caracterização das funções integráveis.

Quais as funções integráveis à Riemann no intervalo $[a,b]$? Esta questão, como veremos adiante, foi respondida pelo matemático francês ***Henri Lebesgue***. Entretanto, um primeiro resultado pode desde já ser estabelecido.

5.3.1. Teorema. *Se uma função f é contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$, então f é R-integrável.*

Demonstração. Sendo f contínua no compacto $[a,b]$, f é aí uniformemente contínua e logo, dado $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x,y \in [a,b],\ |x-y| < \epsilon \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\delta}{b-a}.$$

Seja $n \in \mathbf{N}$ tal que $(b-a)/n < \epsilon$ e tome-se a partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ em que os vértices são definidos por $x_i = a + i.\dfrac{b-a}{n}$ com $i = 0, 1, \ldots, n$. É imediato verificar que se $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$, então $|x-y| < \epsilon$ e portanto $|f(x)-f(y)| < \dfrac{\delta}{b-a}$, o que mostra que $\omega_i \leq \delta/(b-a)$. Logo

$$\sum_i \omega_i\,(x_{i+1} - x_1) \leq \frac{\delta}{b-a}(b-a) = \delta,$$

e o teorema 5.2.6. (IV.) garante que f é R-integrável. $\blacksquare$

Assim, a classe das funções contínuas em $[a, b]$ é uma parte das funções R-integráveis. Se f tem um número finito de descontinuidades é ainda possível ver, sem qualquer dificuldade, que f é R-integrável; é uma consequência da seguinte proposição:

5.3.2. Proposição. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada e R-integrável em todo o intervalo $[a, x]$ com $a < x < b$. Então f é R-integrável em $[a, b]$.*
Analogamente, f é R-integrável em $[a, b]$ se for R-integrável em $[x, b]$ para todo $x : a < x < b$.

Demonstração. Por hipótese, tem-se $|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, b]$, para um certo $M > 0$. Seja agora um qualquer $\delta > 0$ e escolha-se $\epsilon = \delta/4M$. Como f é R-integrável em $[a, b - \epsilon]$, existe uma partição $Q = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} = b - \epsilon\}$ tal que

$$\overline{S}_Q(f) - \underline{S}_Q(f) = \sum_{i=0}^{n-2} (M_i - m_i)\,(x_{i+1} - x_i) < \frac{\delta}{2}.$$

em que $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ e $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$. Tomando então a partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de $[a, b]$, tem-se

$$\begin{aligned} \underline{S}_P(f) - \overline{S}_P(f) &= \overline{S}_Q(f) - \underline{S}_Q(f) + (M_{n-1} - m_{n-1})\epsilon < \\ &< \frac{\delta}{2} + 2M\epsilon = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

e o teorema 5.2.6. (ii.) dá-nos a conclusão. ∎

Corolário 1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada e R-integrável em todo o intervalo $[x, y]$ com $a < x < y < b$. Então f é R-integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Seja $a < c < b$; como f é R-integrável em $[x, c]$, para todo x tal $a < x < c$, a proposição implica que f é R-integrável em$[a, c]$. Analogamente se vê que f é R-integrável em $[c, b]$. A conclusão sai agora do teorema 5.2.7.(i). ∎

Corolário 2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada com um número finito de descontinuidades. Então f é R-integrável.*

Demonstração. Sejam, por exemplo, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ os pontos de descontinuidade de f; pelo corolário anterior resulta que f é integrável em $[x_i, x_{i+1}]$ (já que f é contínua em todo o intervalo $[c, d] : x_i < c < d < x_{i+1}$). Do teorema 5.2.7. conclui-se que f é R-integrável e

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f. \ ∎$$

De seguida enunciamos (sem demonstração $(*)$) um importante resultado devido a Lebesgue, o qual ***caracteriza*** as funções integráveis à Riemann em $[a, b]$ (condição necessária e suficiente de integrabilidade à Riemann em $[a, b]$). Para tal, torna-se necessário introduzir a seguinte noção:

5.3.3. Definição. *Um conjunto $E \subset \mathbf{R}$ diz-se um* ***conjunto de medida nula à Lebesgue*** *se para todo $\delta > 0$, existe uma família numerável de intervalos abertos, I_n, tal que*

$$E \subset \bigcup_n I_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \delta,$$

em que $|I_n|$ representa a amplitude do intervalo I_n. Escreve-se $\mu(E) = 0$ para designar que E tem medida nula à Lebesgue.

5.3.4. Exemplos.

1. *Todo o conjunto* ***numerável*** *$D \subset \mathbf{R}$ tem medida nula à Lebesgue.* Com efeito, seja $D = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ um conjunto numerável e $\delta > 0$ um qualquer número positivo; considere-se a família dos intervalos abertos,

$$I_n = \left]x_n - \frac{\delta}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\delta}{2^{n+1}}\right[, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

É claro que $D \subset \bigcup_n I_n$; tem-se ainda

$$\sum_1^{\infty} |I_n| = \sum_1^{\infty} \frac{\delta}{2^n} = \delta. \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} = \delta,$$

e portanto $\mu(D) = 0$. Em particular $\mu(\mathbf{Q}) = 0$.

2.

i) Se $D \subset E$ e $\mu(E) = 0$, então $\mu(D) = 0$.

ii) Se $D \subset E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup \cdots$ e $\mu(E_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ então $\mu(D) = 0$.

A demonstração de (i) é trivial. Vejamos agora (ii); como $\mu(E_n) = 0$, para cada $\delta > 0$ e para cada n existem intervalos abertos I_{n_j}, $(j \in \mathbf{N})$ tais que $E_n \subset I_{n_1} \cup \cdots \cup I_{n_j} \cup \cdots$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |I_{n_j}| \leq \delta/2^n$. Então

$$D \subset \bigcup_{n,j=1}^{\infty} I_{n_j} \quad \text{e} \quad \sum_n \sum_j |I_{n_j}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^n} = \delta;$$

$(*)$ O leitor interessado pode consultar a referência bibliográfica [8].

assim, a união numerável (ou finita) de conjuntos de medida nula à Lebesgue é um conjunto de medida nula à Lebesgue.

3. Um intervalo $[a, b]$, $a < b$, não pode ter medida nula.

Com efeito, dada uma cobertura de $[a, b]$, formada de intervalos abertos $I_n =]a_n, b_n[$, mostremos que

$$(b - a) < \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|.$$

Pelo lema da cobertura (cf. (3.3.8.)), podemos extrair uma subcobertura finita. Basta então mostrar que se $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$, então

$$\sum_{n=1}^{n}(b_i - a_i) > b - a.$$

Podemos obviamente admitir que não se tem $I_i \subset I_j$, para dois quaisquer intervalos da cobertura, e que $I_i \cap [a, b] \neq \emptyset$, $\forall i$. Ordenemos agora os extremos esquerdos dos intervalos I_i : $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$, e representemos ainda por $I_i =]u_i, v_i[$ os mesmos intervalos da cobertura, mas agora reordenados. A demonstração prossegue por indução; para n =1, é trivial. Admitindo o resultado para n, escreva-se para $n + 1$, $u_1 < u_2 < \cdots < u_n < u_{n+1}$. É claro que

$$u_1 < a, \quad u_{n+1} < b < v_{n+1} \quad \text{e} \quad [a, u_{n+1}] \subset \bigcup_{i=1}^{n}]u_i, v_i[.$$

Pela hipótese da indução

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i - u_i) > u_{n+1} - a$$

e portanto

$$\sum_{i=1}^{n+1}(v_i - u_i) > u_{n+1} - a + (v_{n+1} - u_{n+1}) > b - a$$

como se queria.

5.3.5. Teorema (*Lebesgue*). *A condição necessária e suficiente para que uma função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ seja integrável à Riemann é que f seja **limitada** e **o conjunto das descontinuidades de f seja um conjunto de medida nula à Lebesgue.***

Corolário 1. *Toda a função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ limitada e com um número numerável de descontinuidades é R-integrável.*

Por exemplo, a função $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{\sin(1/x)}\right) & x \neq 0, \;\; x \neq \frac{1}{k\pi}, \;\; k = 1, 2, \ldots \\ \\ 0 & x = 0, \;\; x = \frac{1}{k\pi}, \;\; k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

é evidentemente limitada e admite um número numerável de descontinuidades ($x = 0, \;\; x = 1/k\pi, \;\; k = 1, 2, \ldots$); será portanto R-integrável.

Corolário 2. *Se $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ são funções R-integráveis, então $f.g$ é R-integrável.*

Demonstração. Designemos por D_f, D_g e $D_{f.g}$ o conjunto das descontinuidades, respetivamente de f, g e $f.g$. É claro que $D_{f.g} \subset D_f \cup D_g$; como f e g são R-integráveis, sai do teorema de Lebesgue que $\mu(D_f) = 0$ e $\mu(D_g) = 0$, pelo que $\mu(D_{f.g}) = 0$. A conclusão sai agora aplicando de novo o teorema de Lebesgue a $f.g$.

Observação. Notemos que, se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ é uma função R-integrável, ***modificando f num número finito de pontos,*** $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$, obtemos uma nova função g, ***também R-integrável e com integral igual ao integral de f.*** Com efeito, escreva-se

$$f(x) = g(x) + \varphi(x) \quad \text{com} \quad \varphi(x) = 0, \;\; \forall x \in [a,b] \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Evidentemente que φ é R-integrável e $\int_a^b \varphi = 0$. Então $f - \varphi$ é R-integrável e tem-se (teorema 5.2.7.):

$$\int_a^b g = \int_a^b (f - \varphi) = \int_a^b f - \int_a^b \varphi = \int_a^b f.$$

Tenha-se, contudo, a prudência de não aplicar o precedente resultado quando se modifica f num número numerável de pontos do domínio: a função $f : [a,b] \to \mathbf{R}, \;\; f(x) = 1, \;\; \forall x \in [a,b]$, difere da função $g : [a,b] \to \mathbf{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad x \quad \text{é irracional} \quad (x \in [a,b] \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})) \\ \\ 0 \quad \text{se} \quad x \quad \text{é racional} \quad (x \in [a,b] \cap \mathbf{Q}) \end{cases}$$

num número numerável de pontos : $x \in [a,b] \cap \mathbf{Q}$, e no entanto g, como se sabe, não é integrável.

5.3.6. Exemplos.

1. A função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$, sendo contínua é R-integrável. Mais adiante veremos as técnicas adequadas ao cálculo dos integrais de uma vasta classe de funções. Por agora e utilizando diretamente a definição, determinemos o valor do integral, $\int_a^b x\,dx$. Escolha-se uma sucessão de partições P_n, de $[a, b]$, do seguinte modo :

Divida-se $[a, b]$ em n intervalos de amplitude igual a

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad P = \{a, a+h, \cdots, a+nh\}$$

e escolha-se $\xi_0 = a + h$, $\xi_1 = a + 2h$, $\ldots$, $\xi_{n-1} = a + nh$ (recordemos que podemos escolher arbitrariamente os pontos $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$). As somas de Riemann tomam então a forma:

$$\begin{aligned} S_n(f) &= h\,(a+h) + h\,(a+2h) + \cdots + h\,(a+nh) = \\ &= nah + (1 + 2 + \cdots + n)\,h^2. \end{aligned}$$

Como $1 + 2 + \cdots + n = n\,(n+1)/2$, vem então

$$S_n(f) = na\frac{b-a}{n} + \frac{n\,(n+1)}{2}\,\frac{(b-a)^2}{n^2}.$$

Passando ao limite $n \to \infty$, obtém-se

$$\int_a^b x\,dx = a\,(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

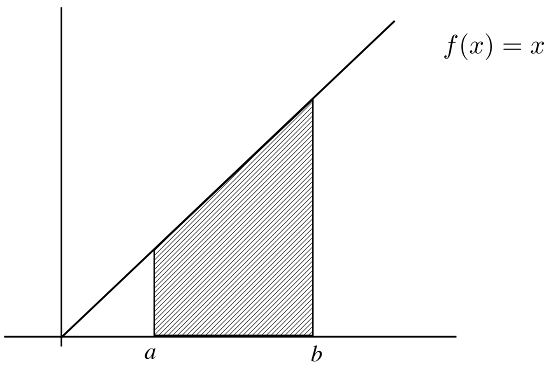


Figura 5.3

$$A = \int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2).$$

2. Seja dado um intervalo $[a, b] \subset \mathbf{R}$ e $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ uma partição. Considere-se a função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k_i, & x \in]x_i, x_{i+1}[, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ c_i, & x = x_i, \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$$

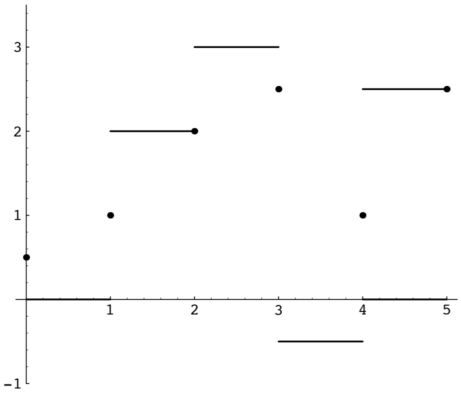


Figura 5.4

A função f diz-se uma ***função em escada.*** Tem um número finito de descontinuidades, sendo portanto R-integrável; o seu integral:

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f_{|[a,x_1]} + \int_{x_1}^{x_2} f_{|[x_1,x_2]} + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f_{|[x_{n-1},b]} \,.$$

Mas pelo que foi dito na observação precedente, tem-se

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{|[x_i,x_{i+1}]} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} k_i,$$

após ter modificado a função f nos extremos x_i e x_{i+1} tornando-a identicamente igual a k_i no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Assim,

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} k_0 + \int_{x_1}^{x_2} k_1 + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b k_{n-1} =$$
$$= k_0(x_1 - a) + k_1(x_2 - x_1) + \cdots + k_{n-1}(b - x_{n-1}).$$

3. *Toda a função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ monótona é R-integrável.*

Basta ter presente que uma função monótona f possui um conjunto numerável (ou finito) de descontinuidades (cf. (3.2.6.)).

5.4. O integral indefinido.

Recordemos (teorema 5.2.7.) que a igualdade $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ é válida se $a < c < b$ e f é R-integrável em $[a, b]$. Pretende-se agora estender a anterior igualdade, tornando-a válida para quaisquer reais a, b, e c. Para tal, ***convencionamos***:

$$\int_a^a f = 0; \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

É agora simples constatar que a anterior fórmula da decomposição do intervalo continua válida para quaisque $a, b, c \in \mathbf{R}$ (supondo naturalmente que f é R-integrável no maior dos intervalos em questão); assim, por exemplo, sendo $a < b < c$ e f uma função R-integrável em $[a, c]$, tem-se

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

e logo

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f;$$

analogamente se obtém o mesmo resultado nos outros casos ($c < a < b$, $b < c < a$, etc.).

Observação importante. Como é sabido (cf. (5.2.7.), (v)), se $a < b$ e f é R-integrável em $[a, b]$, $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$; se $b < a$, a desigualdade deixa de ser verdadeira tal como está escrita; tem-se no entanto

$$(v^*) \qquad \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|.$$

Com efeito, $\left|\int_a^b f\right| = \left|-\int_b^a f\right| = \left|\int_b^a f\right| \leq \int_b^a |f| = \left|\int_a^b |f|\right|$.

Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbf{R}$ e R-integrável em todo o intervalo $[x, y] \subset I$. Diz-se então que f é ***localmente integrável*** ; fixemos agora um qualquer $a \in I$.

5.4.1. Definição. *A função $F : I \to \mathbf{R}$, definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

diz-se o ***integral indefinido de*** f.

Se f é limitada em I, isto é, $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in I$, tem-se por (v^*)

$$
\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt \right| = \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \leq \\
&\leq \left| \int_y^x |f(t)|\,dt \right| \leq K|x-y|, \quad \forall x, y \in I.
\end{aligned}
$$

Vê-se assim que, se f é limitada, o integral indefinido F é uma função "*mais bem comportada*" : é lipschitziana. O teorema seguinte vem sublinhar este processo de regularização, quando se passa de uma função integranda f à função integral indefinido, F.

5.4.2. Teorema Fundamental do Cálculo. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função localmente integrável. Se f é contínua em $c \in I$, então a função integral indefinido*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \in I,$$

é derivável em c e tem-se $F'(c) = f(c)$.

Observação. Supõe-se naturalmente que o intervalo I é não degenerado (não reduzido a um ponto). Se $c \in I$ é extremo do intervalo I, a derivada $F'(c)$ é evidentemente entendida como a derivada lateral correspondente.

Demonstração. Sendo f contínua em $c \in I$, para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$t \in I, \ |t - c| < \epsilon \implies |f(t) - f(c)| < \delta.$$

Tomando h tal que $0 < |h| < \epsilon$ e $c + h \in I$ e utilizando a desigualdade (v^*), tem-se

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt - hf(c) \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \int_c^{c+h} f(t)\,dt - hf(c) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_c^{c+h} [f(t) - f(c)]\,dt \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\,\delta\,|h| = \delta,
\end{aligned}
$$

o que mostra que $F'(c) = f(c)$. ∎

Corolário. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função contínua num intervalo $I \subset \mathbf{R}$. Então existe $F : I \to \mathbf{R}$ tal que $F' = f$.*

Demonstração. Se $f : I \to \mathbf{R}$ é contínua, então é localmente integrável e fixando $a \in I$, o teorema garante que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é derivável em todo o $x \in I$ e $F'(x) = f(x)$. ∎

5.4.3. Exemplos.

A função $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ -1, & x \in [-1,0[\end{cases}$ é descontínua em $x = 0$; mas sendo limitada em $[-1,1]$, o seu integral indefinido é, como vimos, uma função lipschitziana; neste caso, $g(x) = \int_0^x 1\,dt = x$ se $x \geq 0$ e, se $x < 0$, $g(x) = \int_0^x -1\,dt = -\int_x^0 -1\,dt = \int_x^0 1\,dt = -x$. Logo

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = |x|.$$

Como g é lipschitziana (e portanto contínua) o seu integral indefinido será uma função derivável (cf. Exemplo 1. (5.3.6.)):

$$\varphi(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x t\,dt = x^2/2, & x \geq 0 \\ \int_0^x -t\,dt = -\int_x^0 -t\,dt = -x^2/2, & x < 0. \end{cases}$$

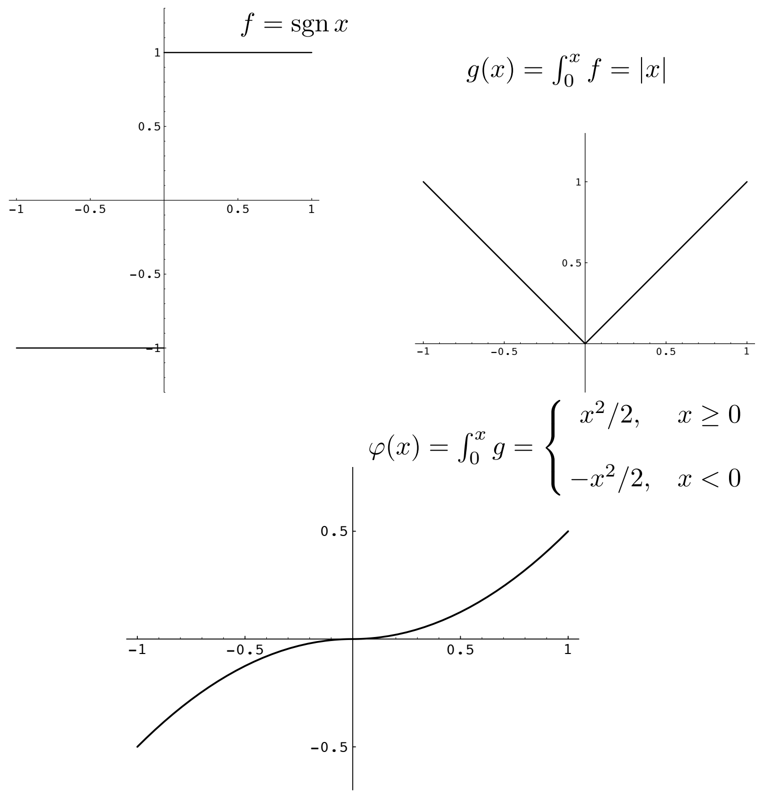


Figura 5.5

O Teorema Fundamental do Cálculo motiva a seguinte importante definição:

5.4.4. Definição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função definida num domínio $D \subset \mathbf{R}$. Chama-se **primitiva de** f à função $F : D \to \mathbf{R}$, derivável e tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in D$. A função f diz-se **primitivável** se admite pelo menos uma primitiva. É usual representar-se uma primitiva de f por Pf.*

Se $f, g : D \to \mathbf{R}$ são funções primitiváveis, é consequência imediata da definição que

$$P\,(f+g) = Pf + Pg$$
$$P\,(\lambda.f) = \lambda.Pf, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Observações 1. Se $f : I \to \mathbf{R}$ é uma função *contínua num intervalo* $I \subset \mathbf{R}$, o Teorema Fundamental implica que f é primitivável:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ \ (a \in I),$$

é uma primitiva de f. Porém, ***nem toda a função** R**-integrável é primitivável;*** com efeito, a função $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ -1, & x \in [-1, 0[\end{cases}$$

é evidentemente R-integrável mas não é primitivável : se existisse F tal que $F'(x) = f(x)$, $x \in [-1, 1]$, a função $f = F'$ deveria tomar todos os valores entre $F'(-1) = f(-1) = -1$ e $F'(1) = f(1) = 1$ (teorema de Darboux), o que claramente não acontece.

2. É claro que, se a função $f : D \to \mathbf{R}$ admite uma primitiva F, então admite infinitas : $F + C$, $C \in \mathbf{R}$. Repare-se no entanto que, nem toda a primitiva de f é da forma $F + C$ (em que F é uma dada primitiva de f); por exemplo a função

$$f : [-1, 0[\cup [1, 2] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2] \\ -1, & x \in [-1, 0[\end{cases}$$

admite como primitivas, a função $F(x) = |x|$, $x \in [-1, 0] \cup [1, 2]$, bem como a função

$$G(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [1,2] \\ -x \quad , & x \in [-1, 0[\end{cases}$$

e não se tem $F = G + C$ para algum $C \in \mathbf{R}$. Assim, não se poderá afirmar, em geral, que a diferença de duas primitivas de f é uma constante. Todavia, isto verifica-se se $D = I$ é um intervalo:

5.4.5. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função primitivável num intervalo $I \subset \mathbf{R}$; então a diferença de duas quaisquer primitivas de f é constante: se F é uma dada primitiva de F, qualquer primitiva de f é da forma $F + C$ $(C \in \mathbf{R})$.*

Demonstração. Trata-se de mostrar que, se F e G são duas primitivas de f em I então a sua diferença é constante; com efeito, de $F' = G' = f$ resulta que $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ em I. A função $F - G$ tem derivada nula no intervalo I e o teorema do valor médio de Lagrange garante-nos que $F - G = C$. ■

Resulta da proposição que, sendo $f : [a, b] \cup [c, d] \to \mathbf{R}$ primitivável na união de dois intervalos disjuntos de $\mathbf{R}$ e sendo F uma primitiva particular de f, a representação genérica das primitivas de f vem dada pela família de funções

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + C_1, & x \in [a, b] \\ \\ F(x) + C_2, & x \in [c, d] \end{cases}$$

para quaisquer $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

5.4.6. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função primitivável num intervalo $I \subset \mathbf{R}$ e fixemos $a \in I$. Então, dado $k \in \mathbf{R}$ qualquer, existe uma única primitiva G de f tal que $G(a) = k$.*

Demonstração. Se F é uma primitiva de f, logo se vê que a função $G(x) = F(x) + (k - F(a))$ é ainda uma primitiva e satisfaz $G(a) = k$. Reciprocamente, se G é uma primitiva de f tal que $G(a) = k$, como a diferença $G - F$ é constante, tem-se

$$G(x) - F(x) = G(a) - F(a) = k - F(a)$$

e logo $G(x) = F(x) + (k - F(a))$. ■

Observação. A proposição anterior diz-nos que, se f é uma função primitivável no intervalo I, o problema

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f, \quad u = u(t), \quad t \in I \\ \\ u(a) = k \quad (a \in I) \end{cases}$$

admite uma única solução, $u : I \to \mathbf{R}$.

A equação $\dfrac{du}{dt} = f$ é o exemplo mais simples de uma ***equação diferencial ordinária***, em que $u : I \to \mathbf{R}$ representa a função incógnita. O problema (P) é usualmente designado por ***problema de valor inicial*** ou ***problema de Cauchy*** e traduz matemáticamente um clássico problema de cinemática:

conhecida a velocidade em cada instante t, $v(t)$, de um ponto material que se desloca ao longo de uma reta

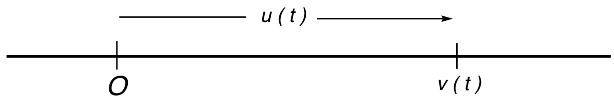


Figura 5.6

e designando por $u(t)$ o espaço percorrido no tempo t, é conhecido das leis elementares da mecânica que $\dfrac{du}{dt} = v(t)$. Se para além da velocidade $v(t)$, conhecermos a posição do ponto material num dado instante, $u(t_0) = u_0$, a solução do problema de Cauchy, (P), diz-nos que existe um único movimento retilíneo $t \to u(t)$, correspondente à dada velocidade $v(t)$, sempre que esta for primitivável.

Seja $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^1. Dado que F' é contínua, sai do Teorema Fundamental que $\varphi(x) = \int_a^x F'(t)\,dt$ é uma primitiva de F'; a diferença das duas primitivas, φ e F de F', será então constante em $[a, b]$:

$$\varphi(x) - F(x) = \text{const} = \varphi(a) - F(a) = -F(a)$$

e logo

$$\varphi(x) = F(x) - F(a), \quad x \in [a, b].$$

Fazendo $x = b$, obtém-se a clássica fórmula de Barrow:

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

A exigência da continuidade de F' pode, contudo, ser retirada; assim, mais geralmente, tem-se:

5.4.7. Teorema (*Fórmula de Barrow*). *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função R-integrável e primitivável em $[a, b]$. Representando por F uma primitiva de f, tem-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Seja $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ uma qualquer partição de $[a, b]$. Aplicando o teorema do valor médio de Lagrange, obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

com $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ $(i = 0, \dots, n-1)$. Escrevendo,

$$m'_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} F', \quad M'_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} F',$$

tem-se evidentemente, $m'_i \leq F'(\xi_i) \leq M'_i$ e logo $\underline{S}_P(F') \leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}_P(F')$. A conclusão é agora imediata do teorema 5.2.6.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \;\blacksquare$$

Observações. 1. O teorema precedente exprime que, se $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ é uma função com ***derivada integrável*** em $[a, b]$ (e não necessariamente de classe C^1) então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx.$$

É o caso, por exemplo, de

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \in]0, 2/\pi] \\[2ex] 0, & x = 0 \end{cases}$$

F é derivável em $[0, 2/\pi]$ e a sua derivada vem dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin 1/x - \cos 1/x, & x \in]0, 2/\pi] \\[2ex] 0, & x = 0 \end{cases}$$

A função f não é contínua; mas sendo limitada e tendo apenas uma descontinuidade (em $x = 0$), f é R-integrável e tem-se :

$$\int_0^{2/\pi} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx = F\left(\frac{2}{\pi}\right) - F(0) = \frac{4}{\pi^2}.$$

2. Repare-se que a fórmula $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, demonstrada para $a < b$ é ainda válida para $b \leq a$; basta observar que:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a).$$

3. A fórmula de Barrow é particularmente importante do ponto de vista prático já que permite calcular exactamente o integral de uma função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ de que se conheça uma sua primitiva. Algumas das técnicas de primitivação serão abordadas mais adiante.

5.5. Teoremas clássicos do cálculo integral.

5.5.1. Teorema A$_1$(*Mudança de variável no integral*). *Seja f uma função contínua num intervalo $I \subset \mathbf{R}$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ uma função derivável com derivada φ' R-integrável e tal que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Se $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$, tem-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Demonstração. Como f é contínua em $[a, b]$, admite uma primitiva F; derivando a função composta $F(\varphi(t))$, obtém-se

$$[F(\varphi(t))]' = f(\varphi(t))\,\varphi'(t),$$

o que mostra que $F(\varphi(t))$ é uma primitiva de $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ em $[\alpha, \beta]$; esta, por outro lado, é uma função R-integrável dado que é produto de funções R-integráveis em $[\alpha, \beta]$ (cf. (5.3.5.), Cor.2.). Finalmente (cf. (5.4.7.)),

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F\,[\varphi(\beta)] - F\,[\varphi(\alpha)] =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

Uma nova versão da mudança de variável no integral é agora apresentada, em que não se exige a continuidade de f mas em contrapartida se acrescenta uma hipótese de monotonia para a função φ.

5.5.2. Teorema A$_2$ (*Mudança de variável no integral*). *Seja f uma função localmente integrável num intervalo $I \subset \mathbf{R}$, isto é, integrável em todo o intervalo compacto $[a, b] \subset I$; seja $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ uma função monótona, derivável, com derivada φ' R-integrável e tal que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Se $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$, tem-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Demonstração. Supomos $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ monótona crescente (o caso decrescente é análogo). Consideremos então uma partição $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$ de $[\alpha, \beta]$; tal partição induz naturalmente uma outra, $Q = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, $x_i = \varphi(t_i)$, de $[a, b]$. Representemos por $\psi(t)$ a função $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ e consideremos as somas de Riemann:

$$S_P(\psi) = \sum_{i=0}^{n-1} \psi(t_i{}^*)\,(t_{i+1} - t_i),\ t_i{}^* \in [t_i, t_{i+1}],\ \ \psi(t_i{}^*) = f(\varphi(t_i{}^*))\varphi'(t_i{}^*),$$

$$S_Q(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i{}^*)\,(x_{i+1} - x_i), \quad x_i{}^* = \varphi(t_i{}^*) \in [x_i, x_{i+1}].$$

Como f é R-integrável em $[a, b]$, dado $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left| S_Q(f) - \int_a^b f \right| < \delta/2, \tag{1}$$

desde que $|Q| < \epsilon$. Por outro lado, do teorema do valor médio de Lagrange sai que $x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\xi_i)\,(t_{i+1} - t_i)$, $\quad \xi_i \in]t_i, t_{i+1}[$, e portanto

$$|S_Q(f) - S_P(\psi)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i{}^*)\,(\varphi'(\xi_i) - \varphi'(t_i{}^*)|\,|t_{i+1} - t_i|\,.$$

Designando por $M_i' = \sup\limits_{[t_i, t_{i+1}]} \varphi'$, $m_i' = \inf\limits_{[t_i, t_{i+1}]} \varphi'$, e pondo $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, resulta da anterior desigualdade:

$$|S_Q(f) - S_P(\psi)| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} (M_i' - m_i')\,(t_{i+1} - t_i). \tag{2}$$

Dado que φ' é R-integrável, pelo teorema 5.2.6. (III), existe $\eta_1 > 0$ tal que

$$|P| < \eta_1 \implies |S_Q(f) - S_P(\psi)| \leq \delta/2. \tag{3}$$

Enfim, como φ é contínua e portanto uniformemente contínua em $[\alpha, \beta]$, existe η (escolha-se $\eta \leq \eta_1$) tal que $x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) < \epsilon$ desde que $t_{i+1} - t_i < \eta$. Logo, dada uma partição P de $[\alpha, \beta]$ com $|P| < \eta$, vem $|Q| < \epsilon$ e portanto de (1) e (3) tem-se

$$\left| \int_a^b f - S_P(\psi) \right| \leq \left| \int_a^b f - S_Q(f) \right| + |S_Q(f) - S_P(\psi)| < \delta,$$

o que mostra que

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta \psi = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \;\blacksquare$$

5.5.3. Exemplos.

1. Seja $f : I = [-a, a] \to \mathbf{R}$, $a > 0$; recordemos que f se diz uma ***função par*** se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in I$; e diz-se uma ***função ímpar*** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in I$.

Supondo agora que f é uma função R-integrável no intervalo $[-a, a]$, tem-se

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad \text{se } f \text{ é ímpar}$$
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{se } f \text{ é par}$$

Com efeito, $\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_0^a f$; sendo f ímpar, considerando a mudança de variável, $x = \varphi(t) = -t$, $\varphi : [0, a] \to \mathbf{R}$ (φ é monótona), obtém-se:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t).(-1)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt,$$

pelo que

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_0^a f = 0.$$

Se f é par, de modo análogo se vê que, $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

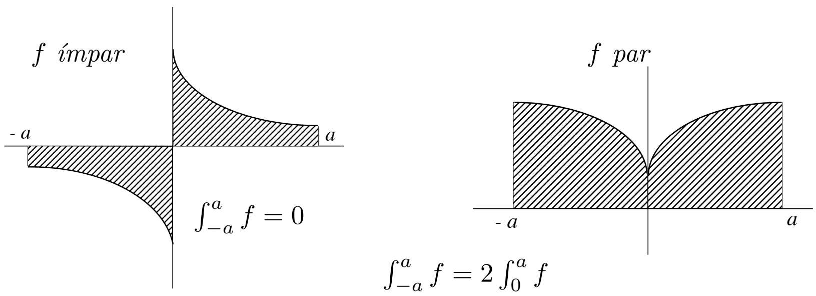


Figura 5.7.

5.5.4. Teorema (*Integração por partes*). *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funções com derivadas R-integráveis. Então*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx,$$

em que $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Demonstração. Como $(fg)' = fg' + f'g$, fg é uma primitiva de $fg' + f'g$ e como esta é uma função R-integrável, a fórmula de Barrow conclui o resultado. ■

5.5.5. Teorema (*Primeiro Teorema da Média*). *Sejam f, g funções R-integráveis no intervalo $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Se g não muda de sinal em $[a, b]$, então existe K tal que $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \le K \le \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, e*

$$\int_a^b f.g = K. \int_a^b g.$$

Em particular, tem-se

$$\int_a^b f(x)\, dx = K.(b - a).$$

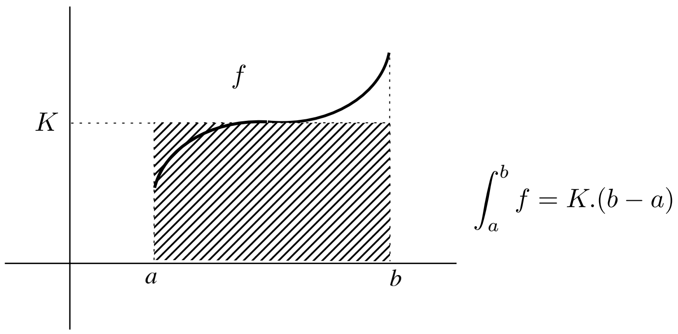


Figura 5.8

Demonstração. Faça-se $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$; suponha--se (por ex.) que $g \ge 0$ em $[a, b]$. Então, de $m\, g(x) \le f(x)\, g(x) \le M g(x)$, $x \in [a, b]$, tira-se que

$$m \int_a^b g \le \int_a^b f.g \le M \int_a^b g$$

e logo existe $K,\ m \le K \le M$, tal que

$$\int_a^b f.g = K.\int_a^b g. \ \blacksquare$$

Corolário. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funções definidas em $[a, b]$ tais que f é contínua e g é R-integrável. Se g não muda de sinal em $[a, b]$, então existe $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\, dx.$$

Demonstração. Sendo f contínua, tem-se $f([a, b]) = [m, M]$; então, se $m \le K \le M$, é claro que existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = K$ (consequência dos teoremas de Bolzano e Weierstrass). $\blacksquare$

5.5.6.Teorema (*Segundo Teorema da Média*). *Sejam f e g funções definidas em $[a, b] \subset \mathbf{R}$, g monótona e f R-integrável. Então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a)\int_a^c f(x)\, dx + g(b)\int_c^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Demonstração. Basta mostrarmos o teorema para g monótona decrescente (se g é crescente, $-g$ é decrescente e aplicando (1) a $-g$ o mesmo resultado se obtém para g). Como g, sendo monótona, é R-integrável (cf. (5.6.3.)) e f é R-integrável então $f.g$ é R-integrável (cf. (5.3.5.), Cor. 2.). A demonstração é feita em primeiro lugar para $g \ge 0$, decrescente para $g(b) = 0$. Como f é limitada em $[a, b]$, tem-se $f \ge -M$ em $[a, b]$, para um dado $M > 0$. Tomemos agora uma qualquer partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$; tendo em conta que $f + M \ge 0$ e g decrescente, tem-se

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+M).g &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f+M).g \le \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f+M) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f \ + \ M\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)\,(x_{k+1}-x_k) \end{aligned} \tag{2}$$

Sendo $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, o integral indefinido, o primeiro somatório em (2) pode escrever-se:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)\,(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} F(x_{k+1})\,(g(x_k) - g(x_{k+1})) \le \\ &\le \sup_{x\in[a,b]} F(x)\sum_{k=0}^{n-1}(g(x_k) - g(x_{k+1})) = \sup_{x\in[a,b]} F(x).g(a)\end{aligned}$$

dado que $F(a) = 0$, $g(b) = 0$ e g é decrescente (e logo $g(x_k) - g(x_{k+1}) \geq 0$). Passando então ao limite em (2) quando $|P| \to 0$, tem-se

$$\int_a^b (f+M).g \leq g(a). \sup_{x\in[a,b]} F(x) + M \int_a^b g$$

e logo

$$\int_a^b f.g \leq g(a). \sup_{x\in[a,b]} F(x). \tag{3}$$

Aplicando (3) a $-f$ tem-se $\displaystyle\int_a^b f.g \geq g(a). \inf_{x\in[a,b]} F(x)$ ou seja

$$\inf_{x\in[a,b]} F(x) \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f.g \leq \sup_{x\in[a,b]} F(x).$$

Como F é função contínua em $[a,b]$, todos os valores entre $\inf F$ e $\sup F$ são tomados pela função (Bolzano e Weierstrass) e logo existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a) \int_a^c f(x)\,dx \tag{4}$$

o que mostra o resultado para $g \geq 0$ decrescente para $g(b) = 0$. Finalmente, a fórmula geral (1) sai de (4) quando aplicada a $g(x) - g(b)$. ∎

Corolário. *Nas condições do teorema, se $g \geq 0$ é monótona decrescente, existe $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Basta observar que, sendo $g \geq 0$ e decrescente, podemos alterar o valor de g em b escolhendo $g(b) = 0$ sem modificar o valor do integral à esquerda de (1) (repare-se que a função modificada permanece monótona).

5.6. Técnicas de primitivação.

Consideremos as seguintes classes de funções:

1. As ***funções racionais***, isto é, as funções definidas analiticamente por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

em que $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, são polinómios tais que $b_m \neq 0$, $n, m \in \mathbf{N}$. O domínio de f é entendido como o maior domínio de definição de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ou seja $D = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}$.

2. As ***funções trigonométricas*** : $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e as suas inversas, $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$.

3. As funções ***exponencial,*** e^x***, e a sua inversa,*** $\log x$.

4. As funções $x \to x^a$ $(a \in \mathbf{R})$.

Se $a \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ é irracional, $x^a = e^{a \log x}$ está definida em $\mathbf{R}^+$. Se $a \in \mathbf{Q}^+$, $a = p/q$, $p, q \in \mathbf{N}$, o domínio vem dado por

$$\begin{cases} D(x^a) = \mathbf{R} & \text{se } q \text{ é ímpar} \\ \\ D(x^a) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\} & \text{se } q \text{ é par;} \end{cases}$$

é o caso, por exemplo, de $\sqrt{x}$ ou $\sqrt[3]{x}$ funções que têm como domínios respetivamente $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ e $\mathbf{R}$.

5.6.1. Definição. *Chama-se **função elementar** toda a função que se obtém como soma, produto, divisão ou composição de um número finito de funções fazendo parte das quatro famílias atrás assinaladas.*
Representamos por $\mathfrak{E}$ *a família das funções elementares.*

Observação. Quando se fala em soma e produto de duas funções f e g, nós consideraremos $f + g$ e $f.g$ definidas na interseção dos domínios de f e g, sempre que tal interseção é não vazia. Do mesmo modo, f/g e $f \circ g$ são supostas ser definidas nos maiores domínios possíveis e não vazios do campo real.

É claro da definição que a soma, produto, divisão e composição de duas funções de $\mathfrak{E}$ é ainda uma função de $\mathfrak{E}$; das regras de continuidade e derivação, é ainda imediato constatar que toda a função de $f \in \mathfrak{E}$ é contínua e derivável (no seu domínio de diferenciabilidade); além disso $f' \in \mathfrak{E}$.

Assim, são exemplos de funções elementares, as funções dadas por $\sqrt{1 + x\sqrt{1 - x^2}}$ ou $\sin\big(\log(1 - x^2)\big)$, definidas em $[-1, 1]$ e $]-1, 1[$ respetivamente, ou ainda $x^x = e^{x \log x}$ definida em $\mathbf{R}^+$ e $\arctan \dfrac{1}{1 + x^2}$, definida em todo o $\mathbf{R}$.

Como já foi assinalado, se $f : I \to \mathbf{R}$ é uma função contínua num intervalo $I \subset \mathbf{R}$, então f é função primitivável e $\int_a^x f(t)\, dt + C$ é uma primitiva de f ($a \in I$, $C \in \mathbf{R}$); no entanto, mesmo no caso em que $f \in \mathfrak{E}$ é uma função elementar, não está dito que a primitiva $\int_a^x f(t)\,dt$ seja uma função elementar. Com efeito, mostra-se (a demonstração sai fora do âmbito deste curso) que, por exemplo, a função e^{-x^2} (função de grande importância, especialmente em Teoria das Probabilidades) embora primitivável, a sua primitiva não é função elementar. O mesmo sucede com a função, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 1$, função contínua e logo primitivável; a sua primitiva, $\int_0^x \sin t/t\,dt$ não pertence a $\mathfrak{E}$.

O que nos vai ocupar nesta secção é precisamente a exposição de algumas técnicas capazes de primitivar uma vasta classe de funções, no quadro das funções elementares. A exposição que segue será apresentada em três grandes partes: numa primeira parte apresentamos um quadro suficientemente amplo de funções cuja primitiva se determina de modo imediato, bem como as técnicas de primitivação por partes e substituição; de seguida é exibida a primitivação das funções racionais e finalmente, utilizando convenientes mudanças de variável, mostramos como é possível racionalizar certas classes de funções, "tornando-as" assim primitiváveis.

A. Primitivas imediatas. Primitivação por partes e substituição.

1.	$f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq -1)$	$Pf(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
2.	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$Pf(x) = \log\lvert x\rvert$
3.	$f(x) = \sin x$	$Pf(x) = -\cos x$
4.	$f(x) = \cos x$	$Pf(x) = \sin x$
5.	$f(x) = \sec^2 x$	$Pf(x) = \tan x$
6.	$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$Pf(x) = \arctan x$
7.	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Pf(x) = \arcsin x$
8.	$f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Pf(x) = \arccos x$
9.	$f(x) = e^x$	$Pf(x) = e^x$
10.	$f(x) = \sinh x$	$Pf(x) = \cosh x$
11.	$f(x) = \cosh x$	$Pf(x) = \sinh x$

O conhecimento das funções deriváveis e das suas derivadas permite--nos desde logo, por verificação direta, obter as primitivas (como elementos de $\mathfrak{C}$) de grande número de funções. O quadro anterior exibe algumas funções bem conhecidas e as suas primitivas (o domínio das funções está omisso, admitindo-se que as funções primitivas estão definidas no seu maior domínio de diferenciabilidade).

As observações que se seguem permitem-nos aumentar consideravelmente o quadro das funções que têm primitiva imediata. Seja, com efeito, $f : E \to \mathbf{R}$ uma função primitivável e $\varphi : D \to \mathbf{R}$, uma função derivável tal que $\varphi(D) \subset E$; representando por F uma primitiva de f, tem-se

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\ \varphi'(x) = f(\varphi(x))\ \varphi'(x),$$

pelo que

$$P[f(\varphi(x))\ \varphi'(x)] = F(\varphi(x)) \quad \text{em que} \quad F = Pf. \tag{1}$$

5.6.2. Exemplos.

1. Seja $\varphi : D \to \mathbf{R}$ uma função derivável. De acordo com a fórmula (1) e tendo presente as primitivas já conhecidas, obtêm-se agora as seguintes primitivas imediatas:

$$P\left[\varphi^\alpha(x).\varphi'(x)\right] = \frac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1),$$

$$P\left[\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right] = \log|\varphi(x)| \quad (x \in D : \varphi(x) \neq 0),$$

$$P\left[e^{\varphi(x)}.\varphi'(x)\right] = e^{\varphi(x)},$$

$$P\left[\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\right] = \arctan\varphi(x),$$

$$P\left[\cos\varphi(x).\varphi'(x)\right] = \sin\varphi(x), \quad \text{etc.}$$

2. Mais concretamente, vejam-se os seguintes exemplos:

a) $$P\left(e^{x^3}x^2\right) = \frac{1}{3}P\left(e^{x^3}.3x^2\right) = \frac{1}{3}e^{x^3}.$$

b) $$P\left(\frac{1}{\sin x}\right) = P\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right) = P\left(\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\right) =$$

$$= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| \quad (x \neq k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}).$$

c) $P\left(\dfrac{x}{x^2+a}\right) = \dfrac{1}{2}P\left(\dfrac{2x}{x^2+a}\right) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+a) \quad (a>0).$

d) $P\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = P\left(\dfrac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \log\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

$(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ \ k \in \mathbf{Z})$.

5.6.3. Primitivação por partes.

Sejam $f, g : D \to \mathbf{R}$ funções definidas em D, f primitivável e g derivável. Escrevendo $F = Pf$, tem-se $(F.g)' = f.g + F.g'$ pelo que $f.g = (F.g)' - F.g'$; então $f.g$ será primitivável se e só se o for $F.g'$ e tem-se

$$P\,(f.g) = (Pf).g - P\,[(Pf).g'].$$

Observação. Se $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ são funções com derivadas R-integráveis, supondo que $f'g$ (ou fg') é primitivável, vem da anterior fórmula

$$\int_a^b fg' = [P(fg')]_a^b = [fg]_a^b - [P(f'g)]_a^b = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

e recuperamos assim, em particular, a anterior fórmula de integração por partes (cf. (5.5.4.))

5.6.4. Exemplos

1. $P\,(x.\sin x) = -x.\cos x + P\,(\cos x) = \sin x - x\cos x.$

2. $P\,(\log x) = P\,(1.\log x) = x.\log x - P\left(x.\dfrac{1}{x}\right) = x\,(\log x - 1), \quad (x>0).$

3. $P\,(\arcsin x) = P\,(1.\arcsin x) = x.\arcsin x - P\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \ x \in]-1,1[.$

Mas, $P\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1}{2}P\,(1-x^2)^{-1/2}\,(-2x) = -\sqrt{1-x^2}$, donde

$$P\,(\arcsin x) = x.\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

4.

$$\begin{aligned} P\,(e^{ax}.\cos x) &= e^{ax}.\sin x - aP\,(e^{ax}.\sin x) = \\ &= e^{ax}.\sin x - a\left[-\cos x.e^{ax} + aP\,(e^{ax}.\cos x)\right]. \end{aligned}$$

Logo, $(1+a^2)\, P\,(e^{ax}.\cos x) = e^{ax}.\sin x + a\cos x.e^{ax}$, ou seja

$$P\,(e^{ax}.\cos x) = \frac{e^{ax}(\sin x + a\cos x)}{1+a^2}, \quad (a \in \mathbf{R}).$$

5.

$$P\,(\cos^2 x) = P\,(\cos x.\cos x) = \sin x\cos x + P\,(\sin^2 x) =$$
$$= \sin x\cos x + P\,(1-\cos^2 x) = \sin x\cos x + x - P\,(\cos^2 x),$$

pelo que

$$P\,(\cos^2 x) = \frac{x+\sin x\cos x}{2}.$$

5.6.5. Primitivação por substituição.

Seja $f : J \to \mathbf{R}$ uma função definida num intervalo $J \subset \mathbf{R}$ e $\varphi : I \to J$ uma função ***bijetiva e diferenciável*** definida num intervalo $I \subset \mathbf{R}$ e tal que $\varphi'(t) \neq 0 \ \ (t \in I)$. Suponha-se ainda que a função $\psi : I \to \mathbf{R}$, dada por

$$\psi(t) = f\,(\varphi(t))\ \varphi'(t)$$

é primitivável e seja Ψ uma primitiva de ψ. Então, pondo $x = \varphi(t)$, tem-se, para todo $x \in J$,

$$\frac{d}{dx}\Psi\left[\varphi^{-1}(x)\right] = \Psi'\left[\varphi^{-1}(x)\right]\ (\varphi^{-1})'\,(x) =$$
$$= \psi(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

e portanto, sob as hipóteses apresentadas, ***a função f é primitivável desde que o seja a função $f\,(\varphi(t))\ \varphi'(t)$ e tem-se***

$$(Pf)\,(x) = P\,[f\,(\varphi(t))\ \varphi'(t)]_{t=\varphi^{-1}(x)}\,.$$

5.6.6. Exemplo. Procuremos a primitiva de

$$f(x) = \sqrt{a^2-x^2}, \quad a>0,\ \ -a<x<a.$$

Pondo, $x = a\sin t = \varphi(t),\ t \in]-\pi/2,\pi/2[$, desde logo se verifica que φ é uma bijeção de $]-\pi/2,\pi/2[$ sobre $]-a,a[$ com derivada $\varphi'(t) = a\cos t \neq 0$, $t \in]-\pi/2,\pi/2[$. Vem então

$$f\,(\varphi(t))\ \varphi'(t) = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}\,.\,a\cos t = a^2\cos^2 t.$$

Mas (cf. (5.6.4.),(5)),

$$P\left(a^2\cos^2 t\right) = a^2 P\left(\cos^2 t\right) = a^2\,\frac{t+\sin t\cos t}{2}.$$

Regressamos à variável x tendo presente que $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin(x/a)$; como, de $a\sin t = x$ se tira que $a\cos t = \sqrt{a^2-x^2}$, tem-se finalmente

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) &= P\left(a^2\cos^2 t\right)_{t=\arcsin(x/a)} = \\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}. \end{aligned}$$

B. Primitivação das funções racionais.

Sejam

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \\ Q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \end{aligned}\right. \qquad n,m\in\mathbf{N}_0,\ b_m\neq 0$$

dois polinómios com coeficientes $a_j, b_j \in \mathbf{R}$; n e m os ***graus*** de P e Q, respetivamente. Recordemos que função racional é toda a função $f\colon D\to\mathbf{R}$, dada por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad D = \{x\in\mathbf{R} : Q(x)\neq 0\}.$$

De seguida faremos uma revisão sucinta da teoria algébrica dos polinómios e funções racionais, omitindo as demonstrações dos principais resultados.

Dois polinómios P e Q dizem-se iguais e escreve-se $P = Q$ se

$$P(x) = Q(x), \quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

O leitor pode verificar facilmente que, sendo $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ se tem

$$P(x) = Q(x),\ \forall x\in\mathbf{R} \ \Leftrightarrow\ n = m \ \text{e}\ a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n.$$

(***método dos coeficientes indeterminados***)

Dados dois polinómios P e $Q\neq 0$ (isto é $b_m\neq 0$), existem polinómios D e R tais que

$$\textbf{\textit{Divisão de } } P \textbf{\textit{ por }} Q \qquad \begin{cases} P(x) = D(x)\,Q(x) + R(x) \\[1ex] \text{grau de}\,R < \text{grau de}\,Q \end{cases}$$

D diz-se o polinómio ***cociente*** e R diz-se o polinómio ***resto.***

No caso particular de $Q = x - a$ (polinómio de grau 1), tem-se

$$P(x) = (x - a)\, D(x) + R(x)$$

com grau $R < 1$ e logo $R \equiv$ Const; (verifica-se imediatamente que $R(x) = P(a)$).

5.6.7. Definição. *Um polinómio P de grau ≥ 1 diz-se* ***redutível,*** *se existem polinómios P_1 e P_2 tais que* $\operatorname{grau} P_i < \operatorname{grau} P$ $(i = 1, 2)$ *e* $P(x) = P_1(x)\, P_2(x)$.
O polinómio P diz-se ***irredutível*** *se não for redutível.*

É possível determinar quais são precisamente os polinómios irredutíveis. Considere-se, com efeito, (e sem perda de generalidade) os polinómios unitários (com coeficiente $a_n = 1$): $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

- Todos os polinómios de grau 1, $P(x) = x - a$ são irredutíveis.
- Um polinómio de grau 2, $P(x) = x^2 + bx + c$ é irredutível se e só se não tem raízes reais, isto é

  $$b^2 - 4c < 0.$$

  Assim os polinómios de grau 2 irredutíveis são precisamente os polinómios da forma:

  $$P(x) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \beta \neq 0)$$

  associado às duas raízes complexas conjugadas $\alpha \pm i\beta$.
- Os únicos polinómios irredutíveis são os considerados :

  $$x - a, \quad x \in \mathbf{R}$$

  $$(x - \alpha)^2 + \beta^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \beta \neq 0,$$

  e mostra-se que todo o polinómio $P(x)$ com grau $P \geq 1$ é produto de polinómios irredutíveis:

  $$P(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_p)^{n_p} [\,(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2\,]^{m_1} \cdots \\ \cdots [\,(x - \alpha_q)^2 + \beta_q^2\,]^{m_q}$$

  em que $n_i, m_j \in \mathbf{N}$ representam o ***grau de multiplicidade*** do correspondente fator em P.

Na prática, a decomposição de um polinómio $P(x)$ nos elementos irredutíveis é em geral complexa: tal decomposição é evidentemente equivalente à determinação das raízes de P e das suas multiplicidades.

Decomposição de uma função racional.

Seja

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q \neq 0,$$

uma função racional. O teorema principal que adiante enunciaremos, permite-nos decompor a função racional em soma de "elementos simples", os quais são primitiváveis (como veremos) no quadro das funções elementares.

Observemos em primeiro lugar que, se grau $P \geq$ grau Q, da divisão de P por Q resulta $P(x) = D(x)\,Q(x) + R(x)$, $\operatorname{grau} R < \operatorname{grau} Q$ e logo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

o que nos leva a considerar apenas o caso

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{com} \quad \operatorname{grau} P < \operatorname{grau} Q.$$

5.6.8. Teorema. *Sejam P e Q dois polinómios com grau $P <$ grau Q. Então $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é soma de um número finito de funções racionais dos tipos:*

$$i)\ \frac{A}{(x-a)^k}, \qquad ii)\ \frac{bx+c}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^l};$$

A, b e c são constantes reais; $x - a$, respetivamente $(x-\alpha)^2+\beta^2$, são os fatores irredutíveis da decomposição de $Q(x)$, de multiplicidade $\geq k$, respetivamente $\geq l$. Mais precisamente, se

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_p)^{n_p}\,[\,(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\,]^{m_1}\cdots$$
$$\cdots[\,(x-\alpha_q)^2+\beta_q^2\,]^{m_q},$$

então

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{m_j}\frac{b_{jl}x+c_{jl}}{\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^l}.$$

Trata-se agora de determinar os coeficientes A_{ik}, b_{jl} e c_{jl}; a anterior igualdade reduz-se (após desembaraçar de denominadores) a uma igualdade de polinómios e os coeficientes referidos podem ser calculados utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

5.6.9. Exemplos.

1. De acordo com a teoria exposta, a função racional $\dfrac{1}{x\,(x^2+1)}$ decompõe-se do seguinte modo:

$$\frac{1}{x\,(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Simplificando,

$$1 = (x^2+1)\,A + x\,(bx+c) = (A+b)\,x^2 + cx + A$$

pelo que $A+b=0$, $c=0$, $A=1$ e logo

$$\frac{1}{x\,(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

2. Os coeficientes A_k $(1 \le k \le m)$, correspondentes ao fator $(x-a)^m$ da decomposição de $Q(x)$, podem ser calculados diretamente utilizando a fórmula de Taylor. Seja, com efeito, a uma raiz real de multiplicidade m de $Q(x)$ e escreva-se $Q(x) = (x-a)^m Q_a(x)$, em que $Q_a(x)$ é o polinómio que resulta de Q quando se suprime o termo $(x-a)^m$; então

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)} + \frac{P_2(x)}{Q_a(x)}$$

e multiplicando por $(x-a)^m$, tem-se

$$\frac{P(x)}{Q_a(x)} = A_1 + A_2(x-a) + \cdots + A_m(x-a)^{m-1} + o\left((x-a)^{m-1}\right),$$

dado que a não é raiz de $Q_a(x)$ e portanto

$$\frac{P_2(x)}{Q_a(x)}\,(x-a)^m = o\left((x-a)^{m-1}\right).$$

Finalmente, pela unicidade do desenvolvimento Tayloriano em $x=a$ de $\dfrac{P(x)}{Q_a(x)}$, podemos concluir que

$$A_1 = \left[\frac{P(x)}{Q_a(x)}\right]_{x=a},\ A_2 = \left[\frac{P(x)}{Q_a(x)}\right]'_{x=a}, \cdots,$$

$$A_m = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{P(x)}{Q_a(x)}\right]^{(m-1)}_{x=a}.$$

Apliquemos as observações precedentes ao seguinte exemplo:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Tem-se então

$$A_1 = \left[\frac{x+1}{x^2+1}\right]_{x=0} = 1$$

$$A_2 = \left[\frac{x+1}{x^2+1}\right]'_{x=0} = 1$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+1}\right]''_{x=0} = -1$$

e logo

$$\frac{x+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

O método dos coeficientes indeterminados permite agora mais facilmente calcular b e c : $b = 1,\ c = -1$; assim

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

5.6.10. Primitivação de uma função racional.

Decomposta nos seus elementos simples, a primitivação da função racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ depende agora apenas do conhecimento de uma primitiva das funções;

$$\frac{1}{(x-a)^n} \qquad \text{e} \qquad \frac{bx+c}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m},\ \ \beta \neq 0,\ \ n, m \in \mathbf{N}.$$

A primeira função primitiva-se imediatamente e tem-se:

$$P\left[\frac{1}{(x-a)^n}\right] = \begin{cases} \log|x-a| & \text{se} \quad n = 1 \\ \dfrac{1}{(-n+1)\,(x-a)^{n-1}} & \text{se} \quad n > 1 \end{cases}$$

A primitiva de $\dfrac{bx+c}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$, $\beta \neq 0,\ \ n, m \in \mathbf{N}$, obtém-se fazendo uma conveniente mudança de variável e, tal como anteriormente, considerando os casos $m = 1$ e $m > 1$.

1º Caso : $m = 1$

Fazendo $x = \alpha + \beta t$, obtém-se

$$P\left[\frac{bx+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right] = P\left[\frac{b\,(\alpha+\beta t)+c}{\beta^2 t^2+\beta^2}\,.\,\beta\right]_{t=(x-\alpha)/\beta}.$$

Mas

$$P\left[\frac{b\,(\alpha+\beta t)+c}{\beta^2 t^2+\beta^2}.\beta\right] = b\,P\left(\frac{t}{1+t^2}\right) + \frac{b\alpha+c}{\beta}\;P\left(\frac{1}{1+t^2}\right) =$$
$$= \frac{b}{2}\log\left(1+t^2\right) + \frac{b\alpha+c}{\beta}\arctan t;$$

donde

$$P\left[\frac{bx+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right] =$$
$$= \frac{b}{2}\log\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + \frac{b\alpha+c}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

2º Caso : $m > 1$

Utilizando sempre a mudança de variável, $x = \alpha + \beta t$, tem-se agora

$$P\left[\frac{bx+c}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m}\right] = P\left[\frac{b\,(\alpha+\beta t)+c}{\left(\beta^2 t^2+\beta^2\right)^m}\,.\,\beta\right]_{t=(x-\alpha)/\beta}$$

e

$$P\left[\frac{b\,(\alpha+\beta t)+c}{\left(\beta^2 t^2+\beta^2\right)^m}\,.\,\beta\right] =$$
$$= P\left[\frac{b\beta^2 t}{\left(\beta^2 t^2+\beta^2\right)^m}\right] + \frac{b\alpha+c}{\beta^{2m-1}}\;P\left[\frac{1}{(1+t^2)^m}\right] =$$
$$= \frac{b}{2(1-m)\left(\beta^2 t^2+\beta^2\right)^{m-1}} + \frac{b\alpha+c}{\beta^{2m-1}}\;P\left[\frac{1}{(1+t^2)^m}\right].$$

e o problema reduz-se a calcular a primitiva de $\dfrac{1}{(1+t^2)^m}$ $(m > 1)$.

Observando que

$$\frac{1}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{(1+t^2)^{m-1}} - \frac{t}{2}\,\frac{2t}{(1+t^2)^m}$$

e que

$$P\left[\frac{t}{2}\,\frac{2t}{(1+t^2)^m}\right] =$$

$$= \frac{t}{2}\,\frac{1}{(1-m)\,(1+t^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)}\;P\left[\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}\right],$$

obtém-se a fórmula de recorrência:

$$P\left[\frac{1}{(1+t^2)^m}\right] = \frac{t}{(2m-2)\,(1+t^2)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2-2m}\;P\left[\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}\right].$$

No caso particular de $m = 2$, tira-se que

$$P\left[\frac{1}{(1+t^2)^2}\right] = \frac{t}{2\,(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t$$

e substituindo,

$$P\left[\frac{bx+c}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right] = -\frac{b}{2\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]} +$$

$$+\;\frac{b\alpha+c}{\beta^2}\;\left[\frac{x-\alpha}{2\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]}\right] + \frac{b\alpha+c}{2\beta^3}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

C. Racionalização de algumas funções.

A utilização de convenientes mudanças de variável, $x = \varphi(t)$, pode em certos casos transformar funções f, dadas por expressões irracionais, em funções $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ racionais e logo primitiváveis como funções elementares. Introduza-se em primeiro lugar a noção de polinómio e função racional em várias variáveis.

Designa-se por ***polinómio em duas variáveis***, x e y, com coeficientes reais, a aplicação $P = P(x,y) : \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, dada por

$$P(x,y) = a_{00} + a_{01}y + a_{10}x + a_{11}xy + \cdots + a_{mn}x^m y^n,$$

com $m, n \in \mathbf{N}_0,\ a_{ij}\in\mathbf{R}$. Define-se o ***grau de*** P como o maior inteiro $i+j$ tal que $a_{ij}\neq 0$.

Mais geralmente define-se, de modo análogo, ***polinómio em*** p ***variáveis*** $u_1, \ldots, u_p$, como a aplicação $P : \underbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{p \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbf{R}$, dada por

$$P(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1 \ldots i_p} u_1^{i_1} \ldots u_p^{i_p},$$

$i_1, \ldots, i_p \in \mathbf{N}_0$, $a_{i_1 \ldots i_p} \in \mathbf{R}$ e $\displaystyle\sum_{i_1, \ldots, i_p}$ representa uma soma finita em $i_1, \ldots, i_p$.

Se $P(u_1, \ldots, u_p)$ e $Q(u_1, \ldots, u_p)$ são dois polinómios em p variáveis, define-se ***função racional em*** p ***variáveis*** como a aplicação

$$R(u_1, \ldots, u_p) = \frac{P(u_1, \ldots, u_p)}{Q(u_1, \ldots, u_p)}$$

e definida naturalmente nos elementos $(u_1, \ldots, u_p) \in \underbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{p \text{ vezes}}$ tais que

$$Q(u_1, \ldots, u_p) \neq 0.$$

Analisemos então algumas classes de funções susceptíveis de serem racionalizadas por convenientes mudanças de variável.

C1. Seja dada uma função racional em n variáveis, $R(u_1, \ldots, u_n)$, e considere-se a função $f : D \to \mathbf{R}$, definida por

$$f(x) = R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)$$

em que $r_2, \ldots, r_n \in \mathbf{Q}$ e $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Represente-se por μ o menor múltiplo comum de $\{1, r_2, \ldots, r_n\}$, isto é, o menor inteiro positivo tal que $\mu r_j \in \mathbf{Z}$ $(j = 2, \ldots, n)$. Admitindo que $ad - bc \neq 0$, a função $x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é biunívoca e logo invertível num dado intervalo de definição (com efeito, a sua derivada vem dada por $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} \neq 0$).

Logo, pondo $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^\mu$, daqui se tira que

$$x = \frac{d\,t^\mu - b}{a - c\,t^\mu} = \varphi(t)$$

a qual é função racional; como $\varphi'(t)$ é ainda racional, vem finalmente

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = R\left(\varphi(t), t^{\mu r_2}, \ldots, t^{\mu r_n}\right)\,\varphi'(t),$$

função racional e logo primitivável no quadro das funções elementares.

Exemplos.

1. A função $\dfrac{x^3}{\sqrt{x-1}}$ é do tipo $R\big(x,\,(x-1)^{1/2}\big)$ $(x>1)$. Aqui

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x-1 \quad \text{com} \quad a=1, b=-1, c=0, d=1;$$

tem-se ainda, $\mu = m.m.c.\{1, 1/2\} = 2$; logo, $x = \varphi(t) = t^2+1$ e $\varphi'(t) = 2t$, donde

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = \frac{(t^2+1)^3}{t}\,2t = 2\,(t^2+1)^3.$$

2. A função $\dfrac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}$ é também racionalizável já que

$$f(x) = R\left(x, x^{1/2}, x^{1/3}\right);$$

aqui, $\dfrac{ax+b}{cx+d} = x$ e portanto $a=1, b=0, c=0, d=1$; além disso tem-se, $\mu = m.m.c.\{1, 1/2, 1/3\} = 6$ e a mudança de variável $x = \varphi(t) = t^6$ $(\varphi'(t) = 6t^5)$ dá-nos:

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = \frac{1}{t^3+t^2}\,6t^5.$$

C2. Dada uma função racional em duas variáveis, $R(x,y)$, vejamos como é possível racionalizar as funções do tipo

$$f(x) = R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), \qquad a \neq 0.$$

1º Caso : *O binómio ax^2+bx+c admite duas raízes reais α* e β $(\alpha \neq \beta)$ (o caso $\alpha = \beta$ é trivial).

Faz-se então

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\alpha} = \frac{\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}}{x-\alpha}$$

ou seja

$$x = \frac{\alpha\, t^2 - a\,\beta}{t^2 - a} = \varphi(t).$$

A função φ é racional e logo se vê que $\varphi'(t) = \dfrac{2at\,(\beta-\alpha)}{(t^2-a)^2} \neq 0$. Como φ' é ainda racional, tem-se

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = R\,(\varphi(t),\, t\,(\varphi(t)-\alpha))\;\varphi'(t),$$

função racional, como era pretendido.

2º Caso : $b^2 - 4ac < 0$

O binómio tem, neste caso, duas raízes complexas; deveremos então supor que $a > 0$ (caso contrário, o binómio seria negativo, tornando indefinida a função f). Faz-se então

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$$

e portanto

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t} = \varphi(t),$$

função racional tal que $\varphi'(t) \neq 0$. Tem-se enfim,

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = R\left(\varphi(t),\, \sqrt{a}\,\varphi(t) + t)\right)\;\varphi'(t),$$

função racional num conveniente intervalo de t.

Exemplos.

3. Consideremos a função irracional

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-x-2}} = R\left(x, \sqrt{x^2-x-2}\right).$$

Neste caso, $\sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{ax^2+bx+c}$ com $a=1, b=-1, c=-2$; x^2-x-2 admite as raízes reais: $\alpha=-1, \beta=2$. A mudança de variável $t = \dfrac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1} = \dfrac{\sqrt{(x-2)(x+1)}}{x+1}$ dá-nos:

$$x = \frac{-t^2-2}{t^2-1} = \varphi(t)\,; \qquad \varphi'(t) = \frac{6t}{(t^2-1)^2}.$$

Repare-se que, $\varphi :]0,1[\to]1,+\infty[$ é uma bijeção e $\varphi' \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \;&=\; R\left(\varphi(t),\, t[\varphi(t)+1]\right)\,\varphi'(t) \;= \\ &= \frac{t^2-1}{-t^2-2}\,\frac{1}{t\left(\frac{-3}{t^2-1}\right)}\,\frac{6t}{(t^2-1)^2} \;=\; \frac{2}{2+t^2}. \end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned} P\left[\frac{1}{x\sqrt{x^2-x-2}}\right] \;&=\; P\left[\frac{2}{2+t^2}\right]_{t=\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}} \;= \\ &= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}\right). \end{aligned}$$

C3. Racionalização de funções trigonométricas do tipo

$$R\left(\sin x, \cos x\right)$$

em que $R(u,v)$ é uma função racional de duas variáveis. Utilizamos aqui a mudança de variável

$$\tan\frac{x}{2} = t \quad\Longleftrightarrow\quad x = 2\arctan t = \varphi(t).$$

Tem-se $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2} \neq 0$. Como

$$1+\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = 1+t^2,$$

tira-se que

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{e logo} \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{t^2}{1+t^2};$$

portanto

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Assim, sendo $f(x) = R\left(\sin x, \cos x\right)$, obtém-se a função racional:

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \;=\; R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).\frac{2}{1+t^2}.$$

Algumas classes particulares de funções do tipo $R\,(\sin x, \cos x)$ podem ser racionalizadas com outras mudanças de variável o que, na prática, é por vezes útil. São as seguintes:

a) Racionalização de funções do tipo $f(x) = R\left(\tan x, \sin^2 x, \cos^2 x\right)$

sendo $R(u, v, w)$ uma função racional em três variáveis. Fazemos

$$\tan x = t \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arctan t = \varphi(t)$$

e portanto $\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \neq 0$. Como $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$, tem-se então

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2};$$

logo

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \;=\; R\left(t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right).\frac{1}{1+t^2}.$$

b) Racionalização de funções do tipo $f(x) = R\,(\sin x)\ .\ \cos x$

em que $R(u)$ é uma função racional numa variável. Faz-se

$$\sin x = t \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arcsin t = \varphi(t), \quad t \in]-1, 1[$$

e logo $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$. Como $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1-t^2}$, vem

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \;=\; R\,(t)\,.$$

c) Racionalização de funções do tipo $f(x) = R\,(\cos x)\ .\ \sin x$.

Analogamente fazemos

$$\cos x = t \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arccos t = \varphi(t), \quad t \in]-1, 1[.$$

Dado que $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \neq 0$ e $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1-t^2}$, obtemos a função racional

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \;=\; -R\,(t)\,.$$

Exemplos.

4. Seja
$$f(x) = \frac{1}{1+\cos x} = R(\sin x, \cos x)\,.$$
Fazendo $\tan \dfrac{x}{2} = t$,
$$\begin{aligned} f(\varphi(t))\,\varphi'(t) &= R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \, \frac{2}{1+t^2} = 1, \end{aligned}$$
e portanto $P\left[f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\right] = t$, pelo que $P\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right) = \tan \dfrac{x}{2}$.

5. Seja agora $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$; observando que
$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{1+\tan x} = R\left(\tan x, \sin^2 x, \cos^2 x\right).$$
e fazendo $\tan x = t$, tem-se
$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = R\left(t, \frac{t^2}{1-t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+t}\,\frac{1}{1+t^2};$$
é agora fácil concluir que
$$P\left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\right) = \frac{1}{2}\log|1+\tan x| - \frac{1}{4}\log\left(1+\tan^2 x\right) + \frac{x}{2}.$$

Observações finais. As técnicas de primitivação apresentadas, embora amplas, não abrangem uma vasta classe de funções, as quais não são primitiváveis no quadro das funções elementares. Com efeito, alguns matemáticos do século XIX, entre os quais Liouville, Abel, Tschebyschef, analisaram a impossibilidade de exprimir como funções elementares a primitiva de certas classes de funções. Entre estas, refira-se a função $x \to e^{-x^2}$ e as funções
$$f(x) = \sqrt{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}}$$

com $n > 2$. Estas funções não são, *em geral*, primitiváveis como funções elementares. No entanto, as suas primitivas (como integrais indefinidos), poderão apresentar importantes propriedades, do ponto de vista teórico e das aplicações. É o caso, em especial, das chamadas ***funções elípticas***

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}$$

funções que desempenham papel de relevo em várias aplicações da Física.

5.7. Os integrais impróprios.

Considere-se a função $f :]0,2] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

A função não é limitada e logo, naturalmente, não admite integral definido de Riemann em $]0,2]$. No entanto, retomando a motivação original do integral definido, vejamos se de alguma maneira é possível definir a área da parte de $\mathbf{R}^2$ limitada pelo gráfico de $1/\sqrt{x}$ e pelo segmento da abcissa entre 0 e 2. Com efeito, dado que $1/\sqrt{t}$ é função contínua no intervalo $[x,2]$, a área $A_x = \int_x^2 1/\sqrt{t}\,dt$ limitada pela curva e pelo segmento $[x,2]$ está bem definida; é então natural definir a área limitada pelo gráfico de $1/\sqrt{x}$ e pelo segmento $]0,2]$ como o limite, ***caso exista***, de A_x quando $x \to 0^+$.

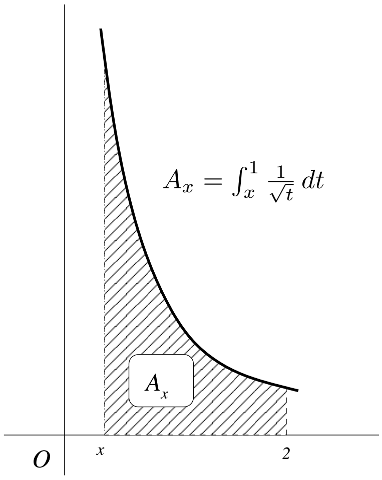


Figura 5.9

Estas considerações motivam a seguinte definição:

5.7.1. Definição. *Seja $D \subset \mathbf{R}$ um subconjunto de $\mathbf{R}$ com interior não vazio; diz-se que $f : D \to \mathbf{R}$ é uma função **localmente integrável** se f é R-integrável em todo o intervalo $[x,y] \subset D$.*

*Seja $[a,b[\subset \mathbf{R}$ um intervalo de $\mathbf{R}$ com b finito ou $b = +\infty$ e seja f uma função localmente integrável em $[a,b[$. Define-se **integral impróprio** de f em $[a,b[$ e representa-se por $\int_a^b f(x)\,dx$, como*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt,$$

caso este limite exista e seja finito.

Analogamente, se $f\colon]a,b] \to \mathbf{R}$ *é localmente integrável (a finito ou* $a = -\infty$*), define-se o integral impróprio de* f *em* $]a,b]$ *como*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt,$$

sempre que este limite exista e seja finito.

Se o integral impróprio está bem definido (isto é, se o limite atrás assinalado existe e é finito) diz-se também que o ***integral impróprio é convergente***; caso contrário o integral impróprio dir-se-á ***divergente***. É usual designar o ponto b (resp. o ponto a) por *ponto impróprio.*

Observação. Se f é uma função R-integrável em $[a,b] \subset \mathbf{R}$, tem-se sempre $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$, dado que o integral indefinido é função contínua; e reciprocamente, se f é limitada e localmente integrável em $[a,b[$ então f é R-integrável em $[a,b]$ (cf. (5.3.2.)) verificando-se de novo a precedente igualdade. Assim, para intervalos limitados, torna-se claro que a noção de integral impróprio aparece como uma extensão (às funções ilimitadas) do integral definido. Enfim, notemos que os pontos $b = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) são sempre (naturalmente) pontos impróprios.

Retomemos a nossa função $f\colon]0,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; trata-se de uma função contínua em $]0,2]$ e portanto localmente integrável; tem-se então

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \Big[2\sqrt{t}\Big]_x^2 = 2\sqrt{2} - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{2},$$

e logo o integral impróprio é convergente:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{2}.$$

Procedendo de modo análogo para a função $g\colon]0,2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, virá:

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^2 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} [\log t]_x^2 = \log 2 - \lim_{x\to 0^+} \log x = +\infty,$$

e aqui o integral impróprio, $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$, é divergente.

Seja agora $f:]a,b[\to \mathbf{R}$ uma função localmente integrável (a e b podem, em particular, tomar os valores $-\infty$ e $+\infty$, respetivamente). Pretendendo estender a noção de integral impróprio a $]a,b[$, poderíamos ser levados a definir $\int_a^b f$ como $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f$. Não se trata contudo de uma boa definição; com efeito, o limite anterior pode existir e ser finito e no entanto o integral impróprio $\int_a^c f$, $a < c < b$, ser divergente: tomemos, por exemplo, a função $f:]-1,1[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$; tem-se

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{x}{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\log(1-x^2)\right]_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} = 0,$$

e o integral impróprio

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1-x^2}\, dx &= \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{t}{1-t^2}\, dt = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \to 1^-} \left[\log(1-t^2)\right]_0^x = +\infty\end{aligned}$$

é divergente. Propomos agora a seguinte definição :

5.7.2. Definição. *Seja $f:]a,b[\to \mathbf{R}$ localmente integrável. Diz-se que o integral impróprio de f em $]a,b[$ é convergente se para algum c, $a < c < b$, são convergentes os integrais impróprios $\int_a^c$ e $\int_c^b$ e define-se:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

A anterior definição exige todavia um reparo: mostrar que ***o integral assim definido não depende do ponto $c \in]a,b[$ escolhido***.

Seja, com efeito, c', $a < c' < b$; tem-se então

$$\begin{aligned}&\int_a^{c'} f(x)\, dx = \lim_{y \to a^+} \int_y^{c'} f(x)\, dx = \\ &= \lim_{y \to a^+} \left[\int_y^c f(x)\, dx + \int_c^{c'} f(x)\, dx\right] = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^{c'} f(x)\, dx.\end{aligned}$$

Do mesmo modo se vê que

$$\int_{c'}^b f(x)\, dx = \int_{c'}^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

e logo

$$\int_a^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Mais geralmente, dados $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e sendo f localmente integrável em $[a,b]\backslash\{x_0,\ldots,x_n\}$, define-se o integral impróprio convergente em $[a,b]$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)\,dx$$

sempre que sejam convergentes os integrais impróprios $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$, para $0 \le i \le n-1$.

Retomemos de novo $f : [a,b[\to \mathbf{R}$ e admita-se que o integral impróprio, $\int_a^b f(x)\,dx$, é convergente. Coloca-se naturalmente a questão de saber se, neste caso, o integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ é ou não convergente; veremos adiante, com um contra-exemplo, que a convergência do integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ ***não implica*** a convergência do integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Assim,

5.7.3. Definição. *O integral impróprio, $\int_a^b f(x)\,dx$, diz-se **absolutamente convergente** se o integral*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

for convergente. Analogamente se define a convergência absoluta do integral impróprio em $]a,b]$.

Observação. É imediato o paralelismo entre as noções de convergência e convergência absoluta para séries e integrais impróprios. Tal como para as séries numéricas, veremos de seguida que a convergência absoluta implica a convergência do integral impróprio.

5.7.4. Proposição. *Seja $f : [a,b[\to \mathbf{R}$ uma função localmente integrável. Então o integral impróprio, $\int_a^b f(x)\,dx$, é convergente se e só se, para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| < \delta, \qquad \forall x, y \in]b-\epsilon, b[.$$

Demonstração. Da definição de convergência de integral impróprio resulta que $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente se e só se a função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ tem limite finito quando $x \to b^-$, ou seja (caracterização de Cauchy-Bolzano) :

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad x, y \in]b-\epsilon, b[\implies |F(x) - F(y)| < \delta,$$

o que mostra o resultado. ∎

Corolário. *Se o integral impróprio, $\int_a^b f(x)\,dx$, é absolutamente convergente então é convergente.*

Demonstração. Com efeito, sendo $\int_a^b |f(x)|\,dx$ convergente, resulta da da proposição que dado $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \int_x^y |f(t)|\,dt \right| < \delta, \qquad \forall x, y \in]b-\epsilon, b[$$

e logo (cf. 5.4.(v^*))

$$\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_x^y |f(t)|\,dt \right| < \delta,$$

o que dá a conclusão. ∎

Observações 1. Os resultados atrás referidos para os integrais impróprios em $[a, b[$ são naturalmente válidos para os integrais impróprios em $]a, b]$.

2. Note-se que, se $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ é localmente integrável, a convergência ou divergência do integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ***é equivalente*** respetivamente à convergência ou divergência do integral $\int_{b-\epsilon}^b f(x)\,dx$ $(b \in \mathbf{R})$, com $\epsilon > 0$; basta, com efeito, observar que

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{b-\epsilon} f(t)\,dt + \int_{b-\epsilon}^x f(t)\,dt,$$

e logo $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f$ existe e é finito se e só se existe e é finito $\lim\limits_{x \to b^-} \int_{b-\epsilon}^x f$. A mesma observação vale naturalmente para $f :]a, b] \to \mathbf{R}$. Enfim, se $b = +\infty$ (ou $a = -\infty$), o mesmo raciocínio se aplica: $\forall M \geq a$,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \ \text{convergente} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_M^{+\infty} f(t)\,dt \ \text{convergente}.$$

Torna-se portanto claro que, para função localmente integrável, a natureza (convergência ou divergência) do integral impróprio num ponto depende apenas do comportamento da função numa vizinhança desse ponto.

Tal como fora já assinalado para as séries reais, a questão da convergência ou divergência dos integrais impróprios é um assunto em geral delicado. Todavia, se a função integranda for positiva, ou pelo menos positiva numa vizinhança do ponto impróprio (cf. Obs. 2.) é possível apresentar um conjunto sistemático de critérios de convergência. Este tema (juntamente com as séries de termos positivos) será analisado com desenvolvimento no próximo capítulo. A terminar esta secção demonstramos um resultado que, em particular, se aplica ao estudo de um importante integral impróprio, o integral de Dirichlet: $\int_1^{+\infty} \sin x/x\, dx$.

5.7.5. Proposição. *Sejam* $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ *funções localmente integráveis e* $K > 0$ *tal que*

$$\left| \int_x^y f(t)\, dt \right| \leq K, \quad \forall x, y \in [a, +\infty[.$$

Se g *é decrescente e* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, *então o integral impróprio*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

é convergente.

Demonstração. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, dado $\delta > 0$, existe $M > 0$ tal que $0 \leq g(x) \leq \delta/K$, $\forall x \in [M, +\infty[$. Então, tomando quaisquer $c, d > M$ $(c < d)$, pelo 2º Teorema da Média (Cor.) existe ξ, $c \leq \xi \leq d$ tal que

$$\left| \int_c^d f(x)\, g(x)\, dx \right| = g(c) \left| \int_c^\xi f(x)\, dx \right| \leq \frac{\delta}{K}.K = \delta,$$

e o resultado é agora consequência imediata da Prop. 5.7.4. ∎

Corolário. *O integral de Dirichlet,* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, *é convergente.*

Basta observar que,

$$\left| \int_x^y \sin t\, dt \right| = |[-\cos t]_x^y| \leq 2, \qquad \forall x, y.$$

No entanto,

5.7.6. Proposição. *O integral de Dirichlet,* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, *não é absolutamente convergente.*

Demonstração. Mostremos que

$$\lim_{N\to+\infty}\int_1^{2N\pi+\pi/2}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\int_1^{2N\pi+\pi/2}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx &\geq \sum_{j=1}^{N}\int_{2j\pi+\pi/4}^{2j\pi+\pi/2}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^{N}\frac{\pi}{4}\,\frac{\sin(\pi/4)}{2j\pi+\pi/2}\geq C\sum_{1}^{N}\frac{1}{j},\end{aligned}$$

e como $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{N}\frac{1}{j}=+\infty$, tem-se a conclusão. ∎

5.8. Funções de variação limitada.

Seja f uma função real definida num intervalo $[a,b]\subset\mathbf{R}$, $a<b$.

5.8.1. Definição. *Diz-se que f é uma **função de variação limitada** em $[a,b]$ (também se diz v.l.) se existe $M>0$ tal que para toda a partição $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$, se tem*

$$v_P(a,b)=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leq M.$$

*Neste caso, o supremo das somas $v_P(a,b)$, para todas as partições de $[a,b]$, é um número real chamado **variação total de f em** $[a,b]$ e representa-se por*

$$V(a,b)=\sup_P v_P(a,b).$$

Observação. Sendo P uma partição de $[a,b]$ e P' uma partição mais fina, é fácil ver que $v_P(a,b)\leq v_{P'}(a,b)$. Com efeito, admita-se (por simplicidade) que $P'=P\cup\{c\}$, com $x_i<c<x_{i+1}$; a anterior desigualdade é imediata consequência de

$$|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leq|f(x_{i+1})-f(c)|+|f(c)-f(x_i)|.$$

O leitor desprevenido poderá agora ser levado a concluir que a variação total, $V(a,b)=\sup\limits_P v_P(a,b)$, é ainda igual ao limite de $v_P(a,b)$ quando

$|P| \to 0$. Todavia o resultado não é, em geral, verdadeiro $(*)$: a função $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, tem a variação total $V(-1,1) = 2$ e no entanto $v_P(-1,1) = 0$, para qualquer partição que não tenha 0 como vértice.

5.8.2. Exemplos.

1. A função $f(x) = \sin x$ é de variação limitada em qualquer intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}$; com efeito,

$$|\sin x_{i+1} - \sin x_i| \leq x_{i+1} - x_i \qquad \text{(Teor. de Lagrange)},$$

e logo $v_P(a,b) \leq \sum(x_{i+1} - x_i) = b - a$.

2. É claro que toda a função monótona f em $[a,b]$ é de variação limitada,

$$v_P(a,b) = |f(b) - f(a)| = V(a,b),$$

para qualquer partição P de $[a,b]$.

3. Consideremos a função $f(x) = \sin 1/x$ se $x \neq 0$, $f(0) = x_0$. Escolham-se partições com vértices nos pontos $x_m = \dfrac{1}{(2m+1)\,\pi/2}$, $m \in \mathbf{N}$; nestes pontos tem-se $f(x_m) = (-1)^m$ e logo $|f(x_{m+1}) - f(x_m)| = 2$. Fixado um qualquer intervalo $[0,b]$, todos os x_m, para m suficientemente grande, estão em $[0,b]$; logo se constata que $v_P(0,b) \geq 2k$, para toda a partição com os vértices $b, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+k}, 0$, e portanto $V(0,b) = +\infty$. A função não é de variação limitada em nenhum intervalo $[0,b]$.

De mesmo modo se vê que a função contínua, $f(x) = x\,\sin 1/x$, $x \in \mathbf{R}$, não é de variação limitada em qualquer $[0,b]$. Escolhendo agora os pontos $x_m = \dfrac{1}{m\,\pi/2}$, $m \in \mathbf{N}$, facilmente se vê que

$$|f(x_{m+1}) - f(x_m)| = \begin{cases} 2/\pi\,\dfrac{1}{m} & \text{se} \quad m \text{ ímpar} \\[2ex] 2/\pi\,\dfrac{1}{m+1} & \text{se} \quad m \text{ par} \end{cases}$$

e em qualquer dos casos, estas parcelas são termo geral de um série divergente.

$(*)$ O resultado é verdadeiro se f é contínua; a demonstração é um pouco delicada e nós não a faremos aqui.

5.8.3. Proposição. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ de variação limitada. Então f é limitada.*

Demonstração. Para cada $x \in [a, b]$, tem-se

$$v_P = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V(a, b).$$

Em particular, $|f(x) - f(a)| \leq V(a, b)$ e logo

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V(a, b), \quad \forall x \in [a, b]. \quad \blacksquare$$

5.8.4. Proposição. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ e $a < c < b$. Então f é de variação limitada em $[a, b]$ se e só se é de variação limitada em $[a, c]$ e $[c, b]$. Neste caso, tem-se*

$$V(a, b) = V(a, c) + V(c, b),$$

em que $V(a, c)$ e $V(c, b)$ representam as variações totais de f em $[a, c]$ e $[c, b]$, respetivamente.

Demonstração. Suponha-se f de variação limitada em $[a, c]$ e $[c, b]$ e seja P uma partição de $[a, b]$. Tomando $P' = P \cup \{c\}$, tem-se $v_P(a, b) \leq v_{P'}(a, b) = v_{P'}(a, c) + v_{P'}(c, b)$ e portanto

$$v_P(a, b) \leq V(a, c) + V(c, b).$$

Logo f é *v.l.* em $[a, b]$ e $V(a, b) \leq V(a, c) + V(c, b)$.
Reciprocamente, uma partição de $[a, c]$ e uma partição de $[c, b]$ definem uma partição de P de $[a, b]$ e então, se f é *v.l.* em $[a, b]$, tem-se

$$v_P(a, c) + v_P(c, b) = v_P(a, b) \leq V(a, b).$$

Logo, f é de variação limitada em $[a, c]$ e $[c, b]$ e (cf. (5.2.4.), Lema 1) $V(a, c) + V(c, b) \leq V(a, b)$. $\blacksquare$

Sendo $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de variação limitada, define-se a função ***variação total***, $x \in [a, b] \to V(a, x)$, pondo $V(a, x) =$ variação total de f em $[a, x]$, $a < x \leq b$, e $V(a, a) = 0$.

Corolário 1. *Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é de variação limitada, a função variação total, $V(a, x)$, é função crescente.*

Corolário 2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função derivável em todos os pontos exceto num número finito, $y_1, \ldots, y_k \in [a, b]$. Suponha-se que existe $M > 0$, tal que $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b] \setminus \{y_1, \ldots, y_k\}$. Então f é de variação limitada em $[a, b]$.*

Demonstração. Pela proposição, basta-nos demonstrar o resultado para um só y_k, digamos c, $a < c < b$. Como f' é limitada em $[a, c[$ e $]c, b]$, então f é limitada, $|f(x)| \leq K$, $x \in [a, b]$ (T. de Lagrange, Cor.3.). Tomando agora uma partição P de $[a, b]$, considere-se $P' = P \cup \{c\} = \{x_0 < \cdots < x_{j-1} < c < x_{j+1} < \cdots < x_n\}$, $(x_j = c)$. Tem-se então

$$v_P(a,b) \leq v_{P'}(a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| =$$
$$= \sum_{i \neq j, j+1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_{j+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_{j-1}|$$

Usando de novo Lagrange,

$$\sum_{i \neq j, j+1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq M \sum_{i \neq j, j+1} |x_{i+1} - x_i| \leq M(b-a)$$

e logo, $v_P(a,b) \leq M(b-a) + 4K$, o que mostra o resultado. Se $c = a$ ou b, a demonstração é essencialmente a mesma. ∎

O teorema seguinte dá uma nova caracterização das funções de variação limitada.

5.8.5. Teorema. *A função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é de variação limitada se e só se f é diferença de duas funções crescentes.*

Demonstração. Ponha-se

$$f(x) = V(a,x) - [V(a,x) - f(x)]. \qquad (J)$$

Foi já visto que a função variação total, $V(a,x)$, é crescente. Mostremos agora que $g(x) = V(a,x) - f(x)$ é também crescente em $[a, b]$. Tomando $a \leq x < y \leq b$, vem (cf. (5.8.4.))

$$g(y) - g(x) = V(a,y) - V(a,x) - [f(y) - f(x)] =$$
$$= V(x,y) - [f(y) - f(x)].$$

Mas resulta da própria definição de $V(x,y)$ que

$$|f(y) - f(x)| \leq v_P(x,y) \leq V(x,y)$$

e logo $g(x) \leq g(y)$. ∎

Tendo presente as prop. 3.2.6. e 5.8.3., resulta imediatamente

Corolário. *Uma função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ de variação limitada tem no máximo um número numerável de descontinuidades. Em particular, f é R-integrável.*

5.8.6. Continuidade e variação total.

5.8.7. Proposição. *Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função de variação limitada e $c \in [a,b]$. Então f é contínua em c se e só se $V(a,x)$ é contínua em c.*

Demonstração. Seja $a \leq c < b$ e mostremos primeiro que $f(c^+) = f(c) \implies V(a,c^+) = V(a,c)$. Dado $\delta > 0$, existe $P = \{c = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, partição de $[c,b]$, tal que $v_P(c,b) > V(c,b) - \delta$. Tomando $x \in]c, x_1[$, é claro que

$$V(c,b) - \delta < v_P(c,b) \leq |f(x) - f(c)| + V(x,b)$$

ou seja

$$\delta + |f(x) - f(c)| > V(c,b) - V(x,b) = V(c,x).$$

Como $f(c^+) = f(c)$, passando ao limite $x \to c^+$ a anterior desigualdade, obtemos

$$\lim_{x \to c^+} [V(a,x) - V(a,c)] = \lim_{x \to c^+} V(c,x) \leq \delta$$

o que mostra que $V(a,c^+) = V(a,c)$.
A recíproca é consequência imediata de

$$|f(x) - f(c)| \leq V(c,x) = V(a,x) - V(a,c), \quad x \in]c,b].$$

Analogamente se trata a continuidade à esquerda. ∎

Resulta agora de (5.8.5.(J))

Corolário 1. *A função $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ é contínua e de variação limitada se e só se f é diferença de duas funções crescentes e contínuas em $[a,b]$.*

Corolário 2. *Seja f uma função contínua e de variação limitada em $[a,x]$ para todo x tal que $a < x < b$. Se $V(a,x) \leq M$, $\forall x \in]a,b[$, então f é de variação limitada em $[a,b]$ e em consequência $V(a,b) = \lim_{x \to b^-} V(a,x)$. Resultado análogo se f é v.l. em todo $[x,b]$, $a < x < b$.*

Demonstração. Fixado $\delta > 0$, pela continuidade de f, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - f(b)| < \delta$, $\forall x \in [b - \varepsilon, b]$. Tomando agora uma qualquer partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, escolha-se $x \in [b - \varepsilon, b]$ tal que $x_{n-1} < x < b$. Então, tem-se

$$v_P(a,b) \leq V(a,x) + |f(x) - f(b)| < M + \delta. \quad ∎$$

5.8.8. Comprimento de arco.

5.8.9. Definição. *Uma* ***curva*** *no plano* $\mathbf{R}^2$ *é uma aplicação*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \in [a,b] \longrightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

As funções $x(t)$ e $y(t)$ dizem-se as funções componentes da curva. A imagem $\gamma([a,b])$ diz-se o traço ou gráfico da curva e é representado por $\boldsymbol{\Gamma}$.

Em particular, o gráfico de uma função de variável real, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, não é mais do que o gráfico da curva $\gamma(t) = (t, f(t))$, em que as funções componentes são $x(t) = t$ e $y(t) = f(t),\ t \in [a,b]$.

A curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ diz-se contínua se as funções componentes $x(t)$ e $y(t)$ são contínuas em $[a,b]$.

Pretende-se definir "comprimento de arco" de uma curva contínua. Veremos que se trata de um conceito intimamente relacionado com o de função de variação limitada, atrás analisado. Considere-se então uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ e tomemos uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a,b]$. Uma tal partição determina naturalmente um polígono ("inscrito na curva") com vértices $\gamma(t_i)$.

É razoável definir o comprimento da curva como o supremo dos comprimentos dos polígonos inscritos, para todas as partições de $[a,b]$.

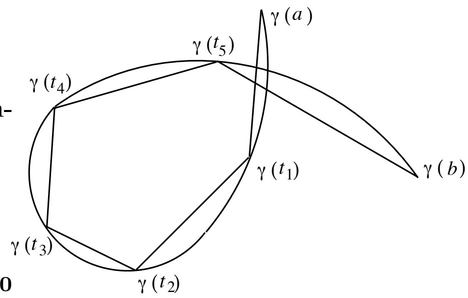


Figura 5.10

5.8.10. Definição. *Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva contínua definida em $[a,b]$. Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$ e consideremos o comprimento do polígono associado,*

$$l\,(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2}. \tag{1}$$

Se existe $M > 0$ tal que $l(P) \leq M$, para toda a partição P de $[a,b]$, então a curva diz-se ***retificável*** *e neste caso*

$$\sup_P \ l\,(P) = \Lambda(a,b),$$

diz-se o ***comprimento de arco da curva*** γ.

Observações. 1. No somatório que figura em (1), cada parcela, como se sabe da Geometria Analítica elementar, não é mais do que o comprimento do segmento $\overline{P_i P_{i+1}}$, em que $P_i = \gamma(t_i)$ e $P_{i+1} = \gamma(t_{i+1})$.

2. Se P' é uma partição mais fina do que P, $P \subset P'$, facilmente se vê que $l\,(P) \leq l\,(P')$.

5.8.11. Teorema. *Uma curva contínua $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, é retificável se e só se as funções componentes, $x(t)$ e $y(t)$, são de variação limitada, e tem-se*

$$V_x(a,b),\ V_y(a,b)\ \leq \Lambda(a,b) \leq V_x(a,b) + V_y(a,b),$$

em que $V_x(a,b)$ e $V_y(a,b)$ representam as variações totais de $x(t)$ e $y(t)$ em $[a,b]$.

Demonstração. Tomando uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$, tem-se

$$\sum_{i=0}^{n-1} |x(t_{i+1}) - x(t_i)|,\ \sum_{i=0}^{n-1} |y(t_{i+1}) - y(t_i)|\ \leq l\,(P) \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} |x(t_{i+1}) - x(t_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |y(t_{i+1}) - y(t_i)|.$$

A conclusão é agora imediata. ∎

Com demonstração idêntica à da proposição 5.8.4., tem-se agora

5.8.12. Proposição. *Uma curva contínua γ, definida em $[a,b] \subset \mathbf{R}$, é retificável se e só se é retificável em $[a,c]$ e $[c,b]$, $a < c < b$, e tem-se*

$$\Lambda(a,b) = \Lambda(a,c) + \Lambda(c,b).$$

Se γ é uma curva retificável em $[a,b]$, e à semelhança da noção de função variação total, define-se a função perímetro da curva, $t \to \Lambda(a,t)$, pondo $\Lambda(a,a) = 0$.

Corolário 1. *Se γ é curva contínua retificável em $[a,b] \subset \mathbf{R}$, a função perímetro, $t \to \Lambda(a,t)$, é crescente e contínua.*

Demonstração. A monotonia sai logo da proposição. Por outro lado, se $a < t < t'$, tem-se (cf. (5.8.11.))

$$0 \leq \Lambda(a,t') - \Lambda(a,t) = \Lambda(t,t') \leq V_x(t,t') + V_y(t,t'),$$

e o segundo membro tende para 0 quando $t' \to t^+$ (cf. (5.8.7.)). ∎

Corolário 2. *Uma curva contínua γ, definida em $[a,b] \subset \mathbf{R}$, é retificável se e só se é retificável em $[a,t]$ para todo $t \in [a,b[$ e existe $M > 0$ tal que $\Lambda(a,t) \le M,\ \forall t \in [a,b[$. Em consequência, $\Lambda(a,b) = \lim_{t\to b^-} \Lambda(a,t)$*
Resultado análogo se γ é retificável em todo $[t,b],\ a < t < b$.

Demonstração. Sendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ retificável em $[a,t]$, as funções componentes são *v.l.* em $[a,t]$ (cf. (5.8.11.)) e

$$V_x(a,t),\ V_y(a,t)\ \le M.$$

A conclusão sai de (5.8.7. Cor.2.) e (5.8.11.). ∎

5.8.13. Exemplos.

1. A curva, gráfico da função $f(x) = x \sin 1/x,\ x \in [0,b]$, não é retificável; com efeito, f não é de variação limitada.

Tem-se $\Lambda(0,b) = +\infty$

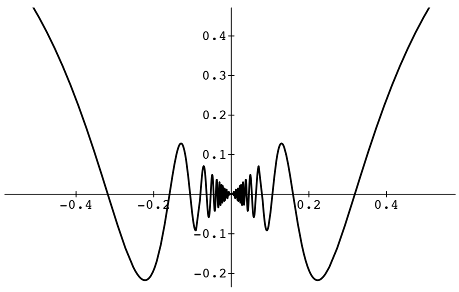


Figura 5.11

2. Seja agora $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua, e diferenciável em $]a,b[$. Para cada partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$, considere-se o comprimento do polígono inscrito no gráfico de f,

$$l\,(P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[t_{i+1} - t_i]^2 + [f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2}.$$

Pelo teorema de Lagrange, existe $\xi_i \in]t_i, t_{i+1}[$ tal que $f(t_{i+1}) - f(t_i) = (t_{i+1} - t_i)\, f'(\xi_i)$ e logo

$$l\,(P) = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\ (t_{i+1} - t_i),$$

soma de Riemann da função $\sqrt{1 + [f'(t)]^2}$. Logo, se esta função for R-integrável, o leitor pode facilmente mostrar (*exercício*) que o gráfico de f é retificável (cf. (5.8.10.), Obs. 2.) e

$$\Lambda(a,b) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt. \tag{2}$$

Tratando-se de integral impróprio em b (ou em a) convergente, a curva é ainda retificável e o seu comprimento (cf. (5.8.12.), Cor. 2.),

$$\begin{aligned}\Lambda(a,b) &= \lim_{t\to b^-} \Lambda(a,t) = \lim_{t\to b^-} \int_a^t \sqrt{1+[f'(\tau)]^2}\, d\tau \\ &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(t)]^2}\, dt.\end{aligned}$$

Enfim, sendo o integral impróprio em a e b convergente, tem-se ainda o mesmo resultado (cf. (5.8.12.)).

5.8.14. Definição rigorosa das funções trigonométricas.

Na circunferência de raio 1 e centro na origem, $u^2+v^2=1$, consideremos a parte situada no semi-plano superior, gráfico da curva γ, descrita por $f(u)=\sqrt{1-u^2}$, $-1\le u\le 1$; trata-se de uma curva contínua e a sua derivada, $f'(u)=-u/\sqrt{1-u^2}$ é finita para $-1<u<1$. Como

$$\sqrt{1+[f'(u)]^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

a curva γ é retificável, e o comprimento de arco, vem dado por

$$\Lambda(-1,1) = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,,$$

integral impróprio convergente em -1 e 1 (cf. (5.8.13.),(2.)). Assim, a semi-circunferência de raio 1 é retificável e o seu comprimento é um número real designado, número π :

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Pretende-se agora definir em todo o rigor (mas motivados pela ideia intuitiva) as funções trigonométricas, $\sin x$ e $\cos x$.

Para cada $u\in[-1,1]$, tome-se o ponto B da semi-circunferência γ (cf. Fig. 5.12) cuja abcissa é u e considere-se o comprimento de arco $\widehat{AB}$; designamo-lo por $x=\arccos u$. Fica assim bem definida a aplicação $u\to \arccos u$, $u\in[-1,1]$, dada por

$$x = \arccos u = \int_u^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,, \quad -1\le u\le 1 \tag{1}$$

Em particular, $\arccos 1=0$, $\arccos -1=\pi$, e como a função integranda em (1) é par, tem-se $\arccos 0 = 1/2\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi/2.$

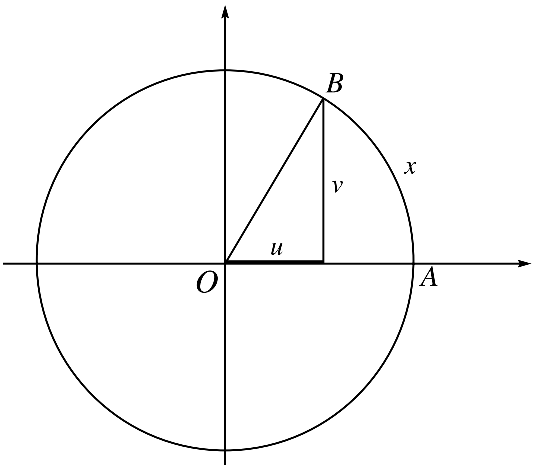


Figura 5.12

A função arccos : $[-1,1] \to \mathbf{R}$, dada pelo integral indefinido (1), é claramente contínua e é derivável em $]-1,1[$:

$$(\text{arccos } u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} < 0.$$

Trata-se de uma função estritamente decrescente; a função inversa representa-se por $\cos x,\ x \in [0,\pi]$, e é também estritamente decrescente no respetivo intervalo. Tendo presente a representação geométrica de $u = \cos x$ com $x \in [0,\pi]$, esta função prolonga-se a toda a reta do seguinte modo: ponha-se

$$\begin{cases} \cos x = \cos(-x) & \text{se} \quad x \in [-\pi, 0] \\ \\ \cos(x + 2k\pi) = \cos x & \text{se} \quad x \in [-\pi,\pi],\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

A função assim definida é par e satifaz $\cos(x+2\pi) = \cos x,\ \forall x \in \mathbf{R}$. Diz-se então que $\cos x$ é uma função periódica de período 2π ou 2π-periódica $(*)$.

Define-se agora a função $\sin x,\ x \in \mathbf{R}$, pondo $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
Se $x \in]0,\pi[$, a derivação da função inversa dá-nos

$$(\cos x)' = \frac{1}{(\text{arccos } u)'} = -\sqrt{1-u^2} = -\sqrt{1-\cos^2 x} \tag{2}$$

$(*)$ O estudo das funções periódicas em $\mathbf{R}$ terá algum desenvolvimento no Cap.8 dedicado às séries de Fourier

Sendo $\cos x$ função par e 2π-periódica, a sua derivada em $\mathbf{R}$ vem ainda dada por (2); em particular $(\cos x)'_{x=0} = 0$, $(\cos x)'_{x=\pi} = 0$ (cf. (4.2.3.), Cor.4.). Derivando de novo, resulta de (2)

$$(\cos x)'' = \frac{\cos x\,(\cos x)'}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\cos x$$

e logo a função $u(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, é solução do problema diferencial

$$(P_1)\ \begin{cases} u''(x) + u(x) = 0, & x \in \mathbf{R} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Analogamente, a função $v(x) = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ satisfaz

$$(P_2)\ \begin{cases} v''(x) + v(x) = 0, & x \in \mathbf{R} \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Mais geralmente se verifica que a função, $u(x) = a\,\cos x + b\,\sin x$, $a, b \in \mathbf{R}$, é solução do problema

$$(P)\ \begin{cases} u''(x) + u(x) = 0, & x \in \mathbf{R} \\ u(0) = a \\ u'(0) = b \end{cases}$$

Mostremos que esta solução é ***única***, isto é, existe uma única função duas vezes diferenciável em $\mathbf{R}$ que satisfaz (P). Desde logo, se $u(x)$ é função duas vezes diferenciável em $\mathbf{R}$ e satisfaz (P), multiplicando a equação diferencial por $u(x)$, obtém-se

$$\frac{d}{dx}\left[(u'(x))^2 + (u(x))^2\right] = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

e logo (função com derivada nula em $\mathbf{R}$ é constante)

$$[u'(x)]^2 + [u(x)]^2 = [u'(0)]^2 + [u(0)]^2 = a^2 + b^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Se $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são duas soluções de (P), a função $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ satisfaz ainda $w''(x) + w(x) = 0$, $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, e por (3), tem-se

$$[w'(x)]^2 + [w(x)]^2 = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Logo, $w(x) = u_1(x) - u_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Assim, $u(x) = a \cos x + b \sin x$, é a única solução de (P); em particular as funções, $u(x) = \cos x$ e $v(x) = \sin x$, são as únicas soluções dos problemas (P_1) e (P_2), respetivamente. As propriedades das funções trigonométricas $\cos x$ e $\sin x$ derivam agora facilmente da análise dos problemas diferenciais (P_1) e (P_2) que as caracterizam. Vejamos algumas:

a) Dado que $v(x) = \sin x$ satisfaz (P_2), é claro que $u(x) = v'(x) = (\sin x)'$ satisfaz $u'' + u = 0$, $u(0) = v'(0) = 1$, $u'(0) = v''(0) = -v(0) = 0$; isto é, $v'(x)$ é solução do problema (P_1) e, pela unicidade estabelecida, resulta que $(\sin x)' = \cos x$. Daqui sai, $(\cos x)' = (\sin x)'' = -\sin x$.

b) Aplicando a fórmula (3) ao problema (P_1), tem-se $[u'(x)]^2 + [u(x)]^2 = 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, isto é

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

c) Deduzimos ainda a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Para cada $y \in \mathbf{R}$, consideremos a função $x \to u(x) = \cos(x+y)$. É claramente uma função duas vezes diferenciável e satisfaz o problema (P) com $u(0) = a = \cos y$ e $u'(0) = b = -\sin y$. Tendo presente que a única solução de (P) é a função $u(x) = a \cos x + b \sin x$, obtemos então a fórmula procurada.

Exercícios

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada. Prove que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = -\underline{\int_a^b}(-f(x))dx.$$

2. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funções limitadas tais que $f \leq g$ em $[a, b]$. Mostre que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx.$$

3. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada. Utilize os exercícios precedentes para provar que

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x)dx \right| \leq \overline{\int_a^b} | f(x) | dx.$$

Dê um exemplo em que a anterior desigualdade não se verifica para os integrais inferiores.

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função integrável. Considere uma sucessão de partições P_n obtida dividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos iguais : $\left[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}\right]$. Considere em seguida as somas de Riemann

$$S_n = \sum_i \left(x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)}\right) f(\xi_i^{(n)}).$$

a) Fazendo $\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)}$ mostre que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

b) Sendo a um real superior a 1, mostre que a sucessão $n(a^{1/n} - 1)$ tem por limite:

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx.$$

Sug. Considere as partições P_n definidas pelos pontos $a^{i/n}$.

5. Utilizando as ideias do exercício precedente determine os limites das seguintes sucessões :

a) $x_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p^2}$,

b) $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} \right)$.

6. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Mostre que

$$\int_a^b | f(x) | \, dx = 0 \quad \text{sse} \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada e não negativa: $f(x) \geq 0,\ \forall x$. Prove que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_\varphi \int_a^b \varphi(x)dx,$$

onde φ percorre o conjunto das funções em escada tais que $\varphi(x) \leq f(x),\ \forall x \in [a,b]\,$.

8. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, função contínua, e $\varphi : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbf{R}$, função derivável tal que Im $\varphi \subset [a,b]$ e $c \in [a,b]$. Mostre que são equivalentes

1. $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ para todo $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ e $\varphi(t_0) = c$.

2. $\varphi(t) = c + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))ds$ para todo $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

9. Suponha-se que $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é uma função integrável e que

$$f(a + b - x) = f(x), \quad x \in [a, b]\,.$$

Mostre que

$$\int_a^b x f(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

10. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função integrável. Para cada h tal que $0 < h < (b - a)/2$, associe-se a função $g_h : [a + h, b - h] \to \mathbf{R}$ definida por

$$g_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x + u)du.$$

a) Mostre que, se f é contínua então g_h é derivável.

b) Supondo sempre que f é contínua, mostre que

$$\lim_{h \to 0} g_h(x) = f(x).$$

c) Mais geralmente, não sendo f necessariamente contínua, mas admitindo os limites laterais $f(x^+)$ e $f(x^-)$, mostre que se tem

$$\lim_{h \to 0} g_h(x) = \frac{1}{2} \left[f(x^+) + f(x^-) \right].$$

11. Represente-se por I_n o integral

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx.$$

Calcule I_0 e I_1. Estabeleça uma relação entre I_n e I_{n+2} e utilize esta relação para calcular I_4.

12. Seja $a > 0$ um real positivo e $f : [0, a] \to \mathbf{R}$ uma função derivável com $f'(x) > 0, \quad \forall x \in [0, a]$ e $f(0) = 0$; represente por g a função inversa de f e defina-se $F : [0, a] \to \mathbf{R}$ por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt - x f(x).$$

Mostre que F é derivável e calcule a sua derivada. Qual o valor de $F(x)$?

13. Dê um exemplo de uma função primitivável num dado intervalo mas que não seja integrável.

Sug. Determine uma função f, derivável em $[0,1]$, por exemplo, tal que f' não seja limitada.

14. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ funções integráveis e seja $D = \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$. Mostre que se D tem medida nula à Lebesgue, $\mu(D) = 0$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Dê um exemplo de duas funções f e g definidas em $[a,b]$, tais que o conjunto $D = \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ tenha medida nula à Lebesgue, f seja integrável e g não o seja.

15. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, uma função com derivada integrável em $[a,b]$. Pondo $m = \dfrac{a+b}{2}$, prove que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a} \int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]\, dx.$$

16. Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

admite uma primitiva em $\mathbf{R}$.

Sug. Observe que a função $x^2 \sin 1/x$ admite derivada em todo o ponto.

17. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função derivável com derivada f' R-integrável e tal que $f(a) = 0$. Seja $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

a) Mostre que se tem

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M \, \frac{(b-a)^2}{2}.$$

b) Se além disso f verifica $f(a) = f(b) = 0$, mostre que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M \, \frac{(b-a)^2}{4}.$$

18. Sejam p e q números reais superiores a 1 tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

a) Mostre que se $u, v \in \mathbf{R}^+$ então

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Sug. Estude as variações da função $u \to u^p/p - uv$.

b) Se $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ são funções integráveis em $[a,b]$, mostre que $|\ f\ |^p$ e $|\ g\ |^p$ são integráveis.

c) Considerando os números

$$A_p = \left(\int_a^b |\ f(t)\ |^p \ dt \right)^{1/p}, \ B_q = \left(\int_a^b |\ g(t)\ |^q \ dt \right)^{1/q},$$

e aplicando *a*) aos números $u = \dfrac{|\ f(t)\ |}{A_p}, \ v = \dfrac{|\ g(t)\ |}{B_q}$, mostre que

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b |\ f(t)\ |^p \ dt \right)^{1/p} . \left(\int_a^b |\ g(t)\ |^q \ dt \right)^{1/q}.$$

(***Desigualdade de Hölder***. No caso de $p = q = 2$, a desigualdade toma a designação de ***Desigualdade de Cauchy-Schwarz***.)

19. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$, uma função contínua satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$(*) \quad f(x) \leq C_1 + C_2 \int_a^x f(s) ds, \quad \forall x \in [a,b]\,, C_1, C_2 > 0.$$

a) Determine uma primitiva da função

$$g(t) = \frac{C_2 f(t)}{C_1 + C_2 \int_a^t f(s) ds}, \quad t \in [a,b]\,.$$

b) Escrevendo a anterior desigualdade $(*)$ na forma

$$\frac{C_2 f(t)}{C_1 + C_2 \int_a^t f(s)ds} \le C_2,$$

mostre que (***Desigualdade de Gronwall***) :

$$f(x) \le C_1\, e^{C_2(x-a)}, \quad x \in [a,b]\,.$$

20. Seja $g : [0,T] \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^1, satisfazendo as condições

$$\begin{cases} g'(s) = kg(s), & s \in [0,T]\,, k \in \mathbf{R} \\ g(0) = g_0 \end{cases}$$

Utilize o exercício anterior para mostrar que se tem

$$\mid g(t) \mid \le \mid g_0 \mid e^{|k|t} \quad \forall t \in [0,T]\,.$$

21. Sejam f e φ funções definidas no intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}$, contínuas e positivas. Suponha-se que

$$f(x) \le C_1 + C_2 \int_a^x \varphi(t)\, f(t)\, dt, \quad \forall x \in [a,b],\ C_1, C_2 > 0.$$

Utilize o mesmo raciocínio do exercício 19. para mostrar

$$f(x) \le C_1\, e^{C_2 \int_a^x \varphi(t)\, dt}, \quad \forall x \in [a,b].$$

(*Desigualdade de Gronwall generalizada.*)

22. Seja $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ uma função contínua e positiva e tal que

$$f(t) \le C_1 + C_2 \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds, \quad C_1 > 0,\, C_2 > 0,\ t \in [0,T].$$

Mostre que existem constantes $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ positivas, tais que

$$f(t) \le \tilde{C}_1\, e^{\tilde{C}_2 t}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Sug. Considere a função $g(t) = \sup_{s\in[0,t]} f(s)$. *Constate que* g *é contínua e crescente. Decomponha o integral* $\int_0^t$ *em* $\int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^t$, *com* ε *sufientemente pequeno, e aplique Gronwall a* g.

23. Prove que se $f : [0,T] \to \mathbf{R}$ é contínua e

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,T]\,,$$

então f é identicamente nula.

24. Seja $f : [0,a] \to \mathbf{R}$ $(a > 0)$ uma função contínua. Mostre que

$$\int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt\right] du = \int_0^x f(u)\,(x-u)du, \quad x \in [0,a]\,.$$

25. Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $F :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, \quad F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \log t\, dt;$

b) $G : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad G(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \cos t^2 dt.$

26. Determine a função f, contínua em $\mathbf{R}$, que satisfaz as seguintes condições:

a)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+2} & \text{se} \quad x > -1 \\ 0 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases} \qquad f(-1) = \frac{5}{2}$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ \dfrac{\log x}{x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases} \qquad f(1) = 1$$

27.

a) Determine a função f, contínua em $\mathbf{R}$, tal que

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}, & \forall x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

b) Calcule $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$.

c) Verifique se a função f verifica as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[-1,1]$.

28. Seja $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua tal que $\varphi(a) = 0$ e $\dfrac{d^+\varphi}{dx}(x) = 0,\ \forall x \in [a,b]$. Seja dado um qualquer $\varepsilon > 0$.

a) Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq \varepsilon\,(x-a),\ \forall x \in [a,\delta]$.

b) Seja $c = \sup\{\delta : |\varphi(x)| \leq \varepsilon\,(x-a),\ \forall x \in [a,\delta]\}$. Mostre que $c = b$.

Sug. Se $c < b$, *utilize o facto de* $\dfrac{d^+\varphi}{dx}(c) = 0$ *para mostrar que existe* $h > 0 : |\varphi(c+h)| \leq \varepsilon\,(c+h-a)$ *e assim chegar a um absurdo.*

c) Conclua que $\varphi \equiv 0$ em $[a,b]$.

29. Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ contínua e $\dfrac{d^+\varphi}{dx}(x)$ contínua em $[a,b]$. Escreva

$$f(x) = \varphi(a) + \int_a^x \frac{d^+\varphi}{dt}(t)\,dt.$$

Utilize o exercício precedente para mostrar que $f(x) \equiv \varphi(x)$ em $[a,b]$. Conclua que função contínua com derivada à direita contínua em $[a,b]$ é de classe $C^1([a,b])$.

30. Determine a função f duas vezes diferenciável em $\mathbf{R}^+$ e verificando as condições:

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + e^{-x} \\[2mm] f'(1) = -1 \\[2mm] f(1) = \dfrac{2}{e} \end{cases}$$

31. Primitive as seguintes funções

a) $\dfrac{1}{x \log x}$ em $]0,+\infty[$;

b) $\dfrac{1}{\cos^2 x.\sqrt{1+\tan x}}$ em $]0,+\pi/2[$;

c) $e^{\tan x}.\sec^2 x$ em $]-\pi/2,\pi/2[$;

d) $\dfrac{\sqrt{\log x}}{x}$ em $]1,+\infty[$.

32. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{\log x}{x^3}$;	*b)* $\sin(\log x)$;	*c)* $x^2 e^x \sin x$;
d) $\tan^2 x$;	*e)* $\dfrac{x^3+x^2+x-1}{x^4+3x^2+2}$;	*f)* $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;
g) $\dfrac{3x^2+2x-2}{x^3-1}$;	*h)* $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+4x-2}}$;	*i)* $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$.

33. Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-\cos x}\,.\sin^2\frac{x}{2}\,dx$;	*b)* $\displaystyle\int_0^1 e^{\arcsin x}dx$;
c) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x-2\sqrt[3]{x}+4}$ $(a>0)$;	*d)* $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$;
e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\log x)^2}{x^2}dx$;	*f)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}}dx$;
g) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 x-\sin^2 x}$;	*h)* $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

34. Diga para que valores de a o integral

$$\int_0^{+\infty} a^x dx \quad (a>0)$$

é convergente ou divergente; calcule-o no caso convergente.

35. Mostre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^n}\,dx = \frac{1}{(n-1)^2} \qquad (n\in\mathbf{N}, n\geq 2).$$

36. Demonstre que

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(mx)}{x}\,dx$$

existe, $\forall a\neq 0$.

37. Mostre que

$$\int_0^1 x^{a-1}\log x\,dx = -\frac{1}{a^2}\ (a>0).$$

38. Seja $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = 0$ e $f'(0)$ existe e é finita. Mostre que o integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$$

é convergente.

39. Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_0^e \frac{dx}{1-\log x}.$$

40. Sejam a e b dois reais tais que $0 < a < b$ e $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ uma função contínua tal que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ é convergente.

a) Mostre que a função $x \to \dfrac{f(kx)}{x}$ é integrável em $[u,+\infty[$ se u e k são reais estritamente positivos.

b) Mostre que

$$\int_u^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

c) Mostre que a função

$$x \longrightarrow \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$$

é integrável em $]0,+\infty[$ e prove que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = f(0)\,\log\frac{a}{b}.$$

41. Mostre que a função $f :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$, dada por

$$f(x) = \int_0^1 e^{-x^2t^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt,$$

é contínua no seu domínio. Prove que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6

Desenvolvimentos Assintóticos e Aplicações

Ao longo deste capítulo serão expostas algumas técnicas que nos permitirão estudar o "***andamento das funções***" na vizinhança de um dado ponto de $\overline{\mathbf{R}}$. O termo, "andamento de uma função", embora grosseiro na terminogia matemática, reflecte a ideia que está subjacente à teoria e aos resultados que se pretendem obter: o comportamento da função na vizinhança de um dado ponto $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, e em particular a "velocidade" de convergência (caso haja limite) da função nesse ponto. Tomemos o seguinte exemplo: as funções x, e^x, $x + \sin \pi x$, têm todas limite $+\infty$ quando $x \to +\infty$; porém, e^x tende "mais rapidamente" para $+\infty$ do que as outras duas, no sentido em que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin \pi x}{e^x} = 0;$$

vemos ainda que as funções x e $x + \sin \pi x$ tendem para $+\infty$ do mesmo modo, já que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + \sin \pi x} = 1.$$

Começaremos então por construir uma família $\mathfrak{F}$ de funções ditas "***conhecidas***" na vizinhança de um ponto $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, pretendendo depois ***comparar*** uma dada função definida em $V(x_0)$ com funções da família $\mathfrak{F}$.

6.1. Funções padrão.

Consideremos primeiro o caso $x_0 = +\infty$. Tome-se o seguinte conjunto de funções, cujo comportamento consideramos conhecido na vizinhança de $+\infty$:

$$1, \quad x^\alpha, \quad (\log x)^\beta \ (\beta \neq 0), \quad e^{cx^\gamma} \ (c \neq 0, \gamma > 0), \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}.$$

A família de ***funções padrão*** $\mathfrak{F}_{+\infty}$ é, por definição, formada pelas funções anteriores bem como pelos seus produtos. Assim, o elemento genérico da família $\mathfrak{F}_{+\infty}$ é dado pela função padrão

$$g(x) = x^\alpha \, (\log x)^\beta \, e^{P(x)},$$

com

$$P(x) = c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_n x^{\gamma_n}, \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n > 0, \quad \alpha, \beta, c_j \in \mathbf{R}.$$

6.1.1. Proposição. *As funções de $\mathfrak{F}_{+\infty}$ satisfazem as seguintes condições:*

1) *Toda a função de $\mathfrak{F}_{+\infty}$ é estritamente positiva na vizinhança de $+\infty$.*
2) *Toda a função de $\mathfrak{F}_{+\infty}$ diferente de 1, tem limite 0 ou $+\infty$ quando $x \to +\infty$.*
3) $f, g \in \mathfrak{F}_{+\infty} \implies f.g \in \mathfrak{F}_{+\infty}$; $\quad f \in \mathfrak{F}_{+\infty} \implies f^\lambda \in \mathfrak{F}_{+\infty}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$

   em particular, se $f, g \in \mathfrak{F}_{+\infty}$ então $f/g \in \mathfrak{F}_{+\infty}$.

Demonstração. As alíneas 1) e 3) são imediatas. Vejamos 2); se $P = 0$ (caso em que $c_j = 0, \ j = 1, \ldots, n$), o elemento genérico de $\mathfrak{F}_{+\infty}$ vem dado por

$$g(x) = x^\alpha \, (\log x)^\beta \, e^{P(x)} = x^\alpha \, (\log x)^\beta \, ;$$

então o limite de g quando $x \to +\infty$ será $+\infty$ ou 0 conforme $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$ respetivamente, e qualquer que seja $\beta \in \mathbf{R}$. Se $\alpha = 0$, é claro que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ se $\beta > 0$ e $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ se $\beta < 0$.
Seja agora $P \neq 0$; sendo $P(x) = c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_n x^{\gamma_n}, \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n > 0$, existe um primeiro $c_j \neq 0$ que podemos supor, sem perda de generalidade, como sendo o coeficiente c_1; assim,

$$P(x) = c_1 x^{\gamma_1} \left(1 + b_2 x^{\gamma_2 - \gamma_1} + \cdots + b_n x^{\gamma_n - \gamma_1}\right)$$

com $b_j = \dfrac{c_j}{c_1}$, $(j = 2, \ldots, n)$. O fator dentro de parênteses converge para 1 $(x \to +\infty)$ e portanto, o limite de $g(x) = x^\alpha \, (\log x)^\beta \, e^{P(x)}$ será $+\infty$

ou 0 consoante $c_1 > 0$ ou $c_1 < 0$, respetivamente (a exponencial domina qualquer potência de x). ■

Pretendendo agora estudar o comportamento das funções na vizinhança à direita (resp. à esquerda) (*) de um ponto $x_0 \in \mathbf{R}$, introduz-se a família $\mathfrak{F}_{x_0^+}$ das funções padrão definidas em $]x_0, x_0 + \epsilon[$ e dadas por

$$g(x) = (x - x_0)^{\alpha}\, |\log(x - x_0)|^{\beta}\, e^{P\left(\frac{1}{x-x_0}\right)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

em que

$$P\left(\frac{1}{x - x_0}\right) = c_1 \left(\frac{1}{x - x_0}\right)^{\gamma_1} + \cdots + c_n \left(\frac{1}{x - x_0}\right)^{\gamma_n},$$

$$\gamma_1 > \cdots > \gamma_n > 0, \;\; c_j \in \mathbf{R}.$$

Analogamente se introduz a família $\mathfrak{F}_{x_0^-}$ das funções definidas em $]x_0 - \epsilon, x_0[$ e dadas por $g(x) = (x_0 - x)^{\alpha}\, |\log(x_0 - x)|^{\beta}\, e^{P\left(\frac{1}{x_0 - x}\right)}$.

Observações. 1. Repare-se que a família $\mathfrak{F}_{x_0^+}$ se obtém de $\mathfrak{F}_{+\infty}$ pela mudança de variável $x \to \dfrac{1}{x - x_0}$; isto é, as funções de $\mathfrak{F}_{x_0^+}$ são precisamente as funções $g\left(\dfrac{1}{x - x_0}\right)$, $g \in \mathfrak{F}_{+\infty}$, definidas em $]x_0, x_0 + \epsilon[$. Do mesmo modo, $\mathfrak{F}_{x_0^-}$ é formada pelas funções $g\left(\dfrac{1}{x_0 - x}\right)$, $g \in \mathfrak{F}_{+\infty}$, com $x \in]x_0 - \epsilon, x_0[$.
Finalmente, refira-se que a família $\mathfrak{F}_{-\infty}$, das funções padrão definidas em $V_\epsilon(-\infty)$, é obtida de $\mathfrak{F}_{+\infty}$ pela mudança de variável $x \to -x$:

$$\mathfrak{F}_{-\infty} = \{g(-x),\, x \in V_\epsilon(-\infty),\;\, g \in \mathfrak{F}_{+\infty}\}.$$

2. Os resultados da anterior proposição são naturalmente válidos para $\mathfrak{F}_{x_0^+}$ e $\mathfrak{F}_{x_0^-}$.

6.2. Relações de comparação: relações fracas e fortes.

Por comodidade de exposição, todas as noções e resultados que em seguida serão expostos referem-se a funções definidas numa vizinhança à

(*) Designamos por vizinhança à direita (respetivamente à esquerda) de um ponto $x_0 \in \mathbf{R}$, o intervalo $]x_0, x_0 + \epsilon[$, $\epsilon > 0$ (resp. $]x_0 - \epsilon, x_0[$).

direita de um ponto $x_0 \in \mathbf{R}$: $]x_0, x_0+\epsilon[$; as mesmas noções e resultados serão evidentemente válidas para funções definidas numa vizinhança à esquerda de x_0, bem como para funções definidas em $V_\epsilon(+\infty)$ ou $V_\epsilon(-\infty)$.

Sejam então f e g funções definidas em $]x_0, x_0+\epsilon[$ e admita-se que $g(x) \neq 0,\ \forall x \in]x_0, x_0+\epsilon[$.

6.2.1. Definição. *Diz-se que f **é equivalente a** g **em** x_0^+ e escreve-se $f \sim g$ em x_0^+ se*

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

A definição mostra, em particular, que $g(x)$ é uma primeira aproximação de $f(x)$ na vizinhança $]x_0, x_0+\epsilon[$. É pois natural procurar por entre as funções padrão da família $\mathfrak{F}_{x_0^+}$ aquela que, multiplicada por uma constante, seja equivalente a f em $]x_0, x_0+\epsilon[$.

6.2.2. Definição. *Seja $g \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$ e $c \neq 0$ uma constante real não nula. Se $f \sim c.g$, diz-se então que $c.g$ é a **parte principal de** f **em relação a** $\mathfrak{F}_{x_0^+}$.*

Observe-se que as funções de $\mathfrak{F}_{x_0^+}$ são a parte principal de si próprias.

6.2.3. Proposição. *Seja $f :]x_0, x_0+\epsilon[\to \mathbf{R}$ uma função definida numa vizinhança à direita de x_0. Se f admite uma parte principal $c.g$, $g \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$, então esta é única.*

Demonstração. Suponha-se com efeito que $f \sim cg$ e $f \sim c_1 g_1$ com $g, g_1 \in \mathfrak{F}_{x_0^+}, c, c_1 \neq 0$. Então, tem-se em $]x_0, x_0+\epsilon[$

$$\frac{g(x)}{g_1(x)} = \frac{g(x)}{f(x)}.\frac{f(x)}{g_1(x)}$$

e logo $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{g(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{c}.c_1 \neq 0$. Como $g/g_1 \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$, a proposição 6.1.1. implica que $g/g_1 \equiv 1$, e em consequência terá de ser $c = c_1$. ■

6.2.4. Definição. *Seja g uma função positiva numa vizinhança $]x_0, x_0+\epsilon[$. Diz-se que uma função f, definida em $]x_0, x_0+\epsilon[$, é **fracamente inferior a** g **em** x_0^+ e escreve-se $f = O(g)$ se*

$$\text{existe } K > 0 \quad \text{tal que} \quad \frac{|f(x)|}{g(x)} \leq K, \quad \text{para todo } x \in]x_0, x_0+\epsilon[.$$

Diz-se que f *é* ***fortemente inferior a*** g ***em*** x_0^+ *e escreve-se* $f = o(g)$ *se* (*)

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Observações 1. É imediato verificar que $f = o(g) \implies f = O(g)$.

2. A relação $f = O(1)$ significa que $\dfrac{|f(x)|}{1} \leq K, \ \forall x \in]x_0, x_0 + \epsilon[$, ou seja

$$f = O(1) \iff f \text{ é limitada em }]x_0, x_0 + \epsilon[.$$

Por outro lado

$$f = o(1) \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 0.$$

3. Resulta também das definições que

$$f \sim g \iff f - g = o(g).$$

Em particular, se $c.g, \ g \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$, é a parte principal de f, tem-se

$$f \sim c.g \iff f - c.g = o(g) \iff f = c.g + o(g).$$

Como adiante veremos, a relação $f = c.g + o(g)$ é o exemplo mais simples de um desenvolvimento assintótico.

6.2.5. Exemplos.

1. Notemos que *nem todas as funções* admitem parte principal relativamente a uma família $\mathfrak{F}$ de funções padrão. Assim, por exemplo, a função $f(x) = \sin x$ não admite claramente parte principal em relação a $\mathfrak{F}_{+\infty}$. Porém, a parte principal da mesma função, $f(x) = \sin x$, em relação a $\mathfrak{F}_{0^+}$ é $g(x) = x$: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Se $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, então

$$\alpha < \beta \implies x^\alpha = o\left(x^\beta\right) \quad \text{em} \quad +\infty$$
$$\alpha < \beta \implies x^\beta = o\left(x^\alpha\right) \quad \text{em} \quad 0^+.$$

3. A função $f(x) = x + \sin \pi x$ tem como parte principal x em relação a $\mathfrak{F}_{+\infty}$:

$$\frac{x + \sin \pi x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1;$$

(*) As notações $f = O(g)$ e $f = o(g)$ designam-se usualmente por *notações de Landau.*

mas a sua parte principal em relação a $\mathfrak{F}_{0^+}$ é $(1+\pi)x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sin \pi x}{(1+\pi)x} = \frac{1}{1+\pi} + \frac{\pi}{1+\pi} = 1.$$

6.3. Propriedades e cálculo das relações de comparação.

Algumas propriedades algébricas podem ser estabelecidas no quadro das relações de comparação. Estes resultados estão condensados nas proposições seguintes, cuja demonstração (consequência elementar das definições) é deixada como exercício. Recordemos de novo que os enunciados se referem a x_0^+, sendo evidentemente válidos para x_0^-, $+\infty$ ou $-\infty$.

6.3.1. Proposição. *Sejam f, g e h funções definidas em $]x_0, x_0+\epsilon[$. Então*

a) $f = O(g)$ *e* $g = O(h)$ $\Longrightarrow$ $f = O(h)$ *i.e.* $O(O(h)) = O(h)$;

b) $f = o(g)$ *e* $g = o(h)$ $\Longrightarrow$ $f = o(h)$ *i.e.* $o(o(h)) = o(h)$;

c) $f = O(g)$ *e* $g = o(h)$ $\Longrightarrow$ $f = o(h)$ *i.e.* $O(o(h)) = o(h)$.

6.3.2. Proposição (*Adição*). *Sejam f_1, f_2 e g funções definidas em $]x_0, x_0+\epsilon[$. Então*

a)

$$f_1 = O(g) \quad \text{e} \quad f_2 = O(g) \quad \Longrightarrow \begin{cases} f_1 \pm f_2 = O(g) \\ \lambda f_1 = O(g), \quad \lambda \in \mathbf{R} \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} O(g) + O(g) = O(g), \\ \lambda O(g) = O(g). \end{cases}$$

b)

$$f_1 = o(g) \quad \text{e} \quad f_2 = o(g) \quad \Longrightarrow \begin{cases} f_1 \pm f_2 = o(g) \\ \lambda f_1 = o(g), \quad \lambda \in \mathbf{R} \end{cases}$$

que podemos escrever como

$$o(g) + o(g) = o(g), \qquad \lambda o(g) = o(g).$$

Observação importante. O leitor deverá ter presente o significado das igualdades anteriores, escritas nas notações de Landau; em particular, dever-se-ão evitar "enormidades" do tipo $o(g) + o(g) = o(g) \implies o(g) = 0$; a precedente igualdade apenas significa que a soma de duas funções que são $o(g)$ é uma função $o(g)$.

6.3.3. Proposição (*Multiplicação*). *Sejam f_1, f_2, g_1 e g_2 funções definidas na vizinhança $]x_0, x_0 + \epsilon[$. Então*

a)
$$f_1 = O(g_1) \quad \text{e} \quad f_2 = O(g_2) \quad \implies \quad f_1.f_2 = O(g_1.g_2);$$

b)
$$f_1 = o(g_1) \quad \text{e} \quad f_2 = O(g_2) \quad \implies \quad f_1.f_2 = o(g_1.g_2);$$

em particular
$$f_1 = o(g_1) \quad \implies \quad f_1.g = o(g_1.g).$$

c)
$$f_1 = O(g_1) \quad \implies \quad |f_1|^\lambda = O\left(g_1^\lambda\right), \quad \forall\lambda > 0;$$
$$f_1 = o(g_1) \quad \implies \quad |f_1|^\lambda = o\left(g_1^\lambda\right), \quad \forall\lambda > 0.$$

Ou seja :
$$O(g_1).O(g_2) = O(g_1.g_2);$$
$$o(g_1).O(g_2) = o(g_1.g_2); \quad g.o(g_1) = o(g.g_1);$$
$$|O(g_1)|^\lambda = O\left(g_1^\lambda\right) \quad \text{e} \quad |o(g_1)|^\lambda = o\left(g_1^\lambda\right), \quad \forall\lambda > 0.$$

6.3.4. Proposição (*Divisão*). *Supondo f e g definidas em $]x_0, x_0 + \epsilon[$ e $f(x) \neq 0, \forall x \in]x_0, x_0 + \epsilon[$, tem-se:*

a)
$$f = O(g) \quad \iff \quad 1/g = O\left(1/|f|\right);$$
$$f = o(g) \quad \iff \quad 1/g = o\left(1/|f|\right).$$

b)
$$f = O(g) \quad \implies \quad g^\lambda = O\left(|f|^\lambda\right), \quad \forall\lambda < 0;$$
$$f = o(g) \quad \implies \quad g^\lambda = o\left(|f|^\lambda\right), \quad \forall\lambda < 0.$$

Relação de ordem na família padrão.

Sejam $f, g \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$ e considere-se a relação
$$\mathcal{R}(f, g) \iff (\, f = g \text{ ou } f = o(g)\,).$$

6.3.5. Proposição. *A relação $\mathcal{R}(f,g)$ é uma relação de ordem em $\mathfrak{F}_{x_0^+}$.*

Demonstração. 1) A relação é reflexiva: $f = f,\ \forall f \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$.

2) A relação é transitiva: consequência imediata da prop. 6.3.1.

$$f = o(g) \quad \text{e} \quad g = o(h) \quad \Longrightarrow \quad f = o(h).$$

3) Resta-nos mostrar que para dois quaisquer elementos $f, g \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$ se tem sempre $\mathcal{R}(f,g)$ ou $\mathcal{R}(g,f)$. Por simplicidade tome-se o caso $f, g \in \mathfrak{F}_{0^+}$. O elemento genérico da família é da forma

$$g(x) = x^{\alpha}\,|\log\,x|^{\beta}\,e^{P\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

em que

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = c_1\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_1} + \cdots + c_n\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_n},$$

$$\gamma_1 > \cdots > \gamma_n > 0,\ \ c_j \in \mathbf{R},\ c_1 \neq 0.$$

Escrevendo $P(x)$ como

$$P(x) = c_1\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_1}\left[1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_2-\gamma_1} + \cdots + \frac{c_n}{c_1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_n-\gamma_1}\right]$$

logo se vê que o termo dentro de parênteses retos converge para 1 quando $x \to 0^+$, e portanto podemos reduzir-nos ao caso em que

$$f(x) = x^{\alpha}\,|\log\,x|^{\beta}\,e^{c\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma}} \quad \text{e} \quad g(x) = x^{\alpha'}\,|\log\,x|^{\beta'}\,e^{c'\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma'}}.$$

As conhecidas propriedades das funções exponencial e logarítmica levam--nos a concluir:

1. Se $c = 0$ (o termo exponencial não figura em f), tem-se $f = o(g)$ se $c' > 0$ e $g = o(f)$ se $c' < 0$.

2. Sendo $c \neq 0$,

$a)$ Se $\gamma > \gamma' > 0$ então $\begin{cases} g = o(f) & \text{se} \quad c > 0 \\ f = o(g) & \text{se} \quad c < 0 \end{cases} \quad \forall \alpha, \alpha', \beta, \beta', c'.$

$b)$ Se $\gamma = \gamma'$ e $c > c'$ então $g = o(f) \quad \forall \alpha, \alpha', \beta, \beta'$.

$c)$ Se $\gamma = \gamma',\ \ c = c'$ e $\alpha > \alpha'$ então $f = o(g) \quad \forall \beta, \beta'$.

d) Se $\gamma = \gamma'$, $c = c'$, $\alpha = \alpha'$ e $\beta > \beta'$ então $g = o(f)$.

Enfim, se $c = c' = 0$ as conclusões são as mesmas que em 2. *c*) e 2. *d*). ■

6.4. Desenvolvimentos assintóticos.

Vimos anteriormente que, se $f :]x_0, x_0 + \epsilon[\to \mathbf{R}$ admite uma parte principal $c_1.g_1$, então

$$f = c_1 g_1 + o(g_1), \quad c_1 \neq 0, \quad g_1 \in \mathfrak{F}_{x_0^+}.$$

Procuremos agora (caso exista) a parte principal da função $f - c_1 g_1$; se assim for, existe uma constante $c_2 \neq 0$ e uma função $g_2 \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$ tal que

$$f - c_1 g_1 = c_2 g_2 + o(g_2).$$

Mostremos então que $g_2 = o(g_1)$. Com efeito,

$$c_2 \frac{g_2}{g_1} = \left(\frac{f}{g_1} - c_1\right) - \frac{o(g_2)}{g_1};$$

como $\dfrac{o(g_2)}{g_1} = \dfrac{o(g_2)}{g_2} . \dfrac{g_2}{g_1}$, vem

$$\frac{g_2(x)}{g_1(x)} = \left(\frac{f(x)}{g_1(x)} - c_1\right) \Big/ \left(c_2 + \frac{o(g_2)}{g_2(x)}\right).$$

Mas

$$f(x)/g_1(x) - c_1 \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{e} \quad c_2 + o(g_2)/g_2(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} c_2 \neq 0;$$

logo, $g_2(x)/g_1(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} 0$, isto é $g_2 = o(g_1)$. Mais geralmente,

6.4.1. Definição. *Diz-se que $f :]x_0, x_0 + \epsilon[\to \mathbf{R}$ admite um* ***desenvolvimento assintótico*** *(ou desenvolvimento limitado) relativamente a $\mathfrak{F}_{x_0^+}$, se existem constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ e funções $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$, tais que*

$$f = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_n g_n + o(g_n) \quad \text{e} \quad g_{i+1} = o(g_i), \ i = 1, \ldots, n-1.$$

$o(g_n)$ diz-se o ***resto do desenvolvimento****; diz-se ainda que o desenvolvimento assintótico tem a* ***precisão*** *g_n. Sendo os coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ não nulos, o desenvolvimento diz-se a n termos.*

Observação. Existindo um desenvolvimento assintótico de f com precisão g_n : $f = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_n g_n + o(g_n)$, então tem-se também o desenvolvimento assintótico de f com precisão g_k ($k \leq n$); com efeito, basta observar que se $f = c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k + c_{k+1} g_{k+1} + \cdots + c_n g_n + o(g_n)$, como $g_{i+1} = o(g_i)$, tem-se (cf. (6.3.1.), (6.3.2.))

$$c_{k+1} g_{k+1} + \cdots + c_n g_n + o(g_n) = o(g_k) + \cdots + o(g_k) = o(g_k)$$

e portanto

$$f = c_1 g_1 + \cdots + c_k g_k + o(g_k).$$

6.4.2. Proposição. *Seja $f = c_1 g_1 + \cdots + c_n g_n + o(g_n)$ um desenvolvimento assintótico de f a n termos ($c_1, \ldots, c_n \neq 0$), com precisão g_n. Então o desenvolvimento é* ***único*** *(por entre os desenvolvimentos a n termos).*

Demonstração. Recordemos que a parte principal de uma função (em relação a $\mathfrak{F}_{x_0^+}$, por ex.) quando existe é única (cf. (6.2.3.)). Mas, pela definição de desenvolvimento assintótico, resulta que $c_k g_k$ é a parte principal de $f - c_1 g_1 - \cdots - c_{k-1} g_{k-1}$, com $k = 2, \ldots, n$; a conclusão é agora imediata. ∎

6.4.3. Exemplos

1. Exemplos de desenvolvimentos assintóticos num ponto $x_0 \in \mathbf{R}$ (à direita ou à esquerda, isto é, em relação a $\mathfrak{F}_{x_0^+}$ ou $\mathfrak{F}_{x_0^-}$) são dados pela fórmula de Taylor de uma função f, n vezes diferenciável em x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Trata-se de um desenvolvimento assintótico já que $(x - x_0)^{k+1} = o((x - x_0)^k)$ quando $x \to x_0^+$ (ou $x \to x_0^-$).

O quadro seguinte, exibe os desenvolvimentos em 0 (fórmula de Mac--Laurin) de algumas funções elementares: com $n \in \mathbf{N}_0$, tem-se

a) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

b) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

c) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

d) $$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

e) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n),$$
$(\alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq 0)$.

2. Veja-se agora o desenvolvimento em $+\infty$ da função $f(x) = \log(1+x)$; observando que

$$\log(1+x) = \log\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

e dado que $1/x \to 0$ $(x \to +\infty)$, o desenvolvimento de $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ em $+\infty$ é o desenvolvimento de $\log(1+y)$ em 0, com $y = 1/x$; tendo presente a anterior alínea *d*), tem-se

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{nx^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

e logo

$$\log(1+x) = \log x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{nx^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Repare-se que $\dfrac{1}{x} = o(\log x)$ em $+\infty$, obtendo-se portanto o desenvolvimento de $\log(1+x)$ em $+\infty$ com $n+1$ termos.

A álgebra dos desenvolvimentos assintóticos.

Sejam

$$f_1 = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m + o(u_m)$$

$$f_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n + o(v_n)$$

$a_i, b_j \in \mathbf{R},\ u_i, v_j \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$, desenvolvimentos assintóticos das funções f_1 e f_2 em relação a $\mathfrak{F}_{x_0^+}$.

6.4.4. Soma de desenvolvimentos assintóticos.

Dados $u_m, v_n \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$, tem-se sempre uma (e uma só) das três possibilidades (cf. (6.3.5.)):

1. $u_m = v_n$, 2. $u_m = o(v_n)$, 3. $v_n = o(u_m)$.

No caso 1. ($u_m = v_n$), obtém-se o desenvolvimento de $f+g$ com precisão $u_m\,(=v_n)$ escrevendo

$$f+g=\sum (a_i u_i, b_j v_j)+o(u_m)$$

figurando em $\sum$ todos os termos $a_i u_i$, $b_j v_j$ colocados na ***ordem decrescente*** associada à definição de desenvolvimento assintótico (cada termo é um o do termo precedente).
No caso 2. ($u_m = o(v_n)$) tem-se o desenvolvimento de $f+g$ com precisão v_n:

$$f+g=\sum (a_i u_i, b_j v_j)+o(v_n)$$

figurando em $\sum$ todos os termos $a_i u_i$ e $b_j v_j$ exceto os termos $a_k u_k$ tais que $u_k = o(v_n)$. Com efeito, como para tais termos, $u_k = o(v_n)$ e $o(u_m)=o(o(v_n))=o(v_n)$, tem-se $\sum a_k u_k = \sum o(v_n) = o(v_n)$.
Analogamente no caso 3. ($v_n = o(u_m)$) :

$$f+g=\sum (a_i u_i, b_j v_j)+o(u_m)$$

eliminando em $\sum$ todos os $b_k v_k$ tais que $v_k = o(u_m)$.

Assim, a precisão de $f+g$ será a ***menor*** das precisões u_m ou v_n de f e g, respetivamente.

Exemplo. Tomemos os seguintes dois desenvolvimentos em 0:

$$\begin{aligned}\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\end{aligned}$$

Dado que $x^4 = o(x^3)$ em 0, obtemos para a soma $\sin x+\cos x$ o desenvolvimento com precisão x^3:

$$\sin x+\cos x = 1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

6.4.5. Produto de desenvolvimentos assintóticos.

Retomemos os anteriores desenvolvimentos de f_1e f_2 com precisões u_m e v_n, respetivamente. Dado que se verifica, necessariamente, um dos três seguintes casos,

1. $u_1 v_n = o(v_1 u_m)$
2. $v_1 u_m = o(u_1 v_n)$
3. $u_1 v_n = v_1 u_m$

assim se obtém o desenvolvimento de $f_1 f_2$ com precisão $v_1 u_m$ no caso 1., $u_1 v_m$ no caso 2. e $u_1 v_n = v_1 u_m$ no caso 3., escrevendo :
Caso 1.

$$f_1 f_2 = \sum_{\substack{ordem\\ decrescente}} a_i b_j u_i v_j + o(v_1 u_m)$$

e eliminando em $\sum$ os termos $a_k b_l u_k v_l$ tais que $u_k v_l = o(v_1 u_m)$.

Repare-se que, executando o produto dos desenvolvimentos de f_1 e f_2, para além dos termos $a_k b_l u_k v_l$, obtemos

$$u_i o(v_n) = o(u_1 v_n) = o(o(v_1 u_m)) = o(v_1 u_m) \text{ e } v_j o(u_m) = o(v_1 u_m)$$

dado que $u_i = o(u_1)$ e $v_j = o(v_1)$.

Caso2.

$$f_1 f_2 = \sum_{\substack{ordem\\ decrescente}} a_i b_j u_i v_j + o(u_1 v_n)$$

e eliminando em $\sum$ os termos $a_k b_l u_k v_l$ tais que $u_k v_l = o(u_1 v_n)$.

Do mesmo modo para o caso 3. Torna-se claro que o desenvolvimento escolhido para $f_1 f_2$ tem a ***menor*** das precisões $v_1 u_m$ ou $u_1 v_n$.

Observação. Dado o desenvolvimento $f = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + o(u_m)$ e $g \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$, como $gu_i \in \mathfrak{F}_{x_0^+}$, $gu_{i+1} = o(gu_i)$ e $g.o(u_m) = o(gu_m)$ é claro que $g.f$ admite o desenvolvimento

$$g.f = a_1 g u_1 + \cdots + a_m g u_m + o(g u_m).$$

6.4.6. Exemplos.

1. Desenvolva-se em 0^+ a função

$$f(x) = \log x \, \sin x \, e^x.$$

Escrevendo o desenvolvimento de $\sin x$ em 0^+ (com precisão x^3, por ex.) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

tem-se então

$$\log x \, \sin x = x \log x - \frac{x^3 \log x}{3!} + o(x^3 \log x), \quad \log x \in \mathfrak{F}_{0^+};$$

desenvolvendo agora e^x (com precisão x^4, por ex.) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

e dado que $x^5 \log x = o(x^3 \log x)$, obtemos o desenvolvimento de $f(x) = \log x \sin x\, e^x$ com precisão $x^3 \log x$:

$$\begin{aligned}
&\log x \sin x\, e^x = \\
&x \log x + x^2 \log x + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) x^3 \log x + o(x^3 \log x) = \\
&x \log x + x^2 \log x + \frac{x^3 \log x}{3} + o(x^3 \log x).
\end{aligned}$$

2. Suponha-se que $f :]x_0, x_0 + \epsilon[\to \mathbf{R}$ admite o desenvolvimento assintótico

$$f = a_1 g_1 + \cdots + a_r g_r + o(g_r) \quad \text{em} \quad x_0^+, \quad a_1 \neq 0;$$

e admita-se que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0$, o que implica que $g_1(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} 0$ (porquê?). É claro que f^2 admite o correspondente desenvolvimento com precisão $g_1 g_r$ e mais geralmente o desenvolvimento de f^n terá a precisão $g_1^{n-1} g_r$. Como $g_1^{n-1} g_r = o(g_r)$, resulta que a precisão de $f + f^2 + \cdots + f^n$ (a menor das precisões das parcelas) é a precisão de f, isto é, g_r.

6.4.7. Composição de desenvolvimentos assintóticos.

Seja $f :]x_0, x_0 + \epsilon[\to \mathbf{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 0$ e suponha-se que f admite o desenvolvimento assintótico

$$f = a_1 g_1 + \cdots + a_r g_r + o(g_r) \quad \text{em} \quad x_0^+, \quad a_1 \neq 0. \tag{1}$$

Seja ainda $g : V(0) \to \mathbf{R}$ uma função definida numa vizinhança de 0 e n vezes diferenciável; pode escrever-se a fórmula de Mac-Laurin

$$g(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + o(t^n)\,,$$

e tem-se então para a composição $g \circ f$ $(t = f(x))$,

$$g \circ f = c_0 + c_1 f + \cdots + c_n f^n + o(f^n). \tag{2}$$

Pelo que se disse atrás sobre a soma e produto de desenvolvimentos assintóticos, $c_0 + c_1 f + \cdots + c_n f^n$ admite um desenvolvimento em x_0^+

com a precisão do desenvolvimento de f, isto é g_r (cf. (6.4.6.),(2.)); como $o(f^n) = o(g_1^n)$, (2) dá-nos o desenvolvimento de $g \circ f$ em x_0^+ com a precisão g_1^n ou g_r conforme $g_r = o(g_1^n)$ ou $g_1^n = o(g_r)$, respetivamente.

6.4.8. Exemplo. Considere-se a função $\theta(x) = e^{\sin x/x\ -1}$, isto é,

$$\theta(x) = g(f(x)) \quad \text{com} \quad g(t) = e^t \quad \text{e} \quad t = f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1$$

e procuremos o desenvolvimento de θ em 0^+. Como $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} - 1 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, escreva-se o desenvolvimento de e^t em 0 : $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$. Dado que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad \text{em } 0^+,$$

vem

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4);$$

daqui sai

$$f^2 = \frac{x^4}{6^2} - \frac{2}{3!5!}x^6 + o(x^6)$$

e logo

$$1 + f + \frac{f^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{2.6^2}\right) x^4 + o(x^4).$$

Finalmente, como $o(f^2) = o(x^4)$ que é, no nosso caso, a precisão de f, tem-se o desenvolvimento de θ com a precisão x^4 :

$$\theta(x) = e^{\sin x/x\ -1} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{2.6^2}\right) x^4 + o(x^4).$$

Se em vez da precisão x^5 para o desenvolvimento de $\sin x$ tivessemos tomado a precisão x^3, vinha

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

e portanto

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{3!} + o(x^2) \quad \text{e} \quad f^2 = \frac{x^4}{6^2} + o(x^4)\,;$$

como $o(f^2) = o(x^4)$ e $x^4 = o(x^2)$ em 0^+, toma-se a precisão x^2 para

$$\theta = 1 + f + \frac{f^2}{2} + o(f^2) = 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2).$$

Casos Particulares.

6.4.9. Desenvolvimento assintótico de f^α, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Seja $f = a_1 g_1 + \cdots + a_r g_r + o(g_r)$ o desenvolvimento de f em x_0^+ com $a_1 > 0$. Pode então escrever-se f como

$$f = a_1 g_1 (1 + \underbrace{b_2 h_2 + \cdots + b_r h_r + o(h_r)}_{w}) = a_1 g_1 (1 + w)$$

em que $b_j = \dfrac{a_j}{a_1}$, $h_j = \dfrac{g_j}{g_1}$, $j = 2, \ldots, r$. Como $g_j = o(g_1)$, tem-se $h_j \to 0$ $(x \to x_0^+)$ e logo $w \to 0$ $(x \to x_0^+)$. Tem-se então

$$f^\alpha = a_1^\alpha g_1^\alpha (1 + w)^\alpha, \quad a_1 > 0, \ a_1^\alpha g_1^\alpha \in \mathfrak{F}_{0^+}.$$

Por outro lado, dado que $w(x) \to 0$ $(x \to x_0^+)$, obtemos o desenvolvimento de $(1+w)^\alpha$ como composição de $(1+t)^\alpha$ em $t = 0$ com $t = w(x)$. Logo, do desenvolvimento de $(1+t)^\alpha$ (cf. (6.4.3.)) tira-se que

$$(1+w)^\alpha = 1 + \alpha w + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} w^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} w^n + o(w^n)$$

com precisão $o(w^n) = o(h_2^n)$ ou $o(h_r)$ consoante $h_r = o(h_2^n)$ ou $h_2^n = o(h_r)$ (cf. (6.4.7.)).

6.4.10. Exemplos.

1. Desenvolva-se em 0 a função $\dfrac{x \log |x|}{1 + e^x}$. Tem-se

$$x \log |x| \in \mathfrak{F}_{0^+} \quad \text{e} \quad 1 + e^x = 2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Então

$$\frac{1}{1+e^x} = (1+e^x)^{-1} = \left[2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)\right]^{-1} =$$
$$\frac{1}{2}\Bigg(1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}_{w}\Bigg)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 - w + w^2 + o(w^2)\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) + o(w^2)\right].$$

Como $o(w^2) = o(x^2)$, tem-se enfim

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + o(x^2)\right)$$

e portanto

$$\frac{x \log |x|}{1+e^x} = \frac{x \log |x|}{2} - \frac{x^2 \log |x|}{4} + o(x^3 \log |x|).$$

2. Procuremos agora o desenvolvimento de $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ em $x = 0$. Sendo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \text{ e } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 + w,$$

vem então

$$\frac{1}{\cos x} = (1+w)^{-1} = 1 - w + w^2 + o(w^2) =$$
$$1 - \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{4!} + o(x^6)\right) + o(x^4) =$$
$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

e portanto

$$\tan x = \sin x . \frac{1}{\cos x} =$$
$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) =$$
$$x + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2!3!} + \frac{5}{24}\right)x^5 + o(x^5) =$$
$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

6.4.11. Desenvolvimento assintótico de e^f.

Seja $f = a_1 g_1 + \cdots + a_r g_r + o(g_r)$ o desenvolvimento de f em x_0^+ e suponha-se que $f(x) \to 0$ $(x \to x_0^+)$. Pelo que foi dito sobre a composição de desenvolvimentos assintóticos, obtemos o desenvolvimento de e^f :

$$e^f = 1 + f + \frac{f^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n}{n!} + o(f^n)$$

com precisão $o(g_1^n)$ ou $o(g_r)$.

Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq 0$ é ainda possível obter o desenvolvimento de e^f se existir algum g_i (do desenvolvimento de f) que tenda para 0 $(x \to x_0^+)$. Seja com efeito i, o mais pequeno índice tal que $g_i \to 0$ $(x \to x_0^+)$; então $f = f_1 + f_2$ com

$$f_1 = a_1 g_1 + \cdots + a_{i-1} g_{i-1}, \qquad f_2 = a_i g_i + \cdots + a_r g_r + o(g_r)$$

e tem-se $e^f = e^{f_1}.e^{f_2}$. Escrevendo o desenvolvimento de e^{f_2}, já que $f_2(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} 0$, obtemos o desenvolvimento de e^f ***se o termo***

$$e^{f_1} = e^{a_1 g_1} \ldots e^{a_{i-1} g_{i-1}} \in \mathfrak{F}_{0^+}.$$

6.4.12. Exemplos.

1. Procuremos o desenvolvimento de $h(x) = (1+x)^{1/x}$ em $+\infty$.

Escreva-se $h(x) = e^{(1/x)\log(1+x)} = e^f$ com $f(x) = \dfrac{1}{x}\log(1+x)$. Ora,

$$\log(1+x) = \log\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \log x + \log\left(1+\frac{1}{x}\right);$$

dado que $1/x \to 0$ $(x \to +\infty)$, tem-se

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{em} \quad +\infty,$$

pelo que

$$f(x) = \frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{em} \quad +\infty.$$

Como $f(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$, o desenvolvimento de e^f vem dado por

$$h(x) = e^{f(x)} = 1 + f(x) + \frac{f^2(x)}{2!} + \frac{f^3(x)}{3!} + o(f^3);$$

sendo $o(f^3) = o\left(\dfrac{(\log x)^3}{x^3}\right)$ e a precisão de f, $o(1/x^3)$, resulta que a precisão de $e^{f(x)}$ será $o\left(\dfrac{(\log x)^3}{x^3}\right)$,donde

$$h(x) = e^{f(x)} = 1 + f(x) + \frac{f^2(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{6} + o\left(\frac{(\log x)^3}{x^3}\right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{\log x}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{(\log x)^3}{x^3}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{(\log x)^2}{x^2} + o\left(\frac{(\log x)^3}{x^3}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{(\log x)^3}{x^3} + o\left(\frac{(\log x)^3}{x^3}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{\log x}{x} + \frac{(\log x)^2}{2x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{(\log x)^3}{6x^3} + o\left(\frac{(\log x)^3}{x^3}\right).$$

2. Veja-se agora o desenvolvimento assintótico de $e^{x/\sin x}$ em 0.

Dado que $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, vem então

$$\frac{1}{\sin x} = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 - \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{x^4}{3!3!} - \frac{x^6}{3.5!} + o(x^6)\right) + o(x^4)\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{3!3!} - \frac{1}{5!}\right)x^4 + o(x^4)\right).$$

e logo
$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4) = 1 + f_1,$$
tendo-se $\lim\limits_{x\to 0} f_1 = 0$. Assim,

$$e^f = e.e^{f_1} = e\left(1 + f_1 + \frac{f_1^2}{2!} + o(f_1^2)\right) =$$
$$e\left[1 + \left(\frac{x^2}{3!} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{3!3!} + o(x^4)\right) + o(x^4)\right] =$$
$$e + \frac{e}{6}x^2 + \frac{e}{30}x^4 + o(x^4).$$

3. Tomemos enfim a função $f(x) = \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ e determine-se um desenvolvimento assintótico em 0.

De novo, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ em 0, pelo que

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) = 1 + v \quad \text{com} \quad v(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

então, a composição dos desenvolvimentos de $\log(1+y)$ com $y = v(x)$

dá-nos :

$$\begin{aligned}
&\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \\
&= \log(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + o(v^2) = \\
&= \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{3!3!} + o(x^4)\right) + o(x^4) = \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).
\end{aligned}$$

6.5. Aplicações ao cálculo dos limites.

A utilização das regras de Cauchy e de L'Hospital no levantamento de indeterminações é por vezes penosa, não se conseguindo, em alguns casos, obter facilmente o limite desejado. Veremos agora como o uso dos desenvolvimentos assintóticos permite obter, com elegância, os limites indeterminados.
Para além dos desenvolvimentos de Mac-Laurin já expostos, acrescentemos ainda os das ***funções hiperbólicas*** :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

respetivamente as funções ***seno hiperbólico e cosseno hiperbólico***. São, como se sabe, funções definidas em $\mathbf{R}$ e de classe C^∞; os desenvolvimentos de Mac-Laurin são dados por

$$\begin{aligned}
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).
\end{aligned}$$

6.5.1. Exemplos

1. Determine-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x.\,\log(\cos x)} - \sqrt[4]{1+4x} + x - \frac{3}{2}x^2}{x \sin x^2}$$

A ideia é desenvolver assintóticamente (em $x = 0$) as funções elementares que figuram na expressão, levando os desenvolvimentos tão longe quanto necessário para levantar a indeterminação. Assim, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$ donde

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + o(x^{10}). \tag{1}$$

Como $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\log(\cos x) = \\
&\log\left[1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\right] = w - \frac{w^2}{2} + o(w^2) = \\
&\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{2!2!} + o(x^4)\right) + o(x^4) = \\
&-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4);
\end{aligned}$$

então, $\sin x . \log(\cos x) = -\dfrac{x^3}{2} + o(x^5) \longrightarrow 0 \ (x \to 0)$, e logo

$$\begin{aligned}
&e^{\sin x . \log(\cos x)} = \\
&e^f = 1 + f + \frac{f^2}{2!} + o(f^2) = \\
&1 + \left(-\frac{x^3}{2} + o(x^5)\right) + o(x^5) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5).
\end{aligned} \tag{2}$$

Tem-se ainda, com $\alpha = 1/4$,

$$\begin{aligned}
&(1+4x)^{1/4} = \\
&1 + \alpha(4x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(4x)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(4x)^3 + o(x^3) = \\
&1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{21}{6}x^3 + o(x^3).
\end{aligned} \tag{3}$$

Finalmente, de (1), (2) e (3) resulta que:

$$\frac{e^{\sin x . \log(\cos x)} - \sqrt[4]{1+4x} + x - \frac{3}{2}x^2}{x \sin x^2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5) - \left(1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{21}{6}x^3 + o(x^3)\right) + x - \frac{3}{2}x^2}{x^3 + o(x^6)} =$$

$$= \frac{-4x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^6)} = \frac{-4 + o(1)}{1 + o(x^3)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -4.$$

2. Determine-se agora, para que valores de $\alpha \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$ existe o limite finito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x^n} - \cos x^2}{\sqrt{1+x^8} - \cos x^4}.$$

Analisando o denominador e tendo presente os desenvolvimentos já de nós conhecidos, tem-se (cf. (6.4.3.)) :

$$\sqrt{1+x^8} = (1+x^8)^{1/2} = 1 + \frac{x^8}{2} + o(x^8) \text{ e } \cos x^4 = 1 - \frac{x^8}{2!} + o(x^8)$$

donde

$$\sqrt{1+x^8} - \cos x^4 = x^8 + o(x^8) \sim x^8.$$

Para que o limite em questão seja finito é necessário que, no desenvolvimento do numerador com precisão x^8, os termos em x^k com $k < 8$ sejam eliminados; como

$$e^{\alpha x^n} = 1 + \alpha x^n + \frac{\alpha^2 x^{2n}}{2!} + o(x^{2n}) \text{ e } \cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^8)$$

terá de ser $\alpha = -1/2$ e $n = 4$; tem-se então

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x^2}{\sqrt{1+x^8} - \cos x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1/8 - 1/24)x^8 + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)} = \frac{1}{12}.$$

3. É conveniente, na prática, reduzir o cálculo do limite de uma função em $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ ao limite em 0; para isso basta tomar a mudança de variável $x - x_0 = y$ se $x_0 \in \mathbf{R}$, ou $1/x = y$ se $x_0 = +\infty$, obtendo-se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{y\to 0} f(x_0 + y) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{y\to 0} f(1/y),$$

respetivamente. Veja-se, por exemplo, o cálculo de

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}\left(x^2 - x + 2\right) - \sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$$

Fazendo $1/x = y$, pretende-se calcular

$$\lim_{y\to 0^+} e^y \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + 2\right) - \sqrt{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2} + 1} =$$

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y\left(1 - y + 2y^2\right) - \sqrt{1 + y^2 + y^4}}{y^2}.$$

Ora, tem-se em 0^+

$$(1+y^2+y^4)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(y^2+y^4) - \frac{1}{8}(y^2+y^4)^2 + o(y^4) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + o(y^4);$$

como $e^y = 1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + o(y^2)$, tem-se então

$$e^y\left(1-y+2y^2\right) - \sqrt{1+y^2+y^4} =$$
$$= 1 + \frac{3}{2}y^2 + o(y^2) - \left(1 + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) = y^2 + o(y^2)$$

e logo

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y\left(1-y+2y^2\right) - \sqrt{1+y^2+y^4}}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^2+o(y^2)}{y^2} = 1.$$

6.6. Convergência de integrais impróprios.

Seja $f : [a,b[\to \mathbf{R}$ uma função localmente integrável. Vimos que o integral impróprio em b, $\int_a^b f(x)\,dx$, é convergente se existe e é finito, $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$, o que é ainda equivalente à convergência do integral impróprio de f na vizinhança de b, $\int_{b-\epsilon}^b f(x)\,dx$. Sabemos ainda que, se o integral impróprio é absolutamente convergente (isto é, $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge) então é convergente. Acontece que, na prática, é frequentemente simples decidir da convergência ou divergência dos integrais impróprios de funções positivas (ou negativas) na vizinhança do ponto impróprio. Ocupar-nos-emos, neste parágrafo, de apresentar ***critérios de convergência*** dos integrais impróprios de funções que não mudam de sinal na vizinhança do ponto impróprio.

O grande ***critério de comparação*** está expresso no seguinte

6.6.1. Teorema. *Sejam $f, g : [a,b[\to \mathbf{R}$, funções localmente integráveis e positivas numa vizinhança (à esquerda) de b. Suponha-se que $f = O(g)$ em b^-, isto é*

$$0 \le f(x) \le Ag(x), \quad \forall x \in [b-\epsilon, b[, \quad A > 0.$$

Então

$$1) \quad \int_a^b g(x)\,dx \quad \textit{convergente} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{convergente}$$

$$2) \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{divergente} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx \quad \textit{divergente}.$$

Demonstração. Repare-se que 1) $\Longleftrightarrow$ 2); basta portanto mostrarmos 1). É claro que

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \textit{convergente} \Longleftrightarrow \int_{b-\epsilon}^b f(t)\,dt \quad \textit{convergente}.$$

Mas, $F(x) = \displaystyle\int_{b-\epsilon}^x f(t)\,dt$ é função monótona crescente (porque f é positiva em $[b-\epsilon, b[\ )$: com efeito, se $x_1 < x_2$

$$F(x_2) = \int_{b-\epsilon}^{x_2} f(t)\,dt = \int_{b-\epsilon}^{x_1} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt}_{\geq 0} \geq F(x_1).$$

Do mesmo modo, $x \to \int_{b-\epsilon}^x g(t)\,dt$ é crescente; como $\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente, tem-se

$$F(x) = \int_{b-\epsilon}^x f(t)\,dt \leq A \int_{b-\epsilon}^x g(t)\,dt \leq A \int_{b-\epsilon}^b g(t)\,dt$$

e logo, $F(x)$ é crescente e limitada. Portanto

$$F(x) = \int_{b-\epsilon}^x f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \int_{b-\epsilon}^b f(t)\,dt < +\infty$$

ou seja, $\int_a^b f(t)\,dt$ é convergente. ∎

Como consequência do critério de comparação resultam os critérios logarítmicos, expostos nas proposições que seguem.

6.6.2. Proposição. *Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ localmente integrável e positiva numa vizinhança de $+\infty$. Então*

$$f(x) \leq \frac{K}{x^\alpha},\ \ \alpha > 1,\ K > 0 \ \textit{em}\ V(+\infty) \implies \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \ \textit{conv}.$$

$$f(x) \geq \frac{K}{x^\alpha},\ \ \alpha \leq 1,\ K > 0 \ \textit{em}\ V(+\infty) \implies \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \ \textit{div}.$$

Demonstração. O resultado sai imediatamente do critério de comparação, tendo presente que $\int^{+\infty} 1/x^\alpha dx$ é convergente se $\alpha > 1$ e divergente se $\alpha \leq 1$. ∎

Pode contudo dar-se o caso de uma função f, positiva em $V(+\infty)$, não ser comparável com x^α no quadro do critério precedente; por exemplo, em $+\infty$, a função $\dfrac{1}{x\,\log\,x}$ não é $O(1/x^\alpha)$ com $\alpha > 1$ e também não é $\geq K/x^\alpha$ com $\alpha \leq 1$. Isto conduz-nos a um critério mais refinado:

6.6.3. Proposição. *Nas condições da anterior proposição, tem-se*

$$f(x) \leq \frac{K}{x\,(\log\,x)^\alpha},\ \ \alpha > 1,\ \ \textit{em}\ V(+\infty)\ \Longrightarrow\ \int_a^{+\infty} f(t)\,dt\ \textit{conv.}$$

$$f(x) \geq \frac{K}{x\,(\log\,x)^\alpha},\ \ \alpha \leq 1,\ \ \textit{em}\ V(+\infty)\ \Longrightarrow\ \int_a^{+\infty} f(t)\,dt\ \textit{div.}$$

Demonstração. A primitiva de $1/x\,(\log\,x)^\alpha$ vem dada por

$$\frac{1}{-\alpha+1}\,(\log\,x)^{-\alpha+1}\ \ \text{se}\ \alpha \neq 1 \quad \text{e} \quad \log\,(\log\,x)\ \text{se}\ \alpha = 1.$$

Então

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\log\,x)^\alpha} = \left[\frac{1}{-\alpha+1}\,(\log\,x)^{-\alpha+1}\right]_a^{+\infty}, \quad \text{conv.,} \quad \text{se}\ \alpha > 1.$$

Se $\alpha \leq 1$, como $\dfrac{1}{x\,(\log\,x)^\alpha} \geq \dfrac{1}{x\,\log\,x}$, o integral é divergente, dado que

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\,\log\,x} = [\log\,(\log\,x)]_a^{+\infty} \quad \text{diverge.}\ \blacksquare$$

Analogamente se obtêm os correspondentes critérios para o ponto impróprio $a = 0$:

6.6.4. Proposição. *Seja* $f :]0, b] \to \mathbf{R}$ *localmente integrável e positiva numa vizinhança de* 0. *Então*

$$f(x) \leq \frac{K}{x^\alpha},\ \ \alpha < 1,\ \ K > 0, \quad \textit{em}\ V(0) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^b f(t)\,dt \quad \textit{conv.}$$

$$f(x) \geq \frac{K}{x^\alpha},\ \ \alpha \geq 1,\ \ K > 0, \quad \textit{em}\ V(0) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^b f(t)\,dt \quad \textit{div.}$$

6.6.5. Proposição. *Nas hipóteses precedentes, tem-se*

$$f(x) \leq \frac{K}{x\,|\log x|^{\alpha}}, \quad \alpha > 1, \quad \textit{em } V(0) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^b f(t)\,dt \quad \textit{conv.}$$

$$f(x) \geq \frac{K}{x\,|\log x|^{\alpha}}, \quad \alpha \leq 1, \quad \textit{em } V(0) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^b f(t)\,dt \quad \textit{div.}$$

Finalmente, observemos que se $f :]a,b] \to \mathbf{R}$ é localmente integrável e tem um ponto impróprio em a, o integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, reduz-se ao integral $\displaystyle\int_0^{b-a} f(y+a)\,dy$, impróprio em 0, pela mudança de variável $x - a = y$.
Do mesmo modo, para $f : [a,b[\to \mathbf{R}$, o integral impróprio em b reduz-se ao integral $\displaystyle\int_{b-a}^{0} f(b-y).(-1)\,dy = \int_0^{b-a} f(b-y)\,dy$, impróprio em 0, pela mudança de variável $b - x = y$.

Do ponto de vista prático, a análise da convergência ou divergência dos integrais impróprios pode seguir a seguinte ***metodologia***: seja dada $f : [a,+\infty[\to \mathbf{R}$, localmente integrável e positiva.
Procura-se a parte principal de f : $f \sim c.g$ $(c \neq 0)$,

$$g \in \mathfrak{F}_{+\infty}, \quad g(x) = x^{\alpha}\,(\log x)^{\beta}\,e^{P(x)},$$

com $P(x) = c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_n x^{\gamma_n}, \quad \gamma_1 > \cdots > \gamma_n > 0, \quad \alpha, \beta, c_j \in \mathbf{R}$. Dado que $f = cg + o(g)$, é claro que (*exercício*)

$$\int_M^{+\infty} f \text{ convergente} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_M^{+\infty} g \text{ convergente.}$$

Agora tem-se:

6.6.6. Proposição.

a) *Se* $c_1 \neq 0$, *então*

$$\int_M^{+\infty} g \begin{cases} \textit{convergente} & \textit{se} \quad c_1 < 0 \\ \textit{divergente} & \textit{se} \quad c_1 > 0 \end{cases} \qquad \forall \alpha, \beta.$$

b) Se $P(x) = 0$, *então*

$$\int_M^{+\infty} g \begin{cases} \textit{convergente} & \textit{se} \quad \alpha < -1 \\ \\ \textit{divergente} & \textit{se} \quad \alpha > -1 \end{cases} \qquad \forall \beta.$$

c) Se $P(x) = 0$ *e* $\alpha = -1$,

$$\int_M^{+\infty} g \begin{cases} \textit{convergente} & \textit{se} \quad \beta < -1 \\ \\ \textit{divergente} & \textit{se} \quad \beta \geq -1. \end{cases}$$

Demonstração. Trata-se de uma consequência das propriedades das funções logarítmica e exponencial e dos anteriores critérios de comparação. Veja-se a título de exemplo o caso $c_1 < 0$. Escrevendo

$$P(x) = c_1 x^{\gamma_1} \left(1 + b_2 x^{\gamma_2 - \gamma_1} + \cdots + b_n x^{\gamma_n - \gamma_1}\right)$$

com $b_j = \dfrac{c_j}{c_1}$, $(j = 2, \ldots, n)$, é claro que o fator dentro de parênteses converge para 1 $(x \to +\infty)$ e portanto, para $c_1 < c_1' < 0$ vem

$$g(x) < x^\alpha \left(\log x\right)^\beta e^{c_1' x^{\gamma_1}}, \quad x \in V(+\infty).$$

É agora imediato ver que

$$x^\alpha \left(\log x\right)^\beta e^{c_1' x^{\gamma_1}} = o(1/x^2)$$

o que implica, em particular, $g = O(1/x^2)$, mostrando-se assim que $\displaystyle\int_M^{+\infty} g$ é convergente (cf. Proposição. 6.6.2.). ■

No caso de $f :]0, b] \to \mathbf{R}$ ter um ponto impróprio em 0, procura-se a parte principal de f : $f \sim c.g$ $(c \neq 0)$,

$$g \in \mathfrak{F}_0, \quad g(x) = x^\alpha \left|\log x\right|^\beta e^{P(1/x)},$$

com

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = c_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_1} + \cdots + c_n \left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma_n}, \quad \gamma_1 > \cdots > \gamma_n > 0,$$

e $\alpha, \beta, c_j \in \mathbf{R}$. Analogamente ao caso $+\infty$, tem-se agora

6.6.7. Proposição.

a) *Se* $c_1 \neq 0$, *então*

$$\int_0^{\varepsilon} g \begin{cases} \textit{convergente} & \textit{se} \quad c_1 < 0 \\ \\ \textit{divergente} & \textit{se} \quad c_1 > 0 \end{cases} \qquad \forall \alpha, \beta.$$

b) *Se* $P(x) = 0$, *então*

$$\int_0^{\varepsilon} g \begin{cases} \textit{convergente} & \textit{se} \quad \alpha > -1 \\ \\ \textit{divergente} & \textit{se} \quad \alpha < -1 \end{cases} \qquad \forall \beta.$$

c) *Se* $P(x) = 0$ *e* $\alpha = -1$,

$$\int_0^{\varepsilon} g \begin{cases} \textit{convergente} & \textit{se} \quad \beta < -1 \\ \\ \textit{divergente} & \textit{se} \quad \beta \geq -1. \end{cases}$$

Não sendo possível determinar a parte principal de f deverão então usar-se os critérios contidos nas proposições de 6.6.1. a 6.6.5..

6.6.8. Exemplos.

1. Analisemos a natureza (convergência ou divergência) do integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}\, dx.$$

Trata-se de um integral impróprio em $+\infty$ e 0 e portanto a análise da sua natureza passa desde logo pela decomposição

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^{M} + \int_M^{+\infty}.$$

Em 0, $e^x - 1 = x + o(x)$; portanto

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = \frac{\sqrt{x}}{x + o(x)} = x^{-1/2} \frac{1}{1 + o(1)} \sim x^{-1/2}$$

e logo $\displaystyle\int_0^{M} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}\, dx$ é convergente. Em $+\infty$,

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} \sim \frac{\sqrt{x}}{e^x} = x^{1/2} e^{-x}$$

e $\displaystyle\int^{+\infty} x^{1/2}e^{-x}\,dx$ é convergente; assim,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}\,dx \quad \text{é convergente.}$$

2. Veja-se agora o integral

$$\int_0^{+\infty} \sin^2\frac{1}{x}\,dx.$$

O integral é impróprio apenas em $+\infty$, já que a função integranda admite uma única descontinuidade em $x = 0$ e além disso $|\sin^2(1/x)| \leq 1$; portanto $\int_0^M \sin^2(1/x)\,dx$ converge (integral definido).

Em $+\infty$,

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow \sin^2\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Logo $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2\frac{1}{x}\,dx$ é convergente.

3. Finalmente, vejamos o integral

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx,$$

impróprio em 0 e π. Em 0 tem-se $\sin x = x + o(x)$ e portanto

$$(\sin x)^{-1/2} = x^{-1/2}\,(1 + o(1))^{-1/2} = x^{-1/2}(1 + o(1)) \sim x^{-1/2}.$$

Logo, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ converge (cf. (6.6.7.)).

Em π, fazendo a mudança de variável $\pi - x = y$, vem

$$\begin{aligned}\int_1^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} &= \int_{\pi-1}^{0} \frac{-1}{\sqrt{\sin(\pi - y)}}\,dy = \\ &= \int_0^{\pi-1} \frac{dy}{\sqrt{\sin(\pi - y)}} = \int_0^{\pi-1} \frac{dy}{\sqrt{\sin y}}\end{aligned}$$

o qual, como vimos, é convergente.

6.7. Convergência de séries de termos positivos.

O conhecimento dos integrais impróprios vai permitir-nos, em particular, estabelecer um importante critério de convergência para as séries de termos positivos. Recordemos que a noção de ***série de termos positivos*** designa uma série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, em que $u_n \geq 0$ a partir de certa ordem, $n \geq p$. Tenha-se ainda presente o ***critério de comparação*** para esta classe de séries (cf. (2.2.11.)):

6.7.1. Proposição. *Se $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são séries de termos positivos e $u_n \leq v_n$ $(n \geq p)$, então*

$$\sum v_n \quad \textit{convergente} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \quad \textit{convergente}$$

$$\sum u_n \quad \textit{divergente} \quad \Longrightarrow \quad \sum v_n \quad \textit{divergente.}$$

Daqui resulta facilmente a seguinte regra para as séries de termos positivos:

Sendo $c.g(n)$, $c \neq 0$, $g \in \mathfrak{F}_{+\infty}$, a parte principal de $n \to u_n$ em $+\infty$,

$$\sum u_n \ \textit{converge} \quad \textit{se e só se} \quad \sum g(n) \ \textit{converge.}$$

Com efeito, se $u_n \sim c.g(n)$ em $+\infty$, tem-se $\dfrac{u_n}{g(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c > 0$ e portanto, a partir de certa ordem,

$$\frac{1}{2}c \leq \frac{u_n}{g(n)} \leq \frac{3}{2}c \quad \text{ou seja} \quad \frac{1}{2}c.g(n) \leq u_n \leq \frac{3}{2}c.g(n),$$

e o critério de comparação dá-nos o resultado.

Consequência ainda do critério de comparação é o seguinte critério, bastante útil na prática e usualmente designado por *critério da raiz* :

6.7.2. Proposição (*Critério da raiz*). *Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos. Então*

a) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n$ *convergente*

b) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n$ *divergente.*

Demonstração. Seja $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a < 1$; tomando $a < q < 1$, resulta da definição de limite superior que, a partir de certa ordem, $n > p$, se tem $\sqrt[n]{u_n} < q$ e logo $u_n < q^n$. Como $\sum q^n$ é convergente (série geométrica de razão q, $0 < q < 1$), o critério de comparação implica que $\sum u_n$ é convergente.
Sendo agora $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a > 1$, de novo a caracterização de limite superior garante a existência de uma subsucessão $\sqrt[\alpha_n]{u_{\alpha_n}} \to a > 1$, e logo existem infinitos $u_{\alpha_n} > 1$; isto mostra que o termo geral da série, u_n, não tende para 0 e portanto $\sum u_n$ diverge. ■

Observação. O raciocínio utilizado na anterior proposição permite concluir mais geralmente que, se para alguma subsucessão

$$\sqrt[\alpha_n]{u_{\alpha_n}} \geq 1, \qquad \text{então} \qquad \sum u_n \quad \text{diverge.}$$

6.7.3. Teorema (*Critério do integral*). *Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$ uma função positiva, decrescente e tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Escreva-se*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k), \quad T_n = \int_1^n f(x)\,dx, \quad D_n = S_n - T_n.$$

Então

a) $\lim D_n = D$ *existe e é finito.*

b) A série $\sum f(n)$ *converge se e só se* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *é convergente.*

c) Tem-se o seguinte desenvolvimento

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + D + O(f(n)). \tag{1}$$

Demonstração. Comecemos por mostrar que D_n é uma sucessão decrescente e limitada. Com efeito

$$\begin{gathered} D_{n+1} - D_n = S_{n+1} - S_n - (T_{n+1} - T_n) = \\ f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n+1) - \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(k)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(k) = S_n \end{aligned}$$

e logo $D_{n+1} = S_{n+1} - T_{n+1} \geq S_{n+1} - S_n = f(n+1)$, donde

$$0 < f(n+1) \leq D_{n+1} \leq D_n \leq D_1 = f(1).$$

Isto mostra *a*), e *b*) é consequência imediata. Retomando (2), vem agora

$$0 \leq D_n - D_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(n)\, dx - f(n+1) = f(n) - f(n+1)$$

e logo

$$D_n - D_{n+p} \leq f(n) - f(n+p);$$

passando ao limite, $p \to \infty$, vem finalmente

$$0 \leq D_n - D \leq f(n), \quad n = 1, 2, \ldots \quad \blacksquare$$

Corolário. *A série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *é convergente se* $\alpha > 1$ *e divergente se* $\alpha \leq 1$.

Observação. Dado que $f(n) \to 0$ e supondo a série convergente (e portanto $\int_1^{+\infty} f$ convergente), tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^{\infty} f(x)\, dx + D$$

e logo

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = \int_n^{\infty} f(x)\, dx + O(f(n)). \tag{3}$$

6.7.4. Exemplo. Tomemos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$. A fórmula (1) dá-nos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + D + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1'}$$

Veja-se agora como é possível melhorar (neste caso) a anterior expressão e obter um desenvolvimento assintótico com precisão $o(1/n)$. Com efeito, escreva-se

$$w_n = \frac{1}{n} - (\log n - \log(n-1)),\ n \geq 2, \quad w_1 = 1.$$

Então

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

e em particular $\sum_{k=1}^{\infty} w_n = D$ (cf. (1′)). Logo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} w_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k = D - \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k. \qquad (4)$$

Mas, desenvolvendo w_n, obtemos

$$w_n = \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2};$$

usando (3) e o exercício 5., vem

$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \int_n^{\infty} \frac{1}{2x^2}\, dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n}.$$

Logo, resulta de (4)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + D + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

que não é mais do que o desenvolvimento assintótico de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ em $+\infty$. A constante D designa-se por constante de Euler:

$$D = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = 0.577215\ldots.$$

A terminar apresentamos um critério que faz intervir o comportamento da razão $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ e que é usado com sucesso em certo tipo de séries de termos positivos.

6.7.5. Proposição (*Critério de Raabe*). *Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos. Então,*

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$ *com* $\alpha > 1$, $(n \geq p)$ $\implies \sum u_n$ *convergente.*

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$ $(n \geq p)$ $\implies \sum u_n$ *divergente.*

Demonstração. Para $\alpha > 1$, multiplicando membro a membro as desigualdades $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le 1 - \dfrac{\alpha}{n}$ para $n \ge p$, obtemos

$$u_{n+1} \le u_p \left[\prod_{k=p}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \right] = v_n.$$

Como

$$\log\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) = -\frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \le -\frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha^2}{4k^2}, \quad \text{para } k \text{ grande,}$$

resulta que (cf. (6.7.4.))

$$\log v_n = -\alpha \, \log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (C \, \text{constante}).$$

Daqui sai, $v_n \sim e^C \, \dfrac{1}{n^\alpha}$, donde $\sum v_n$, e portanto $\sum u_n$, é convergente.

Se $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$ $(n \ge p)$, a multiplicação membro a membro das precedentes desigualdades, dá-nos $u_{n+1} \ge K/n$, $(n \ge p)$, e logo $\sum u_n$ diverge. ∎

Corolário 1 (*Raabe*). *Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos, tal que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Então $\sum u_n$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha < 1$.

Demonstração. Se $\alpha > 1$, tomemos $\alpha > \tilde{\alpha} > 1$; então

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{n} - \left(\frac{\alpha - \tilde{\alpha}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) < 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{n}$$

a partir de certa ordem $n \ge p$, e o teorema aplica-se. Sendo $\alpha < 1$, tem-se agora

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1 - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \ge 1 - \frac{1}{n}$$

a partir de certa ordem, e de novo o teorema dá-nos a conclusão. ∎

Corolário 2. *Seja* $\sum u_n$ *uma série de termos positivos e tal que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Então se $\alpha > 0$, *a série alternada* $\sum (-1)^n u_n$ *é convergente.*

Demonstração. Bastará mostrar que u_n tende para zero e é decrescente. De (5) resulta logo que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

para $n \geq p$ e portanto a partir de certa ordem, u_n é decrescente. Por outro lado, fazendo $\alpha > \tilde{\alpha} > 0$, sai ainda de (5)

$$\begin{aligned}\log u_{k+1} - \log u_k &= \log\left(1 - \frac{\alpha}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\\ &= -\frac{\alpha}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\frac{\tilde{\alpha}}{k}, \quad k \geq p, \qquad \text{(porquê?)}\end{aligned}$$

Somando de $k = p$ a n, obtemos à esquerda $\log u_{n+1} - \log u_p$ e à direita $-\tilde{\alpha}\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{k}$, que diverge para $-\infty$, dado que $\tilde{\alpha} > 0$. Logo, $\lim \log u_n = -\infty$ e portanto $u_n \to 0$, como se queria. ∎

Corolário 3 (*Critério de d'Alembert* (*)). *Seja* $\sum u_n$ *uma série de termos positivos. Então*

a) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ *convergente.*

b) $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Longrightarrow u_n$ *não converge para* $0 \Longrightarrow \sum u_n$ *div.*

Observação. A parte *b*) do corolário precedente pode ser refinada; assim, *se a partir de certa ordem,* $n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ *então* $\sum u_n$ *diverge.*

Com efeito

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,\ n \geq p, \quad \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_p} \geq 1 \Longrightarrow u_{n+1} \geq u_p$$

o que mostra que u_n não converge para 0, e portanto $\sum u_n$ diverge.

(*) Este critério é também usualmente designado por *critério da razão.*

6.7.6. Exemplos.

1. Consideremos a série de termos positivos

$$\sum \log\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Procurando a parte principal do termo geral da série, obtemos

$$\log\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \log\left(\frac{(n-1)+2}{n-1}\right) = \log\left(1+\frac{2}{n-1}\right) =$$
$$= \frac{2}{n-1} + o\left(\frac{1}{n-1}\right).$$

Então

$$\log\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$$

e logo $\sum \log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ é divergente.

2. Tomemos a série $\sum_{n\geq 1} \frac{k^n n!}{n^n}$, $k \in \mathbf{R}$. Considerando a série dos módulos

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|k|^n n!}{n^n} = \sum_{n\geq 1} |u_n|$$

e dado que não é simples obter a parte principal de $|u_n|$, apliquemos o critério de d'Alembert:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|k|^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} . \frac{n^n}{|k|^n n!} = \frac{|k|}{(1+1/n)^n} \longrightarrow \frac{|k|}{e}.$$

Então, se $|k| > e$ a série diverge (note-se que $|u_n|$ não converge para zero sse u_n não converge para zero). Se $|k| < e$, a série é absolutamente convergente e logo convergente. Resta ver os casos $k = \pm e$. Em qualquer dos casos, tem-se

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{e}{(1+1/n)^n} \geq 1$$

(recordemos que $(1+1/n)^n$ é crescente para e) pelo que $|u_n|$ e portanto u_n não converge para zero; em conclusão *a série é absolutamente convergente se $|k| < e$ e divergente se $|k| \geq e$.*

3. Consideremos a série

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots,\qquad \alpha,x\in\mathbf{R}$$

com $\displaystyle\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Esta série é usualmente designada por *série do binómio*; mais tarde teremos ocasião de a analisar. Por agora interessa-nos saber o que se passa para $x=\pm1$, ou seja, qual a natureza das séries

$$A)\quad \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n},\qquad B)\quad \sum_{n\geq 0}(-1)^n\binom{\alpha}{n}.$$

É claro que para $n>\alpha+1$, o termo $\displaystyle\binom{\alpha}{n}$ é alternadamente positivo e negativo e portanto, a série $A)$ tem a natureza da série alternada, $\sum(-1)^n u_n$, e a série $B)$ é da mesma natureza da série de termos positivos $\sum u_n$, com $u_n=\left|\binom{\alpha}{n}\right|$. Como

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1-\frac{1+\alpha}{n+1}=1-\frac{1+\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

resulta que a série $B)$ é convergente se $1+\alpha>1$, (cf. (6.7.5.), Cor.1.) e a série $A)$, alternada, converge se $1+\alpha>0$ (cf. (6.7.5.), Cor.2.).

Exercícios

1. Mostre as seguintes propriedades algébricas das relações de comparação:

a) $f = O(g)$ e $g = O(h)$ $\implies$ $f = O(h)$ em x_0^+;

b) $f = o(g)$ e $g = O(h)$ $\implies$ $f = o(h)$ em x_0^+;

c) $o(f) + o(f) = o(f)$ em x_0^+.

d) $o(f_1).O(f_2) = o(f_1.f_2)$ em x_0^+.

2. Seja $g > 0$ em $[x_0, x_0 + \varepsilon[$.

a) Mostre, com um exemplo, que em x_0^+,

$$f = O(g) \quad \text{não implica} \quad e^f = O(e^g)$$

Do mesmo modo, $f \sim g$ não implica $e^f \sim e^g$.

b) Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$, mostre que

$$f = o(g) \quad \implies \quad e^f = o\left(e^{\delta g}\right), \ \forall \delta > 0.$$

Dê um contra-exemplo em que a implicação não se verifica, no caso em que g é limitada em $[x_0, x_0 + \varepsilon[$.

b) Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$, mostre que

$$f \sim c.g, \ \ c \neq 0, \quad \implies \quad \log|f| \sim \log g.$$

Mostre que $f = o(g)$ não implica $\log|f| = o(\log g)$.

3. Sejam f e g funções localmente integráveis em $[x_0, x_0 + \epsilon[$, com $x_0 \in \mathbf{R}$, e suponha-se que $g(x) > 0$ em $[x_0, x_0 + \epsilon[$. Mostre que

$$f = o(g) \quad \text{em } x_0^+ \quad \implies \quad \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = o\left(\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt\right).$$

Utilize este resultado para obter um desenvolvimento a três termos das funções $\arcsin x, \arccos x$ e $\arctan x$ em 0.

Sug: Obtenha um desenvolvimento da derivada de cada uma das funções.

4. Sejam f e g funções localmente somáveis em $[a, +\infty[$ e suponha-se $g > 0$ neste intervalo.

a) Se $\int_a^{+\infty} f = +\infty$, então em $V(+\infty)$ tem-se

$$i)\quad f = o(g) \implies \int_a^x f = o\left(\int_a^x g\right),$$

$$ii)\quad f \sim g \implies \int_a^x f \sim \int_a^x g.$$

b) Sendo $\int_a^{+\infty} f$ convergente, então em $V(+\infty)$ tem-se

$$i)\quad f = o(g) \implies \int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right),$$

$$ii)\quad f \sim g \implies \int_x^{+\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g.$$

5. Correspondente resultado para as séries. Sejam u_n e v_n os termos gerais de duas séries e $v_n > 0$.

a) Se $\sum v_n$ diverge, então

$$i)\quad u_n = o(v_n) \implies \sum_{k=1}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right);$$

$$ii)\quad u_n \sim v_n \implies \sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

b) Se $\sum v_n$ converge, então

$$i)\quad u_n = o(v_n) \implies \sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right);$$

$$ii)\quad u_n \sim v_n \implies \sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k.$$

6. Obtenha um desenvolvimento a três termos das seguintes funções, nos pontos considerados:

a) $\sqrt{x}$ em $x_0 = 1$; *b*) $\sin(x+1).\sin(x+2)$ em $x_0 = -1$;

c) $\log \sqrt[3]{7x-2}$ em $x_0 = 1$; *d*) $\tan(\sinh 3x)$ em $x_0 = 0$.

7. Obtenha um desenvolvimento assintótico a três termos da função

$$f(x) = x^{x^{1/x}}, \quad \text{em } +\infty.$$

8. Obtenha o desenvolvimento assintótico de Mac-Laurin com precisão $o(x^3)$ das seguintes funções:

a) $\sqrt{1+2x-x^2}-\sqrt{1-3x+x^3}$; *b)* $\sqrt[3]{1-3x\cos 2x}$;

c) $\arctan(\sin x)$; *d)* $\dfrac{x}{e^x-1}$.

9. Determine os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\tan x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$. (*sol:* 2)

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arctan x}-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x^2}{2}}{\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-2x}$. (*sol:* $-7/4$)

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{3-x}+\log(x/2)\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}$. (*sol:* $e^{-1/4}$)

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)+\dfrac{1}{2}\sinh x^2-x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}$. (*sol:* $4/3$)

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\log x\right)^{\frac{1}{\cos^2 x\,\sin^2(1-x)}}$. (*sol:* $e^{\frac{1}{8\cos^2 1}}$)

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)$. (*sol:* $2/5$)

g) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x\right]^{\tan x}$. (*sol:* 1)

10. Estude a convergência dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx$; *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{10}e^{-x/100}dx$;

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$; *d)* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\log x}{1+x^2}dx$.

11. Para que valores de s e t é convergente o integral

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{1+x^t}\,dx?$$

12. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

a) $\displaystyle\int_a^A \frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(A-x)}} \quad (0 < a < A);$

b) $\displaystyle\int_a^A \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (0 < a < A)\ ;$

c) $\displaystyle\int_a^A \frac{dx}{(x^n-a^n)^{(n-1)/n}} \quad (n > 1,\ 0 < a < A).$

13. Mostre, integrando por partes, que o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,\sin t}{1+t^2}dt$$

é convergente.

(Constate que se trata de um integral de Dirichlet convergente).

14. Estude a natureza do integral

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx.$$

15. Prove que, se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são duas séries convergentes de termos positivos, então $\sum \sqrt{a_n b_n}$ é convergente.

16. Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos convergente. Mostre que

a) $\sum a_n^k$ é convergente, $\forall k \in \mathbf{N}$;

b) $\displaystyle\sum \frac{n+1}{n} a_n$ é convergente.

17. Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos convergente. Mostre que

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^p} \quad \text{converge se } p > 1/2.$$

Dê um contra-exemplo para $p = 1/2$.

18. Estude a natureza das seguintes séries:

$$a)\ \sum \frac{1}{3n\sqrt{n}}\ ;\quad b)\ \sum \frac{2+\sqrt{n}}{2n^2+n}\ ;\quad c)\ \sum (-1)^n \frac{3n+1}{n(n+1)}\ ;$$

$$d)\ \sum \frac{2+n^2}{2^n}\ ;\quad e)\ \sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\ ;\quad f)\ \sum \left(\frac{3n+4}{3n^2}\right)^n\ ;$$

$$g)\ \sum \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2+1}\ ;\quad h)\ \sum \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right]^n.$$

19. Mostre que as séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n+1)-\log n}{(\log n)^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

são convergentes.

20. Diga para que valores de $a, b \in \mathbf{R}$, a série

$$\sum_{n\geq 1} \log n + a\ \log(n+1) + b\ \log(n+2)$$

é convergente.

21. Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Mostre que, se o conjunto dos termos da sucessão $\sqrt[n]{a_n}$ tiver um ponto de acumulação maior do que 1, a série $\sum a_n$ diverge.

22. Estude a natureza das seguintes séries:

$$a)\ \sum \frac{1\,.\,3\,.\,\cdots\,.\,(2n+1)}{4\,.\,8\,.\,\cdots\,.\,(4n+4)}\ ;$$

$$b)\ \sum \left(\frac{3}{3+\sin(n\pi/2)}\right)^n;$$

$$c)\ \sum a_n \quad \text{com} \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^n} & \text{se } n \text{ par} \\[2ex] \dfrac{n^{2n}}{(1-3n)^{2n}} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

23. Sejam $p, q \in \mathbf{N},\ p > q$ e consideremos

$$x_n = \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

a) Use o teorema 6.7.3. para mostrar que $\lim x_n = \log(p/q)$.

b) Fazendo $q=1$ e $p=2$, mostre (por indução) que $S_{2n} = x_n$. Conclua que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

24. Utilize o teorema 6.7.3. para mostrar

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ \log k} = \log\ \log n + A + O\left(\frac{1}{n\ \log n}\right).$$

Melhore o anterior resultado e obtenha um desenvolvimento com precisão $o\,(1/(n\ \log n))$.

25. No espírito do precedente exercício, mostre agora que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s}-1}{1-s} + \zeta(s) + \frac{1}{2n^s} + o\left(\frac{1}{n^s}\right), \qquad s \in \mathbf{R} \setminus \{1\}.$$

A aplicação

$$s > 1 \longrightarrow \zeta(s) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} - \frac{n^{1-s}-1}{1-s} \right)$$

diz-se a função *zeta* de Riemann.

26. Diga para que valores reais de x a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n}$$

é convergente.

27. Demonstre que o produto de Cauchy da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ por si própria, é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Mostre que esta é uma série convergente.

28. Mostre o seguinte critério de Raabe generalizado:

Se $\sum u_n$ é uma série de termos positivos, então

a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{\alpha}{n \log n}, \quad \alpha > 1, \ (n \geq p) \implies \sum u_n$ conv.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n \log n} \ (n \geq p) \implies \sum u_n$ div.

Sug. Utilize a demonstração do critério de Raabe e o exerc. **24.**

29.

a) Seja $\sum u_n$ uma série de termos positivos tal que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^m + pn^{m-1} + \cdots}{n^m + qn^{m-1} + \cdots} \qquad (m \geq 1)$$

Use os critérios de Raabe para mostrar que $\sum u_n$ converge se e só se $q - p > 1$.

b) Aplique o resultado à análise completa da natureza das séries

A) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n}$,

B) $1 + \dfrac{\alpha}{1}\dfrac{\beta}{\gamma} + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\dfrac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \cdots \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$

(série hipergeométrica)

7

Sucessões e Séries de Funções

7.1. Convergência pontual e uniforme.

Consideremos uma sucessão de funções, (f_n), $f_n : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$.

7.1.1. Definição. *Diz-se que a sucessão de funções* (f_n) *converge em* $x \in D$*, se a sucessão numérica* $(f_n(x))$ *é convergente. Diz-se que a sucessão de funções* (f_n) ***converge pontualmente em*** D*, se* $(f_n(x))$ *converge para todo* $x \in D$*; neste caso, a função* $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$*, diz-se a* ***função limite*** *e escreve-se* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

7.1.2. Exemplos.

1. Considere-se a sucessão de funções

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \;\; f_n(x) = \frac{x}{n}.$$

É claro que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \equiv 0$ pontualmente em $\mathbf{R}$.

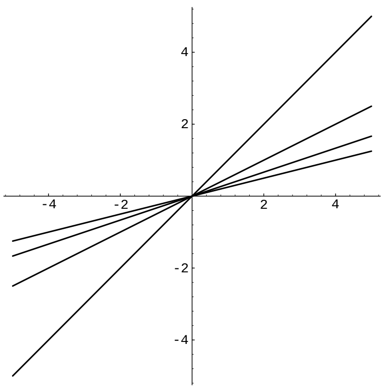


Figura 7.1

2.

Tomemos agora a sucessão

$f_n : [0,1] \to \mathbf{R}, \ \ f_n(x) = x^n.$

Neste caso, o limite pontual é a função :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

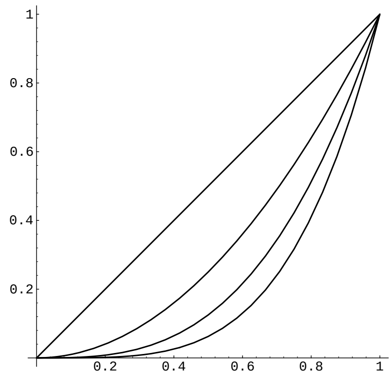


Figura 7.2

Repare-se que, embora as funções f_n sejam contínuas em $[0,1]$, a função limite, f, é descontínua em $x = 1$. Adiante, analisaremos mais em profundidade este ponto.

3. Para a sucessão de funções, $f_n(x) = 2nx\,(1-x)^n, \ \ x \in [0,1]$,

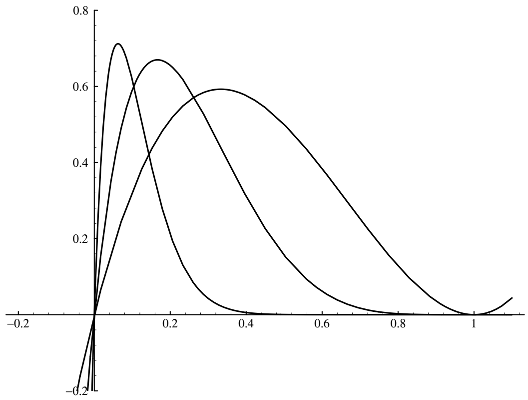


Figura 7.3

sem dificuldade se vê que a função limite é a função nula, $f \equiv 0$; notemos que o máximo de cada uma das funções f_n é tomado em $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ e o seu valor,

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{2}{e}.$$

7.1.3. Definição. *Dada uma sucessão de funções* $u_n : D \to \mathbf{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$, *chama-se **série de funções** de termo geral* u_n *ao par* $((u_n),(S_n))$, *em que*

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n$$

representa a sucessão de funções das somas parciais. Tal como para as séries numéricas, a série de funções é representada por $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *ou simplesmente* $\sum u_n$.

Diz-se que a série de funções, $\sum u_n$, *converge no ponto* $x \in D$ *se a série numérica* $\sum u_n(x)$ *for convergente; senão, diz-se divergente. Diz-se que a série de funções,* $\sum u_n$, *converge pontualmente em* D *se* $\sum u_n(x)$ *for convergente* $\forall x \in D$*; neste caso, fica definida a função soma*

$$u : D \longrightarrow \mathbf{R}, \quad u(x) = \sum u_n(x),\ x \in D.$$

Enfim, diz-se que $\sum u_n$ *converge absolutamente em* D *se* $\sum u_n(x)$ *convergir absolutamente,* $\forall x \in D$.

7.1.4. Exemplos.

1. A conhecida série geométrica

$$\sum_{n\geq 0} x^n \equiv 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[,$$

é uma série de funções convergindo pontualmente e absolutamente em $]-1,1[$ para $u(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

2. A série de funções

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

converge absolutamente em $\mathbf{R}$, dado que

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (\text{cf.}(6.7.1.)).$$

7.1.5. Convergência uniforme.

Foi já notado (cf. (7.1.2.)) que a convergência pontual de uma sucessão de funções não conserva a continuidade, isto é, se (f_n) é uma sucessão de funções contínuas em D convergindo (pontualmente) para f, esta não é necessariamente contínua em D. Mais adiante veremos também que, se (f_n) é uma sucessão de funções integráveis num intervalo $[a, b]$, a função limite pontual, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, não é forçosamente integrável e se o for não se tem necessariamente: $\lim \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$. A convergência pontual é pois uma noção "fraca" de convergência que não garante a conservação na passagem ao limite $(n \to \infty)$ de um certo número de importantes propriedades topológicas e analíticas (continuidade, integabilidade, etc); isto leva-nos a introduzir o conceito de ***convergência uniforme***, caso particular (e por consequência, noção "mais forte") de convergência pontual.

Seja (f_n) uma sucessão de funções $f_n : D \to \mathbf{R}$ convergindo pontualmente para $f : D \to \mathbf{R}$. Então, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, para cada $x \in D$, e logo

$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \;:\; n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \delta$$

em que $N = N(\delta, x)$ é um número que depende de δ (o que é natural) mas também de $x \in D$. Se for possível encontrar uma ordem $N \in \mathbf{N}$ ***independente de*** x, tal que $n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \delta$, então a convergência de (f_n) dir-se-á uniforme. Mais precisamente:

7.1.6. Definição. *Diz-se que a sucessão de funções* (f_n) ***converge uniformemente*** *em* D *para* f*, se*

$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \;:\; n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \delta, \quad \forall x \in D,$$

ou seja

$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \;:\; n > N \implies \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

Logo, $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ ***uniformemente*** em D, se e só se

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

A figura seguinte representa geometricamente a noção de convergência uniforme. Se $f_n \to f$ uniformemente, a partir de certa ordem, $n > N$, o gráfico de f_n ficará situado na banda compreendida entre os gráficos de $f(x) - \delta$ e $f(x) + \delta$.

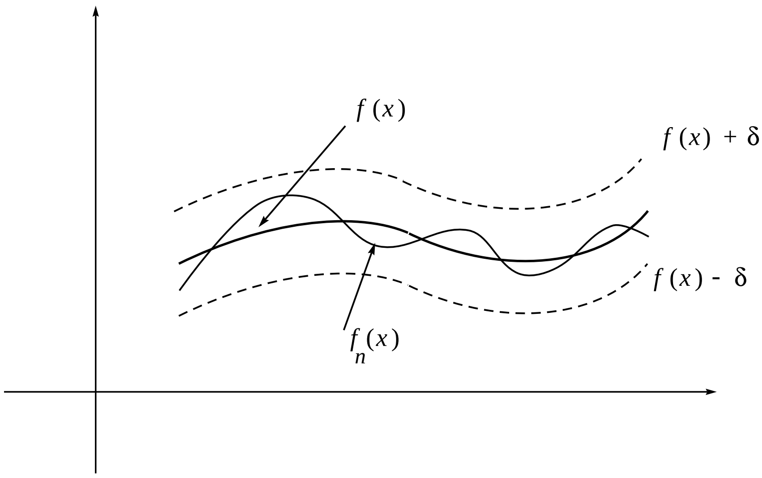


Figura 7.4

7.1.7. Exemplos.

1. Retomemos o exemplo, $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$; vimos já que, pontualmente,

$$f_n(x) \longrightarrow f(x),\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Tem-se, para todo $n \in \mathbf{N}$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1,$$

que claramente não converge para 0 $(n \to \infty)$; a convergência $f_n \to f$ não é uniforme.

2. Se as funções, $f_n(x) = x^n$, são definidas em $[0,a]$ com $0 < a < 1$, a sucessão de funções f_n será aí uniformemente convergente, dado que

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \longrightarrow 0.$$

3. Consideremos agora

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}, \quad x \in [0,1].$$

É claro que pontualmente, $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f,\ f(x) = x$; como

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

a convergência é uniforme.

4. Finalmente, vejamos o que se passa com o exemplo atrás apresentado (cf.(7.1.2.),(3.))

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f_n(x) = 2nx\,(1-x)^n.$$

A função limite pontual é a função nula e, como fora assinalado,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) =$$

$$= f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = 2n\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{2}{e},$$

o que mostra que a convergência não é uniforme.

O resultado seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente de convergência uniforme para as sucessões de funções (***condição de Cauchy para a convergência uniforme***).

7.1.8. Proposição. *A sucessão de funções $f_n : D \to \mathbf{R}$ converge uniformemente em D se e só se*

$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \ : \ n, m > N \implies \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \delta. \tag{1}$$

Demonstração. Condição necessária : $f_n \to f$ uniformemente em D. Então

$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \ : \ n > N \implies \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \delta/2$$

e logo

$$n, m > N \implies \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in D} |f(x) - f_m(x)| < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Condição suficiente : a sucessão de funções (f_n) satisfaz (1). Daqui resulta que, para todo $x \in D$, a sucessão $(f_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy e portanto existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Por outro lado, dado $\delta > 0$ qualquer, tem-se por (1) que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \delta, \quad \forall x \in D, \quad n, m > N;$$

fixando $n > N$ e passando ao limite $m \to \infty$, tem-se

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \delta, \quad \forall x \in D, \quad n > N,$$

o que mostra que a convergência é uniforme. ∎

As noções atrás apresentadas sobre a convergência uniforme de sucessões de funções estendem-se naturalmente às séries de funções.

7.1.9. Definição. *Diz-se que a série de funções* $\sum u_n$ *converge uniformemente em* D, *se a sucessão das somas parciais,* $S_n = u_0 + \cdots + u_n$, *converge uniformemente em* D.

Da precedente proposição resulta que $\sum u_n$ é uniformemete convergente se e só se

$$\forall \delta > 0, \exists N : n > N \implies$$

$$| S_{n+k}(x) - S_n(x) |=| u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+k}(x) |< \delta,$$

$$\forall x \in D, \ \forall k \in \mathbf{N}.$$

7.1.10. Teorema (*Critério de Weierstrass para a convergência uniforme*). *Seja* $\sum u_n$, $u_n : D \to \mathbf{R}$, *uma série de funções; suponha-se que a partir de certa ordem,* $n \geq p$, *se tem*

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad \forall x \in D.$$

Se a série de termos positivos $\sum a_n$ *for convergente, então* $\sum u_n$ *é uniformemente convergente em* D.

Demonstração. Seja $A_n = a_0 + \cdots + a_n$ a sucessão das somas parciais de $\sum a_n$ e $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ a sucessão das somas parciais da série de funções $\sum u_n$. Vimos que (S_n) converge uniformemente sse

$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \ : \ n > N \Longrightarrow$$
$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)| < \delta, \quad \forall x \in D, \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Mas, (podemos evidentemente escolher $N \geq p$)

$$\begin{aligned}|S_{n+k}(x) - S_n(x)| &= |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+k}(x)| \leq \\ &\leq |u_{n+1}(x)| \cdots + |u_{n+k}(x)| \leq \\ &\leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+k} = A_{n+k} - A_n.\end{aligned}$$

Como $\sum a_n$ é convergente, vem$|A_{n+k} - A_n| < \delta$ se $n > N$ e $\forall k \in \mathbf{N}$, o que conclui a demonstração. ■

As séries de Dirichlet, $\sum \sin(nx)/n$ e $\sum \cos(nx)/n$, convergem uniformemente em $\mathbf{R}$. Isto é consequência imediata do resultado seguinte, que não é mais do que uma extensão, aplicada agora à convergência uniforme, do teorema 2.2.16.. Deixamos ao leitor o cuidado da demonstração, similar à do teorema 2.2.16..

7.1.11. Proposição (*Abel, Dirichlet*). *Seja $\sum u_n$ uma série de funções definidas em $D \subset \mathbf{R}$ e cuja sucessão das somas parciais, $S_n = u_0 + \cdots + u_n$, é uniformemente limitada, i.e., $|S_n(x)| \leq M$, $\forall x \in D$. Seja v_n uma sucessão de funções tal que $v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$, $\forall x \in D$, $\forall n$, e convergindo uniformemente para* 0 *em D. Então, $\sum u_n v_n$ é uniformemente convergente em D.*

7.2. Séries de potências.

Designam-se por séries de potências, as séries de funções

$$\sum a_n (x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbf{R},\ x_0 \in \mathbf{R}.$$

Faremos o estudo para $\sum a_n x^n$ $(x_0 = 0)$, transferindo em seguida os resultados para o caso geral, $\sum a_n (x - x_0)^n$, por uma simples mudança de variável: $y = x - x_0$.

Consideremos então a série de potências

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Aplicando o critério da raiz a $\sum |a_n x^n|$, vem (cf. (6.7.2.))

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum a_n x^n \quad \text{abs. conv.},$$

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum a_n x^n \quad \text{divergente.}$$

Escrevendo

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}\,, \qquad \begin{cases} R = +\infty & \text{se} \quad \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ R = 0 & \text{se} \quad \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \end{cases}$$

podemos concluir :

7.2.1. Teorema. *Para a série de potências* $\sum a_n(x-x_0)^n$*, tem-se:*

$$\sum a_n(x-x_0)^n \quad \textit{é abs. conv.} \quad \textit{se} \quad x \in]x_0 - R, x_0 + R[,$$

$$\sum a_n(x-x_0)^n \quad \textit{é divergente} \quad \textit{se} \quad x \in \mathbf{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R].$$

Nos pontos $x = x_0 \pm R$*, só o estudo direto da série permite concluir da convergência ou divergência.* R *diz-se o* ***raio de convergência*** *da série de potências e o intervalo* $]x_0 - R, x_0 + R[$ *designa-se por intervalo de convergência.*

Dado que $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$, se existir o primeiro limite, então

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad \textbf{\textit{caso exista este limite.}}$$

Convergência uniforme nas séries de potências.

Utilizando o critério de Weierstrass, facilmente vemos que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[\alpha, \beta]$ se $\sum a_n x^n$ for absolutamente convergente em α e em β; com efeito, se $x \in [\alpha, \beta]$,

$$|a_n x^n| \leq |a_n|\,(|\alpha|^n + |\beta|^n)$$

e portanto a série de potências $\sum a_n x^n$ é uniformemente convergente em todo o intervalo compacto $[\alpha, \beta]$ contido no intervalo de convergência absoluta, $]-R, R[$. Este resultado será, todavia, melhorado por um teorema devido a Abel. Mostremos entretanto a seguinte

7.2.2. Proposição. *Seja* $f_n : D \to \mathbf{R}$ *uma sucessão de funções convergindo uniformemente para* $f : D \to \mathbf{R}$*. Se* $\varphi : E \to \mathbf{R}$ *é tal que* $\varphi(E) \subset D$*, então* $f_n \circ \varphi : E \to \mathbf{R}$ *converge uniformemente (em* E*) para* $f \circ \varphi$*.*
Do mesmo modo, se $\sum f_n$ *é uniformemente convergente em* D*, então* $\sum f_n \circ \varphi$ *é uniformemente convergente em* E*.*

Demonstração. Se $f_n \to f$ uniformemente em D, tem-se

$$\forall \delta > 0, \quad \exists N \ : \ n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \delta, \quad \forall x \in D,$$

e logo

$$|f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| < \delta, \quad \forall t \in E.$$

Portanto, $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ uniformemente em E. ■

7.2.3. Teorema de Abel. *Se a série de potências $\sum a_n x^n$ converge nos extremos de um intervalo $[\alpha, \beta]$ (mesmo simplesmente), então converge uniformemente em $[\alpha, \beta]$.*

Demonstração. Suponha-se $\alpha < \beta$; observemos desde logo que o intervalo $[\alpha, \beta]$ está contido no intervalo $[0, \beta]$ ou $[\alpha, 0]$, ou então $[\alpha, \beta] = [\alpha, 0] \cup [0, \beta]$ (se $\alpha < 0 < \beta$). Basta portanto fazer a demonstração do teorema para $[\alpha, \beta] = [0, \rho]$ ($\rho > 0$) já que, $\sum a_n x^n$ é uniformememte convergente em $[-\rho, 0]$ sse $\sum (-1)^n a_n t^n$ é uniformemente convergente em $[0, \rho]$ (faça-se a mudança de variável $x = -t$ e aplique-se a proposição anterior). Enfim, podemos ainda reduzir a demonstração no intervalo $[0, \rho]$ ao intervalo $[0, 1]$, considerando a mudança de variável $t = x/\rho$ e aplicando de novo a anterior proposição.
Admita-se pois que $\sum a_n x^n$ é convergente para $x = 1$, isto é, $\sum a_n$ é uma série convergente. Sejam $S_n(x)$ as somas parciais de $\sum a_n x^n$ e $S_n(1)$ as somas parciais de $\sum a_n$. Da hipótese, resulta que

$$\begin{aligned} &\forall \delta > 0, \quad \exists N \ : \ n > N \implies \\ &\qquad |S_{n+k}(1) - S_n(1)| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \delta, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Como $x \in [0, 1]$, x^n decresce: $x^{n+1} \geq x^{n+2} \geq \cdots \geq x^{n+k}$, e o mesmo raciocínio algébrico usado em 2.2.16., dá-nos agora

$$\left| a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots + a_{n+k} x^{n+k} \right| < \delta x^{n+1} \leq \delta,$$

ou seja

$$\begin{aligned} &\forall \delta > 0, \quad \exists N \ : \ n > N \implies \\ &\qquad |S_{n+k}(x) - S_n(x)| < \delta, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall k \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Logo (cf. (7.1.9.)), $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[0, 1]$. ■

7.2.4. Exemplos.

1. Considere-se a série de potências, $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$. Tem-se

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

e logo, a série converge absolutamente se $x \in]-1,1[$ e diverge se $|x| > 1$. Resta-nos os pontos $x = \pm 1$. Se $x = 1$, obtemos a série harmónica, $\sum \frac{1}{n}$, que é divergente; para $x = -1$, obtém-se a série alternada, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, série simplesmente convergente. Em conclusão:

se $x \in]-1,1[$, a série é absolutamente convergente;

se $x = -1$, a série é simplesmente convergente;

se $x \in]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$, a série é divergente;

a série é uniformemente convergente em todo o intervalo $[-1, 1-\epsilon]$ (Abel).

2. A série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ é absolutamente convergente em toda a reta, já que

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = +\infty.$$

A série é uniformemente convergente em todo o intervalo compacto de $\mathbf{R}$.

3. Consideremos, enfim, a série

$$\sum a_n x^n, \quad \text{com} \quad a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^n}, & n \ \text{par} \\ \dfrac{n^{2n}}{(1-3n)^{2n}}, & n \ \text{ímpar} \end{cases}$$

Neste caso, embora $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ não tenha limite, tem-se, seguindo a definição geral:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\max\{0, 1/9\}} = 9$$

e a série converge absolutamente para $|x| < 9$ e diverge para $|x| > 9$; para $x = \pm 9$, a série torna-se $\sum a_n(\pm 9)^n$ e, para n ímpar,

$$\sqrt[n]{|a_n(\pm 9)^n|} = \frac{n^2}{(1-3n)^2} \,.\, 9 = \frac{1}{(3-1/n)^2} \,.\, 9 \geq 1.$$

Logo, a série diverge (cf. (6.7.2.), Obs.) nos extremos do intervalo de convergência. De novo o teorema de Abel permite concluir que a série converge uniformemente em todo o intervalo $[-9+\epsilon, 9-\epsilon]$, $\epsilon > 0$.

7.3. Integração e derivação termo a termo.

Tomemos de novo a sucessão de funções $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1[$, em que $f_n \to f \equiv 0$ pontualmente. Vemos que

$$\lim_{x\to 1}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = 0 \quad \text{enquanto} \quad \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to 1} f_n(x)\Big) = 1.$$

Portanto, neste caso (em que a convergência não é uniforme), verifica-se

$$\lim_{x\to 1}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) \neq \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to 1} f_n(x)\Big).$$

Sendo a convergência uniforme, tem-se

7.3.1. Teorema. *Seja $f_n : D \to \mathbf{R}$ uma sucessão de funções convergindo uniformemente para $f : D \to \mathbf{R}$. Se $a \in \overline{D}$ (em $\overline{\mathbf{R}}$) e se para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n \in \mathbf{R}$, então*

a) Existe $\lim_{n\to\infty} L_n = L \in \mathbf{R}$.

b) Tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = L$;

isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\lim_{x\to a} f_n(x)\Big] = \lim_{x\to a}\Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]$$

desde que existam os limites (finitos) dentro dos parênteses retos e o segundo seja uniforme.

Demonstração. Faça-se a demonstração para $a \in \mathbf{R}$ (se $a = \pm\infty$ a demonstração é semelhante). Para mostrar que (L_n) é convergente para L basta-nos ver que (L_n) é de Cauchy. Como $f_n \to f$ uniformemente em D, então (f_n) é uniformemente de Cauchy (cf. (7.1.8.)) e logo, dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$m, n > N \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \delta, \quad \forall x \in D.$$

Fixados $m, n > N$, como $L_m = \lim_{x \to a} f_m(x)$ e $L_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$, tem-se

$$|L_m - L_n| = \lim_{x \to a} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \delta$$

pelo que (L_n) é de Cauchy e logo convergente : $L_n \to L \in \mathbf{R}$.

Mostremos agora que L é o limite quando $x \to a$ de f, com $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ uniforme. Dado um qualquer $\delta > 0$, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$n > N \implies |L - L_n| < \delta/3 \quad \text{e} \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta/3 \ \ (\forall x \in D).$$

Fixando um $n > N$, como $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x \in D, \ \ |x - a| < \epsilon \implies |f_n(x) - L_n| < \delta/3;$$

logo, se $x \in D$ e $|x - a| < \epsilon$, tem-se

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| \\ &< \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário 1. *Seja* $\sum_n f_n$ *uma série de funções convergindo uniformemente para* f *em* D. *Se* $a \in \overline{D}$ *(em* $\overline{\mathbf{R}}$*) e se para cada* $n \in \mathbf{N}$ *existe* $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n \in \mathbf{R}$, *então* $\sum_n L_n$ *converge e tem-se* $\sum_n L_n = \lim_{x \to a} f(x)$, *isto é*

$$\lim_{x \to a} \left[\sum_n f_n(x) \right] = \sum_n \left[\lim_{x \to a} f_n(x) \right]$$

se $\sum_n f_n$ *converge uniformemente.*

A demonstração é imediata, bastando aplicar o teorema à sucessão das somas parciais.

Corolário 2. *Seja* $f_n : D \to \mathbf{R}$ *uma sucessão de funções que converge uniformemente para* $f : D \to \mathbf{R}$. *Se as funções* f_n *são contínuas em* $a \in D$, *então* f *é contínua em* a. *E analogamente para as séries.*

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to a} f_n(x) \right] = \\ &= \lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exprime-se o anterior resultado dizendo que ***a continuidade das funções conserva-se na passagem ao limite uniforme***.

Observação. Para uma sucessão de funções contínuas f_n, cujo limite (pontual) f não é função contínua nalgum ponto, podemos concluir que a convergência não é uniforme. É o caso, por exemplo, da sucessão $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, funções contínuas cujo limite, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$, não é função contínua (em $x = 1$). Logo, f_n não converge uniformemente para f, confirmando o que já tínhamos provado usando diretamente a definição (cf. (7.1.7.))

Integração termo a termo.

Considere-se a seguinte sucessão de funções:

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2};$$

claramente que $f_n \to f \equiv 0$ e, naturalmente, $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Mas,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-nx^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx.$$

Porém,

7.3.2. Teorema (*Passagem ao limite sob o sinal de integral*). *Seja $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma sucessão de funções integráveis que converge uniformemente para $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$. Então, f é integrável e tem-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Demonstração. Sejam D_n e D os conjuntos dos pontos de descontinuidade de f_n e f, respetivamente. Se x é um ponto de continuidade de todas as f_n, então x é ponto de continuidade de f (cf. (7.3.1.)) e portanto $D \subset \bigcup D_n$; como D_n tem medida nula (f_n é integrável) então D tem medida nula.

Por outro lado, como $f_n \to f$, $(n \to \infty)$ uniformemente, dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n > N \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\delta}{b-a}, \quad \forall x \in [a,b]. \tag{1}$$

Fixando $n_0 > N$, como f_{n_0} é limitada resulta que f é limitada, dado que

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < \frac{\delta}{(b-a)} + |f_{n_0}(x)|, \quad \forall x \in [a,b].$$

Assim, f é limitada e D tem medida nula, concluindo-se então que f é integrável em $[a,b]$. Finalmente, para $n > N$, tira-se de (1) :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f(x)\,dx - f_n(x))\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx < (b-a)\frac{\delta}{b-a} = \delta,$$

ou seja,

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx. \;\blacksquare$$

O correspondente resultado para as séries é agora imediato:

Corolário. *Sejam $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ funções integráveis, termo geral de uma série, $\sum_n f_n$, uniformemente convergente. Então a sua soma é integrável e tem-se*

$$\int_a^b \left(\sum_n f_n \right) = \sum_n \int_a^b f_n.$$

Poder-se-ia esperar um resultado semelhante para a derivação: uma sucessão f_n de funções deriváveis convergindo uniformemente para uma função derivável f, deveria implicar que a sucessão de funções f_n' convergisse para f'. Tal não é (de modo nenhum) o caso:

Contra-exemplo. A sucessão, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, converge uniformemente em $\mathbf{R}$ para a função $f \equiv 0$; contudo, a sucessão das derivadas, $f_n'(x) = \cos(nx)$, nem sequer converge pontualmente em nenhum intervalo da reta.

A derivação termo a termo de uma sucessão de funções exige hipóteses muito mais fortes, não se conseguindo, mesmo assim, garantir a convergência da sucessão das derivadas. Eis o resultado:

7.3.3. Teorema. *Seja $f_n : I \to \mathbf{R}$ uma sucessão de funções deriváveis num intervalo limitado, $I \subset \mathbf{R}$. Se para um certo $c \in I$ a sucessão numérica $(f_n(c))$ é convergente e se a sucessão das funções derivadas, (f_n'), é uniformemente convergente para uma função g em I, então a sucessão (f_n) converge uniformemente em I para uma função f derivável, tal que $f' = g$.*

Demonstração. Aplicando o teorema do valor médio de Lagrange à função $f_m - f_n$, tem-se, para todo $x \in I$,

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (x-c)\,[f_m'(d) - f_n'(d)]\,, \qquad (1)$$

com d entre x e c. Mas (f_n'), sendo uniformemente convergente, é uniformemente de Cauchy e portanto, dado um qualquer $\delta > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que, para $m, n > N$ se tem $|f_m'(x) - f_n'(x)| < \delta/2|I|$, $\forall x \in I$, representando $|I|$ a amplitude do intervalo I; por outro lado, como $(f_n(c))$ é convergente e logo de Cauchy, tem-se também $|f_m(c) - f_n(c)| < \delta/2$, $m, n > N$. Então, para $m, n > N$ e para todo o $x \in I$, resulta de (1)

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\le |f_m(c) - f_n(c)| + |(x-c)\,[f_m'(d) - f_n'(d)]\,| \le \\ &\le \delta/2 + |I|.\delta/2|I| = \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que (f_n) é uniformemente de Cauchy e portanto uniformemente convergente em I.
Represente-se por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ o limite pontual de (f_n). Escrevendo de novo a igualdade (1), agora com x_0 em lugar de c, tem-se para todo $x \neq x_0$:

$$\frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_m'(\xi) - f_n'(\xi)$$

com ξ entre x e x_0; esta igualdade mostra-nos que a sucessão de funções $h_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ é uniformemente de Cauchy em $I - \{x_0\}$ e logo uniformemente convergente para $h(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. O teorema 7.3.1. permite-nos agora escrever

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{n\to\infty} h_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[\lim_{x\to x_0} h_n(x)\right]}_{f_n'(x_0)},$$

ou seja

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0).$$

Como x_0 é qualquer em I, concluimos que f é derivável em I e $f' = g$. ■

Observação. O precedente teorema é sobretudo um resultado de primitivação termo a termo e pode ser reformulado do seguinte modo:

Se uma sucessão de funções f_n, primitiváveis num intervalo limitado $I \subset \mathbf{R}$, é uniformemente convergente em I para uma função f, então uma sucessão de primitivas, $F_n = Pf_n$, converge uniformemente em I para uma primitiva $F = Pf$, caso Pf_n convirja nalgum ponto $c \in I$.

O anterior teorema é trivialmente adaptável às séries de funções:

Corolário 1. *Seja $\sum_n f_n$ uma série de funções deriváveis no intervalo limitado $I \subset \mathbf{R}$ tal que $\sum_n f_n(c)$ é convergente para algum $c \in I$. Se a série $\sum_n f_n'$ é uniformemente convergente em I para uma função g, então $\sum_n f_n$ é uniformemente convergente em I e a sua soma é uma função f derivável tal que $f' = g$.*

Observação. Tal como para as sucessões, o anterior corolário pode ser reformulado. Assim:

Se uma série $\sum_n f_n$ de funções primitiváveis num intervalo limitado $I \subset \mathbf{R}$ é uniformemente convergente em I para uma função f, então a série de primitivas, $\sum_n Pf_n$, converge uniformemente em I para uma primitiva $F = Pf$, caso $\sum_n Pf_n$ convirja nalgum ponto $c \in I$.

Corolário 2. *Considere-se a série de potências $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e a série $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ que se obtém formalmente da anterior derivando termo a termo. Então:*

a) As duas séries de potências têm o mesmo raio de convergência, R.

b) Se $R > 0$, a função $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ é derivável em $]-R, R[$ e tem-se

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad \forall x \in]-R, R[.$$

Demonstração. Dado que uma série de potências converge uniformemente em todo o intervalo compacto contido em $]-R, R[$, o corolário sai imediatamente do teorema se tivermos mostrado a).
Se for R' o raio de convergência da série $\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$, é claro que R' é ainda o raio de convergência da série $x.\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} na_n x^n$; então

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim}\,\sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|a_n|}} = R. \blacksquare$$

OBSERVAÇÕES. 1. O anterior corolário mostra à evidência como as séries de potências são séries de funções particularmente bem comportadas; no interior do intervalo de convergência, as séries de potências são não só primitiváveis termo a termo mas também deriváveis (!) termo a termo. Estas propriedades são especialmente importantes na prática; é o que veremos mais adiante, quando tivermos que desenvolver em série de potências uma importante classe de funções: as funções analíticas.

2. O corolário estende-se naturalmente ao caso geral das séries de potências

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n.$$

7.3.4. Aplicação às séries repetidas.

7.3.5. Definição. *Chama-se **sucessão dupla** e representa-se por* (u_{nm}), *a uma aplicação* $(n,m) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to u_{nm} \in \mathbf{R}$.

Dada a sucessão dupla (u_{nm}), para cada n fica definida a sucessão $m \to u_{nm}$, e a correspondente série $\sum_m u_{nm}$; do mesmo modo, cada $m \in \mathbf{N}$ determina a série $\sum_n u_{nm}$. Admitindo que estas séries são convergentes, ficam agora definidas as sucessões $n \to \sum_m u_{nm}$ e $m \to \sum_n u_{nm}$. As correspondentes séries designam-se por ***séries repetidas*** e representam-se por

$$\sum_n \left(\sum_m u_{nm}\right) \quad \text{e} \quad \sum_m \left(\sum_n u_{nm}\right).$$

Distribuindo os termos da sucessão dupla (u_{nm}) no quadro seguinte, a soma da n-ésima linha é $\sum\limits_m u_{nm}$ e da m-ésima coluna $\sum\limits_n u_{nm}$.

$$\begin{array}{cccccc}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1m} & \cdots \\
u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2m} & \cdots \\
u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3m} & \cdots \\
. & . & . & \cdots & . & \cdots \\
. & . & . & \cdots & . & \cdots \\
u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nm} & \cdots \\
. & . & . & \cdots & . & \cdots \\
. & . & . & \cdots & . & \cdots
\end{array}$$

A questão que agora se coloca é a seguinte:

Problema. ? Em que condições se tem

$$\sum_m \left(\sum_n u_{nm} \right) = \sum_n \left(\sum_m u_{nm} \right).$$

O resultado é, em geral, falso.

Contra-exemplo. Considere-se a sucessão dupla

$$u_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = m+1 \\ -1 & \text{se} \quad m = n+1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

O leitor constata imediatamente, pela simples leitura do quadro,

$$\begin{array}{cccccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots \\
. & . & . & . & . & \cdots \\
. & . & . & . & . & \cdots
\end{array}$$

que se tem $\sum\limits_m \left(\sum\limits_n u_{nm} \right) = 1$ e $\sum\limits_n \left(\sum\limits_m u_{nm} \right) = -1$.

Eis agora o resultado positivo:

7.3.6. Teorema. *Dada a sucessão dupla (u_{nm}), admita-se que para cada $n \in \mathbf{N}$ a série $\sum\limits_m u_{nm}$ é absolutamente convergente, e seja $a_n = \sum\limits_m |u_{nm}|$. Suponha-se ainda que $\sum\limits_n a_n < +\infty$. Então*

$$\sum_n \left(\sum_m u_{nm} \right) = \sum_m \left(\sum_n u_{nm} \right).$$

Demonstração. Faça-se $S_n(m) = u_{n1} + u_{n2} + \cdots + u_{nm}$. Tem-se

$$|S_n(m)| \leq a_n, \quad \forall m,\ \forall n.$$

Como $\sum a_n$ é convergente, o teorema de Weierstrass (cf. (7.1.10.)) garante que a série de funções, $\sum S_n,\ S_n : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, é uniformamente convergente em $\mathbf{N}$. Finalmente, pelo teorema 7.3.1., Corol.1 (e pondo $S_n(0) = 0$), tem-se

$$\sum_n \left(\sum_m u_{nm} \right) = \sum_n \left[\lim_{m\to\infty} S_n(m) \right] = \lim_{m\to\infty} \sum_n S_n(m) =$$
$$= \sum_m \left[\sum_n S_n(m) - \sum_n S_n(m-1) \right] = \sum_m \left(\sum_n u_{nm} \right). \blacksquare$$

7.4. Séries de Taylor.

Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função indefinidamente diferenciável num intervalo $I \subset \mathbf{R}$. Fixando $x_0 \in I$, chama-se ***série de Taylor de*** f ***em*** x_0 à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \equiv$$
$$\equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \cdots.$$

Se $x_0 = 0 \in I$, a série de Taylor designa-se por ***série de Mac-Laurin*** e escreve-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv f(0) + f'(0)\, x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots.$$

7.4.1. Exemplos.

1. A função $f(x) = e^x$ satisfaz $f^{(n)}(x) = e^x,\ \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$; a série de Mac-Laurin escreve-se então:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

O raio de convergência é $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty$. Assim, a série de Mac-Laurin de e^x é absolutamente convergente em $\mathbf{R}$ e uniformemente convergente em todo o intervalo compacto contido na reta.

2. Considere-se a função

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

É do nosso conhecimento (cf. (4.3.1.),(7.)) que f é função indefinidamente diferenciável e que, para $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = P(x)\left(\frac{1}{x^2}\right)^l e^{-1/x^2}$$

em que $P(x)$ é um polinómio e l um inteiro positivo dependente de n. Como $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, tem-se $f^{(n)}(0) = 0$ e logo a série de Mac-Laurin de f é a série de potências de x com todos os coeficientes nulos.

3. Tomemos agora a função $f(x) = \log(x+1)$, $x > -1$; é claramente uma função indefinidamente diferenciável e tem-se

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \;\; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \;\; f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; \cdots$$
$$\cdots ; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Então, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, $n \geq 1$, $f(0) = 0$, e a série de Mac-Laurin escreve-se

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n \equiv x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots;$$

como $|a_n| = \dfrac{1}{n}$, o raio de convergência é $R = 1$, e portanto a série é absolutamente convergente em $]-1,1[$; nos extremos, a série diverge em $x = -1$ e converge simplesmente em $x = 1$ (série alternada); enfim, a série da Mac-Laurin de $\log(1+x)$ converge uniformemente em todo o intervalo $[-1+\epsilon, 1]$ (Abel).

4. A função $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x > -1$, é indefinidamente diferenciável no seu domínio e a sua n-ésima derivada, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n}$; a série de Mac-Laurin escreve-se então

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \equiv 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + \cdots$$

série de potências em x com raio de convergência, $R = \lim \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, e portanto absolutamente convergente em $]-1,1[$.

Problema Central. A questão fundamental no desenvolvimento em série de Taylor de uma função indefinidamente diferenciável é a seguinte:

? Existe uma vizinhança $V(x_0)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \cdots$$

$\forall x \in V(x_0)$, isto é, a série de Taylor de f em x_0 é convergente para todo $x \in V(x_0)$ e a sua soma igual a $f(x)$?

No anterior exemplo 1. viu-se que a série de Taylor (Mac-Laurin) de $f(x) = e^x$ é convergente em toda a reta. Veremos adiante que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Mas já no exemplo 2., a função $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ não é soma da sua série de Mac-Laurin em ***nenhum*** ponto de $V(0)$ (excepto naturalmente em 0) dado que a série é $\equiv 0$ e $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$.

Seja então $S_n(x)$ a soma dos $n+1$ primeiros termos da série de Taylor (sucessão das somas parciais) de f em $x_0 \in I$. Tendo presente a fórmula de Taylor, tem-se

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

em que $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ representa o resto de ordem n. É agora claro que

7.4.2. Teorema. *A condição necessária e suficiente para que a função indefinidamente diferenciável, $f : I \to \mathbf{R}$, seja soma da sua série de Taylor numa vizinhança $V(x_0)$, $x_0 \in I$, é que*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in V(x_0).$$

Na prática, utilizam-se condições suficientes:

7.4.3. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função indefinidamente diferenciável e suponha-se que existem constantes $M, k \geq 0$ tais que, numa vizinhança $V(x_0)$, se tenha*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M k^n, \quad \forall x \in V(x_0),\ n > p,\ n \in \mathbf{N}.$$

Então f é soma da sua série de Taylor em $V(x_0)$.

Demonstração. Considerando, por exemplo, o resto de Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(x_0+\theta_n(x-x_0)), \quad 0<\theta_n<1,$$

tem-se,

$$|R_n(x)| \leq M\, \frac{(k|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in V(x_0);$$

como $\dfrac{(k|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (é termo geral de série convergente), a conclusão sai agora trivialmente do teorema. ∎

Corolário. *Se existe $M \geq 0$ tal que em $V(x_0)$ se tenha*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M, \quad \forall x \in V(x_0), \;\; n>p, \;\; n \in \mathbf{N},$$

então f é soma da sua série de Taylor em $V(x_0)$.

7.4.4. Exemplos.

1. Dado um $K > 0$ qualquer, as derivadas da função exponencial satisfazem

$$\left|(e^x)^{(n)}\right| \leq e^K = M, \quad \forall x \in [-K,K], \; \forall n \in \mathbf{N}$$

e o corolário precedente garante portanto que e^x é soma da sua série de Mac-Laurin em $[-K,K]$; sendo K qualquer, tem-se então

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

2. Tomemos a função $f(x) = \sin x, \; x \in \mathbf{R}$. É sabido que $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ e as suas derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x = \sin(x+\pi/2)\,; \\ f''(x) &= \cos(x+\pi/2) = \sin(x+2\pi/2)\,; \\ &\;\;\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ f^{(n)}(x) &= \sin(x+n\pi/2)\,. \end{aligned}$$

Então, $f^{(n)}(0) = \sin(n\pi/2)$ e portanto

$$\begin{cases} f^{(2n)}(0) = 0 \\ f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Como $\left|f^{(n)}(x)\right| = |\sin(x + n\pi/2)| \leq 1,\ \forall x \in \mathbf{R}$, resulta que $\sin x$ é soma da sua série de Mac-Laurin em $\mathbf{R}$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

3. Se $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbf{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

e logo

$$f^{(n)}(0) = \cos(n\pi/2), \qquad \begin{cases} f^{(2n)}(0) = (-1)^n \\ \\ f^{(2n+1)}(0) = 0 \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Analogamente, $\left|f^{(n)}(x)\right| = |\cos(x + n\pi/2)| \leq 1,\ \forall x \in \mathbf{R}$, e portanto a função $\cos x$ desenvolve-se em série de MacLaurin em toda a reta:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

7.4.5. Definição. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbf{R}$. Diz-se que f é uma **função analítica em** $x_0 \in I$, se existe uma série de potências, $\sum a_n(x - x_0)^n$, tal que numa vizinhança $V(x_0)$ se tenha*

$$f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n, \quad \forall x \in V(x_0).$$

Como as séries de potências são deriváveis termo a termo (no intervalo de convergência) (cf. (7.3.3.), Cor. 2.) vemos que, função analítica em x_0 é indefinidamente diferenciável em $V(x_0)$ e todas as suas derivadas são analíticas em x_0.

7.4.6. Proposição (*Unicidade do desenvolvimento em série*). *Se f é soma de uma série de potências $\sum a_n(x - x_0)^n$ numa vizinhança $V(x_0)$, então esta série é a série de Taylor de f em x_0.*

Observação. A proposição significa precisamente o seguinte:

$f : I \to \mathbf{R}$ é função analítica em $x_0 \in I$ se e só se f é indefinidamente diferenciável e soma da sua série de Taylor numa vizinhança $V(x_0)$.

Demonstração. Por hipótese,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in V(x_0),$$

o que implica, $f(x_0) = a_0$. Derivando,

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in V(x_0)$$

e portanto, $f'(x_0) = a_1$. Prosseguindo o raciocínio, tem-se mais geralmente

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = n! a_n &+ (n+1) \dots 2 a_{n+1} (x - x_0) + \\ &+ (n+2)(n+1) \dots 3 a_{n+2} (x - x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

o que nos dá $f^{(n)}(x_0) = n! a_n, \ n \in \mathbf{N}$, concluindo o resultado. ∎

7.4.7. Exemplos. Na prática, nem sempre é fácil obter o desenvolvimento em série de Taylor de uma função, utilizando os resultados teóricos que exigem a limitação de todas as derivadas de f (cf. (7.4.3.)). Por vezes recorre-se ao facto de a derivada ou primitiva de f poderem ser soma de séries de potências conhecidas. Vejamos alguns exemplos de aplicação:

1. Procure-se o desenvolvimento em série de potências de x (série de MacLaurin) da função $f(x) = \log(1 + x), \ x > -1$. Observemos desde logo que, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ é soma da série geométrica de razão $-x$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in]-1, 1[.$$

Como a convergência é uniforme em cada intervalo compacto de $]-1, 1[$, integrando termo a termo (cf. (7.3.2.), Cor.) :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt &= \log(1+x) - \log(1+0) = \log(1+x) = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Finalmente notamos que a série de potências obtida é ainda convergente em $x = 1$ (série alternada) e logo uniformemente convergente em $[-1 + \epsilon, 1]$ (Abel); designando por $\varphi(x)$ a soma da série em $]-1, 1]$, vimos que $\varphi(x) = \log(1+x), x \in]-1,1[$. Mas então (cf. (7.3.1.), Cor.1.)

$$\begin{aligned}\log(1+1) &= \lim_{x\to 1^-} \log(1+x) = \lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots\end{aligned}$$

e em conclusão, tem-se

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad \forall x \in]-1,1].$$

2. Desenvolva-se em série de Taylor a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, no ponto $x = 1$.

Como a primitiva de $\dfrac{1}{x^2}$ é $-\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{1+(x-1)}$, o seu desenvolvimento em potências de $x-1$ vem dado por:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x} &= -\frac{1}{1+(x-1)} = \\ &= -\left[1-(x-1)+(x-1)^2+\cdots+(-1)^{n+1}(x-1)^n+\cdots\right],\end{aligned}$$

válido para $|x-1| < 1 \iff x \in]0,2[$. Como no intervalo de convergência podemos derivar termo a termo (cf. (7.3.3.), Cor.2.), vem então

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} = 1 - 2\,(x-1) + 3\,(x-1)^2 + \cdots \\ + (-1)^{n+1} n\,(x-1)^{n-1} + \cdots, \quad x \in]0,2[.\end{aligned}$$

3. Vimos anteriormente (cf. (7.4.1.), 4.) que a série de Mac-Laurin da função $f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}$, vem dada por

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + \cdots$$

com $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, e é uma série convergente em $]-1,1[$. Veremos agora que $f(x) = (1+x)^\alpha$ é, naquele intervalo, soma da sua série de Mac-Laurin. Seja

$$g(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + \cdots, \quad |x| < 1$$

e derivemos termo a termo (no interior do intervalo de convergência); tem-se

$$g'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \cdots$$

e logo

$$\frac{1}{\alpha}\, g'(x) = 1 + (\alpha-1)x + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \cdots$$

Multiplicando ambos os membros da anterior igualdade por $1+x$ e tendo em conta que

$$\binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n} = \binom{\alpha}{n}$$

obtemos

$$\frac{1}{\alpha}\,(1+x)\,g'(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + \cdots = g(x).$$

Então $\dfrac{1}{\alpha}\,(1+x)\,g'(x) = g(x),\ x \in]-1,1[$, e em consequência a derivada da função $g(x)/(1+x)^\alpha$ em $]-1,1[$ é nula. Logo

$$g(x)/(1+x)^\alpha = g(0) = 1, \quad \forall x \in]-1,1[$$

e temos assim o desenvolvimento

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + \cdots, \quad |x| < 1.$$

O desenvolvimento será ainda válido em $x = 1$, se $\alpha > -1$ (cf. (6.7.6.), 3.) (porquê?).

Terminamos o capítulo colocando a seguinte questão: seja f uma função analítica em x_0, isto é, $f(x)$ é soma de uma série de potências em $x - x_0$ numa vizinhança $V_r(x_0)$, $r > 0$. Perguntamos se f é analítica em todos os pontos de $V_r(x_0)$. A resposta é positiva, e tem-se, mais precisamente,

7.4.8. Proposição. *Seja $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ a soma de uma série de potências definida em $|x - x_0| < r$. Então, para cada $c \in V_r(x_0)$, existe uma série de potências, $\sum b_n(x-c)^n$, tal que*

$$f(x) = \sum b_n(x-c)^n, \quad \text{se} \quad |x-c| < r - |c - x_0|.$$

Demonstração. Se x é tal que $|x-c| < r-|c-x_0|$, então $|x-c|+|c-x_0| < r$ e logo a série $\sum a_n\,(|x-c|+|c-x_0|)^n$ é absolutamente convergente (porquê?). Usando o binómio de Newton

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} |c-x_0|^{n-m}|x-c|^m = \sum_{n\geq 0} |a_n|\,(|x-c|+|c-x_0|)^n < +\infty.$$

Podemos então inverter a ordem a ordem da série repetida (cf. (7.3.6.)) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n = \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n\,[(x-c)+(c-x_0)]^n = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (c-x_0)^{n-m}(x-c)^m \\ &= \sum_{m\geq 0} \underbrace{\left[\sum_{n\geq m} \binom{n}{m} (c-x_0)^{n-m}\right]}_{b_m} (x-c)^m. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercícios

1. Determine os domínios de convergência de cada uma das seguintes séries:

$$a)\ \sum \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}(x-3)^n; \qquad b)\ \sum \left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right)^n (2x+1)^n.$$

2.

a) Determine o maior intervalo de convergência da série

$$\sum \frac{1}{n}\left(a-\frac{x}{2}\right)^n, \quad a \in \mathbf{R}.$$

b) Prove que existe um único valor de $a \in \mathbf{R}$, para o qual a série é simplesmente convergente no ponto $x = 0$.

3. Determine os domínios de convergência simples, absoluta e uniforme das séries:

$$a)\ \sum (-1)^n \frac{\log n}{n^2}\left(\frac{x}{4}\right)^n; \quad b)\ \sum \frac{x^n}{n+\log n}\ ; \quad c)\ \sum \frac{n!}{n^n}\left(\frac{1}{x+2}\right).$$

4. Determine o maior domínio de convergência das séries:

a) $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(3x)^{2n+1}}{2n+1}$; *b*) $g(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$;

c) $h(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n}}$.

Calcule $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ e $h'(1)$. Determine a função $g(x)$ recorrendo à série derivada.

5. Estude a *série hiper-geométrica* (cf. exercício. 29. Cap.6.)

$$1 + \frac{\alpha}{1}\,\frac{\beta}{\gamma}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\,\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\,x^2 + \cdots \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$$

e determine os maiores intervalos de convergência pontual e uniforme.

6. Considere a sucessão de funções $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Mostre que (f_n) converge pontualmente, mas não uniformemente em $[0, 1]$.

7.

a) Mostre que a série de funções, $\sum x^n\,(1-x)$, converge pontualmente mas não uniformemente em $[0, 1]$.

b) Mostre que $\sum(-1)^n\,x^n\,(1-x)$, converge uniformemente em $[0, 1]$.

8. Considere as seguintes sucessões de funções:

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1},\ x \in]0,1]; \qquad g_n(x) = \frac{x}{nx+1},\ x \in]0,1];$$

$$h_n(x) = \cos^n x,\ x \in [0, \pi/2].$$

Determine as funções limite pontual nos domínios indicados e diga, justificando, se a convergência é uniforme.

9. Demonstre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

converge uniformemente em $\mathbf{R}$.

10. Seja $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ uma sucessão de funções contínuas e suponha-se que $f_n \to f$ uniformemente em $[0,1]$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

11. Mostre que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1},$$

é convergente para $x \geq 0$ e divergente para $x < 0$. Defina-se para $x \geq 0$ a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1};$$

mostre que f é contínua para $x \geq 0$ e derivável para $x > 0$.

12. Justifique que a função

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

é contínua em $[0,1]$.

13. ***Critério integral para a convergência uniforme.***

Seja $f : [1,+\infty[\times D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $(t,x) \to f(t,x)$, uma aplicação positiva e tal que, para cada $x \in D$, a função $t \to f(t,x)$ é decrescente. Suponha-se que a sucessão de funções, $u_n(x) = f(n,x)$, $x \in D$, converge uniformemente para 0 em D.

a) Adapte a demonstração de 6.7.3. e mostre que a série de funções $\sum u_n(x)$ é uniformemente convergente em D se e só se a sucessão de funções, $\int_1^n f(t,x)\,dt$, é uniformemente convergente em D.

b) Usando o anterior resultado, verifique se as seguintes séries são ou não uniformemente convergentes em $[0,1]$:

$$i) \quad \sum \frac{x}{1+n^2x^2}, \qquad ii) \quad \sum \frac{x}{1+n^2x}.$$

14. Mostre que a série de funções

$$\sum (-1)^n \frac{x}{1+nx^2}$$

converge uniformemente em $\mathbf{R}$.

Sug. Utilize Abel-Dirichlet para a convergência uniforme.

15. Considere a série de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \tag{1}$$

a) Mostre que a série (1) converge pontualmente em $[0,1]$.

b) Demonstre que a convergência não é uniforme em $[0,1]$.

Sug. Determine a soma $f(x)$ da série (1). *Tenha presente que* $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

16. Dada a função $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $M(x) = x - I(x)$, considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(nx)}{2^n} \qquad (I(x) = \text{parte inteira de } x).$$

a) Mostre que a série é uniformemente convergente em $\mathbf{R}$ e represente por $f(x)$ a função limite.

b) Mostre que f é contínua em $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

17. ***Irracionalidade do número π.***

a) Sejam $a, b \in \mathbf{N}$ e seja P_n o polinómio

$$P_n(x) = \frac{x^n\,(bx-a)^n}{n!}.$$

Mostre que P_n e todas as suas derivadas tomam valores inteiros em $x = 0$ e $x = a/b$.

Pode usar a fórmula de Leibnitz para determinar a derivada de ordem k de P_n.

b) Mostre que $\lim I_n = 0$, em que

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin x \, dx.$$

c) Mostre que se $\pi = a/b$ é racional, então I_n é um inteiro não nulo, para todo o n. Conclua que π não pode ser racional.

18. Represente por séries de potências de x as seguintes funções, indicando em cada caso o maior aberto em que o desenvolvimento é válido:

$$a)\ \frac{1}{(1+x)^2}\ ; \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \end{cases}\ ;$$

$$c)\ \frac{1}{(x-1)\,(x-2)}\ ; \qquad d)\ \sin^2 x\ ; \qquad e)\ \frac{1}{1+x^2}.$$

19. Desenvolva em série de potências de x as funções

$$i) \quad f(x) = \arcsin x; \qquad ii) \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

e determine o maior domínio em que é válido o desenvolvimento.

20. Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ em série de potências de $x-3$. Qual o maior domínio aberto onde o desenvolvimento é válido?

21. Desenvolva a função $f(x) = \log x$ em potências de $(x-1)$ e indique o maior intervalo aberto onde o desenvolvimento é válido.

22. Prove que

$$a)\ \sum_{n \geq 0} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1;$$

$$b)\ \sum_{n \geq 0} (n+1)\, x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

8

Séries de Fourier

Uma introdução clássica

Grande parte dos fenómenos que têm lugar na natureza são fenómenos ditos ***periódicos*** (movimento da corda vibrante, movimento do pêndulo, intensidade sonora, intensidade da corrente eléctrica, etc.); são descritos por equações diferenciais cujas soluções são funções f que traduzem essa periodicidade: satisfazem, para algum $T \in \mathbf{R}$, $f(x+T) = f(x)$, para todo $x \in D(f)$. Desde logo, portanto, se reconhece a importância do estudo matemático desta classe de funções, de que $\sin x$ e $\cos x$ são os mais simples exemplos: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

O interesse deste estudo torna-se flagrante ao verificarmos, na sequência da análise matemática de certos problemas de física e mecânica, as notáveis propriedades de desenvolvimento em série das funções periódicas. Assim, quando no início do século XIX, Fourier se apercebe que uma função "arbitrária" se pode desenvolver em soma de senos e cossenos, aquele matemático francês tinha dado início a um dos capítulos mais importantes da Análise Matemática: a Análise de Fourier.

Essencialmente, a Análise de Fourier "decompôe" uma função f em elementos simples ($\sin x$ e $\cos x$) recombinando-os em seguida. Porém, a um nível mais profundo, a importância capital da Análise de Fourier não deriva tão pouco dessa possibilidade de desenvolvimento em série; a razão final do seu sucesso é a seguinte: as funções elementares $\sin kx$ e $\cos kx$ formam uma base de um espaço vectorial (espaço de funções) de dimensão infinita, e são "funções próprias" do operador derivada (tal como um vector pode ser um vector próprio de uma transformação linear). Mas esta é uma questão já mais avançada e que o leitor poderá reconhecer mais tarde, quando regressar à Análise de Fourier no quadro geral da Análise Funcional.

8.1. Funções periódicas.

Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função real de variável real.

8.1.1. Definição. *Diz-se que a função f é uma* ***função periódica*** *se existe um real $T \neq 0$ tal que*

$$x + T \in D,\ x - T \in D, \quad f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

O número real T diz-se o ***período da função periódica*** *f. Diz-se ainda que f é uma função T-periódica.*

Exemplos imediatos de funções periódicas são as funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$, periódicas em $\mathbf{R}$ de período 2π. Naturalmente que o período de uma função periódica não é único; $4\pi, 6\pi, \ldots$ são também períodos de $\sin x$ e $\cos x$ e a função $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ (cf. Fig. 8.1), periódica em $\mathbf{R}$ de período π, admite ainda como período, $k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

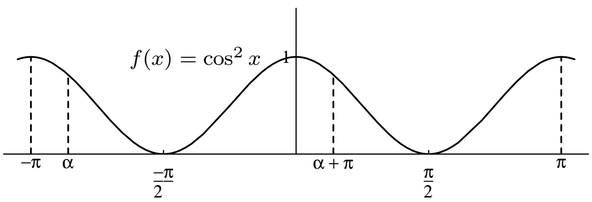


Figura 8.1

A função $f(x) = \tan x$, definida para $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi + \pi/2\},\ k \in \mathbf{Z}$, é evidentemente π-periódica.

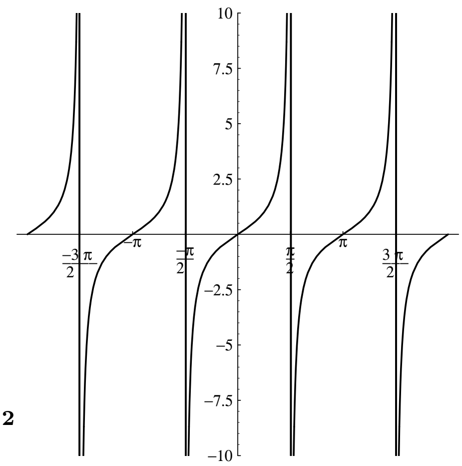


Figura 8.2

8.1.2. Proposição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$, função periódica de período T. Então:*

a) $-T$ *é período de* f.

b) Se T *e* T' *são dois períodos de* f*, não simétricos,* $T + T'$ *é ainda período de* f.

c) $kT,\ k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$*, é período de* f.

Demonstração. Como

$$f(x) = f(x - T + T) = f(x - T), \quad \forall x \in D,$$

a alínea *a*) resulta imediatamente. Enfim, *b*) sai de $f(x + T + T') = f(x + T) = f(x),\ \forall x \in D$, e *c*) é consequência de *a*) e *b*). ■

Consideremos agora a função $f : [a, b[\to \mathbf{R}$, definida no intervalo semi-aberto $[a, b[\subset \mathbf{R},\ a < b$; pondo $T = b - a$ e

$$f_a(x + kT) = f(x),\ \ x \in [a, b[,\ \ k \in \mathbf{Z},$$

obtemos uma função $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ periódica, de período T, prolongamento de f a toda a reta $\mathbf{R}$; f_a diz-se o ***prolongamento de*** f ***por periodicidade*** $T = b - a$.

Notemos que a função f_a não é necessariamente contínua, mesmo que f o seja; mais precisamente, vê-se sem dificuldade que sendo $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ contínua, o prolongmento f_a é função contínua se e só se existe $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ e $f(a) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$. Assim, por exemplo, a função

$$f : [-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbf{R},\ \ f(x) = x,$$

prolonga-se por periodicidade na função $f_{-\pi}$ representada na figura:

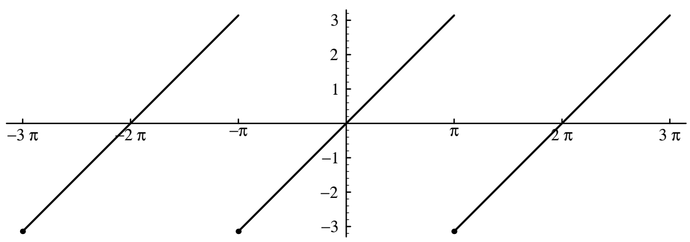


Figura 8.3

$f(-\pi) = -\pi \neq \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \pi$. A função prolongada por periodicidade 2π é descontínua nos pontos $-\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Do mesmo modo se prolonga por periodicidade a função f definida em $]a, b]$, pondo

$$f_b(x + kT) = f(x),\ \ x \in]a, b],\ k \in \mathbf{Z},\ T = b - a.$$

Enfim, a função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é prolongável por periodicidade de período $T = b - a$, se e só se $f(b) = f(a)$, sendo a função prolongada $f_a = f_b$.

Consideremos $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, uma função T-periódica. Os intervalos $[a, b]$ e $[a+kT, b+kT],\ k \in \mathbf{Z}$, dizem-se ***congruentes***; da T-periodicidade resulta claramente que $f_{|[a,b]} = f_{|[a+kT,b+kT]}$. Congruentes também se dizem os pontos x e $x + kT,\ k \in \mathbf{Z}$.

8.1.3. Proposição. *Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função T-periódica e integrável (própria ou impropriamente) num intervalo $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Então f é integrável em todo o intervalo congruente e o integral conserva-se, isto é*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)\, dx.$$

Enfim, existindo o integral, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\, dx$, este é independente de a.

Demonstração. Sendo f integrável em $[a, b]$, a mudança de variável $y = x + kT$ dá-nos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(y - kT)\, dy = \int_{a+kT}^{b+kT} f(y)\, dy. \tag{1}$$

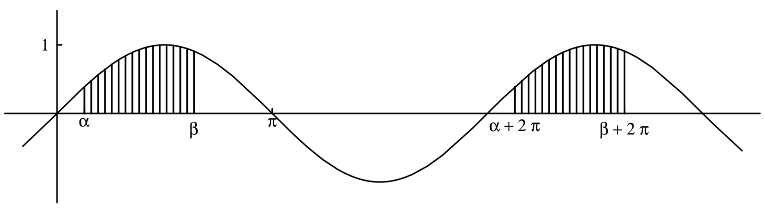


Figura 8.4

O caso impróprio em a ou b ou num número finito de pontos de $[a, b]$, resulta agora sem dificuldade.

Por outro lado, existindo o integral, $\int_a^{a+T} f(x)\,dx$, a função f é integrável (própria ou impropriamente) em todo o intervalo $[x,y] \subset \mathbf{R}$, já que este está contido numa união finita de intervalos congruentes com $[a, a+T]$. Então, dado $a' \in \mathbf{R}$, tem-se por (1) :

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{a'+T} f(x)\,dx &= \int_{a'}^{a} f + \int_{a}^{a+T} f + \int_{a+T}^{a'+T} f = \\ &= \int_{a'}^{a} f + \int_{a}^{a+T} f + \int_{a}^{a'} f = \int_{a}^{a+T} f(x)\,dx. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Poder-se-ia pensar que uma função $f : D \to \mathbf{R}$, periódica, admite sempre um mais pequeno período $T > 0$; tal não é o caso: a função

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 1, & \text{se} \quad x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

é claramente periódica, em que todo o racional $r \neq 0$ é período.

8.1.4. Definição. *Diz-se que f tem um **período primitivo** se f admite um mais pequeno período positivo, $T_0 > 0$.*

8.1.5. Proposição. *Seja $f : D \to \mathbf{R}$ uma função periódica não constante e com pelo menos um ponto de continuidade. Então f admite um período primitivo $T_0 > 0$. Todo o período T de f é múltiplo inteiro de T_0 : $T = kT_0,\ k \in \mathbf{Z}$.*

Demonstração. Seja $f : D \to \mathbf{R}$, periódica, não constante e contínua em $a \in D$. Comecemos por mostrar que não pode haver infinitos períodos arbitrariamente pequenos : $T_n \to 0$. Se assim for, dado $x \in D$ qualquer, tome-se $k_n \in \mathbf{Z}$ o menor inteiro tal que $a - x \leq k_n T_n < a - x + T_n$; então, $w_n = k_n T_n \to a - x$, isto é, $x + w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Como os w_n são períodos de f, resulta que $f(x) = f(x + w_n)$ e logo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x + w_n) = f(a), \ \ \forall x \in D,$$

o que implica f constante.
Assim, não havendo períodos arbitrariamente pequenos, o ínfimo dos períodos positivos, $T_0 = \inf\{T > 0\}$, é ainda período de f (caso contrário, existia $T_n \to T_0, T_n \neq T_{n+1}$ e logo $w_n = T_n - T_{n+1} \to 0$, contrariando a primeira parte da demonstração).
Tomemos enfim um qualquer período $T > T_0$ e seja k o maior inteiro que satisfaz $kT_0 \leq T$. Como $T - kT_0$ é ainda um período de f (se não for nulo) e $T - kT_0 < T_0$, ter-se-á necessariamente $T - kT_0 = 0$, isto é, todo o período positivo é múltiplo inteiro de T_0. $\blacksquare$

Se $f_1, f_2 : D \to \mathbf{R}$ são funções periódicas com o mesmo período T, é claro que f_1+f_2 é T-periódica. Mais geralmente, se f_1 e f_2 são periódicas de períodos T_1 e T_2 respetivamente, nem sempre f_1+f_2 é periódica; contudo, se $T_1/T_2 \in \mathbf{Q}$ (diz-se que T_1 e T_2 são comensuráveis) facilmente se vê que f_1+f_2 é periódica: com efeito, se $T_1/T_2 = p/q \in \mathbf{Q}$, $p, q \in \mathbf{Z} - \{0\}$, então $qT_1 = pT_2 = T$, pelo que f_1 e f_2 admitem o mesmo período T (cf. (8.1.2.)) e logo $f_1 + f_2$ é T-periódica.

Particularmente importante é o caso das funções $\sin kx$, $\cos kx$, $k = 1, \ldots, n$. A função $\sin x$ é 2π-periódica; $\sin 2x$ é $2\pi/2 = \pi$-periódica; enfim, a função $\sin nx$ é $2\pi/n$-periódica. O cociente dos períodos referidos é racional e portanto as ditas funções admitem um mesmo período (que neste caso é, por exemplo, 2π) e o mesmo para as funções $\cos kx$. Em consequência, a função

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_0,\, a_k,\, b_k \in \mathbf{R}$$

é 2π-periódica. A anterior função, $S_n(x)$, é usualmente designada por ***polinómio trigonométrico***. Na figura abaixo, exibe-se o gráfico da função 2π-periódica: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, $f_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, 3$.

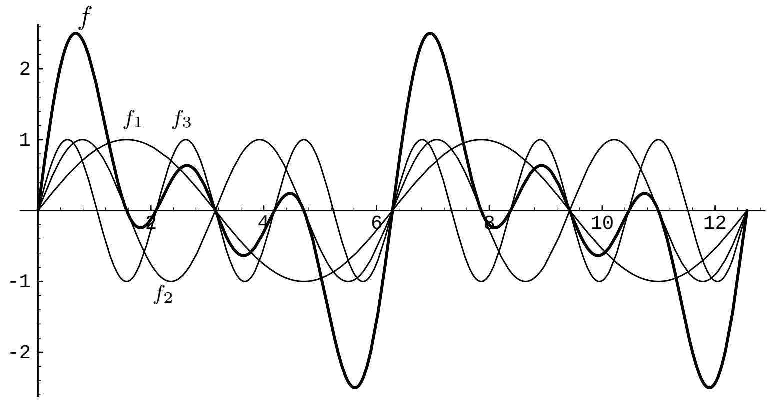


Figura 8.5

Mais adiante veremos que, sob condições bastante gerais, toda a função 2π-periódica em $\mathbf{R}$ é limite de polinómios trigonométricos e portanto soma de série de funções de que $(S_n(x))$ são as somas parciais.

Sendo f uma função T-periódica em $\mathbf{R}$, podemos sempre reduzir-nos a uma função 2π-periódica; é o que exprime a proposição seguinte:

8.1.6. Proposição. *Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função periódica de período T. Então a função g, dada por $g(x) = f\left(\dfrac{T}{T'}x\right)$, é periódica de período T'.*

Demonstração. Basta observar que

$$g(x+T') = f\left(\frac{T}{T'}(x+T')\right) = f\left(\frac{T}{T'}x + T\right) = f\left(\frac{T}{T'}x\right) = g(x). \blacksquare$$

8.2. Séries de Fourier. Introdução.

Em seguida trabalharemos sempre com funções "absolutamente integráveis".

8.2.1. Definição. *Diz-se que uma função real é* ***absolutamente integrável*** *em $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$, se existe um número finito de pontos $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ tais que:*

a) f é R-integrável em todo o intervalo compacto que não contenha nenhum dos pontos $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

b) Para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, o integral $\displaystyle\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx$ existe como integral definido ou como integral impróprio absolutamente convergente.

Assim, se f é absolutamente convergente en $[a,b]$, tem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx.$$

Observação. Notemos que a precedente definição não exige que f esteja definida nos pontos c_k.

A título de exemplo, a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} [2\log(|x|-2) - 2]\, e^{x/5}, & x < -2 \\ 2e^{\cos x}, & -2 < x < 1 \\ \dfrac{3\sin^2 x}{x^2(x-1)^{4/5}}, & x > 1 \end{cases}$$

é abslolutamente integrável em $\mathbf{R}$ (cf. Fig. 8.6).

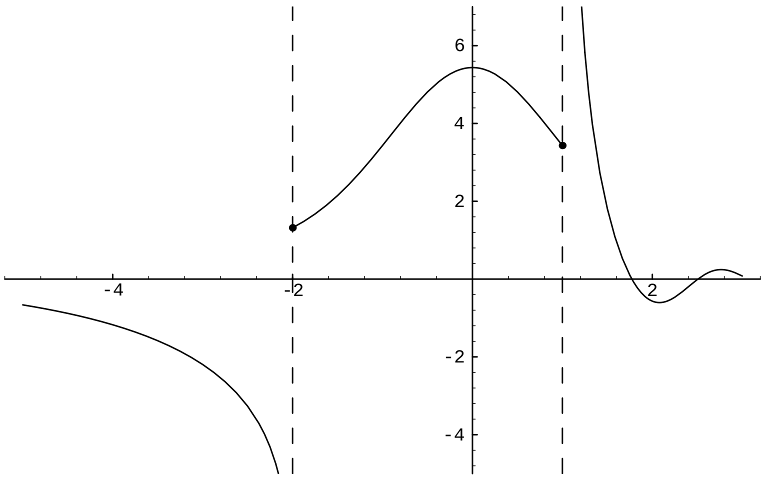


Figura 8.6

8.2.2. Definição. *Chama-se* ***série trigonométrica****, a série de funções*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots \in \mathbf{R}.$$

Repare-se que se a série trigonométrica é convergente em x, então será convergente em $x + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbf{Z}$ (isto é, em todos os pontos congruentes com x, módulo 2π), dado que o termo geral, $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, é uma função periódica de período 2π. Assim, a função soma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1}$$

é uma função periódica de período 2π.

Suponha-se a igualdade (1) verificada em $]-\pi,\pi[$ (excepto possivelmente num número finito de pontos) e admita-se que a função f assim definida é absolutamente integrável em $]-\pi,\pi[$. Multipliquemos ambos os membros de (1) por $\cos kx$, ($k \geq 0$ inteiro) e suponha-se ainda que é possível integrar termo a termo em $]-\pi,\pi[$. Como (exercício)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = 0 \ \ (k \neq n) \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx = 0,$$

resulta que

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) \cos kx \, dx = 0 \ \ (k \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_k(x) \cos kx \, dx = \pi a_k, \ \ (k \geq 0).$$

Portanto, sob as hipóteses precedentes

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \pi a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

e analogamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \pi b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Logo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \qquad (2)$$

Os números a_k e b_k dizem-se os ***coeficientes de Fourier*** da função (2π-periódica e absolutamente integrável) f.

Assim, a cada função $f \ :] - \pi, \pi[\rightarrow \mathbf{R}$, absolutamente integrável (a qual pode ser prolongada por periodicidade 2π), associamos a série trigonométrica (1), convergente ou divergente, com os coeficientes definidos por (2).

8.2.3. Definição. *Sendo $f :] - \pi, \pi[\rightarrow \mathbf{R}$ absolutamente integrável, a série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

com os coeficientes a_n e b_n dados por (2), *diz-se a* ***série de Fourier*** *de f e escreve-se*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Observação. Repare-se que modificando f num número finito de pontos a função permanece absolutamente integrável e tem a mesma série de Fourier: os integrais que definem os coeficientes a_n e b_n não se alteram ao modificarmos f num número finito de pontos.

O ***problema central*** da teoria que adiante desenvolvemos consiste em saber ***sob que hipóteses*** a série de Fourier de f é convergente e em particular convergente para $f(x)$, pontualmente ou uniformemente nalguma parte $D \subset [-\pi, \pi]$.

8.2.4. Exemplos.

1. Seja $f :]-\pi, \pi[\to \mathbf{R}$ uma função absolutamente integrável. Se f é função ***par***, então $f(x) \cos nx$ é par e $f(x) \sin nx$ é ímpar. Logo, no desenvolvimento de Fourier de f, vem

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx, \;\; k = 0, 1, \ldots \quad \text{e} \quad b_k = 0, \;\; k \in \mathbf{N};$$

neste caso a série de Fourier de f é uma série de cossenos. Analogamente, se f é função ***ímpar***,

$$a_k = 0, \quad \text{e} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx$$

e assim, a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos (note-se que o prolongamento periódico de uma função par, respetivamente ímpar, é uma função par, respetivamente ímpar).

2. Procure-se o desenvolvimento de Fourier de $f(x) = |x|, \; x \in]-\pi, \pi[$. Tratando-se de uma função par, obtemos um desenvolvimento de f em série de cossenos, com

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos kx \, dx, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

Integrando por partes,

$$\int_0^\pi x \cos kx \, dx = \left[\frac{1}{k} x \sin kx \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin kx \, dx, \;\; k \neq 0$$

e logo, para $k \neq 0$,

$$\int_0^\pi x \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \text{ par} \\ -\dfrac{2}{k^2} & \text{se} \quad k \text{ ímpar} \end{cases}$$

Obtemos assim o desenvolvimento,

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right), \quad x \in]-\pi, \pi[.$$

3. Desenvolva-se em série de senos a função $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi[$. Como uma série de senos é o desenvolvimento de uma função ímpar, teremos de definir $f(x) = -\cos x$ para $x \in]-\pi, 0[$. No desenvolvimento procurado, os coeficientes não nulos são

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x\, \sin kx\, dx, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

Mas

$$\int_0^\pi \cos x\, \sin kx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\sin(k+1)\, x + \sin(k-1)\, x]\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \text{ ímpar} \\ \dfrac{2k}{k^2-1} & \text{se} \quad k \text{ par} \end{cases}$$

Fazendo $k = 2n$, $n = 1, 2, \ldots$, obtém-se

$$\cos x \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2-1}, \qquad x \in [0, \pi[.$$

4. Seja $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ uma função absolutamentente integrável. Representemos por $\tilde{f}(x)$ o prolongamento periódico de f, de período $T = b - a$. Sabendo que $\tilde{g}(y) = \tilde{f}\left(\dfrac{T}{2\pi}y\right)$ é periódica de período 2π (cf. (8.1.6.)), é agora simples obter o desenvolvimento de Fourier de f. Com efeito

$$\tilde{f}\left(\frac{T}{2\pi}y\right) = \tilde{g}(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, \cos ny + b_n\, \sin ny)$$

e portanto, fazendo $x = (T/2\pi)\, y$, tem-se

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, \cos n\omega x + b_n\, \sin n\omega x)$$

com $\omega = 2\pi/T$ $(*)$ e, para $n = 0, 1, \ldots,$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(y)\, \cos ny\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}\left(\frac{T}{2\pi}y\right)\, \cos ny\, dy =$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(x)\, \cos n\omega x\, dx = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\, \cos n\omega x\, dx,$$

$(*)$ O termo $\omega = 2\pi/T$ é usualmente designado por *pulsação*.

dado que $\tilde{f}(x)\cos n\omega x$ é T-periódica (cf. (8.1.3.)). Analogamente, tem-se

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin n\omega x\,dx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

8.2.5. Notação complexa das séries trigonométricas.

Seja

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \tag{1}$$

a sucessão das somas parciais da série trigonométrica correspondente. Tendo presente que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta \in \mathbf{R})$, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, tem-se

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right), \quad \sin kx = -\frac{1}{2}i\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right).$$

Substituindo, obtém-se

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ikx}, \tag{2}$$

em que

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ \alpha_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \qquad k = 1, 2, \dots \\ \alpha_0 = \frac{1}{2}a_0 \end{cases} \tag{3}$$

Daqui se tira

$$\begin{cases} a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} \\ b_k = i(\alpha_k - \alpha_{-k}) \end{cases} \tag{4}$$

Notemos que reciprocamente, dado $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ikx}$, $\alpha_k \in \mathbf{C}$, esta soma é um polinómio trigonométrico (1) com a_k e b_k dados por (4), e estes são reais se e só se $\alpha_k + \alpha_{-k}$ é real e $\alpha_k - \alpha_{-k}$ é imaginário puro; isto é, $S_n(x)$ em (2) representa um polinómio trigonométrico com coeficientes a_k e b_k reais, se e só se α_k e α_{-k} são complexos conjugados.

Finalmente, observe-se que a série trigonométrica pode ser representada pela série

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\alpha_k e^{ikx}$$

entendida esta como o limite $n \to \infty$ de

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} \alpha_k e^{ikx}.$$

8.2.6. Lema. *Tem-se*

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) =& \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \\ =& \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) x}{2 \sin \dfrac{x}{2}}, \qquad x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Demonstração. Comecemos por observar que a fórmula só faz sentido para $\sin x/2 \neq 0$, isto é, $x \neq 2k\pi \ \ (k \in \mathbf{Z})$; mas para estes pontos, ***define-se***

$$\sigma_n(x) = n + \frac{1}{2}, \qquad x = 2k\pi, \ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Dado que $\sigma_n(x)$ é um polinómio trigonométrico com $a_k = 1$ e $b_k = 0$, escreva-se então (cf. (8.2.5.), (2))

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikx} = \frac{1}{2} e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx}$$

que representa uma progressão geométrica de razão $e^{ix} = q = \cos x + i \sin x$. É claro que $q = 1$ se e só se $\cos x = 1$, $\sin x = 0 \iff x = 2k\pi \ \ (k \in \mathbf{Z})$ e o lema resulta válido para estes pontos. Para todos os outros valores de x $(q \neq 1)$ a soma da progressão será

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} e^{-inx} \, \frac{1 - q^{2n+1}}{1 - q} = \frac{1}{2} \, \frac{e^{-inx} - e^{ix(n+1)}}{1 - e^{ix}};$$

multiplicando o numerador e denominador por $e^{-ix/2}$, vem finalmente

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} \, \frac{e^{-i(n+1/2)x} - e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) x}{2 \sin \dfrac{x}{2}}. \quad \blacksquare$$

8.2.7. Proposição. *Sejam*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

as somas parciais da série de Fourier de uma função f absolutamente integrável em $]-\pi, \pi[$. Então

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin \mu t}{2 \sin \dfrac{t}{2}} \, dt \qquad \textit{com} \quad \mu = n + \frac{1}{2}.$$

Demonstração. Dado que os coeficientes de Fourier (cf. (8.2.2.)) se escrevem

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt,$$

tem-se

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\cos kt \, \cos kx + \sin kt \, \sin kx}_{\cos k(t-x)} \right] dt$$

e pelo anterior lema resulta

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin [(n+1/2)(t-x)]}{2 \sin[(t-x)/2]} \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t) \frac{\sin [(n+1/2)(t-x)]}{2 \sin[(t-x)/2]} \, dt$$

dado que, para funções periódicas, o integral é invariante para intervalos congruentes. Finalmente, a evidente mudança de variável $t - x \to t$, dá-nos o resultado:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin \left(n + \dfrac{1}{2} \right) t}{2 \sin \dfrac{t}{2}} \, dt. \quad \blacksquare$$

8.3. Os teoremas de convergência.

Os principais resultados de convergência vão exigir algumas proposições auxiliares.

8.3.1. Proposição *Seja* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *uma função R-integrável. Então* $\forall \beta \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(x)\, \sin(\alpha x + \beta)\, dx = 0.$$

Demonstração. Se f é constante, tem-se

$$\left| \int_a^b \sin(\alpha x + \beta)\, dx \right| = \left| \frac{\cos(\alpha a + \beta) - \cos(\alpha b + \beta)}{\alpha} \right| \leq \frac{2}{\alpha} \overset{\alpha \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e logo o resultado é ainda verdadeiro se f é uma função em escada. Dado agora um $\varepsilon > 0$ qualquer, seja P uma partição de $[a,b]$ tal que $\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon/2$ e designemos por $m(x)$ e $M(x)$ as funções em escada associadas a $\underline{S}_P(f)$ e $\overline{S}_P(f)$; é claro que $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$. Então

$$\left| \int_a^b (f(x) - m(x))\, \sin(\alpha x + \beta)\, dx \right| \leq$$
$$\leq \int_a^b M(x) - m(x)\, dx = \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \varepsilon/2.$$

Por outro lado, existe A suficientemente grande tal que, para $\alpha > A$, se tem $\left| \int_a^b m(x)\, \sin(\alpha x + \beta)\, dx \right| < \varepsilon/2$. Logo

$$\left| \int_a^b f(x)\, \sin(\alpha x + \beta)\, dx \right| < \varepsilon \quad \text{para} \quad \alpha > A. \quad \blacksquare$$

Observações. 1. Fazendo $\beta = 0,\ \pi/2$, obtemos em particular

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(x)\, \sin \alpha x\, dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b f(x)\, \cos \alpha x\, dx = 0.$$

2. O leitor facilmente deriva da precedente demonstração que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_k^l f(x)\, \sin(\alpha x + \beta)\, dx = 0,$$

uniformemente em $k, l \in [a,b]$.

Corolário. *Seja f absolutamente integrável em $[a,b] \subset \overline{\mathbf{R}}$. Então*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_k^l f(x)\,\sin(\alpha x+\beta)\,dx = 0,$$

uniformemente em $k, l \in [a,b]$.

Demonstração. Basta decompor $\int_a^b f$ segundo os intervalos associados aos pontos impróprios e mostrar que em cada um deles se tem o resultado. Mostremos por exemplo, no caso de $b = +\infty$, que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_c^{+\infty} f(x)\,\sin(\alpha x+\beta)\,dx = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja M tal que $\int_M^{+\infty} |f(x)| < \varepsilon/2$. Por outro lado, resulta da proposição que existe $A > 0$ tal que, para $\alpha > A$, se tem

$$\left|\int_c^M f(x)\,\sin(\alpha x+\beta)\,dx\right| < \varepsilon/2.$$

Logo

$$\left|\int_c^{+\infty} f(x)\,\sin(\alpha x+\beta)\,dx\right| \le \left|\int_c^M + \int_M^{+\infty}\right| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

8.3.2. Proposição. *Seja f uma função absolutamente integrável em $[a,b] \subset \mathbf{R}$ e φ uma função monótona em $[k,l] \subset [a,b]$. Então*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_k^l f(x+t)\,\varphi(t)\,\sin\alpha t\,dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to+\infty} \int_k^l f(x+t)\,\varphi(t)\,\cos\alpha t\,dt = 0,$$

uniformemente em x, k, e l tal que $k+x \in [a,b]$ e $l+x \in [a,b]$.

Demonstração. Faça-se $u_\alpha = \int_k^l f(x+t)\,\sin\alpha t\,dt$ ($\varphi \equiv 1$) e mostremos primeiro o resultado para u_α. A mudança de variável $t+x=\tau$ dá-nos

$$\begin{aligned}
u_\alpha &= \int_{k+x}^{l+x} f(\tau)\,\sin\alpha(\tau-x)\,d\tau \\
&= \int_{k+x}^{l+x} f(\tau)\,[\sin\alpha\tau\cos\,\alpha x - \cos\alpha\tau\sin\alpha x]\,d\tau \\
&= \cos\alpha x \int_{k+x}^{l+x} f(\tau)\,\sin\alpha\tau\,d\tau - \sin\alpha x \int_{k+x}^{l+x} f(\tau)\,\cos\alpha\tau\,d\tau,
\end{aligned}$$

e o resultado sai agora do corolário anterior. Analogamente para $u_\alpha = \int_k^l f(x+t)\cos\alpha t\,dt$. Tomando agora φ monótona em $[k,l]$, resulta do segundo teorema da média (cf. (5.5.6.))

$$\begin{aligned}&\int_k^l f(x+t)\,\varphi(t)\,\sin\alpha t\,dt = \\ &= \varphi(k)\int_k^c f(x+t)\,\sin\alpha t\,dt + \varphi(l)\int_c^l f(x+t)\,\sin\alpha t\,dt\end{aligned} \tag{1}$$

para algum c entre k e l. Aplicando a primeira parte da demonstração a cada um dos anteriores integrais no segundo membro de (1) e dado que φ é limitada, obtemos a conclusão. ■

No que se segue, supomos f uma função periódica de período 2π e absolutamente integrável em $[-\pi,\pi]$. Então é claro que f é absolutamente integrável em qualquer intervalo $[a,b]\subset \mathbf{R}$. Vimos antes que a convergência da série de Fourier de f em $x\in[-\pi,\pi[$ (e portanto em todo o ponto 2π-congruente àquele) é determinada pela convergência da sucessão das somas parciais, dada pelo integral (cf. (8.2.7.))

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,dt. \tag{2}$$

8.3.3. Teorema. *A série de Fourier de f é convergente no ponto $x\in\mathbf{R}$ e tem por soma $S(x)$ se e só se $\forall\delta>0,\ \exists\varepsilon>0$ tal que*

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon}[f(x+t)+f(x-t)-2S(x)]\,\frac{\sin(n+1/2)\,t}{t}\,dt\right| < \delta \tag{3}$$

*para $n>n(\delta)$. A série é uniformemente convergente no intervalo $[p,q]$, se $S(x)$ é limitada em $[p,q]$ e se existe $\varepsilon>0$, **independente de** $x\in[p,q]$, tal que se tenha* (3).

Demonstração. Escreva-se a sucessão das somas parciais dada por (2) como

$$S_n(x) = \gamma_n(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t+x)\,\frac{\sin(n+1/2)\,t}{2\sin t/2}\,dt$$

com $\varepsilon>0$ já fixado, mas a determinar à posteriori, e em que

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}.$$

É claro da proposição 8.3.2. que $\gamma_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ e uniformemente em $x \in [p, q]$; tenha-se presente que f é absolutamente integrável em qualquer $[a, b] \subset \mathbf{R}$ e $\dfrac{1}{2\sin(t/2)}$ é monótona em $[-\pi, -\varepsilon]$ e $[\varepsilon, \pi]$. Por outro lado, defina-se

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin t/2} - \dfrac{1}{t} & \text{se} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

Facilmente se vê (exercício) que $\varphi(t)$ é função de classe C^1 em $[-\varepsilon, \varepsilon]$ com $\varphi'(0) = -1/4!$. Escolhe-se então ε de modo a que φ tenha derivada negativa, e logo seja monótona em $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Tem-se

$$S_n(x) = \gamma_n(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t+x)\, \sin[(n+1/2)\,t]\, \varphi(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t+x)\, \frac{\sin(n+1/2)\,t}{t}\, dt$$

e de novo pela prop. 8.3.2., o primeiro integral tende para zero $(n \to \infty)$, e portanto

$$S_n(x) = \tilde{\gamma}_n(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t+x)\, \frac{\sin(n+1/2)\,t}{t}\, dt \tag{4}$$

com $\tilde{\gamma}_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ uniformemente em $x \in [p, q]$.
Consideremos agora a função $g(x) \equiv 1$ e determine-se as somas parciais da sua série de Fourier

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

com

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} 1.dt = 2;$$

$$a_k = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} 1.\cos kt\, dt = 0; \quad (k = 1, 2 \ldots).$$

$$b_k = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} 1.\sin kt\, dt = 0.$$

Assim, $S_n(x) = 1$ para a função $g(x) \equiv 1$; aplicando (4) a esta função, tem-se

$$1 = \gamma_n^* + \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} 1.\, \frac{\sin(n+1/2)\,t}{t}\, dt, \quad \gamma_n^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Multiplicando esta igualdade por um dado valor numérico $S(x)$ e subtraindo de (4), obtemos

$$S_n(x) - S(x) = \rho_n(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(t+x) - S(x)]\, \frac{\sin(n+1/2)\,t}{t}\, dt.$$

Decompondo $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{0} + \int_{0}^{\varepsilon}$ e mudando a variável $t \to -t$ no primeiro integral, tem-se enfim

$$\begin{aligned} S_n(x) - S(x) = \\ =\rho_n(x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon} [f(t+x) + f(x-t) - 2S(x)]\, \frac{\sin(n+1/2)\,t}{t}\, dt \end{aligned}$$

com $\rho_n(x) = \tilde{\gamma}_n(x) - S(x)\gamma_n^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em $x \in [p,q]$, desde que $S(x)$ seja limitada em $[p,q]$. A conclusão do teorema é agora imediata.

∎

8.3.4. Teorema. *Seja f uma função 2π-periódica e localmente absolutamente integrável. Suponhamos que numa vizinhança de um ponto $x_0 \in \mathbf{R}$, f verifica a condição*

$$|f(x) - f(x_0)| \le C|x - x_0|^\alpha, \quad \alpha > 0,\ x \in V(x_0). \tag{5}$$

Então $f(x_0)$ é soma da sua série de Fourier no ponto x_0.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset V(x_0)$. Fazendo $S(x_0) = f(x_0)$, o primeiro membro de (3) vem inferior a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{t}\,|f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{t}\,|f(x_0-t) - f(x_0)|\, dt < \\ < \frac{2}{\pi}\frac{C}{\alpha}\varepsilon^\alpha < \delta \end{aligned}$$

com ε pequeno. ∎

Utilizando o mesmo raciocínio e de novo o teorema 8.3.3., imediatamente se obtém

Corolário 1. *Seja f uma função 2π-periódica e localmente absolutamente integrável, verificando a condição de Hölder:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le C|x_1 - x_2|^\alpha, \quad \alpha > 0,\ \forall x_1, x_2 \in [p,q].$$

Então a série de Fourier de f converge uniformemente em qualquer intervalo $[p+\varepsilon, q-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Corolário 2. *Seja f uma função 2π-periódica e localmente absolutamente integrável. Então a série de Fourier de f converge em $x_0 \in \mathbf{R}$ se existem e são finitas as derivadas laterais $f'_d(x_0)$ e $f'_e(x_0)$. Se além disso f é contínua e satisfaz $|f'(x)| \leq M,\ M > 0$, para todo o $x \in [p, q]$, excepto num número finito de pontos, então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $[p + \varepsilon, q - \varepsilon],\ \varepsilon > 0$.*

Demonstração. Se f tem derivadas laterais finitas em x_0, é claro que numa vizinhança de x_0, f satisfaz a condição (5) com $\alpha = 1$ (porquê?), e o resultado sai logo do teorema anterior. Finalmente, sendo f contínua tal que $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [p, q]$ excepto num número finito de pontos, f é aí lipschitziana (porquê?) e a conclusão sai agora do corolário anterior. ∎

O teorema seguinte é um dos resultados mais gerais da teoria clássica das séries de Fourier.

8.3.5. Teorema (*Jordan*). *Seja f uma função 2π-periódica. Suponha-se que f é de variação limitada numa vizinhança de um ponto x_0, $V(x_0) = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. Então a série de Fourier de f converge no ponto x_0 para o valor médio de f nesse ponto: $\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$.*

Demonstração. Se f é de variação limitada em $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, a função

$$\psi(t) = f(x_0 + t) - f(x_0^+) + f(x_0 - t) - f(x_0^-)$$

é de variação limitada em $[0, \eta]$ e logo é diferença de duas funções crescentes: $\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$. Como $\lim_{t \to 0^+} \psi(t) = 0$, tem-se $\lim_{t \to 0^+} \psi_1(t) = \lim_{t \to 0^+} \psi_2(t) = C$ e pode admitir-se $C = 0$ (basta observar que $\psi(t) = (\psi_1(t) - C) - (\psi_2(t) - C)$). Então, $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ são funções não negativas em $]0, \eta]$. Tomando agora $S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$, o integral (3) do teorema 8.3.3. decompõe-se em duas parcelas; uma delas é (por exemplo)

$$\int_0^{\varepsilon} \psi_1(t) \frac{\sin(n + 1/2)\, t}{t}\, dt.$$

Do segundo teorema da média, tira-se então

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \psi_1(t) \frac{\sin(n + 1/2)\, t}{t}\, dt \right| = \psi_1(\varepsilon) \left| \int_{\rho}^{\varepsilon} \frac{\sin(n + 1/2)\, t}{t}\, dt \right| =$$

$$\psi_1(\varepsilon) \left| \int_{(n+1/2)\rho}^{(n+1/2)\varepsilon} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leq \psi_1(\varepsilon) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

dado que (exercício),

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t}\, dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}.$$

Como $\psi_1(0^+) = 0$ e portanto $\psi_1(\varepsilon) < \delta \Big/ \left(2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right)$ desde que ε seja suficientemente pequeno, a conclusão sai do teorema 8.3.3. ∎

Consequência imediata é o seguinte

Corolário 1. *Seja f uma função 2π-periódica e contínua em x_0. Se f é de variação limitada numa vizinhança $V(x_0)$, então a série de Fourier de f converge no ponto x_0 para $f(x_0)$.*

Observação. Se f é de variação limitada em $[a, b]$, o teorema de Jordan aplica-se a todos os pontos interiores, $x \in]a, b[$, mas não necessariamente a a e b. Contudo, se $b = a + 2\pi$, pela periodicidade 2π de f, esta é ainda de variação limitada em todo o intervalo que contenha $[a, b]$, e logo o teorema ainda se aplica a a e b.

Corolário 2. *Seja f uma função 2π-periódica. Suponha-se que f é de variação limitada e contínua num intervalo $[a, b]$. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para $f(x)$ em qualquer intervalo $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Como f é de variação limitada, tem-se em $[a, b]$, $f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ com φ_1 e φ_2 funções crescentes. Consideremos agora a função $t \to \psi(x, t)$, dada por

$$\psi(x, t) = f(x + t) + f(x - t) - 2f(x), \;\; x \in [a, b].$$

Então $\psi(x, t) = \psi_1(x, t) - \psi_2(x, t)$, com

$$\psi_1(x, t) = \varphi_1(x + t) - \varphi_2(x - t) - \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \geq 0$$

$$\psi_2(x, t) = \varphi_2(x + t) - \varphi_1(x - t) - \varphi_2(x) + \varphi_1(x) \geq 0.$$

Sendo f contínua em $[a, b]$, φ_1 e φ_2 são também contínuas em $[a, b]$ (cf. (5.8.7.), Cor.1.) e logo uniformemente contínuas (cf. (3.3.14.)). Retomando a demonstração do teorema de Jordan, resulta da continuidade uniforme de φ_1 e φ_2

$$\psi_1(x,t) = [\varphi_1(x+t) - \varphi_1(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_2(x-t)] <$$
$$< \frac{\delta}{2\int_{-\pi}^{\pi} \sin t/t\, dt} + \frac{\delta}{2\int_{-\pi}^{\pi} \sin t/t\, dt}$$

desde que $0 < t < \varepsilon$ e uniformemente em $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. ∎

8.3.6. Exemplos. Como vimos, o desenvolvimento em série de Fourier de uma função $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, absolutamente integrável em $[a,b]$, corresponde ao desenvolvimento da função periódica de período $T = b - a$, prolongamento de f, e os coeficientes da série, a_n, b_n, vêm dados por

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\, \cos n\omega x\, dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\, \sin n\omega x\, dx,$$

com $\omega = 2\pi/T$ (cf. (8.2.4.),(4.)). Frequentemente, procura-se o desenvolvimento de Fourier de funções 2π-periódicas. Tratando-se de funções pares (resp. ímpares) obtém-se, o desenvolvimento em série de cossenos (resp. série de senos) com os coeficientes a_n (resp. b_n) dados por (8.2.4.,(1.)). Os vários resultados de convergência exibidos determinam os pontos em que a série converge, em particular para $f(x)$, e uniformemente nalguma região $D \subset \mathbf{R}$.

1. Desenvolva em série de Fourier, $f(x) = |x|, \ -\pi < x < \pi$.

Vimos anteriormente (cf. (8.2.4.),(2.)) que

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right), \quad x \in]-\pi, \pi[. \qquad (1)$$

A função $f(x) = |x|$ é de variação limitada em $[-\pi, \pi]$ (é derivável com derivada limitada em $]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, (cf. (5.8.4.), Cor.2.)) e claramente contínua em $]-\pi,\pi[$. Observe-se ainda que o prolongamento 2π-periódico de f, digamos $\tilde{f}$, é ainda contínua em $-\pi$ e π, e mais geralmente, em $k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$; basta notar (por ex. no ponto π)

$$f(\pi^-) = \pi \quad \text{e} \quad \tilde{f}(\pi^+) = f((-\pi)^+) = |\pi| = \pi.$$

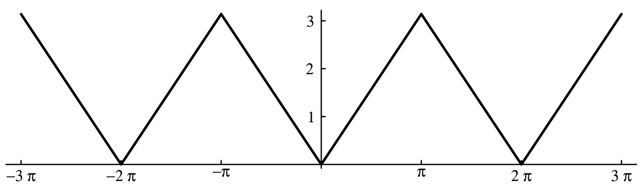


Figura 8.7

Logo, tem-se a igualdade no desenvolvimento (1), e mais geralmente

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right), \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

e uniformemente em todo o $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

2. Mostre a validade do desenvolvimento

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right), \quad 0 < \pi < 2\pi.$$

Trata-se do desenvolvimento da função 2π-periódica, determinada por $f(x) = x^2,\ x \in]0, 2\pi[$. Então

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

e além disso, simples (mas cuidadosas) integrações por partes, dão-nos

$$a_n = \frac{4}{n^2}, \quad b_n = \frac{-4\pi}{n}.$$

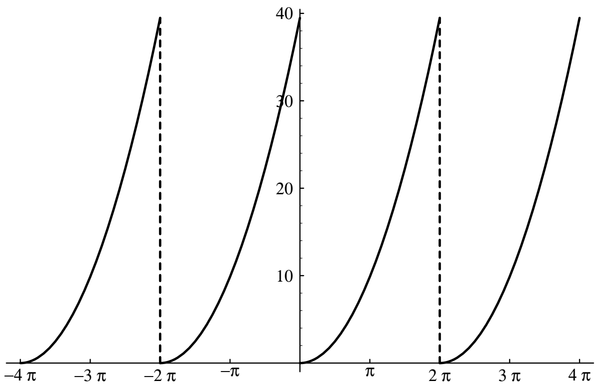


Figura 8.8

Claro que $f(x)$ é de variação limitada em $[0, 2\pi]$ e é contínua em $]0, 2\pi[$. Porém, $f(0^+) = 0 \neq f((2\pi)^-) = \tilde{f}(0^-) = 4\pi^2$. Assim, a série é convergente em $]0, 2\pi[$ para a função e uniformemente em $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. Nos extremos do intervalo, aplica-se o teorema de Jordan na sua generalidade; no ponto 0, por exemplo, a soma da série vem dada por $[\tilde{f}(0^+) + \tilde{f}(0^-)]/2 = 2\pi^2$ e logo,

$$2\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Daqui resulta a fórmula $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Veja-se agora um exemplo mais elaborado, no que respeita ao cálculo dos coeficientes de Fourier. Mostremos o seguinte desenvolvimento de Fourier

$$\log\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \qquad x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

A função $\log|\sin x/2|$, definida em $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi\},\ k \in \mathbf{Z}$, é 2π-periódica e par. Repare-se ainda que a função é absolutamente integrável em $[0, \pi]$. Logo, tem-se o desenvolvimento em série de cossenos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

com

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx.$$

Cálculo de a_0 : Tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\,dx = \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \log\left[2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}\right]dx = \qquad (2)\\
&= \pi\log 2 + 2\int_0^{\pi/2} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\,dx + 2\int_0^{\pi/2} \log\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Mas como $\cos x/2 = \sin[(\pi - x)/2]$, mudando a variável no último integral, tem-se

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\cos\frac{x}{2}\right)\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\,dx$$

e de (2) resulta $\displaystyle\int_0^{\pi} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\,dx = -\pi\log 2$, pelo que $a_0/2 = -\log 2$.

Cálculo dos a_n : Integrando por partes, tem-se $(n \geq 1)$

$$\int_0^{\pi} \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{1}{2\sin x/2}\cos x/2.\sin nx\,dx. \qquad (3)$$

Mas (recorde-se que $\sin a + \sin b = 2\sin(a+b)/2\ \cos(a-b)/2$),

$$\cos\frac{x}{2}.\sin nx = \frac{1}{2}\left[\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(nx-\frac{x}{2}\right)\right]$$

e logo, o integral em (3) desdobra-se nas parcelas

$$-\frac{1}{2n}\left[\int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)\,x}{2\sin x/2}\,dx + \int_0^\pi \frac{\sin((n-1)+1/2)\,x}{2\sin x/2}\,dx\right].$$

Finalmente, dado que (cf. (8.2.6.))

$$\frac{\sin\,(n+1/2)\ x}{2\sin x/2} = \frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx, \quad n\ge 0,$$

obtemos por simples integrações

$$\int_0^\pi \log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = -\frac{1}{2n}\,\pi$$

e portanto $a_n = -\dfrac{1}{n}$.

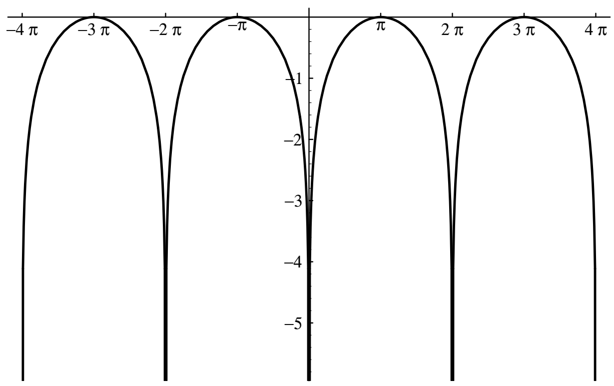


Figura 8.9

Dado que a função $\log|\sin x/2|$ é contínua em $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, e de variação limitada em todo o intervalo compacto contido em $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$, a série de Fourier converge para a função em todo $x\in\mathbf{R},\ x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

8.3.6. Integração e derivação das séries de Fourier.

A integração termo a termo das séries de Fourier aplica-se, naturalmente, sempre que se esteja nas condições de convergência uniforme num intervalo $[a,b]$ (cf. (7.3.2.)). Particularmente notável é, contudo, a possibilidade de derivar termo a termo a série de Fourier de uma função periódica suficientemente regular (i.e. de classe C^k). Suponha-se, com efeito, que $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ é uma função 2π-periódica e derivável. Então, uma simples integração por partes dá-nos

$$\begin{aligned}\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \\ &= \left[\frac{1}{n}f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \\ &= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \\ &= \left[-\frac{1}{n}f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \\ &= \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx\end{aligned} \tag{1'}$$

O mesmo resultado se obtém supondo que f é uma função 2π-periódica, contínua e admitindo derivada absolutamente integrável (i.e. a função $f'(x)$ está definida em todos os pontos de $[-\pi,\pi]$ excepto num número finito de pontos e é função absolutamente integrável).

Mais geralmente, se f é uma função 2π-periódica, de classe C^k e com derivada $f^{(k+1)}$ absolutamente integrável, aplicando sucessivamente (1) e (1′) e tendo presente que $f, f', \ldots, f^{(k)}$, são ainda 2π-periódicas (porquê?) e contínuas, tem-se

$$\pi|a_n| = \frac{1}{n}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx\right| =$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k+1}\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(x)\sin nx\,dx\right| & \text{se } \; k \quad \text{par} \\ \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k+1}\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(x)\cos nx\,dx\right| & \text{se } \; k \quad \text{ímpar} \end{cases}$$

e analogamente para os coeficientes b_n. Em qualquer dos casos

$$|a_n|,\ |b_n| \le \frac{C}{n^{k+1}},$$

o que mostra que os coeficientes de Fourier de f, a_n e b_n, convergem para 0 $(n \to \infty)$ tanto mais rapidamente quanto mais regular for a função f.

8.3.7. Teorema. *Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função 2π-periódica, de classe C^k, com $k \geq 3$, e com derivada $f^{(k+1)}$ absolutamente integrável. Então a série de Fourier de f pode ser derivada termo a termo $k-1$ vezes.*

Demonstração. É claro que f é soma da sua série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

e tal como vimos, tem-se

$$|a_n|,\ |b_n| \leq \frac{C}{n^{k+1}}.$$

Derivando termo a termo $k-1$ vezes, a série obtida é majorada em módulo por $\sum \frac{D}{n^2}$, e portanto uniformemente convergente (cf. (7.1.10.)). A conclusão sai agora da proposição 7.3.3., Corolário 1. ∎

8.3.8. Aproximação polinomial de Weierstrass.

Os resultados de convergência para as séries de Fourier permitem-nos mostrar, sem dificuldade, um importante teorema de aproximação devido a Weierstrass, o qual estabelece que toda a função contínua num intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}$ é limite uniforme de polinómios.

8.3.9. Proposição. *Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Então, para todo $\delta > 0$ existe um polinómio trigonométrico, $S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, tal que*

$$|f(x) - S_m(x)| < \delta, \quad \forall x \in [a,b].$$

Demonstração. Dado que f é contínua em $[a,b]$, ela é aí uniformemente contínua (cf. (3.3.14.)) e logo, existe $\eta > 0$ tal que

$$|x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \delta/4.$$

Seja $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ uma partição tal que $|x_{i+1} - x_i| < \eta$, $i = 1, \ldots, n-1$, e fixemos um intervalo $[\alpha, \beta]$ satisfazendo $[a,b] \subset]\alpha, \beta[$. Defina-se então a função poligonal $L : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ (cf. Fig. 8.10)

$$L(\alpha) = 0 = L(\beta), \;\; L(x_i) = f(x_i), \;\; i = 1, \ldots, n$$

$$L(x) = L(x_i) + (x - x_i)\,\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$
$$i = 0, \ldots, n, \;\; x_0 = \alpha, x_{n+1} = \beta$$

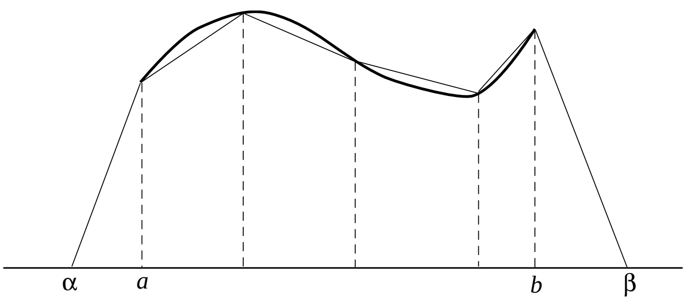


Figura 8.10

Dado que todo $x \in [a,b]$ pertence a algum $[x_i, x_{i+1}]$, logo se vê que

$$\begin{aligned} |f(x) - L(x)| &\le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - L(x)| \le \\ &\le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| < \delta/4 + \delta/4 = \delta \end{aligned} \tag{1}$$

Como $L(\alpha) = L(\beta) = 0$, a função L admite um prolongamento periódico como função contínua, com derivada em todos os pontos de $[\alpha, \beta]$ excepto num número finito, e logo é soma uniforme da sua série de Fourier (cf. (8.3.4.), Cor.2). Então, existe $m \in \mathbf{N}$ tal que

$$|L(x) - S_m(x)| < \delta, \quad \forall x \in [a,b] \tag{2}$$

sendo S_m o polinómio trigonométrico associado a L. A conclusão sai agora de (1) e (2). ■

8.3.10. Teorema (*da aproximação de Weierstrass*). *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}$. Então para todo $\delta > 0$, existe um polinómio (algébrico) $P(x)$ tal que*

$$|f(x) - P(x)| < \delta, \quad \forall x \in [a,b].$$

Demonstração. Pela anterior proposição, dado $\delta > 0$, existe um polinómio trigonométrico $S_m(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ tal que

$$|f(x) - S_m(x)| < \delta, \quad \forall x \in [a, b].$$

Como as funções $\cos x$ e $\sin x$ são analíticas em $\mathbf{R}$ o mesmo sucede a $\cos kx$ e $\sin kx$, que portanto são limite uniforme dos seus polinómios de Taylor em cada compacto de $\mathbf{R}$ (cf. (7.4.4.)). Assim, sejam $P_k(x)$ e $Q_k(x)$ os polinómios de Taylor tais que

$$|a_k \cos kx - P_k(x)| < \delta/2m, \quad |b_k \sin kx - Q_k(x)| < \delta/2m, \quad \forall x \in [a, b].$$

Fazendo $P(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(P_k(x) + Q_k(x))$, é agora claro que

$$|f(x) - P(x)| < 2\delta, \quad \forall x \in [a, b]. \blacksquare$$

Exercícios

1. Mostre que são periódicas as seguintes funções

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = x - \alpha \mathrm{I}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right), \ \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = |\sin(\sqrt{2x} + 1)|$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

d) $f : D \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \tan(x + \sin x)$.

2. Demonstre que a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sin\sqrt{|x|}$, não é periódica.

3. Determine o período mínimo positivo da função

$$f(x) = 8 \sin\left(\frac{9x}{8}\right) + 2 \cos\left(\frac{3x}{2}\right).$$

4.

a) Dê um exemplo de uma função periódica em que todo o número racional é período e nenhum irracional o é.

b) Poderá existir uma função periódica em que todo o irracional é período e nenhum racional o é ?

5. Mostre que a função $f : D \to \mathbf{R},\ D \subset \mathbf{R}$, é periódica se existe $T \neq 0$ tal que

$$x \in D \quad \Longrightarrow \quad x+T \in D,\ x-T \in D,\ f(x+T) = -f(x).$$

6. Desenvolva em série de Fourier no intervalo $]-\pi, \pi[$, as seguintes funções :

$$a)\ \ f(x) = \begin{cases} ax & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0 \\ \\ bx & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \qquad a, b \in \mathbf{R}; \qquad b)\ \ f(x) = x^2;$$

$$c)\ \ f(x) = \sin ax; \quad c)\ \ f(x) = \sinh x; \quad d)\ \ f(x) = e^{ax}, \quad (a \in \mathbf{R}).$$

7. Desenvolva em série de senos a função $f(x) = \dfrac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi.$

Aproveite o resultado para calcular a soma das seguintes séries

$$a)\ \ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots; \qquad b)\ \ 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots$$

8. Desenvolva em série de Fourier a função 2π-periódica, $|\sin x|$, e use o resultado para mostrar que

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}; \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

9. Demonstre a validade dos seguintes desenvolvimentos

$$a)\ \ x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \text{se} \quad 0 < x < 2\pi$$

$$b)\ \ \frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$c)\ \ x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right) \quad \text{se} \quad 0 < x < 2\pi$$

$$d)\ \ \cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1} \quad \text{se} \quad 0 < x < \pi$$

$$e)\ \ x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{n^2 - 1} \quad \text{se} \quad -\pi < x < \pi$$

10. Tendo presente o exemplo (8.3.6.(3.)), mostre os seguintes desenvolvimentos

a) $\log\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = -\log 2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n}$ se $x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

b) $\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| = -2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\,x}{2n-1}$ se $x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

11. Escreva as séries de Fourier e investigue a sua convergência para as funções $f, g, h :]-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = \sin^2 x$

b) $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x > 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

BIBLIOGRAFIA

[**1**] APOSTOL, TOM. *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Massachusets, U.S.A. (1957)

[**2**] APOSTOL, TOM. *Calculus*, Vol. I, Blaisdell Pub. Comp. (1967)

[**3**] BOURBAKI, N. *Fonctions d'une variable réelle*, Livre IV, Hermann (1961)

[**4**] CAMPOS FERREIRA, J. *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian (1987)

[**5**] COURANT, J e JOHN, F. *Introduction to Calculus and Analysis*, Interscience Publishers, New York, London, Sydney (1965)

[**6**] GONÇALVES, J.V. *Curso de Álgebra Superior* (1950)

[**7**] GUERREIRO, J. SANTOS *Curso de Matemáticas Gerais*, Vol. 2, 3, Livraria Escolar Editora (1973)

[**8**] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, Vol.1, IMPA, Rio de Janeiro (1987)

[**9**] NICKOLSKY, S.M. *A Course of Mathematical Analysis*, Vol. 1, Mir Publishers, Moscow (1977)

[**10**] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill (1964)

[**11**] SPIVAC, M. *Calculus*, Benjamin (1974)

ÍNDICE REMISSIVO

F

G

I

L

M

N

O

P

R

S

TEXTOS DE MATEMÁTICA

Volumes publicados

1. **Luís Sanchez**
Métodos da Teoria de Pontos Críticos, 1993.
2. **Miguel P. N. Ramos**
Teoremas de Enlace na Teoria de Pontos Críticos, 1993.
3. **Orlando Neto**
Equações Diferenciais em Superfícies de Riemann, 1994.
4. **A. Bivar Weinholtz**
Integral de Riemann e de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$, 4ª Ed., 2006.
5. **Mário S. R. Figueira**
Fundamentos de Análise Infinitesimal, 5ª Ed., 2011.
6. **Owen J. Brison**
Teoria de Galois, 4ª Ed., 2003.
7. **A. Bivar Weinholtz**
Equações Diferenciais - Uma Introdução, 3ª Ed., 2005.
8. **Armando Machado**
Tópicos de Análise e Topologia em Variedades (Esgotado), 1997.
9. **Armando Machado**
Geometria Diferencial - Uma Introdução Fundamental, 2ª Ed., 2002.
10. **A. Bivar Weinholtz**
Teoria dos Operadores, 1998.
11. **T. Monteiro Fernandes**
Topologia Algébrica e Teoria Elementar dos Feixes, 1998.
12. **Owen J. Brison**
Grupos e Representações, 1999.
13. **Jean-Pierre Schneiders**
Introduction to Characteristic Classes and Index Theory, 2000.
14. **Miguel Ramos**
Curso Elementar de Equações Diferenciais, 3ª ed., 2011.
15. **Nuno da Costa Pereira**
Exponencial Complexa, Funções Circulares e Desenvolvimentos em Série, 2001.
16. **Colectivo**
2000 Matemática $\sqrt{\textit{Radical}}$, 2002.
17. **M. C. Póvoas**
Métodos Matemáticos da Física - Uma Introdução, 2002.
18. **José Joaquim Dionísio**
Fundamentos da Geometria, 2ª ed., 2011.
19. **Pedro Jorge Freitas**
Tópicos de Álgebra Superior, 2005.
20. **Pedro Jorge Freitas**
Polinómios, 2010.
21. **Nuno da Costa Pereira**
Teoremas Clássicos de Integração — Um Curso Avançado, 2010.

RESUMO

Este livro é dirigido, em especial, aos alunos das licenciaturas em Matemática e, mais geralmente, a todos aqueles que se interessam por uma apresentação rigorosa dos fundamentos de Análise. Para além dos clássicos temas sobre limite e continuidade, diferenciabilidade, integral de Riemann e primitivação, sucessões e séries de funções, é dado particular relevo aos desenvolvimentos assimptóticos, permitindo uma abordagem clara e sistemática da convergência de séries numéricas e integrais impróprios. No último capítulo exibe-se uma introdução clássica das séries de Fourier, e aí se demonstram resultados gerais de convergência simples e uniforme.

O texto é ilustrado com inúmeros exemplos e exercícios, permitindo aos leitores uma melhor clarificação dos conceitos apresentados.

Faculdade de Ciências - Departamento de Matemática
Campo Grande, Edifício C6, Piso 2
1749-016 LISBOA - PORTUGAL

ISBN: 972 - 8394 - 04 - 7