Variável Complexa

Teoria Elementar e Exercícios Resolvidos

Maria Adelaide Carreira
Maria Suzana Metello de Nápoles

ISBN: 978-972-8394-27-1

Variável Complexa

Teoria Elementar e Exercícios Resolvidos

Maria Adelaide Carreira

Maria Suzana Metello de Nápoles

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

2016

ÍNDICE GERAL

PREFÁCIO I

A Análise Complexa é reconhecida como sendo parte essencial na formação de matemáticos, físicos e engenheiros, bem como componente fundamental em outros ramos das ciências puras e aplicadas, pelo que existe uma vasta bibliografia sobre o assunto.

Este livro destina-se a uma primeira abordagem da Variável Complexa, em língua portuguesa; apresenta a teoria elementar com uma exposição simples, embora rigorosa, cobrindo os assuntos que normalmente fazem parte dos programas que abordam este tema. Alguns tópicos são deliberadamente tratados em situações simples, mas que têm vasta aplicação prática, remetendo-se, nesses casos, o leitor que deseja aprofundar estas questões para a bibliografia adequada. O desenvolvimento teórico é sempre acompanhado de exemplos, alguns dos quais, sendo clássicos, constam em grande número de manuais, mas que, pela forma como esclarecem várias questões, considerámos imprescindíveis.

A prática docente, de já muitos anos, tem-nos mostrado que a repetição de princípios básicos é indispensável à aquisição de conhecimentos. Assim, incluímos ao longo do livro um considerável número de exercícios resolvidos que seguem em cada capítulo o desenvolvimento teórico, tendo sido escolhidos com o objectivo de ilustrarem as questões menos simples, além de promoverem algum treino na manipulação dos vários conceitos. O último capítulo – destinado a auxiliar o leitor a ajuizar sobre os conhecimentos adquiridos ao longo da leitura do livro – consta de uma série suplementar de exercícios abrangendo temas tratados anteriormente e que, embora não resolvidos exaustivamente, vêm acompanhados de tópicos auxiliares de resolução e/ou das respectivas soluções.

Atendendo a que nem todos os leitores têm a mesma formação matemática, são incluídos no final do livro alguns apêndices contendo, de forma muito resumida, alguns resultados que facilitam uma melhor compreensão do texto.

De 1978 a 1883 leccionámos em conjunto este tema na Faculdade de Ciências de Lisboa, sob a orientação do Professor Doutor Alfredo Pereira Gomes. Datam pois desse período as nossas primeiras notas sobre Variável Complexa, que constituíram o embrião deste livro. Para o Professor Pereira Gomes, que sempre nos prestou o seu apoio, colaborando na elaboração de exercícios para testes e exames, e mantendo-se disponível para esclarecer várias questões, facultando-nos inclusivamente notas pessoais, vai a nossa primeira palavra de agradecimento. A ele devemos em parte este livro.

Queremos também, agradecer, muito em especial, ao Professor Doutor Luís Sanchez a sua completa disponibilidade para ler o manuscrito, num curto espaço de tempo. As suas observações e comentários, fruto de uma leitura muito cuidada dos tópicos teóricos, permitiram que corrigíssemos algumas situações e alterássemos a forma de apresentação de outras, melhorando assim a qualidade do texto.

Aos Professor Doutor Gonçalo Pinto, Dr. António Monteiro e Dra. Virgínia Miranda agradecemos, reconhecidamente, a colaboração que nos prestaram ao longo do desenvolvimento do trabalho no apoio à revisão e composição do texto, nas sugestões que permitiram alterar algumas situações de falta de clareza na exposição e na verificação de númerosas resoluções de exercícios.

Estamos muito gratas ao Professor Doutor Dinis Pestana pelo estímulo que deu a este livro, ao estabelecer os primeiros contactos com a Editora McGraw-Hill. Agradecemos a esta Editora a aceitação do nosso projecto, e a forma atenta e disponivel com que acompanhou o desenvolvimento do nosso trabalho.

À Filipa Carvalho e à Isabel Metello de Nápoles que, sobretudo numa primeira fase, passaram várias horas diante do computador a compor o texto e a corrigir gralhas, o nosso muito obrigado.

A edição de um manual deste tipo presta-se a apresentar ainda várias incorrecções, apesar do grande esforço que fizemos na revisão das provas. Assumimos naturalmente a responsabilidade pelas deficiências que este livro possa ter e agradecemos desde já as observações que nos venham a ser feitas.

Esperamos que este texto, que pretende ser de fácil leitura, ao ajudar o leitor a familiarizar-se com a Variável Complexa, lhe desenvolva o gosto pelo estudo deste tema e o estimule a aprofundá-lo. Se assim for, teremos atingido o nosso objectivo.

Lisboa, Janeiro de 1998

As Autoras

Prefácio à 2ª edição

O título "Variável Complexa: Teoria Elementar e Exercícios Resolvidos" foi publicado em 1998 pela Editora McGraw Hill de Portugal.

A partir de 2002, com o encerramento desta editora o título continuou a ser distribuído pela Editora McGraw Hill/Interamericana de Espanha, situação que se manteve até Setembro de 2008, em que a obra foi considerada "out of print".

Durante esse período "Variável Complexa: Teoria Elementar e Exercícios Resolvidos" fez parte da bibliografia adotada em várias escolas superiores e, nos últimos anos, tem-nos sido solicitado por alunos de escolas onde continua a ser recomendado.

Ficamos pois muito gratas aos Editores da Coleção "Textos de Matemática" do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa por incluírem nesta coleção este livro, tornando-o assim acessível a qualquer leitor que se interesse pelo tema.

Nesta 2ª edição manteve-se no essencial o texto anterior, incluindo a paginação, corrigindo--se apenas algumas gralhas.

Maria Adelaide Carreira
Maria Suzana Metello de Nápoles

Capítulo
1

Números Complexos

A. Generalidades sobre números complexos

É bem sabido que o quadrado de um qualquer número real ou é um número positivo ou é nulo. Assim, não é possível resolver no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais a equação $x^2 = -1$. Esta situação conduziu a que se procurasse proceder à construção de um novo conjunto de números, o conjunto dos números complexos, que englobasse o conjunto dos números reais, e onde fosse possível determinar soluções para a equação anterior e outras semelhantes. Embora estas questões tenham sido abordadas desde o século XVI, a construção dos números complexos só foi formalizada muito mais tarde, nos finais do século XVIII.

O matemático suíço Leonhard Euler introduziu, por volta de 1779, a notação i para designar as soluções da equação $x^2 = -1$, que admitiu serem da forma $x = +\sqrt{-1} = +i$ e $x = -\sqrt{-1} = -i$. Este símbolo i é muitas vezes designado por unidade imaginária e permite definir «número complexo».

Definição A.1.

Chama-se **número complexo** a toda a expressão da forma $x + iy$ na qual x e y são números reais.

Ao número real x chama-se **parte real** do número complexo $z = x + iy$ e escreve-se $\text{Re}(z) = x$; ao número real y chama-se **parte imaginária** do número complexo z e escreve-se $\text{Im}(z) = y$.

Os números complexos cuja parte real é nula são designados por imaginários puros.

Designa-se por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, isto é,

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy\colon x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$$

Observação:
Da definição anterior decorre que dois números complexos são iguais se e só se têm a mesma parte real e a mesma parte imaginária.

Definição A.2.

Sejam $z = x + iy$ e $w = u + iv$ números complexos.

(i) Chama-se **soma** de z e w ao número complexo $z + w = (x + u) + i(y + v)$.

(ii) Chama-se **produto** de z por w ao número complexo $zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$.

Observação:
De um ponto de vista prático, as operações definidas em A.2. regem-se por regras semelhantes às da adição e multiplicação de polinómios de coeficientes reais, desde que se adopte a convenção $i^2 = -1$.

Teorema A.1.

O conjunto $\mathbb{C}$, munido com as operações «+» e «·», constitui um corpo, em que

(i) O elemento neutro é o número complexo $w = 0 + i0$.

(ii) O simétrico de $z = x + iy$ é o número $-z = -x - iy$.

(iii) O elemento identidade é o número complexo $z = 1 + i0$.

(iv) O inverso de $z = x + iy \neq 0 + i0$ é o número complexo z^{-1} definido por

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Demonstração:
A demonstração decorre facilmente das propriedades dos números reais. (Para recordar a definição de corpo ver Apêndice 1).

Tem agora sentido definir a diferença, $z - w$, e o quociente, z/w ($w \neq 0$), de dois números complexos z e w por $z - w = z + (-w)$ e $z/w = z \cdot w^{-1}$, respectivamente.

Exemplo A.1.

Sejam $z = 5 - i5$ e $w = -3 + i4$:

$$z + w = (5-3) + i(-5+4) = 2 - i$$

$$zw = (-15+20) + i(20+15) = 5 + i35$$

$$zw^{-1} = (5-i5)\left(-\frac{3}{3^2+4^2} - i\frac{4}{3^2+4^2}\right) = -\frac{7}{5} - i\frac{1}{5}.$$

O corpo $\mathbb{C}$, assim construído, é, de facto, a extensão procurada do corpo $\mathbb{R}$. Com efeito, considere-se o subcorpo de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \{z : z = x + i0,\ x \in \mathbb{R}\}$ e a aplicação bijectiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ definida por $f(x) = x + 0i$. Facilmente se verifica que a aplicação f satisfaz as propriedades:

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

2. $f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot x_2 + 0i = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

sendo, portanto, um isomorfismo entre o corpo $\mathbb{R}$ e o corpo $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ (ver Apêndice 1). Faz, então, sentido a identificação de $\mathbb{R}$ com $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, substituindo-se cada número complexo $x + 0i \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ pelo número real x. É usual representar cada número complexo da forma $0 + iy$ apenas por iy e, em particular, designar apenas por i o número complexo $0 + i1$. Com esta escrita abreviada, o número complexo $x + iy$ pode ler-se como a soma dos números complexos $x + 0i$ e $0 + iy$; por sua vez, o número complexo iy não é mais que o produto de y por $0 + i1$. Assim, $\mathbb{C}$ pode identificar-se com $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$.

Observação:

Atendendo à validade da propriedade comutativa da multiplicação em $\mathbb{C}$, tem-se $iy = yi$, pelo que se usam indistintamente as formas $x + iy$ ou $x + yi$.

É agora possível resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 = -1$, irresolúvel em $\mathbb{R}$. Identificando -1 com $-1 + 0i$, tem-se

$$z^2 = -1 \Leftrightarrow (x+iy)^2 = -1 \Leftrightarrow \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi = -1 + 0i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

logo, os números complexos $z_1 = 0 + 1i$ e $z_2 = x + iy$ são as soluções, em $\mathbb{C}$, da equação.

Definição A.3.

Chama-se **módulo do número complexo** $z = 0 - 1i$, ao número real não negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definição A.4.

Chama-se **conjugado** de um número complexo $z = x + yi$ ao número complexo $\bar{z} = x - yi$.

Observação:

O conjugado de um número real é ele próprio e o conjugado de um imaginário puro é o seu simétrico.

São válidas as seguintes propriedades:

Teorema A.2.

Para $w, z \in \mathbb{C}$ tem-se:

(i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

(ii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ (se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$).

(iii) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$ com $w \neq 0$.

(iv) $z\bar{z} = |z|^2$.

(v) $|\overline{z}| = |z|$.

(vi) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ quando $z \neq 0$.

(vii) $z = \overline{z}$, se z é um número real.

(viii) $\overline{\overline{z}} = z$.

(ix) $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Demonstração:

As demonstrações das propriedades enunciadas decorrem imediatamente das definições correspondentes. A título de exemplo demonstra-se a propriedade (iv).

Tem-se $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

São ainda válidas as propriedades seguintes, que envolvem os módulos dos números complexos:

Teorema A.3.

Para $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se:

(i) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(ii) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, com $w \neq 0$.

(iii) $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\text{Im}(z)| \leq |z|$.

(iv) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (desigualdade triangular).

(v) $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

Demonstração:

(i) Imediata pela definição do módulo de um número complexo e da operação multiplicação.

(ii) Por (i), $|w|\left|\dfrac{z}{w}\right| = \left|w\dfrac{z}{w}\right| = |z|$, logo $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

(iii) Seja $z = x + iy$.

Tem-se $|\text{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ e $|\text{Im}(z)| = |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

(iv) Pelo teorema A.2.(i, iv),

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\cdot\left(\overline{z+w}\right) = (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) = \\ &= z\cdot\overline{z} + w\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + w\cdot\overline{w} = \\ &= |z|^2 + w\cdot\overline{z} + z\cdot\overline{w} + |w|^2.\end{aligned}$$

Atendendo ao teorema A.2., (ii, viii, ix), tem-se $w\overline{z} + z\overline{w} = w\overline{z} + \overline{w\overline{z}} = 2\,\text{Re}(w\overline{z})$.
Então, pelos teoremas A.3. (iii) e A.2. (ii, v), obtém-se

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= |z|^2 + 2\,\text{Re}(w\cdot\overline{z}) + |w|^2 \le \\ &\le |z|^2 + 2|w\cdot\overline{z}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|w|\,|z| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

concluindo-se que $|z+w| \le |z| + |w|$.

(v) Fazendo $|z| = |w + (z - w)|$ e $|w| = |z + (w - z)|$, obtém-se, pelo teorema A.3. (iv),

$$|z| \le |w| + |z-w| \Leftrightarrow |z| - |w| \le |z-w| \quad \text{e} \quad |w| \le |z| + |w-z| \Leftrightarrow -(|z|-|w|) \le |z-w|$$

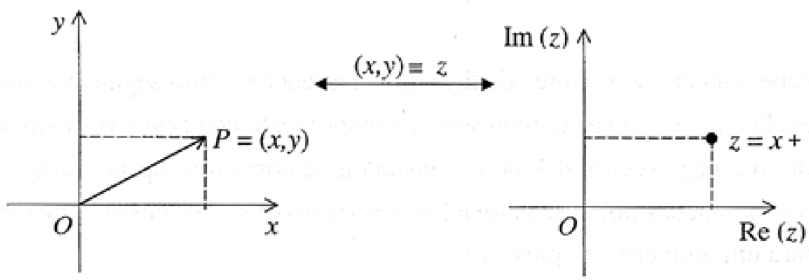
o que equivale a $|z-w| \ge \big||z|-|w|\big|$.

O corpo $\mathbb{R}$ com a relação de ordem usual «$<$» é um corpo ordenado (ver Apêndice 1). No entanto, o mesmo não se passa no corpo $\mathbb{C}$, apesar de este ser uma extensão de $\mathbb{R}$, isto é, não é possível ordenar $\mathbb{C}$ de modo a estender a ordenação usual de $\mathbb{R}$. Para o verificar tomem-se, por exemplo, os números complexos i e 0; tem-se $i \neq 0$. Se $i > 0$, então $i\cdot i > i\cdot 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ e se $i < 0$ então $i\cdot i > i\cdot 0 \Leftrightarrow -1 > 0$; não se respeita em qualquer dos casos a ordem usual em $\mathbb{R}$. Os números complexos i e 0 não são, pois, comparáveis neste sentido.

Considerando ($\mathbb{R}$, +, ·) como corpo de escalares, é possível definir no grupo ($\mathbb{C}$, +) uma estrutura de espaço vectorial (ver Apêndice 1). Este espaço vectorial é isomorfo ao espaço vectorial $\mathbb{R}^2$, mediante o isomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, definido por $f(x,y) = x + iy$. Este isomorfismo, além de permitir a identificação do par (x,y) com o número complexo $z = x + iy$, permite uma representação geométrica para o espaço vectorial $\mathbb{C}$.

Quando a cada número complexo $z = x + iy$ se associa o ponto $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, é usual designar-se o plano cartesiano ($x\ O\ y$) por plano complexo (ou plano de Argand). O eixo das abcissas (Ox) é, então, designado por «eixo real» e o eixo das ordenadas (Oy) por «eixo imaginário». O ponto P chama-se por vezes o «afixo» do número complexo z.

Nesta representação geométrica torna-se adequado identificar o número complexo $z = x + iy$ com o segmento orientado $\overrightarrow{OP}$.



Exemplo A.2.

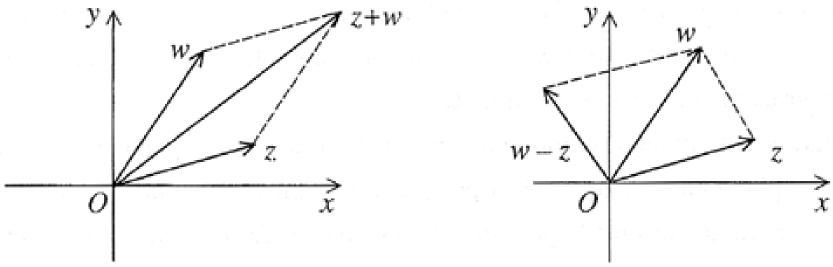
a) Seja $A = \{z = x + iy : |z-2| = 2\}$.

Atendendo a que $|z-2| = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$, o subconjunto A representa a circunferência de centro $z = 2$ e raio 2.

b) Seja $B = \{z = x + iy : |z-1| = |z+i|\}$.

Como $|z-1| = |z+i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow y = -x$, o subconjunto B representa a bissectriz dos quadrantes pares.

Sem perda de generalidade, admita-se que z e w são números complexos identificados com pontos do primeiro quadrante. As operações de adição e subtracção podem ser interpretadas geometricamente por



Identificando cada número complexo $z = x + iy$ com o vector (x,y) de $\mathbb{R}^2$, o módulo de z definido em A.3. coincide com a norma euclidiana definida em $\mathbb{R}^2$:

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\,.$$

Como se sabe, quando os vectores de $\mathbb{R}_2$ são interpretados como segmentos orientados num plano, a norma euclidiana de um vector representa o comprimento do respectivo segmento orientado.

Deste modo, o espaço vectorial $\mathbb{C}$ pode considerar-se como um espaço normado.

Utilizando coordenadas polares, as relações $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$ conduzem a uma nova representação para um número complexo z :

Definição A.5.

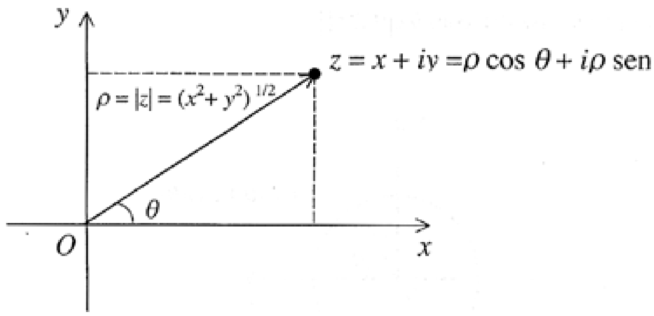
Diz-se que um número complexo $z = x + iy \neq 0$ está representado na **forma polar ou trigonométrica** quando é dado na forma $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, (ou abreviadamente $z = \rho\,\text{cis}\theta$), onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, e θ, designado por **argumento** de z (abreviadamente $\theta = \arg z$), é qualquer número real tal que $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ e $\text{sen}\theta = \dfrac{y}{\rho}$.

Observação:

Se $z = 0$, tem-se $\rho = 0$, enquanto $\arg(z)$ é indefinido.

No texto que se segue, o número complexo z será referido, quer através da sua representação polar ou trigonométrica, $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$, quer através da sua representação em termos da parte real e da parte imaginária, $z = x + iy$, que será designada por **representação algébrica** ou **forma algébrica** de z.

Geometricamente, é fácil relacionar as duas representações de z :



Devido à periodicidade das funções seno e co-seno, não existe um argumento unicamente determinado para representar um número complexo não nulo. Com efeito, $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \rho[\cos(\theta + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta + 2k\pi)]$, com $k \in \mathbb{Z}$. ($\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros).

Deste modo, arg z designa, indiferentemente, qualquer dos possíveis valores do argumento de z; o argumento de z é designado por **argumento positivo mínimo** se pertencer ao intervalo $[0, 2\pi[$ e por **argumento principal** se pertencer ao intervalo $]-\pi, \pi]$.

Exemplo A.3.

Considerando o argumento principal, tem-se:

$$-i = 0 - 1i = 1\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i1\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 - i = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sqrt{2}\mathrm{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right),$$

Considerando o argumento positivo mínimo, vem:

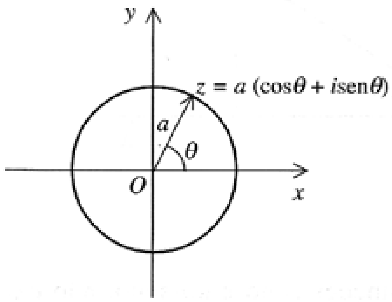
$$-i = 0 - 1i = 1\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1i\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

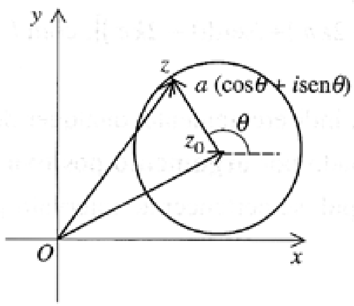
$$-1 - i = \sqrt{2}\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sqrt{2}\mathrm{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right).$$

Exemplo A.4.

A circunferência de centro na origem e raio a, $a > 0$, pode ser caracterizada, usando argumentos positivos mínimos, por $\{z\colon z = a(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta),\ \text{com } \theta \in [0,2\pi[\}$.

A circunferência de centro z_0 e raio a, $a > 0$, pode ser caracterizada, usando argumentos positivos mínimos, por $\{z\colon z = z_0 + a(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta),\ \text{com } \theta \in [0,2\pi[\}$.





Sejam $z_1 = \rho_1 \cos\theta_1 + i\rho_1 \operatorname{sen}\theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \cos\theta_2 + i\rho_2 \operatorname{sen}\theta_2$.

Da igualdade entre os números complexos z_1 e z_2, resulta que $\rho_1 \cos(\theta_1) = \rho_2 \cos(\theta_2)$ e $\rho_1 \operatorname{sen}(\theta_1) = \rho_2 \operatorname{sen}(\theta_2)$. Então

$$z_1 = z_2 \quad \text{sse} \quad \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

A adição e subtracção entre z_1 e z_2 não têm formas trigonométricas simples. As relações entre módulo da soma (resp. diferença) e a soma (resp. diferença) dos módulos que importa fixar são:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad \text{sse } \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$|z_1 - z_2| = \big||z_1| - |z_2|\big| \quad \text{sse } \arg(z_1) = \arg(z_2) + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

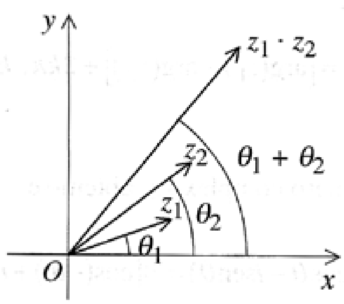
No entanto, no caso do produto e do quociente de dois números complexos, as suas representações trigonométricas não apresentam dificuldades significativas.

Para o produto tem-se

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2\big[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)\big] + i\big[(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)\big] = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2\big[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\big] \end{aligned}$$

e assim:

$$\begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = \rho_1 \cdot \rho_2 \\ \arg(z_1 \cdot z_2) = \big[\arg(z_1) + \arg(z_2)\big] + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Demonstra-se facilmente por indução que se $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ então

$$z^n = \rho^n\big[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)\big], \quad n \in \mathbb{N} \text{ } \textbf{(fórmula de De Moivre)}.$$

Pelo teorema A.1., tem-se, para $z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Logo,

$$z^{-1} = \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2} - i\frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\left[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(-\theta)\right]$$

$$\begin{cases} \left|z^{-1}\right| = \dfrac{1}{\rho} \\ \arg\left(z^{-1}\right) = -\arg(z) \end{cases}$$

Se $z_2 \neq 0$, tem-se então

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\mathrm{sen}\theta_1)\cdot\frac{1}{\rho_2}\left[\cos(-\theta_2) + i\mathrm{sen}(-\theta_2)\right] = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)\right] \end{aligned}$$

e assim,

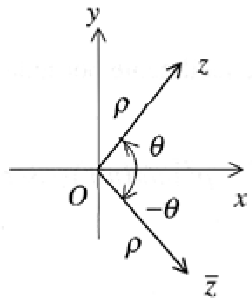
$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\rho_1}{\rho_2},\ \rho_2 \neq 0 \\ \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \left[\arg(z_1) - \arg(z_2)\right] + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Para o conjugado $\bar{z}$ de um número complexo z, obtém-se

$$\bar{z} = x - iy = \rho(\cos\theta - i\mathrm{sen}\theta) = \rho\left[\cos(-\theta) + i\mathrm{sen}(-\theta)\right],$$

e assim

$$\begin{cases} |\bar{z}| = |z| = \rho \\ \arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



O teorema seguinte permite calcular as raízes de um número complexo.

Teorema A.4.

Dado o número complexo $w = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \neq 0$, a equação $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, tem n soluções distintas, que são da forma

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração:

Seja $z = \rho[\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi]$ uma solução da equação $z^n = w$.

Atendendo à fórmula de De Moivre e à igualdade de números complexos na forma trigonométrica, tem-se

$$z^n = w \Leftrightarrow \rho^n[\cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi)] = r[\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Obtêm-se, assim, as soluções

$$z_k = \rho(\cos(\varphi) + i\operatorname{sen}(\varphi)) = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Atendendo à periodicidade do seno e do co-seno, apenas n destas soluções (correspondendo por exemplo a $k = 0,1,2,\ldots,n\text{-}1$) são distintas.

Observação:

As n raízes z_k têm o mesmo módulo e os argumentos de duas raízes consecutivas diferem de $2\pi/n$; geometricamente, correspondem aos vértices de um polígono regular com n lados, inscrito numa circunferência de centro $z = 0$ e de raio igual a $|z_k|$.

Exemplo A.5.

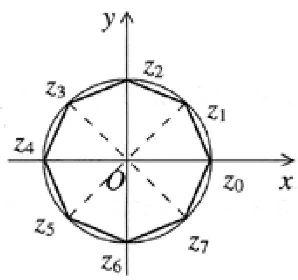
As soluções da equação ou, de outra forma, as oito raízes de índice oito do número complexo 1 são, pelo teorema A.4.,

$$z_k = \sqrt[8]{1}\left\{\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{8}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{8}\right)\right]\right\}, \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots, 7.$$

Passando à representação algébrica, obtém-se

$$z_0 = 1; \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); \quad z_2 = i; \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$
$$z_4 = -1; \quad z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i); \quad z_6 = -i; \quad z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Geometricamente,



Sendo o espaço vectorial $\mathbb{C}$ um espaço normado, é fácil introduzir uma métrica em $\mathbb{C}$:

Definição A.6.

A aplicação d: $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to[0,+\infty[$ em que para quaisquer z, w pertencentes a $\mathbb{C}$ se põe $d(z,w) = \|z-w\| = |z-w|$ define uma **métrica** em $\mathbb{C}$ (proveniente da norma considerada em $\mathbb{C}$).

■

Definição A.7.

Chama-se **vizinhança** de raio r de um ponto $c\in\mathbb{C}$, $r\in]0, +\infty[$, ao subconjunto de $\mathbb{C}$ definido por $D(c;r)=\{z : d(z,c)=|z-c|< r\}$. (Geometricamente, esta vizinhança identifica-se com o disco aberto de centro c e raio r.)

Chama-se **vizinhança** de raio *r de* ∞, $r \in]0, +\infty[$, ao subconjunto de $\mathbb{C}$ definido por

$$D(\infty, r) = \left\{ z : |z| > \frac{1}{r} \right\}.$$

(Geometricamente, esta vizinhança identifica-se com o exterior da circunferência de centro O e raio $\frac{1}{r}$.)

As vizinhanças *D(c; r)* definem em $\mathbb{C}$ uma topologia, que é a topologia associada à métrica *d*. O conjunto $\mathbb{C}$, munido desta topologia, é um espaço métrico (ver Apêndice 1).

Tem, pois, sentido definir em $\mathbb{C}$ as noções topológicas seguintes:

Definição A.8.

Seja S um subconjunto de $\mathbb{C}$.

(i) Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é **ponto de acumulação** ou **ponto limite** de S, se, para todo o $r > 0$, $\left(D(z_0;r) \setminus \{z_0\}\right) \cap S \neq \varnothing$.
O conjunto de todos os pontos de acumulação designa-se por **conjunto derivado** de S e representa-se por S'.

(ii) Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é **ponto interior** de S, se existir $r > 0$ tal que $D(z_0;r) \subset S$.
O conjunto de todos os pontos interiores designa-se por **interior** de S e representa-se por $\mathrm{int}(S)$.

(iii) Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é **ponto exterior** de S, se existir $r > 0$ tal que $D(z_0;r) \cap S = \varnothing$.
O conjunto de todos os pontos exteriores designa-se por **exterior** de S e representa-se por $\mathrm{ext}(S)$. Note-se que $\mathrm{ext}(S) = \mathrm{int}(\mathbb{C} \setminus S)$.

(iv) Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é **ponto fronteiro** de S se não é ponto interior nem ponto exterior de S, isto é, se qualquer vizinhança de z_0 contiver pontos de S e pontos do complementar de S.
O conjunto de todos os pontos fronteiros de S designa-se por **fronteira** de S e representa-se por $\mathrm{fr}(S)$ ou ∂S.

(v) Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é **ponto aderente** a S, se $D(z_0;r) \cap S \neq \varnothing$, para todo o $r > 0$.
O conjunto de todos os pontos aderentes de S designa-se por **fecho ou aderência** e representa-se por $\overline{S}$. Tem-se então $\overline{S} = \mathrm{int}(S) \cup \mathrm{fr}(S)$.

Definição A.9.

Seja S um subconjunto de $\mathbb{C}$.

(i) S é um **conjunto aberto** se $S = \text{int}(S)$.

(ii) S é um **conjunto fechado** se $S = \overline{S}$ (ou, de forma equivalente, se $\mathbb{C} \setminus S$ é um conjunto aberto).

Exemplo A.6.

a) O conjunto $\mathbb{C}$ e o conjunto $\varnothing$ são simultaneamente abertos e fechados, e são os únicos nestas condições.

b) O subconjunto de $\mathbb{C}$, $Q_1 = \{z : \text{Re}(z) > 0,\ \text{Im}(z) > 0\}$ é um conjunto aberto, pois para $z \in Q_1$ tem-se $D(z;r) \subset Q_1$, sempre que $0 < r < \min\{\text{Re}(z),\ \text{Im}(z)\}$.

c) O subconjunto $S = \{ z \in \mathbb{C} : -2 \leq \text{Re}(z) \leq 3 \}$ é um conjunto fechado, e $\mathbb{C} \setminus S$ é um conjunto aberto.

d) O subconjunto $S = \{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$ não é um conjunto aberto, porque não existe um $r > 0$ tal que $0 < r < \min\{\text{Re}(z),\ \text{Im}(z)\}$; mas, também não é fechado porque não existe um $r > 0$ tal que $D(2;\ r) \subset \mathbb{C} \setminus S$.

Definição A.10.

Seja S um subconjunto de $\mathbb{C}$.

(i) O conjunto S é **limitado,** se existir $r > 0$ tal que $S \subset D(0;r)$.

(ii) O conjunto S diz-se **compacto,** se for um conjunto limitado e fechado.

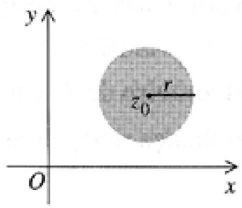
(iii) O conjunto S diz-se **conexo** quando não é possível escrever $S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$, em que A e B são subconjuntos de $\mathbb{C}$, não vazios, disjuntos, ambos abertos ou ambos fechados.

(iv) O conjunto S diz-se uma **região** ou um **domínio**, se é um conjunto aberto e conexo.

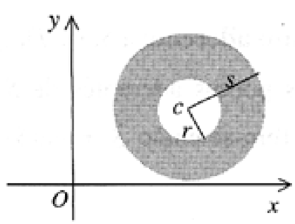
Exemplo A.7.

São exemplos de regiões ou domínios os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

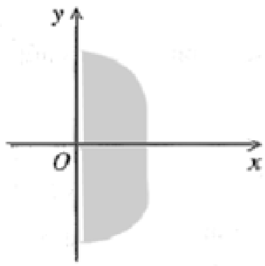
a) Qualquer disco aberto $D(z_0;r)$ com $r > 0$.



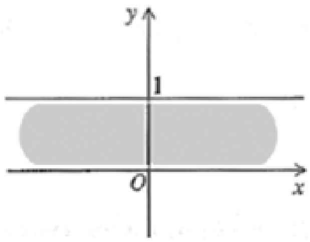
b) A coroa circular $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - c| < s \text{ com } c \in \mathbb{C} \text{ e } r, s > 0\}$



c) O semi plano $z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}(z) > 0$

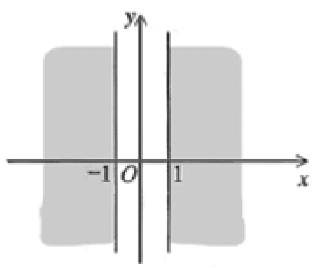


d) A «faixa» $\{z \in \mathbb{C}: \ 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$

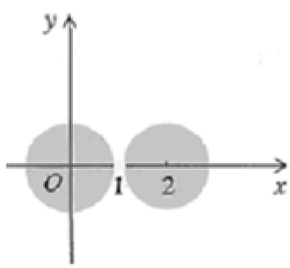


São exemplos de subconjuntos de $\mathbb{C}$ não conexos:

e) $\{z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{Re}(z) \geq 1 \ \vee \ \mathrm{Re}(z) \leq -1\}$



f) $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1 \ \vee \ |z-2| < 1\}$



B. Sucessões de números complexos

Como é habitual, $\mathbb{N}$ designa o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definição B.1.

Chama-se **sucessão de números complexos** ou **sucessão em $\mathbb{C}$** a toda a aplicação f do conjunto $\mathbb{N}_0$, ou de qualquer parte infinita de $\mathbb{N}_0$, em $\mathbb{C}$.

Chamam-se **termos** da sucessão f, aos elementos do contradomínio de f, e $z_n = f(n)$ é o termo geral da sucessão.

Representa-se a sucessão f por $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, mais simplesmente, por (z_n).

Exemplo B.1.

A aplicação $f:\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por $f(n) = \frac{1}{n} + (-1)^n i$ define a sucessão

$$z_1 = 1 - i,\ z_2 = \frac{1}{2} + i,\ z_3 = \frac{1}{3} - i,\ z_4 = \frac{1}{4} + i,\ \ldots,\ z_n = \frac{1}{n} + (-1)^n i,\ \ldots$$

Definição B.2.

A sucessão de números complexos é uma **subsucessão** da sucessão (z_n), se $w_k = z_{n(k)}$, sendo a aplicação $k \to n(k)$ uma aplicação injectiva de $\mathbb{N}_0$ em $\mathbb{N}_0$.

Exemplo B.2.

A sucessão $w_1 = 1 - i,\ w_2 = \frac{1}{3} - i,\ w_3 = \frac{1}{5} - i,\ w_4 = \frac{1}{7} - i,\ \ldots$ é uma subsucessão da sucessão do exemplo B.1., $z_n = \frac{1}{n} + (-1)^n i$, correspondendo à aplicação $k \to 2k - 1$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, ... Com efeito, tem-se

$$w_1 = z_1,\ w_2 = z_3,\ w_3 = z_5, \ldots,\ w_k = z_{2k-1}.$$

Definição B.3.

A sucessão (z_n) de números complexos tem por **limite** um número complexo z (ou **converge** para z, ou **tende** para z), e escreve-se $\lim z_n = z$ ou $z_n \to z$, se a sucessão de números reais $u_n = |z_n - z|$ convergir para zero, isto é,

$$\lim z_n = z \quad \text{sse} \quad \forall \delta > 0 \; \exists \, p \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N},\; n \geq p \Rightarrow u_n = |z_n - z| < \delta .$$

■

Definição B.4.

Uma sucessão (z_n) de números complexos tem **limite infinito**, $\lim z_n = \infty$ ou $z_n \to \infty$, quando $|z_n| \to +\infty$, isto é,

$$\forall \delta > 0,\; \exists \; p \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N},: n \geq \; p \Rightarrow \; |z_n| > \; \frac{1}{\delta}.$$

■

Observação:
Atendendo à definição de vizinhança de um ponto em $\mathbb{C}$ e de ∞ (ver definição A.7.), a sucessão (z_n) converge para $z \in \mathbb{C}$ ou para $z = \infty$, se, para toda a vizinhança D(z;d), existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual os termos da sucessão (z_n) estão nessa vizinhança.

Exemplo B.3.

A sucessão $z_n = \dfrac{n + n \cdot i + i}{n}$, converge para $\alpha = 1 + i$. Com efeito,

$$\left| \frac{n + n \cdot i + i}{n} - (1+i) \right| = \left| \frac{i}{n} \right| = \frac{1}{n} \to 0 .$$

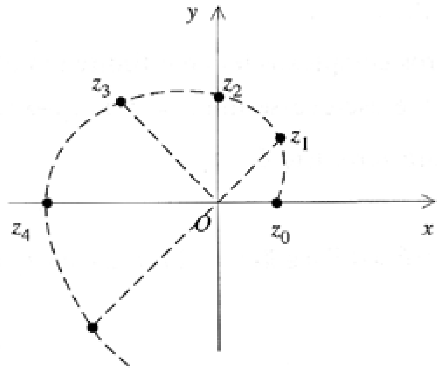
Exemplo B.4.

Atendendo à representação trigonométrica dos números complexos, a sucessão $z_n = (1+i)^n$, $n \geq 0$, é dada por:

$$z_n = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = \left(\sqrt{2} \right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \right).$$

Observe-se que, apesar das sucessões reais de termo geral $x_n = \cos \dfrac{n\pi}{4}$ e $y_n = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{4}$ não terem limite, se tem $z_n = (1 + i)^n \to \infty$ (uma vez que $|z_n| = \left(\sqrt{2}\right)^n \to +\infty$).

Geometricamente, os afixos dos termos da sucessão situam-se sobre uma espiral.



Teorema B.1.

É condição necessária e suficiente para que $\lim z_n = z,\ z \in \mathbb{C}$, que

$$\lim\left[\operatorname{Re}(z_n)\right] = \operatorname{Re}(z) \ \text{ e } \ \lim\left[\operatorname{Im}(z_n)\right] = \operatorname{Im}(z).$$

Demonstração:

Comece-se por verificar que a condição é suficiente:

Sejam $z_n = x_n + iy_n$ e $z = a + ib$. Suponha-se que $x_n \to a$, o que significa que $x_n - a \to 0$ e $y_n \to b$, o que significa que $y_n - b \to 0$.

Como

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$$

resulta que $|z_n - z| \to 0$.

Verifique-se agora que a condição é necessária.

Sabendo que

$$|x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \le \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - z|,$$

$$|y_n - b| = \sqrt{(y_n - b)^2} \le \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - z|,$$

e atendendo a que $|z_n - z| \to 0$, conclui-se que $|x_n - a| \to 0$ e $|y_n - b| \to 0$. Consequentemente, $x_n \to a$ e $y_n \to b$, como se pretendia.

O teorema B.1. permite demonstrar facilmente em $\mathbb{C}$ alguns dos resultados já conhecidos para as sucessões de números reais, nomeadamente as propriedades operatórias dos limites das sucessões (ver Apêndice 2).

Exemplo B.5.

Estudem-se quanto à convergência as seguintes sucessões:

a) $z_n = \dfrac{2n-i}{n+3i}$.

Tem-se:

$$z_n = \frac{2n-i}{n+3i} = \frac{2n-i}{n+3i}\cdot\frac{n-3i}{n-3i} = \frac{2n^2-3+i(-6n-n)}{n^2+9} = \frac{2n^2-3}{n^2+9}+i\frac{-7n}{n^2+9} = x_n + iy_n$$

Como

$$x_n = \frac{2n^2-3}{n^2+9} \to 2 \quad \text{e} \quad y_n = -\frac{7n}{n^2+9} \to 0,$$

conclui-se que $z_n = \dfrac{2n-i}{n+3i} \to 2 + i0 = 2$, isto é, $\lim z_n = 2$.

b) $z_n = \dfrac{2n}{n^2-1} + i(-1)^n$.

$z_n = \dfrac{2n}{n^2-1} + i(-1)^n$ é divergente, porque a sucessão das partes imaginárias $y_n = (-1)^n$ é divergente.

Teorema B.2.

Seja (z_n) uma sucessão tal que $\arg z_n = \theta_n$, $|z_n| = \rho_n$. Se $\theta_n \to \theta$ e $\rho_n \to \rho$, então a sucessão (z_n) é convergente e o seu limite é $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$.

Demonstração:

Como as funções reais seno e co-seno são contínuas e $\theta_n \to \theta$, tem-se

$$\text{sen}\,\theta_n \to \text{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad \cos\theta_n \to \cos\theta.$$

Como $z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i\text{sen}\theta_n) = x_n + iy_n$, em que $x_n = \rho_n\cos\theta_n \to \rho\cos\theta$ e $y_n = \rho_n\text{sen}\theta_n \to \rho\text{sen}\theta$ conclui-se, pelo teorema B.1, que

$$\lim\, z_n = \rho\cos\theta + i\rho\text{sen}\theta = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta).$$

Definição B.5.

Uma sucessão (z_n) de números complexos diz-se uma **sucessão de Cauchy** se

$$\forall\delta > 0,\ \exists\ p \in \mathbb{N} : m, n \in \mathbb{N},\ m > n \geq p \Rightarrow |z_n - z_m| < \delta.$$

Teorema B.3.

Seja (z_n) uma sucessão de números complexos. Se $z_n = x_n + iy_n$ a sucessão (z_n) é de Cauchy se e só se as sucessões (x_n) e (y_n) de números reais são sucessões de Cauchy.

Demonstração:

Suponha-se que (z_n) é uma sucessão de Cauchy.

Tem-se

$$|x_n - x_m| \leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} = |z_n - z_m|,$$

e analogamente

$$|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|.$$

Como (z_n) é uma sucessão de Cauchy,

$$\forall\delta > 0,\ \exists\ p \in \mathbb{N} : m, n \in \mathbb{N},\ m,\ n \geq p \Rightarrow |z_n - z_m| < \delta.$$

Então, também se tem, a partir da mesma ordem p

$$|x_n - x_m| < \delta \quad \text{e} \quad |y_n - y_m| < \delta$$

e assim as sucessões (x_n) e (y_n) são de Cauchy.

Reciprocamente, se (x_n) e (y_n) são sucessões de Cauchy, para todo o número real positivo d existe uma ordem p tal que, para $m,\ n \geq p$ se tem

$$|x_n - x_m| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad |y_n - y_m| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Então também se tem, a partir da mesma ordem p,

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \sqrt{\frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2}} = \delta,$$

e a sucessão (z_n) é uma sucessão de Cauchy.

Demonstra-se facilmente a extensão do princípio de Cauchy-Bolzano às sucessões complexas:

Teorema B.4.
Uma sucessão de números complexos é convergente se e só se é uma sucessão de Cauchy.

Demonstração:
Seja (z_n) uma sucessão de números complexos, $z_n = x_n + iy_n$. O teorema B.1., o Princípio de Cauchy-Bolzano para sucessões de números reais, e o teorema B.3., justificam as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}(z_n) \text{ convergente} &\Leftrightarrow (x_n) \text{ e } (y_n) \text{ convergentes} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_n) \text{ e } (y_n) \text{ de Cauchy} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z_n) \text{ de Cauchy.}\end{aligned}$$

C. Séries de números complexos

Definição C.1.

Seja $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ uma sucessão em $\mathbb{C}$. Chama-se **série** de números complexos à expressão $z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$, representada abreviadamente por $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ (ou $\sum z_n$ quando não resultar qualquer ambiguidade pela não indicação de índices no somatório).

Os números complexos $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$ chamam-se **termos** da série, e z_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ é o **termo geral** da série.

Chama-se **soma parcial de ordem *n***, e representa-se por S_n, a soma dos termos da série até ao termo de ordem n.

Observação:
As somas parciais constituem uma sucessão (S_n) de números complexos, caracterizada por $S_0 = z_0$ e $S_{n+1} - S_n = z_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Definição C.2.

A série $\sum z_n$ diz-se **convergente** se a sucessão (S_n) das suas somas parciais é convergente. Ao limite S da sucessão das somas parciais chama-se **soma** da série, e escreve-se $S = \sum z_n$.

Uma série não convergente diz-se **divergente**.

Exemplo C.1.

Considere-se a sucessão $\left(\frac{2i}{3^n}\right)$ e a respectiva série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2i}{3^n}$ cuja natureza se pretende analisar.

A sucessão das somas parciais (S_n) é

$$S_1 = \frac{2i}{3}$$
$$S_2 = \frac{2i}{3} + \frac{2i}{3^2} = 2i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)$$
$$S_3 = \frac{2i}{3} + \frac{2i}{3^2} + \frac{2i}{3^3} = 2i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}\right)$$

...

$$S_n = 2i\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right) = 2i\left(\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}\right) \text{ (ver Apêndice 3).}$$

Então

$$\lim S_n = \lim 2i\left(\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}\right) = i \in \mathbb{C},$$

podendo concluir-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2i}{3^n}$ é convergente e a sua soma é $S = i$; tem-se assim, $i = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2i}{3^n}$.

Exemplo C.2.

Analise-se a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n i = -i+i-i+i-i+\ldots$$

O termo geral da sucessão das somas parciais é

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -i & \text{se } n \text{ é impar.} \end{cases}$$

Não existe limite de S_n, pelo que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ é divergente.

Os teoremas que se seguem estabelecem condições que garantem a convergência ou a divergência de uma série de números complexos:

Teorema C.1.

A série $\sum z_n$ com $z_n = x_n + iy_n$ é convergente e tem soma S se e só se as séries de números reais $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são convergentes, com as somas $\mathrm{Re}(S)$ e $\mathrm{Im}(S)$ respectivamente.

Demonstração:

Tem-se

$$\begin{aligned} S_n &= z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n = (x_0 + iy_0) + (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \ldots + (x_n + iy_n) = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + i(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = X_n + iY_n. \end{aligned}$$

Pelo teorema B.1., $\lim S_n = S \in \mathbb{C}$, se e só se $\lim X_n = \mathrm{Re}(S)$ e $\lim Y_n = \mathrm{Im}(S)$.

Como $\sum x_n = \lim X_n$ e $\sum y_n = \lim Y_n$, o resultado pretendido é imediato.

Exemplo C.3.

A natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2i}{3^n}$ (ver exemplo C.1.) pode ser analisada à luz do teorema C.1. Com efeito,

$$x_n = \mathrm{Re}(z_n) = 0 \quad \text{e} \quad y_n = \mathrm{Im}\,(z_n) = \frac{2}{3^n}.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é a série nula, logo é convergente e tem soma $X = 0$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} y^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$ é uma série geométrica real de razão $r = \frac{1}{3}$, logo é convergente e tem soma

$$Y = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \quad \text{(ver Apêndice 3).}$$

A série complexa dada é, então, convergente e a sua soma é $S = 0 + 1i = i$, como se tinha concluído anteriormente.

Exemplo C.4.

Por aplicação do teorema C.1., também é possível concluir a divergência das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n i$ (ver exemplo C.2.) e $\sum_{n=1}^{+\infty} ni$.

Para a primeira série, tem-se $x_n = \mathrm{Re}(z_n) = 0$ e $y_n = \mathrm{Im}(z_n) = (-1)^n$. Então, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$, que é uma série real divergente (ver Apêndice 3). O teorema C.1., garante então a divergência da série.

Igualmente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ni$ é divergente, uma vez que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n$ é divergente.

Teorema C.2. (Condição necessária de convergência)

Se a série $\sum z_n$ é convergente, então $\lim z_n = 0$.

Demonstração:

Sendo a série $\sum z_n$ convergente com soma S e tendo em conta que $z_n = S_n - S_{n-1}$, tem-se $\lim z_n = \lim (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Exemplo C.5.

A divergência das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n i$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} ni$ dos exemplos anteriores, pode facilmente concluir-se pelo teorema anterior se atendermos a que, em ambos os casos, $\lim z_n \neq 0$ (com efeito, não existe $\lim (-1)^n i$ e $\lim ni = \infty$).

Definição C.3.

A série $\sum z_n$ diz-se **absolutamente convergente** se $\sum |z_n|$ se é uma série convergente em $\mathbb{R}_0^+$.

Teorema C.3.

Se $\sum z_n$ é uma série absolutamente convergente, então $\sum z_n$ é uma série convergente.

Demonstração:

Sejam (T_n) e (S_n) as sucessões das somas parciais de $\sum |z_n|$ e $\sum z_n$, respectivamente.

Como $\sum |z_n|$ é uma série convergente, existe $\lim T_n = T$, e (T_n) é uma sucessão de Cauchy (teorema B.4.). Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|T_m - T_n| = \left\| z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \ldots + |z_m| \right| < \varepsilon \text{ para } m, \; n \geq p.$$

Ora,

$$|S_m - S_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_m| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \ldots + |z_m| \text{ (desigualdade triangular)}$$

$$= \left\| z_{n+1}| + |z_{n+1}| + \ldots |z_m| \right| < \varepsilon.$$

Assim, para $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|S_m - S_n| < \varepsilon$ para $m, n \geq p$, ou seja, (S_n) é uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{C}$. Então, pelo teorema B.4., (S_n) é uma sucessão convergente, e assim a série $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ é convergente.

Exemplo C.6.

Dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n^2}$, tem-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série convergente (ver Apêndice 3). Então, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n^2}$ é absolutamente convergente.

No exemplo seguinte, ilustra-se o facto de a condição recíproca do teorema C.3. não ser verdadeira.

Exemplo C.7.

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+i}{n}$.

A série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1+i}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{n}$ é uma série divergente (ver Apêndice 3). A série dada não é, pois, absolutamente convergente. Contudo, trata-se de uma série convergente. Com efeito,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+i}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + i\frac{(-1)^n}{n} \right]$$

Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Re}\left[(-1)^n \frac{1+i}{n} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\left[(-1)^n \frac{1+i}{n} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

são convergentes (ver Apêndice 3 - Critério de Leibniz), a série dada é convergente, de acordo com o teorema C.1.

Exercícios resolvidos

1. Calcule os números reais x e y tais que

$$3x + 2iy + ix - 5y = -7 + 5i\,.$$

Resolução:
Se $(3x-5y)+i(2y+x)=-7+5i$, tem-se, pela igualdade de números complexos,

$$\begin{cases} 3x-5y=-7 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y=-7 \\ -3x-6y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1\,. \end{cases}$$

Os números reais que satisfazem a igualdade são $x = 1$ e $y = 2$.

2. Determine dois números complexos cuja soma seja 4 e cujo produto seja 8.

Resolução:
Pretende-se encontrar $a, b \in \mathbb{C}$, tais que

$$\begin{cases} a+b=4 \\ ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 4a-a^2=8\,. \end{cases}$$

Resolvendo a equação $4a - a^2 = 8$ obtêm-se os seguintes valores para a:

$$a = 2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i\,.$$

Consequentemente, $b = 4-(2 \pm 2i) = 2 \pm 2i$.
Os números que satisfazem as condições pedidas são $2 + 2i$ e $2 - 2i$.

3. Resolva a equação $z^7 + z^4 - 16z^3 - 16 = 0$.

Resolução:
Comece-se por factorizar o polinómio $z^7 + z^4 - 16z^3 - 16$:

$$z^7 + z^4 - 16z^3 - 16 = z^4(z^3+1) - 16(z^3+1) = (z^3+1)(z^4-16)\,.$$

Tendo em conta a lei do anulamento do produto,

$$z^4-16=0 \Leftrightarrow \left(z^2-4\right)\left(z^2+4\right)=0 \Leftrightarrow (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)=0 \Leftrightarrow z=\pm 2 \ \vee \ z=\pm 2i$$

$$z^3+1=0 \Leftrightarrow (z+1)\left(z^2-z+1\right)=0 \ \Leftrightarrow z+1=0 \vee z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z=-1 \vee \ z=\ \frac{1}{2}\pm\ \frac{\sqrt{3}}{2}i\ .$$

As soluções da equação são, pois, $z=\pm 2,\ z=\pm 2i,\ z=-1\ ,\ z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\ .$

4. Calcule:

a) $\left|\dfrac{(3+4i)(2+i)}{(1+2i)(3-4i)}\right|$ **b)** $\left|\dfrac{z+i}{1-iz}\right|,\ z\neq -i.$

Resolução:

a) Tendo em conta que $|a+ib|=\left|\overline{a+ib}\right|$ (ver teorema A.2.(v)) e que se z e w são tais que $\operatorname{Re} z=\pm\operatorname{Im} w$ e $\operatorname{Im} z=\pm\operatorname{Re} w$, então $|z|=|w|$ então

$$\left|\frac{(3+\ 4i)(2+\ i)}{(1+\ 2i)(3-\ 4i)}\right|=\ \frac{|3+\ 4i|\ |2+\ i|}{|1+\ 2i|\ |3-\ 4i|}=1\ .$$

b) $\left|\dfrac{z+\ i}{1-\ iz}\right|=\ \dfrac{|z+\ i|}{|iz-1|}=\ \dfrac{|z+i|}{|i||z+i|}=1.$

5. Verifique que:

a) $\overline{\overline{z}+3i}=z-3i$ **b)** $\overline{(2+i)^2}=3-4i$ **c)** $\left|(2\overline{z}+5)\left(\sqrt{2}-i\right)\right|=\sqrt{3}|2z+5|\ .$

Resolução:

a) $\overline{\overline{z}+3i}=\ \overline{\overline{z}}+\overline{3i}=\ z-3i\ .$

b) $\overline{(2+i)^2}=\overline{4-1+4i}=3-4i\ .$

c) $\left|(2\overline{z}+5)\left(\sqrt{2}-i\right)\right|=\left|(2\overline{z}+5)\right|\left|\sqrt{2}-i\right|=\left|\overline{(2z+5)}\right|\sqrt{2+1}=|2z+5|\sqrt{3}\ .$

6. Prove que se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| = 2$, então $\left|\dfrac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \dfrac{1}{3}$.

Resolução:
Como $z^4 - 4z^2 + 3 = \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 - 3\right)$ e $|z| = 2$, tem-se

$$\left|\frac{1}{\left(z^2 - 1\right)\left(z^2 - 3\right)}\right| \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left|\left(z^2 - 1\right)\left(z^2 - 3\right)\right| \geq 3 \Leftrightarrow \left|z^2 - 1\right|\left|z^2 - 3\right| \geq 3.$$

Atendendo ao teorema A.3. (i) (iv), e tendo em conta que $|z| = 2$, tem-se $\left|z^2 - 1\right|\left|z^2 - 3\right| \geq |4 - 1| \cdot |4 - 3| = 3$.

7. Dados $z_1, z_2 \neq 0$ em C, prove que $\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) = |z_1| \cdot |z_2|$ se e só se $\arg(z_1) - \arg(z_2) = 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Resolução:

Fazendo $\arg\left(z_1\right) = \theta_1$, $\arg\left(z_2\right) = \theta_2$ vem

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) &= \operatorname{Re}\left\{|z_1|\left(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1\right)\cdot|z_2|\left[\cos\left(-\theta_2\right) + i\operatorname{sen}\left(-\theta_2\right)\right]\right\} = \\
&= \operatorname{Re}\left\{|z_1|\cdot|z_2|\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]\right\} = \\
&= |z_1|\cdot|z_2|\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right).
\end{aligned}$$

Então $\operatorname{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) = |z_1| \cdot |z_2|$ se e só se $\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 1 \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ com $k \in$ Z.

8. Mostre que para qualquer número complexo z se tem $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|$.
Dê exemplos de números complexos para os quais se verifique cada uma das igualdades $\left(|z| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \;;\; |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = \sqrt{2}|z|\right)$.

Resolução:
Tem-se $|z| = |x + iy| \leq |x| + |iy| = |x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.
Os números reais e os imaginários puros são exemplos de números complexos z que verificam a igualdade $|z| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

Tendo em conta que $x^2 + y^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$, resulta que $2|x||y| \leq x^2 + y^2$ e consequentemente

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \leq x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2),$$

o que implica $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = |x| + |y| \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \sqrt{2}|z|$.

O número $z = 1 + i$ verifica a igualdade $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = \sqrt{2}|z|$.

9. Prove que, para quaisquer z e w em $\mathbb{C}$,

$$|1 - \bar{z}w|^2 - |z - w|^2 = \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right).$$

Resolução:

Pelo teorema A.2. sabe-se que $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$, $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ e $z\bar{z} = |z|^2$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$, e assim

$$\begin{aligned} |1 - \bar{z}w|^2 - |z - w|^2 &= (1 - \bar{z}w)\overline{(1 - \bar{z}w)} - (z - w)\overline{(z - w)} = (1 - \bar{z}w)\left(1 - \bar{\bar{z}}\bar{w}\right) - (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = \\ &= (1 - \bar{z}w)(1 - z\bar{w}) - (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = 1 - z\bar{w} - \bar{z}w + z\bar{z}w\bar{w} - (z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w}) = \\ &= 1 + z\bar{z}w\bar{w} - z\bar{z} - w\bar{w} = (1 - w\bar{w}) - z\bar{z}(1 - w\bar{w}) = (1 - w\bar{w})(1 - z\bar{z}) = \left(1 - |w|^2\right)\left(1 - |z|^2\right). \end{aligned}$$

10. Sejam z e w em $\mathbb{C}$ tais que $|z| < 1$ e $|w| < 1$. Mostre que $\left|\dfrac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right| < 1$.

Resolução:

$$\left|\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right| < 1 \Leftrightarrow |z - w| < |1 - \bar{z}w| \Leftrightarrow |z - w| - |1 - \bar{z}w| < 0.$$

Pelo exercício 9 tem-se $|1 - \bar{z}w|^2 - |z - w|^2 = \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)$, logo

$$|1 - \bar{z}w| - |z - w| = \frac{\left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)}{|1 - \bar{z}w| + |z - w|} \quad \text{e} \quad |z - w| - |1 - \bar{z}w| = -\frac{\left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right)}{|1 - \bar{z}w| + |z - w|}.$$

Como $|z| < 1$ e $|w| < 1$, tem-se $\left(1 - |z|^2\right) > 0$ e $\left(1 - |w|^2\right) > 0$ e consequentemente $|z - w| - |1 - \bar{z}w| < 0$.

11. Mostre que para qualquer número complexo $z \neq 0$, se tem $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$ se e só se $\operatorname{Re} z > 0$.

Resolução:

Se $z = x + iy$, tem-se

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z > 0 .$$

12. Escreva na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $\dfrac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$ **b)** $\left(\cos\dfrac{1}{2} - i\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}\right)^2$

Resolução:

a) Sendo $z = 1 - i$, tem-se $|z| = |1-i| = \sqrt{2}$ e $\theta = \arg z$ é tal que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Então pode tomar-se $\theta = \frac{7\pi}{4}$ e, na forma polar, obtém-se

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right).$$

Seja $w = 1 + \sqrt{3}i$, tem-se $|w| = 2$, e $\mu = \arg w$ é tal que $\operatorname{sen}\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\mu = \frac{1}{2}$, por exemplo $\mu = \frac{\pi}{3}$.

Então, $1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$.

Finalmente, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}$. Assim,

$$\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\operatorname{sen}\frac{17}{12}\pi\right).$$

b) O complexo $z = \cos\left(\frac{1}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(-\frac{1}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ tem módulo 1 e argumento $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Pela fórmula de De Moivre,

$$z^2 = \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) - i\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = (\cos(-1) + i\text{sen}(-1)).$$

13. Calcule $\left[3\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\text{sen}\frac{2\pi}{9}\right)\right]\left[4\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\text{sen}\frac{4\pi}{9}\right)\right]$.

Resolução:

$$\left[3\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\text{sen}\frac{2\pi}{9}\right)\right]\left[4\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\text{sen}\frac{4\pi}{9}\right)\right] = 12\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = 12\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -6 + 6\sqrt{3}\,i\,.$$

14. Prove que:

a) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$ **b)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{-10} = 2^{-11}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$

Resolução:

a) $(-1+i)^7 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)\right]^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i\text{sen}\frac{21\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right) =$

$= 8\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -8(1+i).$

b) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{-10} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-10} = 2^{-10}\left(\cos\frac{-10\pi}{3} + i\text{sen}\frac{-10\pi}{3}\right) =$

$= 2^{-10}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2^{-10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 2^{-10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{-11}\left(-1+\sqrt{3}i\right).$

15. Resolva as equações seguintes:

a) $z^5 - 2 = 0$ **b)** $z^4 + i = 1$

Resolução:

Atendendo ao teorema A.4.:

a) $z^5 = 2 = 2(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$.

$$z_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{5}\right),\ k = 0, \dots,\ 4$$

$$z_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{5}\right),\ k = 0, \dots,\ 4.$$

As raízes dispõem-se segundo os vértices dum pentágono regular inscrito na circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[5]{2}$ em que um dos vértices é $z_0 = \sqrt[5]{2}$.

b) $z^4 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$.

$$z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),\ k = 0, \dots,\ 3$$

As raízes dispõem-se segundo os vértices de um quadrado inscrito na circunfrência de centro na origem e raio $\sqrt[8]{2}$, sendo um deles o ponto $z_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{16}\right)$.

16. Verifique que $\overline{\left(z^n\right)} = (\overline{z})^n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Resolução:

Se $|z| = \rho$ e $\arg z = \theta$, tem-se (atendendo à fórmula de De Moivre),

$$\overline{\left(z^n\right)} = \overline{\rho^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)} = \rho^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta) = \rho^n\left[\left(\cos n(-\theta) + i\operatorname{sen} n(-\theta)\right)\right] =$$
$$= \rho^n\left(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)\right)^n = \left[\rho\left(\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)\right)\right]^n = \left[\rho(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\right]^n = (\overline{z})^n.$$

17. Prove que $\operatorname{sen}(3\theta) = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$ e $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Resolução:

Sabe-se que $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta,\ n \in \mathbb{N}$ (consequência imediata da fórmula de De Moivre). Então $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta$.

Mas, pela fórmula do binómio de Newton,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\ (i\operatorname{sen}\theta) + 3\cos\theta\ (i\operatorname{sen}\theta)^2 + (i\operatorname{sen}\theta)^3 = \\ &= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\right).\end{aligned}$$

Então $\cos^3\theta - 3\cos\theta\ \operatorname{sen}^2\theta = \cos 3\theta$ e $3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}3\theta$.
Atendendo a que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obtém-se

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right) = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

e

$$\operatorname{sen}(3\theta) = 3\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta.$$

18. a) Verifique que $i^{4k} = i^0 = 1$, $i^{4k+1} = i^1 = i$, $i^{4k+2} = i^2 = -1$, $i^{4k+3} = i^3 = -i$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

b) Tendo em conta a alínea anterior, calcule i^n, para cada valor inteiro de n.

Resolução:

a) $i^{4k} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{4k} = \cos\left(\frac{4k\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{4k\pi}{2}\right) = \cos(2k\pi) + i\operatorname{sen}(2k\pi) = 1$.

$i^{4k+1} = i^{4k}\cdot i = i$.

$i^{4k+2} = i^{4k+1}\cdot i = i\cdot i = -1$.

$i^{4k+3} = i^{4k+2}\cdot i = -1\cdot i = -i$.

b) Sendo n um número inteiro e efectuando a sua divisão por 4, tem-se

$$\exists k, j \in \mathbb{Z}:\ n = 4k + j \quad \text{com} \quad 0 \le j \le 3.$$

Então, pela alínea a) $i^n = i^{4k+j} = i^j \in \{1,\ i,\ -1,\ -i\}$.

19. a) Sejam $k \in \mathbb{N}_0$ e z um número complexo qualquer. Mostre que existem números naturais $c_0, c_1, \ldots, c_k$ tais que $c_0 = 1$ e $c_1 = k$ e $(1+z)^k = c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (fórmula do Binómino de Newton em $\mathbb{C}$).

b) Mostre que se k é múltiplo de 4 então $\displaystyle\sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1}(-1)^j c_{2j+1}=0$

Resolução:

a) A prova é feita utilizando o princípio de indução:

Como $(1+z)^0=1$ tem-se $c_0=1$ pelo que, para $k=0$, a igualdade é verdadeira.

Supondo que $(1+z)^k=c_0+c_1z+\ldots+c_kz^k$ com $c_0=1$, $c_1=k$ e $c_k\in\mathbb{N}$; mostre-se que $(1+z)^{k+1}=d_0+d_1z+\ldots+d_kz^k+d_{k+1}z^{k+1}$ com $d_0=1$ e $d_1=k+1$ e $d_k\in\mathbb{N}$. Tem-se

$$\begin{aligned}(1+z)^{k+1}&=\left(c_0+c_1z+\ldots+c_kz^k\right)(1+z)=c_0+c_1z+\ldots+c_kz^k+c_0z+c_1z^2+\ldots+c_kz^{k+1}=\\&=c_0+\left(c_1+c_0\right)z+\left(c_2+c_1\right)z^2+\ldots+\left(c_k+c_{k-1}\right)z^k+c_kz^{k+1}.\end{aligned}$$

Basta então tomar

$$\begin{aligned}d_0&=c_0\\d_1&=c_1+c_0\\&\ldots\\d_k&=c_k+c_{k-1}\\d_{k+1}&=c_k.\end{aligned}$$

Tendo-se então $d_0=c_0=1$ e $d_1=k+1$ e $d_k\in\mathbb{N}$, como se pretendia.

b) Faça-se na alínea a) $z=i$ e $k=4p$ com $p\in\mathbb{N}$. Obtém-se

$$(1+i)^{4p}=c_0+c_1\,i-c_2-c_3\,i+\ldots+c_{4p-3}\,i^{4p-3}+c_{4p-2}\,i^{4p-2}+c_{4p-1}\,i^{4p-1}+c_{4p}\,i^{4p}.$$

Atendendo ao exercício 18 tem-se que:

$$i^{4p}=1,\qquad i^{4p-1}=-i,\qquad i^{4p-2}=-1,\qquad i^{4p-3}=i,$$

$$(1+i)^{4p}=c_0+c_1i-c_2-c_3\,i+\ldots-c_{4p-3}\,i-c_{4p-2}+c_{4p-1}\,i+c_{4p}.$$

Então

$$\operatorname{Im}(1+i)^{4p}=\operatorname{Im}\left[\left(\sqrt{2}\right)^{4p}\left(\cos(p\pi)+i\operatorname{sen}(p\pi)\right)\right]=0=c_1-c_3+c_5-\ldots-c_{4p-3}+c_{4p-1}.$$

20. Mostre que:

a) $1+z+\ldots+z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ se $z \neq 1$.

b) Verifique que, se $w \neq 1$ é uma n-ésima raiz da unidade, então $1+w+\ldots+w^{n-1} = 0$.

Resolução:

a) Seja $S = 1 + z + \ldots + z^n$. Tem-se $zS = z + z^2 + \ldots + z^n + z^{n+1}$, logo

$$S - zS = 1 - z^{n+1} \Leftrightarrow S(1-z) = 1 - z^{n+1}.$$

Como $z \neq 1$ resulta que $S = 1+z+\ldots+z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

Por analogia com $\mathbb{R}$, chama-se progressão geométrica de razão $r \neq 0$ à sucessão de termo geral u_n caracterizada por $u_{n+1} = ru_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) .

b) Pela alínea a) e sendo $w \neq 1$, $1+w+\ldots+w^{n-1} = \dfrac{1-w^n}{1-w}$.

Como w é uma n-ésima raiz da unidade, tem-se $w^n = 1$ e consequentemente $1+w+\ldots+w^{n-1} = 0$.

21. Represente graficamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$ e verifique que são conjuntos fechados. Indique se são ou não limitados e se são ou não conexos.

a) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C}: z\bar{z} = 16 \}$.

b) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C}: z + \bar{z} = 4 \}$.

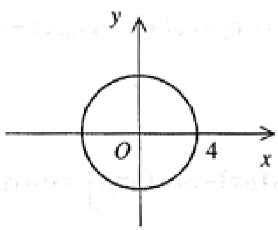
c) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C}: \bar{z} = z + 6i \}$.

d) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C}: |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = 1 \}$.

Resolução:

a) $z\bar{z} = 16 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4$. (ver teorema A.2.)

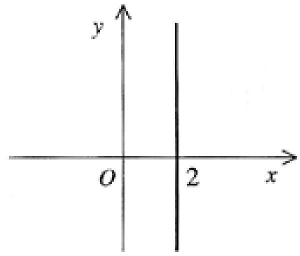
Então $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 4 \} = C(0, 4)$ (circunferência de centro na origem e raio 4).



O conjunto Ω é compacto (limitado e fechado) e conexo.

b) $z + \bar{z} = 4 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re} z = 4 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 2$.

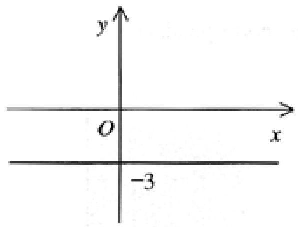
$\Omega = \{ z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z = 2 \} = \{ z = x + iy\colon x = 2 \}$. Trata-se de uma recta paralela ao eixo imaginário.



O conjunto é fechado e conexo, mas não é um conjunto limitado.

c) $\bar{z} = z + 6i \Leftrightarrow \bar{z} - z = 6i \Leftrightarrow -2i\operatorname{Im} z = 6i \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = -3$.

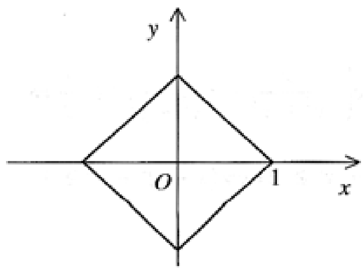
$\Omega = \{ z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z = -3 \} = \{ z = x + iy\colon y = -3 \}$. Trata-se de uma recta paralela ao eixo real.



Tal como na alínea b), o conjunto é fechado, não limitado e conexo.

d) $\Omega = \{ z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1 \} = \{ z = x + iy\colon |x| + |y| = 1 \} = \{ z = x + iy\colon |y| = 1 - |x| \} =$

$= \{ z = x + iy\colon [y = 1 - |x|, \text{ se } y \geq 0] \vee [y = -(1 - |x|), \text{ se } y < 0] \}$.



O conjunto é o quadrado de vértices $z_0 = -1$, $z_1 = -i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = i$. É pois um conjunto compacto (fechado e limitado) e conexo.

22. Descreva a fronteira dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$ e diga se são abertos ou fechados.

a) $A = \{ z \in \mathbb{C}: |z-4| \geq |z| \}$.

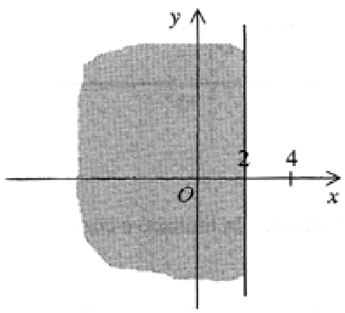
b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}: \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2} \right\}$.

c) $C = \left\{ z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}\left(z^2\right) > 0 \right\}$.

d) $D = \left\{ z_n \in \mathbb{C}: z_n = \frac{(-1)^n (1+i)(n-1)}{n},\ n = 1,\ 2, \ldots \right\}$.

Resolução:

a) A condição $|z-4| = |z|$ equivale a $d(z,\ 4) = d(z,\ 0)$ e representa o lugar geométrico dos pontos do plano igualmente distantes de $z = 4$ e de $z = 0$, isto é, a mediatriz do segmento de recta que une estes dois pontos. Assim, o conjunto dado é o semiplano correspondente:

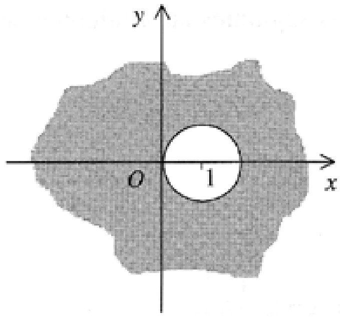


A fronteira deste conjunto é a recta $x = 2$: $frA = \{ z = x + iy : x = 2 \}$. Dado que $frA \subset A$, A é fechado.

b) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \geq 1.$$

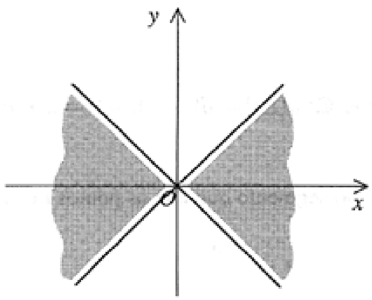
Tem-se $frB = \left\{ z = x + iy: (x-1)^2 + y^2 = 1 \right\} \subset B$, logo B é fechado.



c) $\text{Re}\left(z^2\right) > 0 \Leftrightarrow \text{Re}\left((x+iy)^2\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y > x \wedge y < -x) \vee (y < x \wedge y > -x).$$

Tem-se $frC = \{ z = x + iy : y = x \vee y = -x \} \subset \mathbb{C} \setminus C$, logo o conjunto C é aberto.



d) D é o conjunto de termos da sucessão (z_n).

Analise-se a sucessão quanto à existência de limite:

– Se n é par, $z_n = \dfrac{(1+i)(n-1)}{n} \to (1+i)$.

– Se n é ímpar, $z_n = -\dfrac{(1+i)(n-1)}{n} \to -(1+i)$.

Então, $frD = \left\{ z_n \in \mathbb{C} : z_n = (-1)^n \dfrac{(1+i)(n-1)}{n} \right\} \cup \{1+i, -1-i\}$, concluindo-se que o conjunto D não é aberto nem fechado.

23. Representе geometricamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$ e indique quais são domínios do plano complexo.

a) $A_1 = \{ z \in \mathbb{C} \colon |z - i| = |z + i| \}$.

b) $A_2 = \{ z \in \mathbb{C} \colon |z - i| < |z + i| \}$.

c) $A_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon z = |z| e^{i\theta},\ \frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$.

d) $A_4 = \{ z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z < 1 \text{ e } \operatorname{Im}(z - 1) \neq 0 \}$.

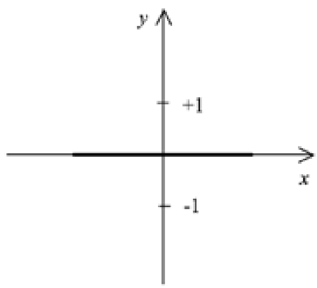
e) $A_5 = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}\left[\frac{(z + i)}{2i} \right] \leq 0 \right\}$.

f) $A_6 = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z|^2 > z + \overline{z} \right\}$.

Resolução:

a) $A_1 = \{ z \in \mathbb{C} \colon |z - i| = |z + i| \} = \{ z \in \mathbb{C} \colon d(z,i) = d(z,-i) \} = \{ z = x + iy \colon y = 0 \}$.

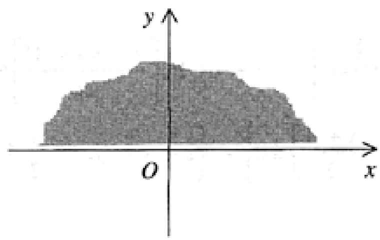
Geometricamente A_1 é a mediatriz do segmento que une os pontos i e $-i$, isto é, o eixo real.



O conjunto A_1 é fechado, logo não pode ser aberto (porque $\varnothing \neq A_1 \subset \mathbb{C}$). Não é, pois, um domínio.

b) $A_2 = \{ z \in \mathbb{C} \colon |z - i| < |z + i| \} = \{ z \in \mathbb{C} \colon d(z,i) < d(z,-i) \} = \{ z = x + iy \colon y > 0 \}$. Comparar com o conjunto A_1.

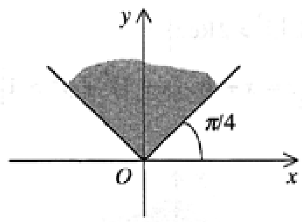
Todos os pontos de A_2 são pontos interiores, pelo que A_2 é aberto. Como A_2 é um conjunto conexo, é um domínio de $\mathbb{C}$.



c) $A_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}: z = |z|e^{i\theta},\ \frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$.

Como $0 \leq |z| < +\infty$, A_3 é o conjunto dos números complexos com argumento entre $\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi$.

Os pontos das semi-rectas de argumento $\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi$ são os pontos fronteiros de A_3 e pertencem a A_3; então A_3 não é um conjunto aberto, logo não é um domínio.

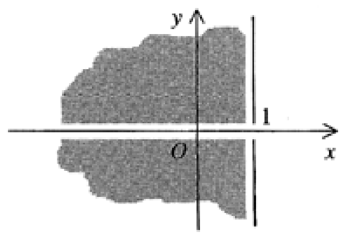


d) $A_4 = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < 1 \text{ e } \operatorname{Im}(z-1) \neq 0\} = \{z = x + iy: x < 1 \wedge y \neq 0\}$.

O conjunto A_4 é aberto, pois não contém nenhum ponto fronteiro. Porém, A_4 não é conexo, pois admite uma partição em dois subconjuntos abertos A e B:

$$A = \{z = x + iy: x < 1 \wedge y > 0\} \quad \text{e} \quad B = \{z = x + iy: x < 1 \wedge y < 0\}.$$

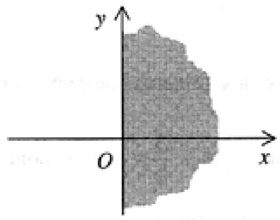
Assim A_4 não é um domínio.



e) $A_5 = \left\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\left[\frac{(z+i)}{2i}\right] \le 0\right\} = \left\{z = x + iy\colon \operatorname{Im}\left[\frac{x + i(y+1)}{2i}\right] \le 0\right\} =$

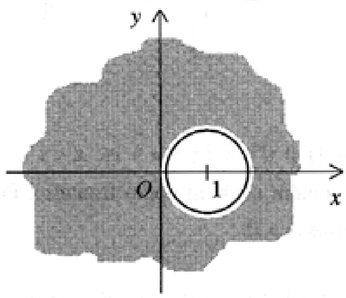
$= \left\{z = x + iy\colon \operatorname{Im}\left[-\frac{x}{2}i + \frac{y+1}{2}\right] \le 0\right\} = \left\{z = x + iy\colon -\frac{x}{2} \le 0\right\} = \{z = x + iy\colon x \ge 0\}$.

O conjunto A_5 é fechado, pois contém a sua fronteira (a recta $x = 0$) ; não é, pois, um domínio.



f) $A_6 = \left\{z \in \mathbb{C}\colon |z|^2 > z + \bar{z}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon |z|^2 > 2\operatorname{Re} z\right\} =$

$= \left\{z = x + iy\colon x^2 + y^2 > 2x\right\} = \left\{z = x + iy\colon (x-1)^2 + y^2 > 1\right\}$



O conjunto A_6 é um conjunto aberto, pois não contém nenhum ponto da sua fronteira, que é a circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$; é também um conjunto conexo, pelo que é um domínio.

24. Classifique quanto à natureza (convergente ou divergente) as seguintes sucessões de números complexos:

a) $z_n = (-1)^n + i\dfrac{1}{n}$.

b) $z_n = n + \dfrac{i}{n}$.

c) $z_n = \dfrac{1}{n} + i\dfrac{n}{n+1}$.

d) $z_n = i^n$.

e) $z_n = \dfrac{n + i(n+1)}{2n+2}$.

f) $z_n = \dfrac{2^n}{n!} + i\dfrac{n}{2^n}$.

g) $z_n = \sqrt[n]{n} + inq^n, (|q| < 1)$.

h) $z_n = \sqrt[n]{a} + i\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}, \ (a > 0)$.

Resolução:

a) Como $\operatorname{Re}(z_n) = (-1)^n$ é uma sucessão divergente, a sucessão (z_n) é divergente. (Apesar de $\lim \operatorname{Im}(z_n) = \lim \dfrac{1}{n} = 0$)

b) Como $\lim \operatorname{Re}(z_n) = \lim n = +\infty$, a sucessão (z_n) é divergente. Note-se que $|z_n| = \sqrt{n^2 + \dfrac{1}{n^2}} \to +\infty$, logo $z_n \to \infty$ (ver definição B.4.).

c) Sendo $\lim \operatorname{Re}(z_n) = \lim \dfrac{1}{n} = 0$ e $\lim \operatorname{Im}(z_n) = \lim \dfrac{n}{n+1} = 1$, a sucessão (z_n) é convergente e $\lim z_n = \lim \operatorname{Re}(z_n) + i \lim \operatorname{Im}(z_n) = 0 + i = i$.

d) Atendendo a que a sucessão $z_n = i^n$ tem por subsucessões $z_{4k} = 1$, $z_{4k+1} = i$, $z_{4k+2} = -1$, $z_{4k+3} = -i$ com $k \in \mathbb{N}_0$, cujos limites são todos distintos, conclui-se que a sucessão (z_n) é divergente , pois existem subsucessões com limites diferentes.

e) Porque $\lim \operatorname{Re}(z_n) = \lim \dfrac{n}{2n+2} = \dfrac{1}{2}$ e $\lim \operatorname{Im}(z_n) = \lim \dfrac{n+1}{2n+2} = \dfrac{1}{2}$, a sucessão (z_n) é convergente e $\lim z_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

f) A série numérica real $\sum \dfrac{2^n}{n!}$ é convergente como se pode verificar aplicando o critério da razão. Então, a sucessão $\operatorname{Re}(z_n)=\dfrac{2^n}{n!}$ tem limite zero. Utilizando argumento análogo, verifica-se que

$$\lim\ \operatorname{Im}(z_n)=\lim\frac{n}{2^n}=0\,.$$

A sucessão (z_n) converge então para 0.

g) Tem-se que $\lim\ \operatorname{Re}(z_n)=\ \lim\ \sqrt[n]{n}=\ 1$ (ver Apêndice 2).

Como a série numérica real $\sum nq^n$ é absolutamente convergente para $|q|<1$ (critério da raiz ou da razão), então $\lim\ \operatorname{Im}(z_n)=\ \lim\ nq^n=\ 0$.

Conclui-se assim que a sucessão (z_n) converge para 1.

h) Neste caso, $\lim\ \operatorname{Re}(z_n)=\ \lim\ \sqrt[n]{a}=\ 1$, $\lim\ \operatorname{Im}(z_n)=\ \lim\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}=\ \operatorname{sen}0=\ 0.$

Então $\lim\ z_n=\ 1$ e a sucessão (z_n) é convergente.

25. Determine os valores de $z\in\mathbb{C}$ para os quais existem os seguintes limites:

a) $\lim\limits_n\dfrac{z^n}{n!}$. **b)** $\lim\limits_n\left(\dfrac{z}{n}\right)^n$. **c)** $\lim\limits_n z^n$.

Resolução:

Seja $\rho=|z|$ e $\theta=\arg z$. Então, $z^n=\rho^n\left(\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta)\right)$, para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

a) Como $\dfrac{z^n}{n!}=\dfrac{\rho^n}{n!}\left[\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta)\right]$ e atendendo a $w_n\to 0\ \Leftrightarrow\ |w_n|\to 0$ estude-se a sucessão $\left|\dfrac{z^n}{n!}\right|=\dfrac{\rho^n}{n!}$.

— Se $\rho=0$, é imediato que $\lim\ \dfrac{z^n}{n!}=\ 0$.

— Se $\rho>0$, considere-se a série real de termos positivos $\sum\dfrac{\rho^n}{n!}$. O critério da razão garante que, para qualquer $\rho>0$, a série $\sum\dfrac{\rho^n}{n!}$ é convergente, logo $\lim\limits_n\dfrac{\rho^n}{n!}=\ 0,\ \forall\rho>\ 0$.

Conclui-se assim que $\lim\limits_n\dfrac{z^n}{n!}$ existe e é igual a zero, para qualquer $z\in\mathbb{C}$.

b) Tem-se $\left(\frac{z}{n}\right)^n = \frac{z^n}{n^n} = \frac{\rho^n}{n^n}\left[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)\right]$.

A série $\sum \frac{\rho^n}{n^n}$ para $\rho \geq 0$ é convergente (pelo critério da raiz). Então $\lim\left(\frac{\rho}{n}\right)^n = 0$ para qualquer $\rho \geq 0$.

Logo, $\lim\left(\frac{z}{n}\right)^n = 0$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

c) Tem-se $z^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)\right]$.

— Se $\rho < 1$, $\lim \rho^n = 0$, logo $\lim z^n = 0$.

— Se $z = 1$, $\lim z^n = \lim 1^n = 1$.

— Se $\rho = 1$ e $z \neq 1$, tem-se $\operatorname{Re}(z^n) = \cos(n\theta)$ e $\operatorname{Im}(z^n) = \operatorname{sen}(n\theta), \theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como estas sucessões não têm limite, a sucessão (z^n) é divergente.

— Se $\rho > 1$, $\lim \rho^n = +\infty$ e a sucessão de termo geral $w_n = z^n$ é divergente, tendo-se $\lim z^n = \infty$.

26. Mostre que, se $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são séries absolutamente convergentes, então a série $\sum(x_n + iy_n)$ é absolutamente convergente.

Resolução:

Por hipótese, as séries $\sum|x_n|$, $\sum|y_n|$ são convergentes. Consequentemente, as respectivas sucessões de somas parciais são sucessões de Cauchy. Fica assim assegurado que, qualquer que seja $\delta > 0$, existe p tal que, para $n, m \geq p$, se tem:

$$|x_{m+1}| + \ldots + |x_n| < \frac{\delta}{2} \text{ e } |y_{m+1}| + \ldots + |y_n| < \frac{\delta}{2}.$$

Então, a partir da mesma ordem p, sempre que $n, m \geq p$, também se tem:

$$\begin{aligned}|x_{m+1} + iy_{m+1}| + \ldots + |x_n + iy_n| &\leq |x_{m+1}| + |i|\cdot|y_{m+1}| + \ldots + |x_n| + |i|\cdot|y_n| \leq \\ &\leq |x_{m+1}| + \ldots + |x_n| + |y_{m+1}| + \ldots + |y_n| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,\end{aligned}$$

o que prova a convergência da série $\sum|x_n + iy_n|$

27. Estude quanto à convergência simples e absoluta as seguintes séries de números complexos:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+i}{(n-1)!}\right)$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{2n^2}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+i}{2^n}$. **d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\cos n\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)$.

Resolução:

a) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+i}{(n-1)!}\right)$ é absolutamente convergente se as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Re}(z_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Im}(z_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

forem absolutamente convergente, (ver exercício 26).

Aplicando o critério da razão, conclui-se imediatamente que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Re}(z_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}$ é (absolutamente) convergente.

Aplicando o mesmo critério à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Im}(z_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}$, a conclusão é a mesma.

Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+i}{(n-1)!}\right)$ é absolutamente convergente.

b) A série dos módulos de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{2n^2}$ é $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1^n}{2n^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente,

a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{2n^2}$ é absolutamente convergente.

c) Tem-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{Re}(z_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{Im}(z_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Como $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}\left(\left|\frac{1}{2}\right| < 1\right)$, logo absolutamente convergente, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+i}{2^n}$ é absolutamente convergente (ver exercício 26).

d) Como a sucessão $z_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ é divergente, a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\cos n\frac{\pi}{2} + i\text{sen} n\frac{\pi}{2}\right)$ é divergente (ver teorema C.2.).

28. Estude a natureza da série $\sum nz^n$. O que pode concluir sobre $\lim nz^n$?

Resolução:

— Se $|z| \geq 1$, $\lim n|z|^n = +\infty \Rightarrow \lim nz^n = \infty$; a série é divergente. (Ver teorema C.2.).

— Se $|z| < 1$, considere-se a série dos módulos, $\sum n|z|^n$; pelo critério da razão, verifica-se facilmente que se trata de uma série convergente.

Então, quando $|z| < 1$, a série $\sum nz^n$ é absolutamente convergente, pelo que $\lim nz^n = 0$ (ver teorema C.2.).

29. Sejam (z_n) e (w_n) sucessões de números complexos tais que as séries $\sum |z_n|^2$ e $\sum |w_n|^2$ são convergentes. Mostre que, para todo o inteiro $p \geq 2$, a série $\sum (z_n - w_n)^p$ é convergente.

Resolução:

Como $\sum |z_n|^2$ e $\sum |w_n|^2$ são séries convergentes, também $\sum\left(|z_n|^2 + |w_n|^2\right)$ é uma série convergente. Por outro lado, o facto de as duas séries dadas serem convergentes garante que $\lim|z_n| = \lim|w_n| = 0$ e então, a partir de certa ordem, ter-se-á $|z_n| + |w_n| < 1$. Consequentemente, a partir dessa mesma ordem,

$$\left(|z_n| + |w_n|\right)^p \leq \left(|z_n| + |w_n|\right)^2, \text{ para } p \geq 2.$$

Mas

$$|z_n - w_n|^p \leq \left(|z_n| + |w_n|\right)^p \leq \left(|z_n| + |w_n|\right)^2 \leq 2\left(|z_n|^2 + |w_n|^2\right),$$

de onde se conclui, pelo critério de comparação, que, para $p \geq 2$, $\sum |z_n - w_n|^p$ converge, o que implica que $\sum (z_n - w_n)^p$ é absolutamente convergente, sempre com $p \geq 2$.

30. Seja (z_n) uma sucessão de termos complexos tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(z_n) \geq 0$ Mostre que, se as séries $\sum_{n \geq 0} z_n$ e $\sum_{n \geq 0} z_n{}^2$ são convergentes, então a série $\sum_{n \geq 0} |z_n|^2$ é convergente.

Resolução:

Pretende-se mostrar que $\sum |z_n|^2 = \sum \left(x_n^2 + y_n^2\right)$ é uma série convergente.

Considerem-se as sucessões de números reais $(x_n) = \operatorname{Re}(z_n)$ e $(y_n) = \operatorname{Im}(z_n)$. Sendo $\sum z_n$ convergente, tem-se $\lim z_n = 0$, logo $\lim x_n = \lim y_n = 0$. Então, a partir de certa ordem, verifica-se que $0 \leq x_n^2 < x_n$. Logo, utilizando o critério de comparação, conclui-se a convergência de $\sum x_n^2$ a partir da convergência de $\sum x_n$. Por outro lado, se $\sum \left(z_n^2\right) = \sum \left[\left(x_n^2 - y_n^2\right) + i 2 x_n y_n\right]$ é convergente, $\sum_{n \geq 0} \left(x_n^2 - y_n^2\right)$ também converge. Consequentemente, $\sum y_n^2$ é convergente, pois $\sum y_n^2 = -\sum \left(-y_n^2\right) = -\sum \left[\left(x_n^2 - y_n^2\right) - x_n^2\right]$. Conclui-se então que $\sum \left(x_n^2 + y_n^2\right) = \sum |z_n|^2$ é convergente.

Capítulo
2

FUNÇÕES HOLOMORFAS

A. Generalidades. Algumas funções elementares

Definição A.1.

Chama-se função complexa de variável complexa a toda a correspondência f definida num subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ e com valores em $\mathbb{C}$, $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que associa a cada ponto $z \in \Omega$, um e um só ponto $w = f(z) \in \mathbb{C}$.

Ao conjunto Ω chama-se **domínio de *f***, e a $f(\Omega) = \{f(z) : z \in \Omega\}$ chama-se **contradomínio de *f***.

Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\Omega^* = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \Omega\right\}$.

Definam-se $u: \Omega^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $v: \Omega^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$: tem-se $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ (abreviadamente, $f = u + iv$).

A função f identifica-se assim com uma função vectorial, definida em Ω^* e com valores em $\mathbb{R}^2$. (Sempre que daí não resultar qualquer ambiguidade, dir-se-á que u e v estão definidas em Ω.)

■

Exemplo A.1.

a) Seja $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2$.

Pondo $z = x + iy$, tem-se $f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, logo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, com $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. As funções u e v têm como domínio $\mathbb{R}^2$.

A função f transforma um ponto P de coordenadas (x, y), identificado com o número complexo $z = x + iy$, no ponto P' de coordenadas (u, v) em que $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$.

Analise-se a imagem por meio de f da circunferência de centro O e raio r no plano (xOy): se o ponto P de coordenadas (x, y) está sobre a circunferência em questão, o número complexo $z = x + iy$ associado a P é tal que $|z| = r$ e consequentemente o ponto P' de coordenadas (u, v), identificado com o número complexo $w = u + iv$, é tal que $|w| = r^2$. A imagem da circunferência de centro O e raio r no plano (xOy) é assim a circunferência de centro O' e raio r^2 no plano $(u\,O'\,v)$. Observe-se que, enquanto o ponto P percorre uma vez no sentido directo a circunferência de centro O e raio r, o ponto P' percorre duas vezes no sentido directo a circunferência de centro O' e raio r^2.

b) Seja $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Pondo $z = x + iy$, tem-se $f(x+iy) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, logo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, com $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ e $v(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. As funções u e v têm domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, logo f tem domínio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Se $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, $r > 0$, então $z^{-1} = r^{-1}\left[\cos(-\theta) + i\,\text{sen}\,(-\theta)\right]$. Então, enquanto um ponto P, identificado com o número complexo z, percorre uma vez no sentido directo, isto é, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, a circunferência de equação $|z| = r$, a sua imagem por f percorre uma vez a circunferência de equação $|w| = r^{-1}$, mas no sentido inverso.

As funções reais de variável real são um caso particular das funções complexas de variável complexa, atendendo ao isomorfismo de $\mathbb{R}$ com $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \{x + i0 : x \in \mathbb{R}\}$ (ver Capítulo 1.A).

As definições de igualdade, soma, subtracção, produto, divisão, composição e inversão de funções complexas de variável complexa são idênticas às vulgarmente utilizadas para funções reais de variável real.

Apresenta-se em seguida o estudo de algumas funções elementares.

Definição A.2.

Chama-se **função exponencial** à função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x+iy) = e^x\left[\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)\right].$$

Sendo $z = x + iy$, é habitual escrever-se $f(x+iy) = e^z$.

Da definição anterior destaca-se a identidade $e^{iy} = \cos y + i\operatorname{sen} y,\ \forall y \in \mathbb{R}$, conhecida por **identidade de Euler**, que permite escrever os números complexos não nulos na forma $z = x + iy = |z|\cdot(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = |z|\cdot e^{i\theta}$, com $\theta = \arg z$.

Tendo presente o exemplo A.4. do Capítulo 1, a circunferência de centro na origem e raio a $(a > 0)$ é o subconjunto de $\mathbb{C}$ caracterizado por

$$\left\{z : z = ae^{i\theta} \text{ com } \theta \in [0,2\pi[\right\} = \left\{z : z = ae^{i\theta} \text{ com } \theta \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Teorema A.1.

São válidas em $\mathbb{C}$ as seguintes propriedades da função exponencial:

(i) $e^z \neq 0$.

(ii) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

(iii) $e^{\bar{z}} = \overline{\left(e^z\right)}$.

(iv) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

(v) $\arg\left(e^z\right) = \operatorname{Im} z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(vi) A função exponencial é periódica de período $2\pi i$.

(vii) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

(i) Como $e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = 0$, $e^x \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, e não existe $y \in \mathbb{R}$ que verifique simultaneamente as condições $\cos y = 0$ e $\operatorname{sen} y = 0$, resulta que $e^z \neq 0$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Sejam $z = x + iy$ e $w = u + iv$; tem-se

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{x+u}[\cos(y+v) + i\text{sen}(y+v)] = \\ &= e^{x+u}[(\cos y \cos v - \text{sen}\, y \text{sen} v) + i(\text{sen}\, y \cos v + \cos y \text{sen} v)] = \\ &= e^{x+u}(\cos v + i\text{sen} v)(\cos y + i\text{sen}\, y) = e^{x}(\cos y + i\text{sen}\, y)e^{u}(\cos v + i\text{sen} v) = \\ &= e^{x+iy} \cdot e^{u+iv} = e^{z} \cdot e^{w}. \end{aligned}$$

(iii) $e^{\bar{z}} = e^{x-yi} = e^{x}[\cos(-y) + i\,\text{sen}\,(-y)] = e^{x}\cos y - ie^{x}\text{sen}\, y = \overline{(e^{z})}$

(iv) Como $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\left|e^{z}\right| = \left|e^{x+iy}\right| = \left|e^{x} \cdot e^{iy}\right| = \left|e^{x}\right|\left|e^{iy}\right| = e^{x}|\cos y + i\,\text{sen}\, y| = e^{x}\sqrt{\cos^{2} y + \text{sen}^{2} y} = e^{x} = e^{\text{Re}(z)}.$$

(v) $\arg\left(e^{z}\right) = \arg\left(e^{x+iy}\right) = \arg\left(e^{x}\,(\cos y + i\,\text{sen}\, y)\right) = y + 2k\pi = \text{Im}\,(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(vi) Atendendo a que as funções seno e co-seno são funções periódicas de período 2π, vem

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^{x}[\cos(y+2\pi) + i\text{sen}\,(y+2\pi)] = \\ &= e^{x}(\cos y + i\text{sen}\, y) = e^{z}. \end{aligned}$$

(vii) $$\begin{aligned} e^{z} = 1 &\Leftrightarrow \left|e^{z}\right| = 1 \text{ e } \arg(e^{z}) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow e^{\text{Re}(z)} = 1 \text{ e } \text{Im}(z) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ [por (iv) e (v)]} \\ &\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \text{ e } \text{Im}(z) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Observação:
Se z é um número real ($z = x + i0$) a função definida anteriormente coincide com a função exponencial real, o que justifica a notação utilizada. Com efeito:

$$e^{x+i0} = e^{x}[\cos(0) + i\,\text{sen}\,(0)] = e^{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemplo A.3.

Determine-se a imagem pela função $f(z) = e^z$ dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

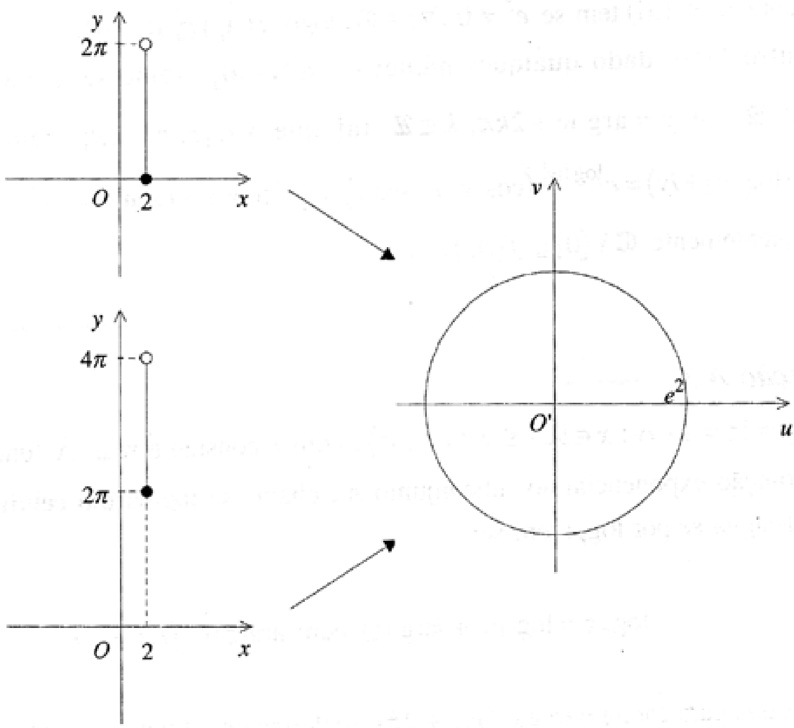
$$A = \{z = x + iy: x = 2, 0 \le y < 2\pi\} \quad \text{e} \quad B = \{z = x + iy: x = 2, 2\pi \le y < 4\pi\}$$

Tem-se

$$f(A) = \{w : w = e^2 (\cos y + i \operatorname{sen} y),\ 0 \le y < 2\pi\} = \{w : w = e^2 (\cos y + i \operatorname{sen} y),\ 2\pi \le y < 4\pi\} = f(B)$$

Geometricamente, a imagem comum dos conjuntos A e B é a circunferência de centro na origem e raio e^2. Não é de estranhar que $f(A) = f(B)$, uma vez que

$$B = \{z + 2\pi i : z \in A\} \quad \text{e} \quad e^{z+2k\pi i} = e^z \text{ (ver teorema A.1. (vi))} .$$



Devido à sua periodicidade, a função exponencial $f(z)$ não é injectiva em $\mathbb{C}$. Não admite assim, em $\mathbb{C}$, função inversa, ao contrário do que acontece com a sua restrição a $\mathbb{R}$. No entanto é possível definir restrições injectivas da função exponencial a diversos subconjuntos de $\mathbb{C}$.

Teorema A.2.

Seja $A_r = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R},\ r \leq y < r + 2\pi\}$, onde r é uma constante real. Então $f: A_r \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z$ é injectiva em A_r e $f(A_r) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demonstração:

Para se verificar que $f(z) = e^z$ é injectiva em A_r, tomem-se $z_1, z_2 \in A_r$ tais que $f(z_1) = f(z_2)$. Daqui resultam, sucessivamente, as igualdades seguintes: $e^{z_1} = e^{z_2}$; $e^{z_1 - z_2} = 1$; $z_1 - z_2 = 2k\pi i\ (k \in \mathbb{Z})$; (ver teorema A.1. (vii)). Como a «largura» da «faixa» A_r é igual a 2π e $z_1, z_2 \in A_r$, tem-se $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ apenas quando $k = 0$, isto é, quando $z_1 = z_2$.

Verifique-se que $f(A_r) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Pelo teorema A.1.(i) tem-se $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, logo $f(A_r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por outro lado, dado qualquer número $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tome-se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, com $x = \log|w| \in \mathbb{R}^+$ e $y = \arg w + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ tal que $y \in [r, r + 2\pi[$; tem-se que $z \in A_r$ e $f(z) = f(\log|w| + iy) = e^{\log|w|}(\cos y + i \operatorname{sen} y) = |w|(\cos y + i \operatorname{sen} y) = w$.

Consequentemente $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq f(A_r)$.

Definição A.3.

Seja $A_r = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, r \leq y < r + 2\pi\}$, com r constante real. À função inversa da restrição da função exponencial ao subconjunto A_r, chama-se **logaritmo relativo ao intervalo** $[r, r + 2\pi[$ e designa-se por $\log_r$; tem-se:

$$\log_r z = \log|z| + i\arg(z) \text{ com } \arg(z) \in [r, r + 2\pi[$$

Uma vez que para cada intervalo $[r, r + 2\pi[$ se define uma função logaritmo, $\log_r$, esta função é habitualmente designada por **ramo do logaritmo** correspondente ao intervalo $[r, r + 2\pi[$.

O ramo do logaritmo correspondente a tomar $r = -\pi$ denomina-se **ramo principal**; por comodidade, em vez de $\log_{-\pi}$, será simplesmente designado por «log».

Observação:

Se z é um número real positivo ($z = x + i0$), o ramo principal do logaritmo coincide com a função logaritmo real, o que justifica a notação utilizada. Com efeito,

$$\log(x + i0) = \log x + i \arg(x + i0) = \log x + i0 = \log x, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

A partir do ramo principal do logaritmo pode obter-se qualquer outro ramo, através da expressão $\log_r z = \log z + 2k\pi i$, em que k é um inteiro tal que $2k\pi + \arg(z) \in [r, r+2\pi[$.

Exemplo A.4.

Calcule-se $\log_r i$ com $r = -\pi$, $r = 0$ e $r = 11\pi/4$.

Tem-se:

$$\log\ i = \log|i| + i\arg(i) = \log 1 + i\pi/2 = i\pi/2, \text{ com } \arg(i) \in [-\pi, \pi[$$

$$\log_0 i = \log|i| + i\arg(i) = \log 1 + i\pi/2 = i\pi/2, \text{ com } \arg(i) \in [0, 2\pi[$$

$$\log_{\frac{11\pi}{4}} i = \log|i| + i\arg(i) = \log 1 + i9\pi/2 = i9\pi/2, \text{ com } \arg(i) \in \left[\frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}\right[.$$

Note-se que $\log_{\frac{11\pi}{4}} i = \log i + 2k\pi i$, com $k = 2$, pois $\frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}\right[$ e $\log i = \log_0 i$, visto que $\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi[\cap [0, 2\pi[$.

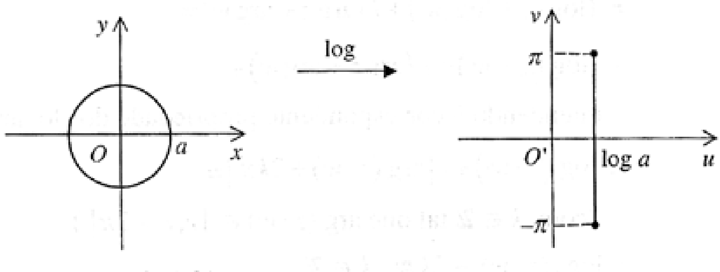
Exemplo A.5.

a) Determine-se a imagem pelo ramo principal do logaritmo da circunferência com centro na origem e raio a ($a > 0$).

O conjunto de pontos desta circunferência é $A = \{z : z = ae^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi[\}$.

Como $w = \log z = \log a + i\theta$, tem-se que a imagem de A pelo ramo principal do logaritmo é $\log(A) = \{w : w = u + iv \text{ com } u = \log a \text{ e } v \in [-\pi, \pi[\}$.

Geometricamente (se $a > 1$),

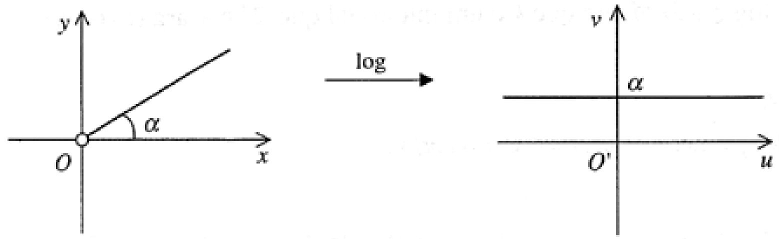


(Compare-se com o exemplo A.3.).

b) Seja α uma constante real e determine-se a imagem pelo ramo principal do logaritmo do conjunto $B = \{z \ : \ z = ae^{i\alpha}, a > 0\}$. Tem-se

$$\log (B) = \{w : w = u + iv \quad \text{com} \quad u = \log a \ \text{ e } \ v = \alpha\}.$$

Geometricamente,



Teorema A.3.

Para qualquer ramo da função logaritmo, são válidas as seguintes propriedades, para algum $k \in \mathbb{Z}$:

(i) $\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \log_r (z \cdot w) = \log_r (z) + \log_r (w) + 2k\pi i \ , \ \ k \in \mathbb{Z}.$

(ii) $\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \log_r (z/w) = \log_r (z) - \log_r (w) + 2k\pi i \ , \ \ k \in \mathbb{Z}.$

(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \log_r \left(z^n\right) = n \log_r (z) + 2k\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z}.$

(iv) $\log_r (e^z) = z \ , \ \ \forall \ z \in \ A_r = \left\{z = x + iy : \ x \in \mathbb{R}, \ r \leq y < \ r + 2\pi\right\}.$

(v) $\forall \ z \in \ \mathbb{C} \setminus \{0\} e^{\log_r z} = z.$

Demonstração:

(i) $\log_r z + \log_r w = \log|z| + i \arg z + \log|w| + i \arg w =$

(com $\arg z, \arg w \in \ [r, r + 2\pi[$)

$= \left(\log |z| + \log |w|\right) + i \left(\arg z + \arg w\right) =$

$= \log \left(|z| \cdot |w|\right) + i \left(\arg z + \arg w\right) =$

(atendendo à correspondente propriedade dos logaritmos reais)

$= \log \left(|z \cdot w|\right) + i \left[\arg (z \cdot w) + 2k\pi\right] =$

(com $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\arg (z \cdot w) \in \ [r, r + 2\pi[$)

$= \log_r (z \cdot w) + 2k\pi i \ , \ k \in \mathbb{Z}.$

(ii) A demonstração é análoga à anterior.

(iii) É uma consequência imediata de (i).

(iv) e (v) decorrem do facto de, para cada constante real r, a restrição da função exponencial a $A_r = \{z = x + iy\colon\ x \in \mathbb{R},\ r \leq y < r + 2\pi\}$ e a função $\log_r$ serem funções inversas uma da outra.

Definição A.4.

No conjunto $\mathbb{C}$, as funções **seno e co-seno** são definidas por:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Observação:

Da identidade de Euler deduz-se facilmente que, para $y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

pelo que as funções seno e co-seno definidas em $\mathbb{C}$ surgem como extensões das funções seno e co-seno reais.

Analogamente ao que se passa em $\mathbb{R}$, definem-se também em $\mathbb{C}$, à custa das funções seno e co-seno, as funções tangente, co-tangente, secante e co-secante.

Teorema A.4.

São verdadeiras em $\mathbb{C}$ as igualdades seguintes:

(i) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1.$

(ii) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w.$

(iii) $\cos(z + w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w.$

Demonstração:

(i) $$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{i2z} - 2 + e^{-i2z}}{-4} + \frac{e^{i2z} + 2 + e^{-i2z}}{4} = 1.$$

(ii) $$\operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}\,(z+w).$$

(iii) $$\cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w = \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \cdot \left(e^{iw} + e^{-iw}\right)}{4} - \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \cdot \left(e^{iw} - e^{-iw}\right)}{-4}$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos\,(z+w).$$

Exemplo A.6.

Calcule-se $\operatorname{sen} i$.

Pela definição A.4., tem-se $\operatorname{sen} i = \dfrac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = \dfrac{e^2 - 1}{2e}\, i$. Note-se que $|\operatorname{sen} i| = \dfrac{|e^2 - 1|}{2e} > 1$ ao passo que, como é bem sabido, a função seno real tem sempre valores cujo módulo é não superior a 1.

Definição A.5.

No conjunto $\mathbb{C}$ as **funções seno hiperbólico** (senh ou sh) e **co-seno hiperbólico** (cosh ou ch) são definidas por

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Estas funções são as extensões a $\mathbb{C}$ das funções hiperbólicas em $\mathbb{R}$ e verificam propriedades idênticas.

Exemplo A.7.
Calcule-se senh i.

Pela definição anterior, tem-se $\operatorname{senh} \mathrm{i} = \dfrac{e^{i} - e^{-i}}{2} = i \operatorname{sen} 1$

As funções inversas das funções trigonométricas e das funções hiperbólicas definem-se à custa da função logaritmo. Assim, se $z = \operatorname{sen} w$, tem-se $z = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, logo

$$e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0, \text{ isto é, } e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação em ordem a e^{iw} obtém-se que $e^{iw} = iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}$, de onde se deduz que $iw = \log_r\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, logo

$$w = \operatorname{sen}^{-1} z = -i \log_r\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Note-se que $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ não é uma função univocamente determinada.
Analogamente se deduz que

$$\cos^{-1} z = -i \log_r\left[z + i\left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right], \quad \operatorname{tg}^{-1} z = \frac{i}{2} \log_r \frac{i + z}{i - z},$$

$$\operatorname{senh}^{-1} z = \log_r\left[z + \left(z^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right], \quad \cosh^{-1} z = \log_r\left[z + \left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Exemplo A.8.

Calcule-se $\operatorname{sen}^{-1} i$.

Tem-se $\operatorname{sen}^{-1} i = -i \log_r\left[i^2 + \left(1 - i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = -i \log_r\left[-1 \pm \sqrt{2}\right]$. Tomando, por exemplo, o ramo do logaritmo correspondente ao intervalo $[0, 2\pi[$, tem-se $\operatorname{sen}^{-1} i = \left\{-i \log\left(-1 + \sqrt{2}\right), \pi - i \log\left|-1 - \sqrt{2}\right|\right\}$.

Definição A.6.

Para cada ramo do logaritmo, $\log_r$, e para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, define-se em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ a **função potência**, $z \to z^{\alpha}$, pondo $z^{\alpha} = e^{\alpha \log_r z}$.

Exemplo A.9.

Considerando o ramo principal do logaritmo, calcule-se i^i.

Tem-se $i^i = e^{i \log i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$ (ver exemplo A.4.).

Teorema A.5.

Fixado um ramo do logaritmo, $\log_r$, para quaisquer números complexos α e β tem-se:

$$z^{\alpha+\beta} = z^{\alpha} \cdot z^{\beta}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Demonstração:

$z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\log_r z} = e^{\alpha \log_r z + \beta \log_r z} = e^{\alpha \log_r z} \cdot e^{\beta \log_r z} = z^{\alpha} \cdot z^{\beta}$ (ver teorema A.1. (ii)).

Definição A.7.

Para cada ramo do logaritmo, $\log_r$, e para cada $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, define-se em $\mathbb{C}$ a **função exponencial de base** α, $z \to \alpha^z$, pondo $\alpha^z = e^{z \log_r \alpha}$.

Exemplo A.10.

Para α e β pertencentes a $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, tem-se em geral (em $\mathbb{C}$) que $(\alpha \cdot \beta)^z \neq \alpha^z \cdot \beta^z$. Estudem-se os valores de z para os quais a igualdade é verificada. Tem-se

$$(\alpha \cdot \beta)^z = e^{z \log_r (\alpha \cdot \beta)} = e^{z(\log_r \alpha + \log_r \beta + 2k\pi i)} = e^{z \log_r \alpha} \cdot e^{z \log_r \beta} \cdot e^{z\, 2k\pi i} = \alpha^z \cdot \beta^z \cdot e^{z 2k\pi i},$$

de onde se conclui que a igualdade $(\alpha \cdot \beta)^z = \alpha^z \cdot \beta^z$ se verifica apenas quando $e^{z\,2k\pi i} = 1$, isto é, quando $z \in \mathbb{Z}$ (pelo teorema A.1.(vii)).

B. Limites e continuidade

Definição B.1.

Considere-se a função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e seja $z_0 \in \overline{\Omega}$.

Diz-se que o **limite de f, quando z tende para z_0**, é $L \in \mathbb{C}$ e escreve-se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ se para qualquer $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z) - L| < \delta$ sempre que $z \in \Omega$ e $|z - z_0| < \varepsilon$, isto é,

$\forall\, \delta > 0 \quad \exists\, \varepsilon > 0 : z \in \Omega$ e $|z - z_0| < \varepsilon \;\Rightarrow\; |f(z) - L| < \delta$.

Esta formulação, sendo idêntica à que é utilizada no caso das funções reais de uma variável real, permite observar que as propriedades conhecidas do limite (unicidade e propriedades operatórias) se mantêm verdadeiras para o caso das funções complexas (ver Apêndice 4).

Observação:

1. Se $z_0 \in \Omega$ e $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$, $L \in \mathbb{C}$, pela definição anterior tem-se $L = f(z_0)$.

2. A função f tem limite $L \in \mathbb{C}$ quando z tende para z_0 se e só se, para toda a sucessão (z_n), $z_n \in \mathbb{C}$, convergente para z_0, a sucessão $(f(z_n))$ converge para L.

Exemplo B.1.

Use-se a definição de limite para concluir que $\lim\limits_{z \to 2} \left(z^2 - 4\right) = 0$.

A função $f(z) = z^2 - 4$ está definida em $\mathbb{C}$, então $\lim\limits_{z \to 2} \left(z^2 - 4\right) = 0$, se e só se, para todo o número δ não negativo, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $|z - 2| < \varepsilon \Rightarrow \left|\left(z^2 - 4\right) - 0\right| < \delta$. Como $z \to 2$ podemos supor que $|z| < 3$ e assim

$$\left|\left(z^2 - 4\right) - 0\right| = |z - 2|\,|z + 2| \le |z - 2|\,\left(|z| + 2\right) < |z - 2| \cdot 5 < 5\varepsilon$$

Basta então considerar $0 < \varepsilon < 1$ (*) tal que $5\varepsilon < \delta$, isto é, $\varepsilon \le \min\left\{\dfrac{\delta}{5}, 1\right\}$.

(*) Toma-se $\varepsilon < 1$ para que os elementos do conjunto $\{z : \; |z - 2| < \varepsilon\}$ sejam tais que $|z| < 3$.

Exemplo B.2.

Estude-se a existência de $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$. (Note-se que $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$ tem por domínio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e $z_0 = 0 \in fr\Omega$.)

Considere-se que $z \to 0$ ao longo do eixo real, isto é, $z = x$:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=x}} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{z\to 0\\ z=x}} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 .$$

Considere-se que $z \to 0$ ao longo do eixo imaginário, isto é, $z = iy$:

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=iy}} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{\substack{z\to 0\\ z=iy}} \frac{-iy}{iy} = \lim_{y\to 0} (-1) = -1 .$$

O facto de se terem obtido valores diferentes permite concluir, tendo em conta a unicidade do limite, que não existe $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$.

Exemplo B.3.

Calcule-se $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{z}$.

Ponha-se $f(z) = \dfrac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{z}$. Uma vez que $|\operatorname{Re}(z)| \le |z|$, tem-se que

$$|f(z)| = \left|\frac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{z}\right| = \frac{|\operatorname{Re}(z)|^2}{|z|} \le \frac{|z|^2}{|z|} = |z| .$$

Quando $z \to 0$, também $|z| \to 0$ e, pela desigualdade anterior, $\lim\limits_{z\to 0} |f(z)| = 0$. Mas, para uma função qualquer, tem-se que $\lim\limits_{z\to 0} |f(z)| = 0$ equivale a que $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$ e assim $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{z} = 0$.

Exemplo B.4.

Calcule-se $\lim\limits_{z\to 2} \dfrac{z^2 - 4}{z - 2}$.

A função $f(z) = \dfrac{z^2 - 4}{z - 2}$ está definida em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ e $2 \in fr\Omega$. Tem-se

$$\lim_{z\to 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2} = \lim_{z\to 2} \frac{(z+2)(z-2)}{z-2} = \lim_{z\to 2} (z+2) = 4 .$$

Teorema B.1.

Seja f uma função definida num subconjunto Ω de $\mathbb{C}$.

Ponha-se $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, e seja $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto de Ω. Então,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A + iB \text{, se e só se } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B\,.$$

Demonstração:

Comece-se por provar que, se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A + iB\text{, então } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A \text{ e } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B\,.$$

Seja $\delta > 0$. Por hipótese, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \left|z - (x_0 + iy_0)\right| < \varepsilon \text{ implica } \left|f(z) - (A + iB)\right| < \delta.$$

Seja $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$; para qualquer $z = x + iy$ tal que $|x - x_0| < \eta$ e $|y - y_0| < \eta$, tem-se

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= \left|(x+iy) - (x_0 + iy_0)\right| = \left|(x - x_0) + i(y - y_0)\right| \le \\ &\le |x - x_0| + |y - y_0| < \eta + \eta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ou seja, $\left|f(z) - (A+iB)\right| < \delta$. Mas esta última desigualdade é equivalente a $\left|\left[u(x,y) - A\right] + i\left[v(x,y) - B\right]\right| < \delta$ de onde resulta que $\left|u(x,y) - A\right| < \delta$ e $\left|v(x,y) - B\right| < \delta$. Fica assim provado que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B$.

Reciprocamente, prove-se que, se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = A \text{ e } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = B\text{, então } \lim_{z\to z_0} f(z) = A + iB\,.$$

A hipótese garante que, para qualquer $\delta > 0$, existem $\varepsilon' > 0$ e $\varepsilon'' > 0$ tais que

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \varepsilon' \Rightarrow |u(x,y)-A| < \frac{\delta}{2} \quad \text{e} \quad \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \varepsilon'' \Rightarrow |v(x,y)-B| < \frac{\delta}{2}.$$

Seja $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'')$ e z tal que $|z-z_0| < \varepsilon$; tem-se então

$$|f(z)-(A+iB)| = |[u(x,y)+iv(x,y)]-(A+iB)| = |[u(x,y)-A]+i[v(x,y)-B]| \leq$$
$$\leq |u(x,y)-A| + |v(x,y)-B| \leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta$$

Fica assim demonstrado que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A + iB$.

Exemplo B.5.

Estude-se o seguinte limite: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[x^2y^2 + i\left(x^2+y^2\right)\right]$.

Tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) = 0,$$

logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x+iy) = 0$.

Definição B.2.

Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$.

A função f **é contínua em z_0** quando existe em $\mathbb{C}$ o seu limite quando z tende para z_0, tendo-se neste caso $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

A função f **diz-se contínua em Ω** quando é contínua em todos os pontos de Ω.

Observação:

1. Se f é contínua em z_0, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Assim, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(z_n) = f(z_0)$ para qualquer sucessão (z_n) de números complexos convergente para z_0.

2. Uma função é contínua em todos os pontos isolados do seu domínio.

3. A continuidade de f num ponto z_0 é equivalente a que se tenha $f(z) = f(z_0) + \varepsilon(z)$ com $\lim\limits_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$.

Teorema B.2.

Seja f uma função definida num subconjunto Ω de $\mathbb{C}$, $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. Seja ainda $z_0=x_0+iy_0$ um ponto de Ω. Então, f é contínua em z_0 se e só se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções contínuas em (x_0, y_0).

Demonstração:

Este teorema é uma consequência imediata do teorema B.1.

Exemplo B.6.

Verifique-se que a função $f(z)=\bar{z}$ é contínua em $\mathbb{C}$.

Tem-se $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ com $u(x,y)=x$ e $v(x,y)=-y$. Como u e v são contínuas em $\mathbb{R}^2$, f é contínua em $\mathbb{C}$ (pelo teorema B.2.).

Exemplo B.7.

Seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2}{|z^2|} & \text{se} \quad z\neq 0\\ 0 & \text{se} \quad z=0.\end{cases}$

Verifique-se que f não é contínua em $z=0$. Fazendo $z=x+iy$, tem-se

$$f(x+iy)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Então $f=u+iv$ com

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \text{e} \quad v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Facilmente se verifica que a função $u(x,y)$ não é contínua em (0,0). Com efeito, tomando $y=mx$ (ver Apêndice 4) e calculando o limite de $u(x,y)$ quando (x,y) tende para (0,0) ao longo dessas rectas e obtém-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

Então, pelo teorema B.2., f não é contínua em $z=0$.

Exemplo B.8.

Verifique-se que a função exponencial, $f(z) = e^z$, é contínua em $\mathbb{C}$.

Como $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ com $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ e u e v são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, a função exponencial é contínua em $\mathbb{C}$.

Exemplo B.9.

Analise-se quanto à continuidade, qualquer ramo do logaritmo, $\log_r$.

Como $f(z) = \log_r(z) = \log|z| + i\arg(z)$, com $\arg(z) \in [r, r+2\pi[$, tem-se que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ com $u(x,y) = \log(x^2+y^2)^{1/2}$ e $v(x,y) = arg(x+iy)$. A função u é contínua em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Verifique-se que a função v é descontínua nos pontos (x,y) tais que $\arg(x+iy) = r$. Com efeito, nos pontos (x,y) tais que $\arg(x+iy)$ tende para r por valores maiores que r o limite de $v(x,y)$ é igual a $r+2\pi$, enquanto que nos pontos (x,y) tais que $\arg(x+iy)$ tende para r por valores menores que r o limite de $v(x,y)$ é igual a r. A função $f(z) = \log_r(z)$ é pois contínua em $\mathbb{C}\setminus\left\{z : z = \rho e^{ir} \text{ com } \rho \geq 0\right\}$. Em particular, o ramo principal do logaritmo é contínuo em $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$.

Demonstram-se sem dificuldade as propriedades das funções definidas e contínuas em subconjuntos de $\mathbb{C}$, análogas às propriedades das funções reais, definidas e contínuas em subconjuntos de $\mathbb{R}$.

É de salientar que os resultados que dependem da estrutura ordenada de $\mathbb{R}$ não se transferem directamente para $\mathbb{C}$. O resultado seguinte evidencia uma adaptação a $\mathbb{C}$ de um resultado bem conhecido para funções reais definidas em $\mathbb{R}^2$ (ver Apêndice 4 -Teorema de Weierstrass):

Teorema B.3.

Se Ω é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua em Ω, tem-se:

(i) $|f|$ é limitada em Ω, isto é, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leq M$, para qualquer $z \in \Omega$.

(ii) $|f|$ tem máximo e mínimo em Ω, isto é, existem z_1 e $z_2 \in \Omega$ tais que $|f(z_1)| = \min|f|$ e $|f(z_2)| = \max|f|$.

Demonstração:

Estas propriedades decorrem naturalmente do Teorema de Weierstrass para funções reais (note-se que $|f|$ se identifica com uma função definida num subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e com valores em $\mathbb{R}_0^+$).

(Usa-se por vezes a designação "f limitada em Ω" para significar que $|f|$ é limitada em Ω.)

C. Funções holomorfas

Definição C.1.

Seja $f:\Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e Ω aberto.

(i) A função f diz-se **derivável** em $z_0 \in \Omega$ se existe, e é finito, $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Este limite é a derivada de f no ponto z_0 que é representada por $f'(z_0)$.

(ii) A função f diz-se **holomorfa** em Ω se é derivável em todos os pontos de Ω. Designa-se por H (Ω) o conjunto das funções holomorfas em Ω. Uma função diz-se **inteira** se é holomorfa em $\mathbb{C}$.

(iii) Seja A um subconjunto qualquer de $\mathbb{C}$. A função f diz-se holomorfa em A se é holomorfa em algum subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ que contenha A.

Observação:

Em vez de «f é derivável em z_0», diz-se frequentemente «f é diferenciável em z_0». Este aparente abuso é também utilizado no caso das funções reais de variável real. Na realidade, em ambos os casos os conceitos de função diferenciável num ponto e função derivável num ponto coincidem. Com efeito (ver Apêndice 1), se E e F são espaços normados quaisquer, $f:A \subseteq E \to F$ e $a \in \operatorname{int} A$, a função f diz-se diferenciável em a se existe uma aplicação linear contínua $\xi : E \to F$ tal que $f(a+h)-f(a)=\xi(h)+\alpha(h)$ em que $\alpha : A \to F$ é uma aplicação tal que:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : h \in \mathrm{A} \quad \text{e} \quad \|h\| < \varepsilon \Rightarrow \frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|} < \delta \text{, isto é, } \|\alpha(h)\| = o(\|h\|).$$

Se se tomar $E = F = \mathbb{C}$ e se f é derivável em z_0, tomando $\xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $\xi(h) = hf'(z_0)$ e atendendo à noção de $f'(z_0)$, temos imediatamente que f é diferenciável em z_0.

Reciprocamente, supondo que f é diferenciável em z_0 tem-se $f(z_0+h)-f(z_0)=\xi(h)+\alpha(h)$, em que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\alpha(h)}{h} = 0$. Tendo em conta que neste caso h é um escalar (o mesmo acontecendo obviamente para as funções reais de variável real), tem-se $\xi(h) = h\xi(1)$ e assim

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{h\xi(1)}{h} + \frac{\alpha(h)}{h},$$

Logo, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \xi(1)$ e f é derivável em z_0; a sua derivada é $f'(z_0) = \xi(1)$.

O seguinte teorema é de demonstração imediata:

Teorema C.1.

Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \operatorname{int} \Omega$. Se f é diferenciável em z_0, então f é contínua em z_0.

Demonstração:

Basta atender a que, para $z \neq z_0$, se pode escrever

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)$$

e, assim

$$\lim_{z \to z_0} \left[f(z) - f(z_0) \right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

Considerando definidas em H(Ω) a soma e produto usuais de funções, $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$, $(fg)(z) = f(z) \cdot g(z)$, facilmente se verifica que H(Ω) é um anel comutativo e com identidade (ver Apêndice 1); têm-se assim as regras de derivação da soma e do produto de funções.

É fácil provar que, se as funções f e g são holomorfas em Ω e g não se anula em Ω, o cociente f/g é uma função holomorfa em Ω, tendo-se

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(z) = \frac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)}{(g(z))^2}.$$

Tem-se ainda que a composta de funções holomorfas é holomorfa: mais precisamente, se $f \in$ H(Ω), $f(\Omega) \subset \Omega'$ e $g \in$ H(Ω), então $h = g \circ f \in$ H(Ω') e tem-se $h'(z) = g'\left[f(z) \right] \cdot f'(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Se $f \in$ H(Ω) for invertível, a sua inversa, f^{-1}, é holomorfa em $\Omega' = f(\Omega)$ e tem-se

$$\left(f^{-1} \right)'(w) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(w) \right]} \quad \forall w \in (\Omega').$$

O resultado seguinte relaciona a diferenciabilidade de f no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ com a diferenciabilidade de f no ponto (x_0, y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$.

Teorema C.2.

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ($f = u + iv$) e $z_0 \in \Omega$.

A função f é diferenciável em z_0 se e só se f é diferenciável em (x_0, y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$, e u e v satisfazem em (x_0, y_0) as chamadas condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Tem-se então

$$f'(z_0) = f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Demonstração:

Suponha-se que f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$ e prove-se que f é diferenciável em (x_0, y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$ e u e v satisfazem em (x_0, y_0) as condições de Cauchy-Riemann. Seja então $z \in \Omega$ da forma $z = x + iy_0$; tem-se

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Passando ao limite quando z tende para z_0 e atendendo a que f é diferenciável em z_0, obtém-se

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right] = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Seja $z \in \Omega$ da forma $z = x + iy$. e $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Tem-se

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{i(y-y_0)} + i\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{i(y-y_0)} =$$
$$= \frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0} - i\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

e, passando ao limite quando $z \to z_0$, obtém-se,

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Reciprocamente, suponha-se que f é diferenciável em (x_0,y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$, sendo verificadas as condições de Cauchy-Riemann em (x_0,y_0) e prove-se que f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$. Seja então $h = h_1 + ih_2 \equiv (h_1,h_2)$; tem-se

$$\begin{bmatrix} u(x_0+h_1,y_0+h_2) \\ v(x_0+h_1,y_0+h_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(h_1,h_2) \\ w_2(h_1,h_2) \end{bmatrix}$$

em que $\|w_1(h_1,h_2), w_2(h_1,h_2)\| = \mathrm{o}((h_1,h_2))$.

Mas, sendo verificadas as condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0),

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\, h_1 - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\, h_2 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\, h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\, h_2 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \right] (h_1 + ih_2)$$

obtém-se finalmente

$$f(z_0 + h) - f(z_0) \equiv \begin{bmatrix} u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \\ v(x_0 + h_2, y_0 + h_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \right] (h_1 + ih_2) \; .$$

Pode-se então concluir que a função f é derivável em z_0 no sentido de função de variável complexa, tendo-se $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Observação:

A segunda parte deste teorema é frequentemente enunciada fazendo apelo à continuidade das derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ e às condições de Cauchy-Riemann em (x_0, y_0). Ora a continuidade das derivadas parciais arrasta a diferenciabilidade de f encarada como função de $\mathbb{R}^2$ (ver Apêndice 5).

As condições de Cauchy-Riemann não constituem uma condição suficiente de diferenciabilidade conforme se verifica com o exemplo seguinte.

Exemplo C.1.

A função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z^3}}{|z|^2} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

não é diferenciável em $z = 0$, embora satisfaça as condições de Cauchy-Riemann em $(0,0)$.

Com efeito, não existe o limite quando z tende para zero de

$$I(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\dfrac{\overline{z^3}}{|z|^2}}{z} = \frac{\overline{z^3}}{z|z|^2}$$

uma vez que, por exemplo, $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ y = x}} I(z) \neq \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ y = -x}} I(z)$.

No entanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0).$$

No exemplo que segue, utilizam-se as condições de Cauchy-Riemann para provar a não diferenciabilidade.

Exemplo C.2.

a) A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \overline{z}$ não é holomorfa em $\mathbb{C}$. Com efeito, tem-se neste caso $f = u + iv$ com $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = -y$.

Como $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$, as condições de Cauchy-Riemann não se verificam em ponto algum de $\mathbb{C}$, logo f não é holomorfa em nenhum subconjunto de $\mathbb{C}$.

b) Uma função arbitrária $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, não constante, não é holomorfa em nenhum subconjunto de $\mathbb{C}$. Com efeito,

$$f = u + i0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = 0\,.$$

Em seguida estudam-se, quanto à holomorfia, algumas funções elementares:

1. Função exponencial

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^z$.

Tem-se $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\text{sen } y)$, com $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = e^x \text{sen } y$, funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$.

É imediato que as condições de Cauchy–Riemann são verificadas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \text{sen } y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Então, f é holomorfa em $\mathbb{C}$ (f é inteira) e tem-se, para qualquer z em $\mathbb{C}$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y + ie^x \text{sen } y = e^x(\cos y + i \text{ sen } y) = e^z.$$

2. Função logarítmica

Para qualquer ramo do logaritmo, $\log_r$, tem-se, por aplicação da regra de derivação da função inversa,

$$\frac{d}{dz}\log_r z = \frac{1}{\frac{d}{dw}e^w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \quad \text{(ver definição A.3.)}$$

para $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{ z : z = \rho e^{ir} \text{ com } \rho \geq 0 \}$ (ver exemplo B.9.).

3. Funções trigonométricas

Atendendo a que, em $\mathbb{C}$,

$$\text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

resulta imediatamente que

$$\frac{d}{dz}\text{sen } z = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \cos z \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dz}\cos z = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\text{sen } z$$

Para as restantes funções trigonométricas, basta aplicar as regras de derivação.

Para as funções trigonométricas inversas deduz-se que

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen}^{-1} z = \frac{1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

dependendo estas expressões do valor escolhido para a raíz.

4. Funções hiperbólicas

Analogamente, atendendo a que , em $\mathbb{C}$,

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

obtém-se

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz}\operatorname{ch} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z$$

Para as funções hiperbólicas inversas deduz-se que

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sh}^{-1} z = \log\left[z+\left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz}ch^{-1} z = \log\left[z+\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

5. Função potência

Para um ramo fixo do logaritmo, $\log_r$, a função $f(z) = z^b$, com $b \in \mathbb{C}$, é holomorfa no domínio do ramo do logaritmo considerado e tem-se

$$\frac{d}{dz}z^b = \frac{d}{dz}(e^{b\log_r z}) = \frac{b}{z}e^{b\log_r z} = \frac{b}{z}z^b = bz^{b-1}.$$

6. Função exponencial geral

Para qualquer ramo do logaritmo, a função $f(z)=\alpha^z$, com $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é holomorfa em $\mathbb{C}$, tendo-se

$$\frac{d}{dz}\alpha^z = \frac{d}{dz}\left(e^{z\log_r \alpha}\right) = (\log_r \alpha)\ e^{z\log_r \alpha} = \left(\log_r \alpha\right)\ \alpha^z$$

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Se f é constante em Ω, então f é holomorfa em Ω e $f'(z)=0, \quad \forall z \in \Omega$.

Analisa-se, em seguida, a validade da condição recíproca.

Teorema C.3.

Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ e $f: \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em Ω. Se $f'(z)=0, \quad \forall z \in \Omega$, então f é constante em Ω.

Demonstração:

Seja f holomorfa em Ω e tal que $f'(z)=0, \ \forall z \in \Omega$. Se $f=u+iv$, tem-se

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0,$$

logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Pelas condições de Cauchy-Riemann, tem-se também $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0$, logo u e v são constantes em Ω (ver Apêndice 5) e assim f é constante em Ω.

Teorema C.4.

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $f: \Omega \to \mathbb{C}$. Se $f = u + iv$ é holomorfa em Ω e u e v são de classe C^2 em Ω*, então u e v são funções harmónicas (isto é, são soluções da equação de Laplace $\Delta w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$).

Demonstração:

Se f é holomorfa em Ω, pelo teorema C.2. tem-se em Ω que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Derivando a primeira igualdade em ordem a x, a segunda em ordem a y e somando, obtém-se, tendo em conta o teorema de Schwarz (ver Apêndice 5),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}= 0$$

e u é harmónica em Ω.

Analogamente, derivando a primeira igualdade em ordem a y, a segunda em ordem a x e somando, obtém-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

e v é harmónica em Ω.

Exemplo C.3.

A função $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y)=x^3-y^3$ é uma função de classe C^2 não harmónica em $\mathbb{R}^2$. O teorema anterior permite concluir que não existe $v:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f=u+iv$ seja inteira.

Observação

Põe-se naturalmente a questão de estabelecer em que condições, dada uma função u de classe C^2 e harmónica num domínio Ω contida em $\mathbb{R}^2$, é possível encontrar uma ou mais funções v, de classe C^2 e harmónicas em Ω, tais que $f=u+iv$ seja holomorfa em Ω.

No Capítulo 7 resolver-se-á esta questão. Contudo, nos exercícios 18, 19 e 20 deste capítulo, apresentam-se exemplos de funções harmónicas u para as quais, de uma forma construtiva, se obtêm funções v nas condições referidas.

Exercícios Resolvidos

1. Calcule considerando, quando necessário, o ramo principal da função logaritmo.

a) e^{1+i}. **b)** $\log(2i)$. **c)** $\log(-i)$.

d) $\log(1+i)$. **e)** 4^{i}. **f)** $\left(\sqrt{2}\right)^{i}$.

g) $(1+i)^{(1+i)}$. **h)** $\arg\left[(1+i)^3\right]$. **i)** $\cos i$.

j) $\mathrm{tg}(-\pi\, i)$. **k)** $\mathrm{ch}\,(1+i)$. **l)** $\cos^{-1} i$.

Resolução:

a) $e^{1+i} = e\left[\cos(1) + i\,\mathrm{sen}\,(1)\right]$.

b) $\log(2i) = \log\left(|2i|\right) + i\arg(2i) = \log(2) + i\dfrac{\pi}{2}$.

c) $\log(-i) = \log\left(|-i|\right) + i\arg(-i) = \log(1) + i\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -i\,\dfrac{\pi}{2}$.

d) $\log(1+i) = \log\left(|1+i|\right) + i\arg(1+i) = \log(\sqrt{2}) + i\dfrac{\pi}{4}$.

e) $4^{i} = e^{i\log(4)} = \cos(\log(4)) + i\mathrm{sen}\,(\log(4))$.

f) $\left(\sqrt{2}\right)^{i} = e^{i\log\left(\sqrt{2}\right)} = \cos\left[\log\left(\sqrt{2}\right)\right] + i\,\mathrm{sen}\left[\log\left(\sqrt{2}\right)\right]$.

g) $(1+i)^{(1+i)} = e^{(1+i)\log(1+i)} = e^{(1+i)\left[\log\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}\right]} = e^{\left(\log\left(\sqrt{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)+i\left(\log\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right)} =$

$$= e^{\left(\log\left(\sqrt{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)}\left\{\cos\left[\log\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right] + i\,\mathrm{sen}\left[\log\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]\right\} =$$

$$= \sqrt{2}e^{-\pi/4}\left\{\cos\left[\log\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right] + i\,\mathrm{sen}\left[\log\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]\right\}.$$

h) $\arg\left[(1+i)^3\right] = 3\arg(1+i) = \dfrac{3}{4}\pi$ (fórmula de De Moivre).

i) $\cos i = \dfrac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e}{2}$.

j) $tg(-\pi i) = \dfrac{\operatorname{sen}(-\pi i)}{\cos(-\pi i)} = \dfrac{\dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2i}}{\dfrac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{\left(e^{\pi} + e^{-\pi}\right)} = -i\dfrac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{\left(e^{\pi} + e^{-\pi}\right)}$.

k) $\operatorname{ch}(1+i) = \dfrac{e^{1+i} + e^{-1-i}}{2} = \dfrac{(\cos 1)\left(e + e^{-1}\right)}{2} + i\dfrac{(\operatorname{sen} 1)\left(e - e^{-1}\right)}{2}$.

l) $\cos^{-1} i = -i\left[\log\left(i \pm i\sqrt{2}\right)\right] = -i\log\left[i\left(1 \pm \sqrt{2}\right)\right] = -i\left[\log i + \log\left|1 \pm \sqrt{2}\right|\right] = -i\left[\dfrac{\pi}{2}i + \log\left|1 \pm \sqrt{2}\right|\right]$.

2. Resolva em $\mathbb{C}$, as seguintes equações:

a) $e^z = 1 + i$. **b)** $e^z = e^{iz}$. **c)** $\cos(z) = 2$.

Resolução:

Se $z = x + iy$, tem-se

a) $e^z = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} \left|e^z\right| = |1+i| \\ \arg\left(e^z\right) = \arg(1+i) + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log\left(\sqrt{2}\right) \\ y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$.

As soluções da equação são:

$$z_k = \log\left(\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $e^z = e^{iz} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|e^z\right| = \left|e^{iz}\right| \\ \arg\left(e^z\right) = \arg\left(e^{iz}\right) + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = e^{-y} \\ y = x + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = x + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -k\pi \\ y = k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

As soluções da equação são:

$$z_k = -k\pi + ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) $\cos(z) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Leftrightarrow e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$

Seja $w = e^{iz}$. Tem-se $w^2 - 4w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = 2 + \sqrt{3} \quad \vee \quad w = 2 - \sqrt{3}$.

Então $e^{iz} = 2 + \sqrt{3} \quad \vee \quad e^{iz} = 2 - \sqrt{3}$.

Procedendo de modo análogo ao das alíneas anteriores, conclui-se que as soluções da equação são:

$$z_k = -i\left(\log\left(2 + \sqrt{3}\right) + 2k\pi i\right) = 2k\pi - i\log\left(2 + \sqrt{3}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$z_k = -i\left(\log\left(2 - \sqrt{3}\right) + 2k\pi i\right) = 2k\pi - i\log\left(2 - \sqrt{3}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Determine os subconjuntos de $\mathbb{C}$ onde a função seno

a) Se anula.

b) Tem valores reais.

c) Tem valores imaginários puros.

Resolução:

a) $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow i2z = 2k\pi\, i,\ k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (teorema A.1.(vii))

Note-se que os zeros da função complexa seno coincidem com os da função real seno. Facilmente se verifica que o mesmo acontece com a função complexa co-seno e a função real co-seno.

b) $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left[e^{-y}\cos x + ie^{-y}\operatorname{sen} x - e^{y}\cos x + ie^{y}\operatorname{sen} x\right].$

Logo, $\operatorname{Im}[\operatorname{sen} z] = -\frac{1}{2}\left(e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x\right)$. Ora sen z assume valores reais quando:

$$\operatorname{Im}[\operatorname{sen} z] = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left[e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x\right] = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(e^{-y} - e^{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \ \vee\ e^{-y} = e^{y} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad y = 0.$$

Assim, o conjunto solução é dado por:

$$\left\{z = x + iy:\ x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\ \vee\ y = 0\right\}$$

c) Tendo em conta a igualdade da alinea b), vem

$$\operatorname{Re}(\operatorname{sen} z) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}\operatorname{sen} x + e^{y}\operatorname{sen} x\right);$$

logo, para sen z ser imaginário puro, é necessário que

$$\operatorname{Re}[\operatorname{sen} z] = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{-y}\operatorname{sen} x + e^{y}\operatorname{sen} x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-y} + e^{y}\right)\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

O subconjunto pretendido é, então, $\{z = x + iy:\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4.

a) Verifique que $\operatorname{senh} z = -i\operatorname{sen}(iz)$ e $\cosh z = \cos(iz)$.

b) Utilizando a alínea anterior, estabeleça a igualdade $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.

Resolução:

a) $-i\,\text{sen}\,(iz) = -i\dfrac{e^{iiz}-e^{-iiz}}{2i} = -\dfrac{e^{-z}-e^{z}}{2} = \text{senh}\,z$

$\cos(iz) = \dfrac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2} = -\dfrac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \cosh z$.

b) $\cosh^2 z - \text{senh}^2 z = \cos^2(iz) - \left(-i\,\text{sen}\,(iz)\right)^2 = \cos^2(iz) + \text{sen}^2(iz) = 1$.

5. **a)** Mostre que $\text{sen}\,(x+iy) = \text{sen}\,x\cdot\cosh y + i\cos x\cdot\text{senh}\,y$.

b) Use a alínea a) para provar que $|\text{senh}\,y| \le |\text{sen}\,(x+iy)| \le |\cosh y|$.

Resolução:

a) Como

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y$$

$$\text{sen}\,(iy) = \frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = -\frac{1}{i}\text{senh}\,y = i\,\text{senh}\,y$$

Tem-se que

$$\text{sen}\,(x+iy) = \text{sen}\,x\cdot\cos(iy) + \cos x\cdot\text{sen}\,(iy) = \text{sen}\;x\cdot\cosh y + i\cos x\cdot\text{senh}\,y\ .$$

b) Por um lado,

$$\begin{aligned}|\text{sen}\,(x+iy)| &= |\text{sen}\,x\cdot\cosh y + i\cos x\cdot\text{senh}\,y| = \sqrt{\text{sen}^2 x\cdot\cosh^2 y + \cos^2 x\cdot\text{senh}^2 y} =\\ &= \sqrt{\text{sen}^2 x\cdot\left(1+\text{senh}^2 y\right) + \cos^2 x\cdot\text{senh}^2 y} = \sqrt{\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x\cdot\text{senh}^2 y + \cos^2 x\cdot\text{senh}^2 y} =\\ &= \sqrt{\text{sen}^2 x + \text{senh}^2 y} \ge \sqrt{\text{senh}^2 y} = |\text{senh}\,y|\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}|\text{sen}\,(x+iy)| &= \sqrt{\text{sen}^2 x\cdot\cosh^2 y + \cos^2 x\cdot\text{senh}^2 y} = \sqrt{\text{sen}^2 x\cdot\cosh^2 y + \cos^2 x\cdot\left(\cosh^2 y - 1\right)} =\\ &= \sqrt{\text{sen}^2 x\cdot\cosh^2 y + \cos^2 x\cdot\cosh^2 y - \cos^2 x} = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x} \le \sqrt{\cosh^2 y} = |\cosh y|.\end{aligned}$$

Então, $|\text{senh}(y)| \le |\text{sen}(x+iy)| \le |\cosh(y)|$.

6. Mostre que qualquer polinómio de coeficientes em $\mathbb{C}$ e de grau $n \geq 1$ tende para ∞ quando $|z| \to \infty$.

Resolução:

Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.

Como $|z| \to \infty$, considere-se $z \neq 0$; verifica-se que

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq |z|^n \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right) \geq |z|^n \left[|a_n| - \left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|z^n|} \right) \right]$$

Considerando $r > 0$ suficientemente grande de tal forma que para $|z| > r$ se tem $\frac{|a_k|}{|z|} < \frac{a_n}{2n}$, $k = 0, \ldots, n-1$, resulta que

$$|z|^n \left[|a_n| - \left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|z^n|} \right) \right] \geq |z|^n \left(|a_n| - n \frac{|a_n|}{2n} \right) = \frac{|a_n| |z|^n}{n}$$

e assim, $|P(z)| \geq \frac{|a_n| |z|^n}{n}$ logo, $\lim\limits_{|z| \to \infty} P(z) = \infty$.

7. Mostre que f é contínua em z_0 se e só se $\overline{f}$ é contínua em z_0.

Resolução:

Como $|f(z) - f(z_0)| = \left| \overline{f(z)} - \overline{f(z_0)} \right|$, as condições $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ e $\lim\limits_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{f(z_0)}$ são equivalentes.

8. Use o exercício anterior para concluir que se $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua num certo ponto então as funções $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ e $|f|$ também são contínuas nesse ponto.

Resolução:

Seja f contínua em $z \in \Omega$. Então, pelo exercício anterior, $\overline{f}$ é contínua em z e como

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i} \quad \text{e} \quad |f(z)| = \sqrt{f(z) \cdot \overline{f(z)}},$$

as propriedades algébricas das funções contínuas permitem concluir que as funções $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ e $|f|$ são funções continuas em z.

9. Seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(0)=0$ e $f(\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta))=\operatorname{sen}\theta$ com $\rho>0$, $\theta\in\mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e descontínua no ponto zero.

Resolução:

A função f é descontínua em $z_0=0$, uma vez que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z=iy}} f(z)=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}} f\big(\rho\,(\cos\theta+i\,\operatorname{sen}\theta)\big)=\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}}\operatorname{sen}\theta=1\neq f(0)=0\,.$$

Verifique-se agora que f é continua nos pontos $z_0=\rho_0\,(\cos\theta_0+i\operatorname{sen}\theta_0)\neq 0$, ou seja

$$\forall\delta>0\;\exists\varepsilon>0:\;|z-z_0|<\varepsilon\;\Rightarrow\;|f(z)-f(z_0)|<\delta$$

Observe-se que, como $z_0\neq 0$ vem $\rho_0\neq 0$, logo

$$|z-z_0|<\varepsilon\Rightarrow|\operatorname{Im}(z-z_0)|<\varepsilon\Leftrightarrow|\rho\operatorname{sen}\theta-\rho_0\operatorname{sen}\theta_0|<\varepsilon\Leftrightarrow\rho_0\left|\frac{\rho}{\rho_0}\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0\right|<\varepsilon\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left|\frac{\rho}{\rho_0}\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0\right|<\frac{\varepsilon}{\rho_0}.$$

Por outro lado,

$$|z-z_0|<\varepsilon\Rightarrow\big||z|-|z_0|\big|\le|z-z_0|<\varepsilon\Rightarrow|\rho-\rho_0|<\varepsilon\Leftrightarrow\rho_0\left|\frac{\rho}{\rho_0}-1\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|1-\frac{\rho}{\rho_0}\right|<\frac{\varepsilon}{\rho_0},$$

e então

$$|f(z)-f(z_0)|=|\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0|=\left|\operatorname{sen}\theta-\frac{\rho}{\rho_0}\operatorname{sen}\theta+\frac{\rho}{\rho_0}\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0\right|\le$$
$$\le\left|\operatorname{sen}\theta\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right|+\left|\frac{\rho}{\rho_0}\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0\right|\le\left|1-\frac{\rho}{\rho_0}\right|+\left|\frac{\rho}{\rho_0}\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}\theta_0\right|<\frac{\varepsilon}{\rho_0}+\frac{\varepsilon}{\rho_0}=\frac{2\varepsilon}{\rho_0}\,.$$

A condição de continuidade é verificada se para cada $\delta>0$ tal que se considerar $\varepsilon>0$ $\dfrac{2\varepsilon}{\rho_0}<\delta$, isto é, $\varepsilon<\dfrac{\delta\,\rho_0}{2}$.

10. Determine o maior subconjunto de $\mathbb{C}$ onde as funções seguintes são diferenciáveis

a) $f(x+iy)=-\left(e^{y}-e^{-y}\right)\cos x+i\left(e^{y}+e^{-y}\right)\operatorname{sen} x$.

b) $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{\left|z^{2}\right|}$.

Resolução:

a) Tem-se $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ com $u(x,y)=-\left(e^{y}-e^{-y}\right)\cos x$ e $v(x,y)=\left(e^{y}+e^{-y}\right)\operatorname{sen} x$.

Verifica-se que u e v têm derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e que, num ponto qualquer,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(e^{y}-e^{-y}\right)\operatorname{sen} x=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

ou seja, são válidas as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{R}^2$. Então f é diferenciável em $\mathbb{C}$.

b) Tem-se $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ com $u(x,y)=\dfrac{x}{x^{2}+y^{2}}$ e $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^{2}+y^{2}}$. As funções u e v têm derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Como $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x^{2}-y^{2}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, as condições de Cauchy-Riemann são verificadas em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, pelo que f é diferenciável em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

11. Mostre que as funções seguintes não são diferenciáveis no seu domínio

a) $f(x+iy)=x^{k}y^{k}+3ix^{k}y^{k}$, $k\in\mathbb{N}$.

b) $f(x+iy)=e^{y}(\cos x+i\operatorname{sen} x)$.

Resolução:

a) Tem-se $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ com $u(x,y)=x^{k}y^{k}$ e $v(x,y)=3x^{k}y^{k}$. Estas funções têm derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$. No entanto as condições de Cauchy-Riemann não são verificadas em $\mathbb{R}^2$. Com efeito,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx^{k-1}y^k = 3kx^k y^{k-1} \\ \\ kx^k y^{k-1} = -3kx^{k-1}y^k \end{cases}$$

Daqui resulta que as condições procuradas só se verificam quando $x = 0$ ou $y = 0$, pois quando $x \neq 0$ e $y \neq 0$ tem-se $y = 3x$ e $x = -3y$, o que é impossível. A função não é, pois, diferenciável no seu domínio.

b) Tem-se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ com $u(x,y) = e^y \cos x$ e $v(x,y) = e^y$ sen x. As funções u e v têm derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$. Neste caso, as condições de Cauchy-Riemann nunca são verificadas, pois conduzem a uma condição impossível. Com efeito,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^y \text{sen}\, x = e^y \text{sen}\, x \\ e^y \cos x = -e^y \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = 0 \ \vee \ \text{sen}\, x = 0 \\ e^y = 0 \ \vee \ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

o que é impossível. Conclui-se, então, que f não é diferenciável em ponto algum.

12. Estude, quanto à holomorfia, as funções complexas de variável complexa definidas por:

a) $f(z) = \log_0(z+1)$.

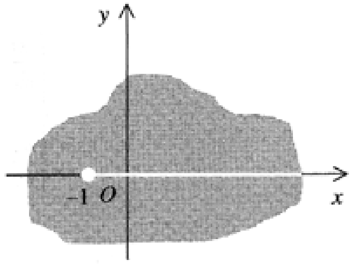
b) $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$ (considere o ramo da função log correspondente ao argumento mínimo).

Resolução:

a) A função f é composição das funções $f_1(z) = z+1$ e $f_2(w) = \log w$ $\left(z \xrightarrow{f_1} w = z+1 \xrightarrow{f_2} \log(z+1)\right)$.

Como a função f_1 é inteira e o ramo da função logaritmo correspondente ao argumento mínimo $\left([0,2\pi[\right)$, não é diferenciável em $\mathbb{R}_0^+$, f não é diferenciável nos pontos z tais que $(z+1) \in \mathbb{R}_0^+$, ou seja, nos pontos $z = x+iy$ tais que

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ y=0 \end{cases}$ ou ainda, tais que, $\begin{cases} x \geq -1 \\ y=0 \end{cases}$.



O domínio de holomorfia da função f é, então, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x+iy:\ y=0 \ \wedge\ x \geq -1\}$.

b) Atendendo a que $f(z) = \sqrt[3]{z+1} = (z+1)^{1/3} = e^{1/3 \log_0 (z+1)}$ e sendo a função exponencial inteira, f é holomorfa no mesmo domínio da função estudada em a).

13. Estude, quanto à holomorfia, as funções complexas de variável complexa definidas por:

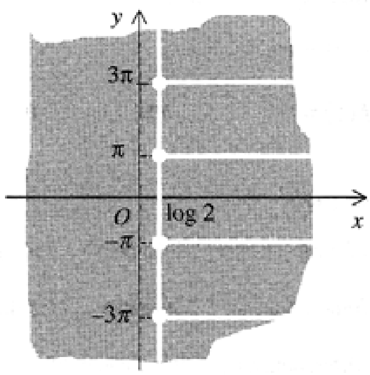
a) $f(z) = \log(e^z + 2)$ **b)** $f(z) = \sqrt{e^z + 2}$ **c)** $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$,

(para as alíneas b) e c) considere o ramo principal do logaritmo).

Resolução:

a) Considerando as funções $f_1(z) = e^z + 2$ e $f_2(w) = \log w$, $f(z) = \log(e^z + 2)$ é composição das duas funções anteriores. Como f_1 é inteira e o ramo da função logaritmo correspondente ao argumento principal não é holomorfo em $\mathbb{R}_0^-$, f não é holomorfa nos pontos $z = x+iy$ tais que $e^z + 2 \in \mathbb{R}_0^-$, isto é,

$$\begin{cases} e^x \cos y + 2 \leq 0 \\ e^x \operatorname{sen} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x (-1)^k + 2 \leq 0, & k \in \mathbb{Z} \quad (*) \\ y = k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$



Observe-se que, para k inteiro par, a desigualdade (*) é impossível, pois reduz-se a $e^x + 2 \leq 0$; e, para k inteiro ímpar, a mesma desigualdade é equivalente a $-e^x + 2 \leq 0$, ou seja, $e^x \geq 2$ ou ainda $x \geq \log 2$.

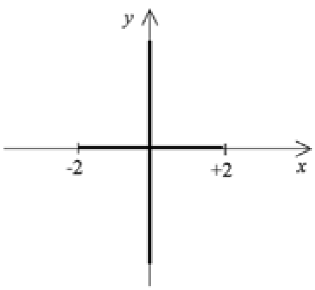
Pode assim concluir-se que a função f não é diferenciável nos pontos $z = x + iy$ para os quais $x \geq \log 2$ e $y = (2k+1)\pi$, onde k é um número inteiro.

b) Atendendo a que $f(z) = \sqrt{e^z + 2} = \left(e^z + 2\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log\left(e^z+2\right)}$, e sendo a função exponencial inteira, f tem o mesmo domínio de holomorfia que a função estudada em a).

c) Visto que $f(z) = \sqrt{z^2 - 4} = e^{\frac{1}{2}\log\left(z^2-4\right)}$, $f(z)$ e $\log\left(z^2 - 4\right)$ têm o mesmo domínio de holomorfia.
Assim, considerando o domínio de holomorfia do ramo principal do logaritmo, $z^2 - 4 = \left(x^2 - y^2 - 4\right) + i\,2xy$ não pode tomar valores em $\mathbb{R}_0^-$.

Como

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4 \leq 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4 \leq 0 \\ x = 0 \ \vee \ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 - 4 \leq 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in [-2,2] \\ y = 0 \end{cases}$$



a função f é holomorfa em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{z = x + iy : \left(y = 0 \ \wedge \ x \in [-2,2]\right) \vee \ x = 0\right\}$.

14. Considere a função definida por $f(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + i \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ e estude-a quanto à holomorfia.

Resolução:

A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é uma série geométrica de razão x; se $|x| < 1$, a série é convergente e a sua soma é a função $u(x) = \dfrac{1}{1-x}$, que é diferenciável em $]-1,1[$.

Analogamente, $\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ converge se $|y|<1$, e nesse caso a sua soma é a função $v(y)=\dfrac{1}{1-y}$ que é diferenciável em $]-1,1[$.

Dado que $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{(1-x)^2}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{(1-y)^2}$, as condições de Cauchy-Riemann são verificadas se e só se $(1-x)^2=(1-y)^2$, isto é, se $|1-x|=|1-y|$, ou seja, $x=y$ ou $x+y=2$. Como $x+y=2$ é uma condição impossível, uma vez que $x+y=2$ e $|y|<1$, a função f é então holomorfa em $\Omega=\{z=x+iy\colon |x|<1 \wedge |y|<1 \ \wedge \ x=y\}$.

15. Mostre que as equações $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-i\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}=i\dfrac{\partial f}{\partial x}$ são equivalentes às condições de Cauchy-Riemann.

Resolução:
Se $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, tem-se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

e assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-i\frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

16. Mostre que as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares tomam a forma

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Resolução:

Sendo $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ com $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\,\text{sen}\,\theta$ tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\text{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}\rho\,\text{sen}\,\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\theta.$$

Analogamente $\dfrac{\partial v}{\partial \rho}=\dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial v}{\partial y}\text{sen}\,\theta$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\rho\,\text{sen}\theta+\dfrac{\partial v}{\partial y}\rho\cos\theta$.

Como u e v também satisfazem as condições de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, tem-se $\dfrac{\partial v}{\partial \rho}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\theta+\dfrac{\partial u}{\partial x}\text{sen}\,\theta$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\rho\,\text{sen}\,\theta+\dfrac{\partial u}{\partial x}\rho\cos\theta$ de onde se conclui que

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

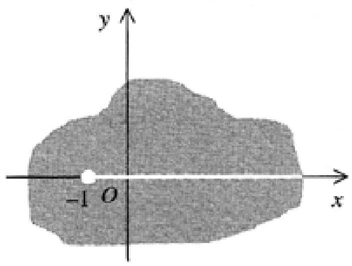
17. Seja $z=\rho e^{i\theta}$ com $\rho>0$ *e* $0<\theta<2\pi$. Use o exercício 16 para estudar a holomorfia da função $f(z)=\sqrt{z}$.

Resolução:

Como $\sqrt{\rho e^{i\theta}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\,\text{sen}\dfrac{\theta}{2}\right)$, tem-se $f\left(\rho e^{i\theta}\right)=u(\rho,\theta)+iv(\rho,\theta)$ com $u(\rho,\theta)=\sqrt{\rho}\cos\dfrac{\theta}{2}$ e $v(\rho,\theta)=\sqrt{\rho}\,\text{sen}\dfrac{\theta}{2}$. As funções u e v têm derivadas parciais contínuas no conjunto $\{(\rho,\theta):\ \rho>0\wedge\ 0<\theta<2\pi\}$ e verificam as condições de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\text{sen}\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$



Então, a função $f(z)=\sqrt{z}$ é holomorfa em $\{z:|z|>0 \text{ e } 0<\arg z<2\pi\}$.

18. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$. Mostre que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$ e determine as funções harmónicas $v(x,y)$ tais que $f = u + iv$ seja holomorfa em $\mathbb{C}$.

Resolução:

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -6xy \ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = -6y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x^2 \ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 6y,$$

então $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$ o que implica que u é uma função harmónica.

Pretendem-se determinar-se funções v tais que as condições de Cauchy-Riemann são verificadas, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Assim,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -6xy \Rightarrow v(x,y) = -3xy^2 + c(x) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -3y^2 + c'(x) = -(3y^2 - 3x^2)$$

onde $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável arbitrária.

Então $c'(x) = 3x^2$, pelo que $c(x) = x^3 + c$, com $c \in \mathbb{R}$.
Resulta então que $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + c$. Pelo teorema C.2., f é uma função holomorfa e consequentemente u e v são harmónicas.

19. Determine a função $f(x+iy) = u(x,y) + i(x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2)$, holomorfa em $\mathbb{C}$, tal que $f(0) = 0$.

Resolução:

Para f ser uma função holomorfa em $\mathbb{C}$, têm de se verificar as condições de Cauchy-Riemann, isto é, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ em qualquer ponto de $\mathbb{C}$. Então,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x^2 - 6xy = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y),$$

o que implica que, $u(x,y) = 3y^2x - x^3 - 3x^2y + c(y)$, onde $c:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável arbitrária.
Então,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 6yx - 3x^2 + c'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -3x^2 + 6xy + 3y^2$$

logo $c'(y) = 3y^2$ e assim $c(y) = y^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$

Como as partes real e imaginária de f têm derivadas parciais contínuas que verificam as condições de Cauchy-Riemann, para cada valor da constante k a função

$$f(x+iy) = (-3x^2y + 3xy^3 + y^3 - x^3 + k) + i\,(x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2)$$

é holomorfa em $\mathbb{C}$.
Como se pretende que $f(0) = 0$, tem-se $k = 0$, sendo a função em questão dada por

$$f(x+iy) = (-3x^2y + 3xy^3 + y^3 - x^3) + i\,(x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2).$$

20. Sejam $u_k:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ definidas por $u_k(x,y) = x^k - y^k$. Calcule os valores de k para os quais existem funções f_k, holomorfas em $\mathbb{C}$, tais que $\operatorname{Re} f_k = u_k$ e determine-as.

Resolução:

Atendendo ao teorema C.4. apenas as funções u_k harmónicas são susceptíveis de ser solução do problema.

Verifique-se, então, quais as funções u_k tais que $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = 0$. Tem-se

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}(x,y) = kx^{k-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(x,y) = k\,(k-1)x^{k-2}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial y}(x,y) = -ky^{k-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}(x,y) = -k\,(k-1)y^{k-2}.$$

Então,

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow k\,(k-1)x^{k-2}-k\,(k-1)y^{k-2}=0 \Leftrightarrow k\,(k-1)\left(x^{k-2}-y^{k-2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=0 \;\vee\; k=1 \;\vee\; x^{k-2}=y^{k-2} \Leftrightarrow k=0 \;\vee\; k=1 \;\vee\; k=2.$$

Ou seja, os valores de k para os quais pode ser possível definir uma função f_k nas condições pedidas são 0, 1 e 2. Para $f_k=u_k+iv_k$ ser holomorfa em $\mathbb{C}$, de acordo com o teorema C.2. , u e v devem satisfazer as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v_k}{\partial y}(x,y)\;;\quad \frac{\partial u_k}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v_k}{\partial x}(x,y).$$

Considere-se $k=0$. Tem-se $u_0\,(x,y)=0$ e, pelas condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial v_0}{\partial y}(x,y)\;;\quad \frac{\partial u_0}{\partial y}(x,y)=0=-\frac{\partial v_0}{\partial x}(x,y)\,,$$

logo $v_0\,(x,y)=c$ com $c\in\mathbb{R}$. Então, para cada valor da constante c, é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.
Considere-se $k=1$. Tem-se $u_1\,(x,y)=x-y$ e, pelas condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y)=1=\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y)\;;\quad \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)=-1=-\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y),$$

logo

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y)=1\Rightarrow v_1\,(x,y)=y+c\,(x)$$

onde $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função derivável arbitrária, e

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y)=c'\,(x)=1\Rightarrow c\,(x)=x+k^* \text{ com } k^*\in\mathbb{R}\,,$$

logo $v_1(x,y)=y+x+k^*$.
Então, para cada valor da constante k^*, $f_1(x+iy)=x-y+i(y+x+k^*)$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.
Para $k=2$ o raciocínio é semelhante ao dos casos precedentes.

21. Seja $f\!:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ uma função holomorfa em Ω. Tomando $\Omega^*=\{\bar{z}:\; z\in\Omega\}$, mostre que $g\!:\Omega^*\to\mathbb{C}$ definida por $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ é holomorfa em Ω^*.

Resolução:

Se $z = x + iy$ e $f = u + iv$, tem-se

$$g(x+iy) = \overline{f(x-iy)} = \overline{u(x,-y) + iv(x,-y)} = u(x,-y) - iv(x,-y)$$

e g é uma função diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$.

Considerando $U(x,y) = u(x,-y)$ e $V(x,y) = -v(x,-y)$ vem $g(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$.

Como

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

são válidas em Ω^* as condições de Cauchy-Riemann para a função g,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Conclui-se assim que g é holomorfa em Ω^*.

22. Seja $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável em Ω (no sentido de $\mathbb{R}^2$) com Ω aberto em $\mathbb{C}$.

Mostre que f é holomorfa em Ω se, e só se, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

(Designa-se vulgarmente $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ por equação de Cauchy-Riemann)

Resolução:

Seja $z = x + iy$; como $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \dfrac{z+\bar{z}}{2i}$, resulta que $\dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \dfrac{i}{2}$.

Então

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Sendo f uma função holomorfa tem-se, pelas condições de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$ e $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$ e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ assim $\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

Reciprocamente, usando a expressão acabada de deduzir para $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, tem-se $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$ e $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$. Então as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Como, por hipótese, f é diferenciável em Ω no sentido de $\mathbb{R}^2$, decorre que f é holomorfa em Ω (ver teorema C.2.).

23. Verifique se existe algum domínio não vazio onde a função $f(z)=\cos\bar{z}$ seja holomorfa.

Resolução:

Tem-se

$$f(z)=\cos(x-iy)=\frac{e^{i(x-iy)}+e^{-i(x-iy)}}{2}=\frac{e^{y+ix}+e^{-y-ix}}{2}=\frac{e^y}{2}(\cos x+i\operatorname{sen} x)+\frac{e^{-y}}{2}(\cos x-i\operatorname{sen} x)=$$
$$=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x+i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\operatorname{sen} x$$

Como $u(x,y)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x$ e $v(x,y)=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\operatorname{sen} x$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, f também o é (no sentido de $\mathbb{R}^2$).

Então, por aplicação do exercício anterior, a função é holomorfa quando $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=-\operatorname{sen}\bar{z}=0$. Resolvendo a equação $\operatorname{sen}\bar{z}=0$ obtém-se

$$\operatorname{sen}\bar{z}=\operatorname{sen}(x-iy)=\frac{e^{i(x-iy)}-e^{-i(x-iy)}}{2i}=0\Leftrightarrow\frac{e^{y+ix}-e^{-y-ix}}{2i}=0\Leftrightarrow e^{ix}e^{y}-\frac{1}{e^{ix}e^{y}}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{2ix}e^{2y}-1=0\Leftrightarrow e^{2(y+ix)}=1\Leftrightarrow 2(y+ix)=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \ e\ \ y=0$$

Então, o conjunto onde $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=-\operatorname{sen}\bar{z}=0$ só tem pontos isolados, pelo que não existe nenhum aberto não vazio onde a função dada seja holomorfa.

24.

a) Prove que se *f* e *g* são deriváveis em z_0 e tais que $f(z_0)=g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$ então

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \qquad \text{(regra de L'Hospital).}$$

b) Verifique que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}=1$, $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z}=0$ e $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=1$.

Resolução:

a) Como $f(z_0)=g(z_0)=0$ pode escrever-se,

$$f(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0),\quad z\neq z_0 \quad g(z)=\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}(z-z_0),\quad z\neq z_0.$$

Então

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

b) As funções $f(z)=\operatorname{sen} z$ e $g(z)=z$ são deriváveis em $z_0=0$ e tais que $f(0)=g(0)=0,\ g'(0)\neq 0$.

Então $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}=\dfrac{\cos 0}{1}=1$.

As funções $f(z)=1-\cos z$ e $g(z)=z$ são deriváveis em $z_0=0$ e tais que $f(0)=g(0)=0,\ g'(0)\neq 0$.

Então $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z}=\dfrac{\operatorname{sen} 0}{1}=0$.

As funções $f(z)=e^z-1$ e $g(z)=z$ são deriváveis em $z_0=0$ e tais que $f(0)=g(0)=0,\ g'(0)\neq 0$.

Então $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\dfrac{e^0}{1}=1$.

25. Seja *f* uma função holomorfa num subconjunto Ω, aberto em $\mathbb{C}$. Mostre que se tem

$$\Delta|f(z)|^2=4|f'(z_0)|^2,\quad z\in\Omega.$$

Resolução:

Se $f = u + iv$, então $f' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ de onde se conclui que $|f'|^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0$

Por outro lado, sendo $h = |f|^2 = u^2 + v^2$ tem-se que $\Delta h = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ e

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Então

$$\Delta h = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Como f é uma função holomorfa em Ω, tem-se que u e v são funções harmónicas em Ω e assim

$$\Delta h = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Tendo em conta as condições de Cauchy-Riemann, em Ω, resulta

$$\Delta h = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4|f'|^2 \text{ em } \Omega.$$

26. Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções holomorfas num domínio Ω de $\mathbb{C}$. Mostre que, se a função

$g(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k(z)|^2$ é harmónica em Ω, cada f_k é constante em Ω $(1 \le k \le n)$.

Resolução:

Se $g(z)$ é harmónica em Ω, $\Delta(g(z)) = \Delta\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |f_k(z)|^2\right) = 0, \ \forall z \in \Omega$

Mas, pelo exercício anterior, para cada z em Ω,

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^{n}\left|f_k(z)\right|^2\right)=0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\Delta\left|f_k(z)\right|^2=0 \Leftrightarrow 4\sum_{k=1}^{n}\left|f'_k(z)\right|^2=0 \Leftrightarrow \left|f'_k(z)\right|^2=0,\ \ k=1,\dots,n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'_k(z)=0, \quad k=1,\dots,n.$$

Como Ω é um domínio de $\mathbb{C}$, as funções f_k $(k=1,\dots,n)$ são constantes em Ω (teorema C.3.).

27. Seja $f=u+iv$ uma função holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$ tal que $au(x,y)+bv(x,y)=c,\ \ \forall\,(x,y)\equiv x+iy\in\Omega$, com a,b e c números reais não simultaneamente nulos. Prove que f é constante em Ω e verifique se o resultado se mantém para $a,\ b,\ c\in\mathbb{C}$.

Resolução:
De $au(x,y)+bv(x,y)=c$ deduz-se que

$$a\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\ +\ b\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\ =0 \quad \text{e} \quad a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\ +\ b\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\ =0,\ (x,y)\in\Omega\,.$$

Como f é holomorfa em Ω, usando as condições de Cauchy-Riemann, as igualdades anteriores podem escrever-se

$$a\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\ -\ b\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\ =0 \quad \text{e} \quad a\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\ +\ b\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\ =0,\ (x,y)\in\Omega\,.$$

Multiplicando a primeira igualdade por a, a segunda por b e somando membro a membro as igualdades obtidas, tem-se $(a^2+b^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\ =0$. Por um processo análogo, obtém-se $(a^2+b^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0$.

Como a e b não podem ser simultaneamente nulos (pois nesse caso seria $c=0$), resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0,\ (x,y)\in\Omega\,.$$

Então,

$$f'(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\ +\ i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=0, \forall\,(x,y)\in\Omega\,,$$

e como Ω é um domínio, f é constante em Ω (teorema C.3.).

O resultado não se mantém se $a, b, c \in \mathbb{C}$, uma vez que em $\mathbb{C}$ se pode ter a $a^2+b^2=0$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$; basta por exemplo tomar $a = 1+i$, $b=1-i$.

28. Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ uma função holomorfa em Ω. Prove que f é constante em Ω.

Resolução:
Seja $f = u + iv$; como $f(z) \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \Omega$, tem-se $v(x,y) = 0$. Então,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega \ .$$

Tendo em conta as condições de Cauchy-Riemann, resulta que

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \forall\ (x,y) \in \Omega \ .$$

Sendo Ω um domínio, f é constante em Ω (teorema C.3.).

29. Seja a função $f = u + iv$ holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$. Prove que:

a) Se a parte real (u) ou a parte imaginária (v) é constante em Ω, então f é constante em Ω.
b) Se $|f|$ é constante em Ω, então f é constante em Ω.

Resolução:
a) Como f é holomorfa em Ω, as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas por u e v, em Ω:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega\ .$$

Supondo $u(x,y) = c$, $\forall\ (x,y) \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega\ .$$

Então

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega$$

e f é constante em Ω (teorema C.3.).

Obtem-se idêntico resultado, se $v(x,y) = k$, $k \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \Omega$.

b) Tem-se $|f|^2 = u^2 + v^2 = c$, em Ω, com com $c \in [0,+\infty[$.

Se $c = 0$ então $|f| = 0$ em Ω e $f \equiv 0$, em Ω.

Se $c \neq 0$, a equação $u^2 + v^2 = c$ pode ser derivada parcialmente em ordem a y e em ordem a x obtendo-se

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ , \ 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ , \ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ .$$

Este sistema linear homogéneo nas incógnitas $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, tem unicamente a solução nula, pois o determinante da matriz dos coeficientes é $u^2 + v^2 = c \neq 0$.

Então, usando as condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \ , \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \ , \ (x,y) \in \Omega \ ,$$

pelo que u e v são funções constantes em Ω (ver Apêndice 5); consequentemente, $f = u + iv$ é constante em Ω.

30. Seja $f = u + iv$ uma função holomorfa num domínio Ω, tal que $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ em Ω. Prove que f é um polinómio de grau inferior ou igual a 1.

Resolução:

Se $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ então $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ e assim, $u(x,y) = u(y)$ e $v(x,y) = v(x)$.

Como a função f é holomorfa em Ω e as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -v'(x) \ , \quad \text{isto é,} \quad u'(y) = k = -v'(x) \ .$$

Então,

$$u(y) = ky + C_1 \quad \text{e} \quad v(x) = -kx + C_2$$

e

$$f(x+iy) = ky + C_1 + i(-kx + C_2) = -ik(x+iy) + (C_1 + iC_2), \ \ (C_1 \in \mathbb{R} \ \text{e} \ C_2 \in \mathbb{R})$$

e assim,

$$f(z) = Az + C \quad \text{com} \quad A = -ik \quad \text{e} \quad C = C_1 + iC_2 \ .$$

Conclui-se, então, que f é um polinómio em z de grau menor ou igual a 1.

31. Seja F uma função real de classe C^1 num domínio Ω^* de $\mathbb{R}^2$, cujas derivadas parciais não se anulam simultaneamente em Ω^*. Sejam Ω um domínio de $\mathbb{C}$ e $f = u + iv$ uma função holomorfa em Ω com valores em Ω^*.

Prove que se $F(u(x,y), v(x,y)) = 0$ em Ω, então a função f é constante em Ω.

Resolução:

Se $F(u(x,y), v(x,y)) = 0$, $(x,y) \in \Omega$, tem-se derivando em ordem a x e em ordem a y:

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{em } \Omega.$$

Sendo $f = u + iv$ holomorfa em Ω, tem-se $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, em Ω, pelo que o sistema (*) se pode escrever

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear homogéneo anterior, cujas incógnitas são $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, é igual a $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)^2$ que é não nulo em Ω, pois $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ não se anulam simultaneamente em Ω. Assim, o sistema só admite a solução nula em Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Sendo Ω um domínio, u e v são funções constantes em Ω (ver Apêndice 5) e $f = u + iv$ é constante em Ω.

32. Seja $f = u + iv$ uma função holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$. Mostre que a função $g = u + iV$ é holomorfa em Ω se, e só se, $v - V$ é uma constante real, com $V\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Resolução:

Como a função $f = u + iv$ é holomorfa em Ω, as condições de Cauchy-Riemann verificam-se em Ω (ver teorema C.2.):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \quad (*)$$

Supondo $g = u + iV$ holomorfa em Ω, novamente pelas condições de Cauchy-Riemann tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Então, atendendo a (*), resulta que

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Primitivando $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y), \ (x,y) \in \Omega$ em ordem à variável x, obtém-se:

$v(x,y) - V(x,y) = K(x), \ (x,y) \in \Omega$ em que $K:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável arbitrária.

Derivando ambos os membros da equação anterior, em ordem à variável x, tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = K'(x), \quad (x,y) \in \Omega$$

Como $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y)$, resulta $K'(x) = 0, \ \forall (x,y) \in \Omega$. Então $K(x) = k \in \mathbb{R}$ e consequentemente $v - (x,y) - V(x,y) = k, \ (x,y) \in \Omega$.

Suponha-se agora que $v(x,y) - V(x,y) = k, \ k \in \mathbb{R}, \ \forall (x,y) \in \Omega$. Atendendo a que v é diferenciável em Ω (porque f é holomorfa em Ω), tem-se (ver teorema C.2.)

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Como se verificam as condições de Cauchy-Riemann para f, em Ω, obtêm-se para g as mesmas condições,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y)\ , \quad (x,y) \in \Omega\ .$$

Novamente pelo teorema C.2. conclui-se que $g = u + iv$ é holomorfa em Ω.

33. Seja $f = u + iv$ é uma função holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$ e tal que $f^{(n+1)}(z) = 0,\ \ z \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Mostre que f é um polinómio de grau não superior a $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:
A demonstração é feita utilizando o método de indução finita.

Para $n = 0$, tem-se $f\,'(z) = 0$ em Ω e, pelo teorema C.3., f é constante em Ω, ou seja, f é um polinómio de grau 0; a proposição é pois verdadeira.

Suponha-se que a proposição é verdadeira para $n-1$ $(n \geq 1)$, isto é que, se $f^{(n)}(z) = 0$, $z \in \Omega$, então f é um polinómio de grau menor ou igual a $(n-1)$, e demonstre-se que a proposição é verdadeira para n:

Como $f^{(n+1)}(z) = 0$ é equivalente a $(f\,')^{(n)}(z) = 0$, pela hipótese de indução $f\,'$ é um polinómio de grau não superior a $(n-1)$, donde se conclui que f é um polinómio de grau não superior a n; a proposição é pois verdadeira para n.

34. Seja $u(x,y)$ a parte real de uma função de classe C^2, num domínio Ω de $\mathbb{C}$. Determine uma função g holomorfa em Ω tal que

$$\operatorname{Re} g = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$$

Resolução:
Seja $z = x + iy$. Sendo f holomorfa em Ω,

$$f\,'(z) = f\,'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

logo

$$zf\,'(z) = (x+iy)f\,'(x+iy) = \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y) + i\left(y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Basta então considerar $g(z) = zf\,'(z)$, função holomorfa em Ω (f é de classe C^2 em Ω).

35. Seja $u : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = \log(x^2 + y^2)$. Prove que não existe uma função $v(x,y)$ harmónica tal que $f = u + iv$ seja holomorfa em Ω.

Sugestão: Suponha que existe $v(x,y)$ e defina uma função g, $g:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = v(\cos t, \operatorname{sen} t)$. Deduza uma contradição que invalide a hipótese de existência da função $v(x,y)$.

Resolução:

Suponha-se que existe $v(x,y)$ harmónica tal que $f = u + iv$ seja holomorfa em Ω.

A função g, $g:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = v(\cos t, \operatorname{sen} t)$ é contínua em $[0,2\pi]$ e diferenciável em $]0,2\pi[$.

Tem-se

$$\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,t}(t) = \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x(t), y(t))\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)(t)\right] + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x(t), y(t))\right] \cdot \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)(t)\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x(t), y(t))\right] \cdot (-\operatorname{sen} t) + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(x(t), y(t))\right] \cdot (\cos t), \quad t \in \,]0,2\pi[\,.$$

Como v é tal que $f = u + iv$ é holomorfa em Ω, u e v verificam as condições de Cauchy Riemann e assim

$$\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,t}(t) = \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x(t), y(t))\right] \cdot (-\operatorname{sen} t) + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x(t), y(t))\right] \cdot (\cos t) =$$

$$= -\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) \cdot (-\operatorname{sen} t) + \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) \cdot (\cos t) =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} + \frac{2\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 2\,, \quad t \in \,]0,2\pi[\,.$$

Então g é crescente em $[0,2\pi]$, o que é absurdo, uma vez que $g(0) = g(2\pi) = v(1,0)$. Conclui-se então que não existe $v(x,y)$ nas condições pedidas.

Capítulo
3

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES COMPLEXAS

A. Curvas no plano complexo. Integral de linha

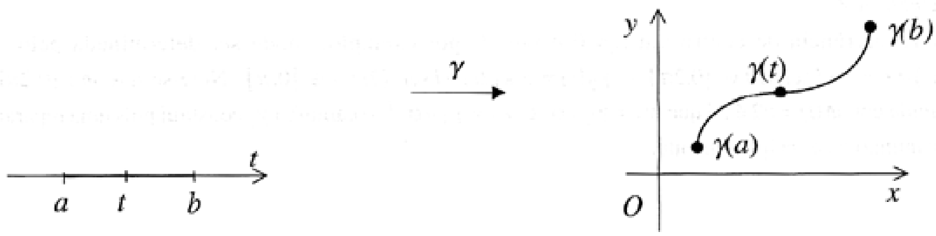
Definição A.1.

Sejam $a,b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Chama-se **caminho** em $\mathbb{C}$ a qualquer aplicação contínua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

O conjunto imagem de γ, isto é, o contradomínio da aplicação, chama-se **curva ou linha** em $\mathbb{C}$ e representa-se por γ^*. A continuidade da aplicação e a compacidade do intervalo garantem que $\gamma^* = \gamma\,([a,b])$ é um conjunto compacto. (Se $a = b$, a curva correspondente reduz-se a um ponto.)

A equação $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$ é chamada **equação paramétrica** da curva. A variável t designa-se por **parâmetro** do caminho γ.

Geometricamente,



Observação :

Por abuso de linguagem e desde que daí não resulte qualquer ambiguidade, é frequente usar-se o termo «curva» ou «linha» para referir tanto o caminho γ (aplicação) como o subconjunto $\gamma^* = \gamma([a,b])$ e usando-se até o mesmo símbolo para designar o caminho e a curva ou linha. Assim, emprega-se a expressão «z está sobre γ» em vez de «z está sobre a curva correspondente a γ».

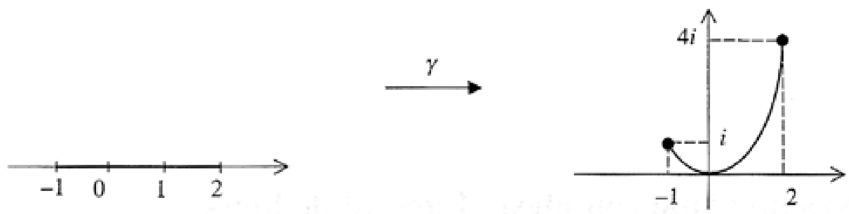
Exemplo A.1.

A parábola de equação $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, pode ser representada parametricamente por

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbb{R}.$$

Considerando em $\mathbb{C}$ o caminho $\gamma : [-1,2] \to \mathbb{C}$, definido por $\gamma(t) = t + i\,t^2$, obtém-se uma curva correspondente ao arco de parábola entre os pontos $z_1 = \gamma(-1) = -1 + i$ e $z_2 = \gamma(2) = 2 + 4i$.

Geometricamente,



Definição A.2.

Um caminho $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{C}$ diz-se uma **reparametrização** do caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ se existe uma função $\varphi : [c,d] \to [a,b]$, contínua e com derivada positiva, tal que $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ em $[c,d]$.

Observação:

Como a função $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ é contínua e tem derivada positiva, ela tem inversa contínua e com derivada positiva e é tal que $\gamma = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}$ em $[a,b]$. Então, γ é também uma reparametrização de γ_1.

Exemplo A.2.

A circunferência de centro em $z_0 = 0$ e raio 1, por exemplo, pode ser determinada pelos caminhos $\gamma_1(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $t \in [0,2\pi]$ e $\gamma_2(t) = \cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t)$, $t \in [0,\pi]$. Note-se que $\varphi : [0,2\pi] \to [0,\pi]$ definida por $\varphi(t) = t/2$ é tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ e $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}$; o caminho γ_1 constitui pois uma reparametrização do caminho γ_2 e reciprocamente.

Definição A.3.

Seja $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho em $\mathbb{C}$. O ponto $A = \gamma(a)$ é designado por **ponto inicial** ou **origem** da curva gerada por γ; o ponto $B = \gamma(b)$ é designado por **ponto terminal** ou **extremidade** dessa curva. (Usa-se por vezes, a designação «extremidades» para referir simultâneamente o ponto inicial e o ponto terminal de uma curva.)

O **sentido** da curva gerada por γ é «de A para B».

O caminho $-\gamma$, definido por $(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$, $t \in [a, b]$, define sobre a mesma curva um **sentido inverso** ao da anterior.

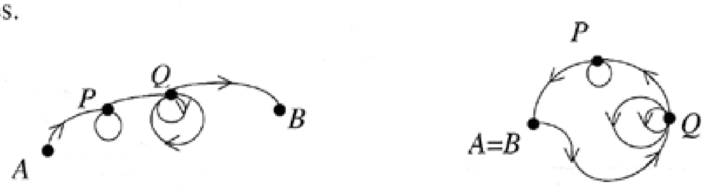
Quando a origem e a extremidade de uma curva coincidem, isto é $\gamma(a) = \gamma(b)$, a curva diz-se **fechada**. O seu sentido diz-se **positivo** ou **directo,** se é o sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, e **negativo** ou **indirecto**, no caso contrário.

Se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ apenas quando $t_1 = t_2$, com $t_1, t_2 \in]a, b[$, a curva diz-se **simples**.

Se $P = \gamma(t_1) = \ldots = \gamma(t_n)$ com $a < t_1 < \ldots < t_n < b$, $t_1, \ldots, t_n$ únicos, o ponto P diz-se de **multiplicidade *n***.

Um ponto de multiplicidade 1 diz-se um **ponto simples**.

A figura seguinte ilustra duas curvas com pontos múltiplos, sendo a primeira aberta e a segunda fechada; em qualquer delas o ponto P é de multiplicidade dois e o ponto Q é de multiplicidade três.



Exemplo A.3.

A curva definida no exemplo A.1. tem o sentido de $z_1 = -1 + i$ (origem) para $z_2 = 2 + 4i$ (extremidade). O sentido da curva fica assim determinado de z_1 para z_2. A curva com o sentido de z_2 para z_1 é definida por $(-\gamma)(t) = \gamma(1-t) = 1-t + i(1-t)^2$, $t \in [-1, 2]$.

Exemplo A.4.

Sejam z_2 e z_2 dois pontos de $\mathbb{C}$; o segmento de recta com origem z_1 e extremidade z_2 pode ser representado parametricamente pelo caminho

$$\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1),\ t \in [0, 1] \quad \text{ou} \quad \gamma(t) = z_1(1-t) + t z_2,\ t \in [0, 1].$$

Exemplo A.5.

O caminho $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ e $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, define um arco de circunferência de centro z_0 e raio r, de origem $\gamma(\alpha)$ e extremidade $\gamma(\beta)$. Quando $\alpha = 0$ e $\beta = 2\pi$, tem-se $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ e a curva definida é fechada (trata-se da circunferência completa) e descrita no sentido positivo.

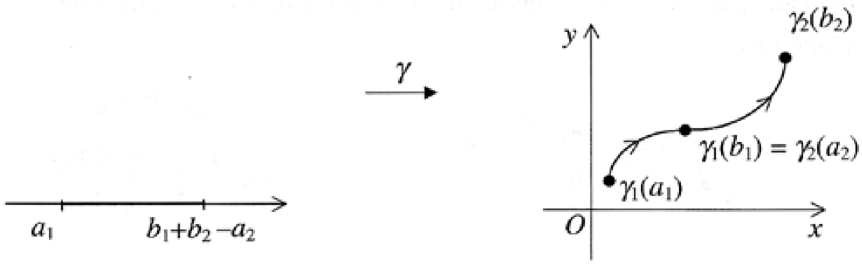
Observe-se que $\gamma_1(t) = z_0 + re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ representa a mesma circunferência, mas descrita no sentido negativo.

Definição A.4.

Sejam $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tais que $b_1 < a_2$ e sejam $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ dois caminhos em $\mathbb{C}$ tais que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Chama-se **justaposição** de γ_1 e γ_2 ao caminho $\gamma : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$ definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{se } t \in [b_1,\ b_1 + b_2 - a_2]. \end{cases}$$

Escreve-se neste caso $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$.
Geometricamente,



Observação:

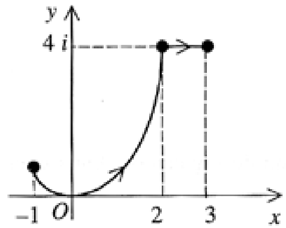
1. Na definição de justaposição dos caminhos $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ supõe-se $b_1 < a_2$. Esta condição é garantida mediante uma parametrização conveniente dos caminhos em questão.
2. Se γ é um caminho definido em $[a,b]$ e $c \in [a,b]$, demonstra-se facilmente que as restrições de γ a $[a,c]$ e a $[c,b]$ são dois caminhos cuja justaposição coincide com γ.

Exemplo A.6.

Sejam $\gamma_1(t) = t + it^2$, $t \in [-1,2]$ e $\gamma_2(t) = (t-1) + i4$, $t \in [3,4]$; γ_1 é a curva do exemplo A.1 e γ_2 é o segmento de recta $y = 4$ entre os pontos $2 + 4i$ e $3 + 4i$; tem-se $\gamma_1(2) = \gamma_2(3)$. A justaposição dos dois caminhos pode então ser definida pelo caminho

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [-1,2] \\ \gamma_2(t+1) & \text{se } t \in [2,3]. \end{cases}$$

Geometricamente,



Definição A.5.

Uma curva γ diz-se **regular** se as duas funções reais que a definem parametricamente, $x(t)$ e $y(t)$ com $t \in [a,b]$, são funções com derivada contínua no intervalo $[a,b]$.

Observação:

Seja $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, com $t \in [a,b]$. Identificando a curva γ com o correspondente subconjunto de $\mathbb{R}^2$, a condição exigida para γ ser regular (derivadas contínuas em $[a,b]$) garante que ela é **rectificável**, isto é, o seu comprimento é finito e dado por

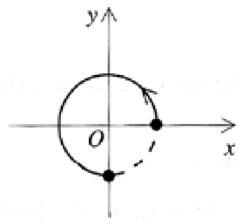
$$L = \int_a^b \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt .$$

Pondo $dz = dx + idy$, tem-se que $L = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_\gamma |dz|$.

Exemplo A.7.

A curva representada parametricamente por

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \text{com } 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$$



é uma curva regular.

O seu comprimento é $L = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t\right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 2dt = 3\pi$.

Definição A.6.

Uma curva γ é **seccionalmente regular** em $[a,b]$ se existir uma decomposição do intervalo $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$ tal que as restrições $\gamma_{|\,]t_n,t_{n+1}[}$, $n = 0, 1, \ldots, k-1$, são curvas regulares, isto é, o conjunto de pontos de $[a,b]$ em que γ não é regular é finito (eventualmente vazio).

Exemplo A.8.

Uma linha obtida por justaposição de segmentos (linha quebrada ou poligonal) é uma curva seccionalmente regular.

Observação:

O matemático francês Camille Jordan, ao demonstrar a possibilidade de efectuar uma partição do plano à custa de uma curva simples fechada orientada no sentido positivo (**curva de Jordan**), permitiu redefinir o sentido da curva. Deve-se a este matemático o teorema seguinte cujo enunciado parece óbvio, mas que tem uma demonstração particularmente laboriosa (ver, por exemplo, Thron, W. J. *Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*):

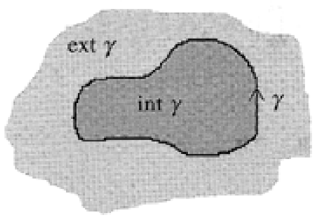
Teorema da Curva de Jordan: Seja γ uma curva simples fechada do plano. A curva γ define uma partição do plano em três subconjuntos disjuntos dois a dois:

(i) A curva γ (conjunto fechado e limitado).

(ii) O interior de γ (int γ) (conjunto aberto e limitado cuja fronteira é γ).

(iii) O exterior de γ (ext γ) (conjunto aberto e ilimitado cuja fronteira é γ).

Geometricamente,



(Note-se que os termos «interior» e «exterior» não estão a ser usados no sentido topológico.)

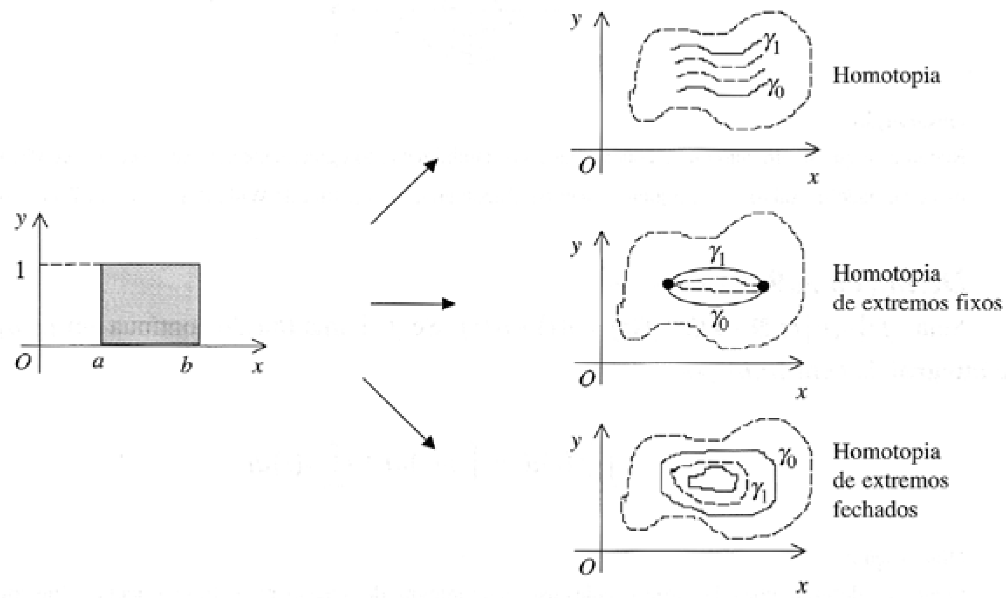
Definição A.7.

Sejam $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ dois caminhos em $\mathbb{C}$; γ_0 diz-se **homotópico** a γ_1 num subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ se existir uma função contínua $H:[a,b]\times[0,1]\to\Omega$ tal que $H(t,0)=\gamma_0(t)$ e $H(t,1)=\gamma_1(t)$ para $\forall t \in [a,b]$. À função H chama-se **homotopia** entre γ_0 e γ_1.

Se $H(a,s)=A$ e $H(b,s)=B$, $\forall s \in [0,1]$, a homotopia diz-se **de extremos fixos**. A homotopia pode ainda ser **de caminhos fechados**: neste caso, a função definida em $[a,b]$ por $t \to H(t,s)$ define uma curva fechada, isto é, tal que $H(a,s)=H(b,s)$, $\forall s \in [0,1]$.

Observação:

1. A definição de homotopia dada introduz no conjunto dos caminhos definidos num intervalo $[a,b]$ uma relação de equivalência (ver exercício 3 deste capítulo).
2. Dizer que dois caminhos são homotópicos é equivalente a afirmar que se pode definir uma família (contínua) de caminhos γ_s: $[a,b] \to \mathbb{C}$ que, por assim dizer, «começa» em γ_0 e «acaba» em γ_1. Na figura representam-se os três tipos de homotopia definidos em A.7.



Definição A.8.

Um domínio diz-se **simplesmente conexo** se toda a curva simples fechada nele contida é homotópica a um ponto. Um domínio que não é simplesmente conexo diz-se **multiplamente conexo**.

Observação:

Da definição anterior decorre que:

1. Qualquer curva fechada contida num domínio simplesmente conexo tem o seu interior contido nesse domínio.
2. O interior (em $\mathbb{C}$) de uma curva simples fechada é um domínio simplesmente conexo, cuja fronteira é a própria curva. Em particular, um disco aberto é um domínio simplesmente conexo.

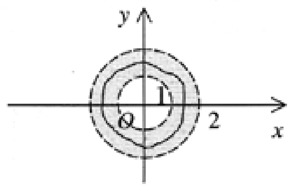
Exemplo A.9.

Verifique-se que o plano complexo $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo; para isso, basta provar que toda a curva simples fechada é homotópica a um ponto.

Seja $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ qualquer curva fechada de $\mathbb{C}$ e c um ponto interior a γ. Seja H: $[a,b]\times[0,\ 1]\to\mathbb{C}$ definida por $H(t,s)=sc+(1-s)\gamma(t)$; tem-se $H(t,0)=\gamma(t)$ e $H(t,1)=c$ e, para cada $t\in[a,b]$, $H(t,s):[0,1]\to\mathbb{C}$ define o segmento de recta que une $\gamma(t)$ a c. A função H define uma homotopia de caminhos fechados entre γ e c.

Exemplo A.10.

O domínio $D=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<2\}$ é **conexo por arcos** (isto é, quaisquer dois dos seus pontos podem ser ligados por uma curva nele contida) , mas não é simplesmente conexo (é possível definir no conjunto curvas fechadas cujo interior não está contido no conjunto).



Observação:

Recorde-se que se um conjunto é conexo por arcos também é topologicamente conexo. Porém, a condição reciproca não é verdadeira (salvo se o conjunto é aberto). Recomenda-se a leitura de Willard S., *General Topology*, cap. 8.

Definição A.9.

Seja $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(t)=u(t)+iv(t)$. Se f é uma função contínua em $[a,b]$, define-se **integral** de f em $[a,b]$ por

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt.$$

■

Observação:

O integral definido goza das propriedades usuais do integral de funções reais. Em particular a linearidade verifica-se com constantes complexas.

Definição A.10.

Seja f uma função complexa de variável complexa, definida num domínio Ω de $\mathbb{C}$ e $\gamma:[a,\ b]\to\mathbb{C}$ uma curva regular contida em Ω tal que f é contínua sobre γ, isto é, tal que $\varphi(t)=f(\gamma(t))$ é contínua em $[a,\ b]$.

Define-se **integral** da função f ao longo da curva γ por

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

■

Observação:

1. A continuidade da função f sobre a curva γ e a continuidade de γ' (γ regular) garantem a existência do integral

$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

2. Se $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ e γ é definido por $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a,b]$, tem-se $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ e $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$,

Então

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))][x'(t) + iy'(t)]dt =$$

$$= \int_b^a \{[u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)] + i[u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)]\}dt$$

e finalmente

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy) = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy).$$

Assim,

$$\text{Re}\left[\int_\gamma f(z)dz\right] = \int_\gamma (udx - vdy) \quad \text{e} \quad \text{Im}\left[\int_\gamma f(z)dz\right] = \int_\gamma (vdx + udy).$$

Exemplo A.11.

Calcule-se $\int_\gamma z^2 dz$ onde γ é o segmento de recta que une os pontos $z_0 = -i$ e $z_1 = 2+i$, orientada de z_0 para z_1.

A função $f(z) = z^2$ é contínua sobre γ, que é regular e pode ser representada parametricamente por

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t-1 \end{cases}, \; t \in [0,2]$$

isto é,

$$\gamma(t) = t + i(t-1),\; t \in [0,\ 2] \quad \text{e} \quad \gamma'(t) = 1+i.$$

Assim,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^2 [t + i(t-1)]^2(1+i)dt = \left[\frac{[t+i(t-1)]^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{(2+i)^3}{3} - \frac{+i}{3} = \frac{8+12i-6-i-i}{3} = \frac{2+10i}{3} = \frac{2}{3}(1+5i).$$

Exemplo A.12.

Calcule-se $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ onde γ é a circunferência de centro na origem e raio 1, orientada no sentido positivo. Uma representação paramétrica de γ é dada por $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,\ 2\pi]$.

A função f definida em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ por $f(z)=\dfrac{1}{z}$ é contínua sobre a curva regular γ. Então,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i\ .$$

Exemplo A.13.

Generalize-se o exemplo anterior ao integral $\int_\gamma \dfrac{1}{z-z_0}dz$ onde γ é a circunferência de centro z_0 e raio r, orientada no sentido positivo, que tem por representação paramétrica

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it},\ \ t \in [0,\ 2\pi].$$

Então

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i\ .$$

Teorema A.1.

Sejam $\gamma(t),\ t\in[a,b]$, e $\beta(t),\ t\in[c,d]$, duas parametrizações de uma curva regular γ. Seja f contínua sobre γ. Então $\int_\gamma f(z)dz = \int_\beta f(z)dz$, isto é, o integral é independente da parametrização considerada.

Demonstração:

Seja $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ uma aplicação com derivada contínua e positiva em $[a,b]$, tal que $\beta(t)=\gamma(\varphi(t)),\ t\in[a,b]$. Então,

$$\int_\beta f(z)dz = \int_c^d f(\beta(t))\,\beta'(t)dt = \int_c^d f\left[\gamma(\varphi(t))\right]\gamma'(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)ds \quad \text{(efectuando no integral a mudança de variável } s=\varphi(t))$$

$$= \int_\gamma f(z)dz.$$

Os dois teoremas seguintes têm demonstrações análogas aos teoremas correspondentes para funções de variável real.

Teorema A.2.

Sejam f e g funções contínuas sobre uma curva regular γ. Então,

$$\int_\gamma (f+g)(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz.$$

Teorema A.3.

Sejam f uma função contínua sobre uma curva regular e α uma constante complexa. Então,

$$\int_\gamma (\alpha f)(z)dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Teorema A.4.

Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma curva regular e f uma função contínua sobre a curva γ. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$ e sejam $\gamma_1 = \gamma_{|[a,c]}$ e $\gamma_2 = \gamma_{|[c,b]}$ ($\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$). Então,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Demonstração:

A existência de $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ e $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ está garantida, uma vez que f é contínua sobre as curvas regulares γ_1 e γ_2.

Suponha-se que as curvas γ_1 e γ_2 são, respectivamente, representadas parametricamente por

$$\gamma_1(t) = x_1(t) + iy_1(t),\ t \in [a,c] \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = x_2(t) + iy_2(t),\ t \in [c,b].$$

Então

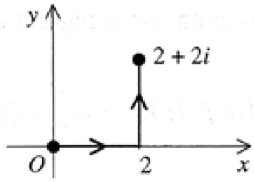
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,c] \\ \gamma_2(t), & t \in [c,b] \end{cases}$$

representa a curva $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$. Assim, usando a propriedade da aditividade do integral para funções de uma variável, tem-se

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^c f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_c^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$$
$$= \int_a^c f(\gamma_1(t))\gamma'_1(t)dt + \int_c^b f(\gamma_2(t))\gamma'_2(t)dt = \int_{\gamma_1} f(t)dt + \int_{\gamma_2} f(t)dt.$$

Observação:
Este teorema pode ser generalizado ao caso da justaposição de qualquer número finito de curvas regulares. Fica então estabelecida a existência do integral de linha ao longo de qualquer curva seccionalmente regular.

Exemplo A.14.
Seja γ a curva representada na figura.



Esta curva pode decompor-se na justaposição de duas curvas γ_1 e γ_2 em que γ_1 é o segmento que une $z_1 = 0$ a $z_2 = 2$ definido por $\gamma_1(t) = t + i0,\ t \in [0,2]$, e γ_2 é o segmento que une $z_1 = 2$ a $z_2 = 2 + 2i$ definido por $\gamma_2(t) = 2 + it,\ t \in [0,2]$. Como as curvas γ_1 e γ_2 são regulares, a curva $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ é seccionalmente regular. Atendendo à continuidade de $f(z) = z$ sobre a curva γ, o integral $\int_\gamma z dz$ existe e tem-se

$$\int_\gamma z dz = \int_{\gamma_1} z dz + \int_{\gamma_2} z dz = \int_0^2 t dt + \int_0^2 (2 + it) i dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{(2+it)^2}{2}\right]_0^2 = 2(1+i)^2.$$

Teorema A.5.

Seja f uma função contínua sobre uma curva seccionalmente regular γ. Então,

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Demonstração:

Seja γ definida por $\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a,b]$, descrita de $A = \gamma(a)$ para $B = \gamma(b)$ e $-\gamma$ a mesma curva mas descrita de $B = \gamma(b)$ para $A = \gamma(a)$, parametrizada, por exemplo, por $\gamma(-t)$ com $t \in [-b,-a]$. Tem-se

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))[-\gamma'(-t)]dt = -\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Teorema A.6. (Teorema fundamental do cálculo integral)

Seja f uma função com derivada contínua num domínio Ω que contenha uma curva seccionalmente regular γ, com origem z_1 e extremidade z_2, então $\int_\gamma f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1)$.

Demonstração:

Seja $z = \gamma(t),\ t \in [a,b]$, a representação paramétrica de γ: tem-se $z_1 = \gamma(a)$ e $z_2 = \gamma(b)$. Logo,

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'[\gamma(t)]\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f[\gamma(t)]\,dt = [f(\gamma(t))]_a^b =$$
$$= f[\gamma(b)] - f[\gamma(a)] = f(z_2) - f(z_1)\,.$$

O teorema anterior pode enunciar-se na forma seguinte, que facilita a sua aplicação prática:

Teorema A.7.

Sejam f uma função contínua num domínio Ω e γ uma curva seccionalmente regular contida em Ω, de origem z_1 e extremidade z_2. Se existe F derivável em Ω tal que $F' = f$ em Ω, isto é, se f é primitivável em Ω, então

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)\,.$$

Observação:

Ao valor $F(z_2) - F(z_1)$ é usual chamar-se **variação de F** ao longo da curva γ e geralmente escreve-se $[F(z)]_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$.

Note-se ainda que, nas condições do teorema A.7., o valor do integral só depende das extremidades da curva γ, pelo que, se se utilizasse outra qualquer curva com as mesmas extremidades, o seu valor seria invariante. Traduz-se este facto dizendo que o integral é independente do caminho considerado e usa-se muitas vezes a notação $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.

O resultado seguinte decorre imediatamente do teorema A.7.

Corolário:

Se f é uma função contínua e primitivável num domínio Ω e γ uma curva fechada seccionalmente regular contida em Ω, tem-se $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Observação:

Este teorema é particularmente importante na teoria das funções complexas, mas só se aplica a funções para as quais é fácil calcular uma primitiva. Por exemplo, no cálculo de $\int_\gamma \operatorname{sen}(z^2)dz$ onde γ é uma curva fechada seccionalmente regular, não é fácil calcular uma primitiva de $f(z) = \operatorname{sen} z^2$. Ver-se-á no próximo capítulo como se poderão tirar conclusões sobre o valor deste integral.

Exemplo A.15.

Calcule-se $\int_\gamma z dz$ onde γ é a curva indicada no exemplo A.14.

Como a função f definida por $f(z) = z$, é contínua e primitivável em $\mathbb{C}$ e $F(z) = \dfrac{z^2}{2}$ é uma sua primitiva, o teorema A.6. garante que o integral é independente do caminho, pelo que

$$\int_\gamma z dz = \int_0^{2+2i} z dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{2+2i} = \frac{(2+2i)^2}{2} = 2(1+i)^2.$$

Teorema A.8.

Seja f uma função contínua sobre a curva regular γ de comprimento L. Então, se f é limitada sobre γ, isto é, se existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| < M, \forall z \in \gamma$, tem-se $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML$.

Demonstração:

Basta ter em conta que

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = ML$$

Exemplo A.16.

Considere-se o integral $\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz$, onde γ é o arco da circunferência de centro na origem e raio r $(r > 0)$ situado no 1.º quadrante: $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ é contínua sobre a curva regular γ, tendo-se ainda $|f(z)| = \left|\dfrac{1}{z^2}\right| = \dfrac{1}{r^2} = M$, para $z \in \gamma^*$. Por outro lado, o comprimento deste arco de circunferência é $L = \dfrac{\pi}{2}r$.

Assim, $\left|\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz\right| \leq \frac{\pi}{2} r \frac{1}{r^2} = \frac{\pi}{2r}$.

B. Teorema de Cauchy

Teorema B.1. (Teorema de Cauchy - 1.ª versão)

Se f é uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo Ω e γ é uma curva simples fechada seccionalmente regular contida em Ω, então

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 .$$

Demonstração:

A demonstração deste teorema é devida a Goursat, razão pela qual ele é por vezes referido como Teorema de Cauchy-Goursat. É uma demonstração bastante longa, baseando-se em sucessivas aproximações da curva por linhas poligonais nela inscritas. Tendo-se optado por não a incluir neste texto, recomenda-se para o seu estudo a consulta de Marsden, J. E. *Basic Complex Analysis*.

Observação:

No caso particular em que a função f tem derivada contínua em Ω, isto é, $f \in C^1(\Omega)$ a demonstração do teorema de Cauchy decorre do teorema de Green no plano: Se P e Q são funções contínuas com derivadas parciais contínuas num domínio D de $\mathbb{R}^2$ e na sua fronteira C, curva fechada orientada no sentido directo, então

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy .$$

Com efeito, tendo em conta a definição A.10 e a observação 2 que se lhe segue, tem-se

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx) .$$

Por aplicação do teorema de Green no plano:

$$\int_\gamma (udx - vdy) = \iint_{\text{int}\,\gamma} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \quad \text{e} \quad \int_\gamma (udy + vdx) = \iint_{\text{int}\,\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

Como f é holomorfa em Ω, as condições de Cauchy–Riemann são verificadas, e assim $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

De acordo com a definição de holomorfia dada no Capítulo 2, e observando que o interior de uma curva simples fechada é um domínio simplesmente conexo, o teorema de Cauchy pode ser enunciado na seguinte forma:

Teorema B.2. (Teorema de Cauchy - 2.ª versão)

Seja γ uma curva simples fechada e f uma função holomorfa sobre γ e no seu interior. Tem-se então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0\,.$$

Nota: O teorema de Cauchy pode generalizar-se facilmente ao caso em que γ é uma curva fechada que se intersecta a si própria um número finito de vezes. Com efeito, pode dizer-se que essa curva consiste num número finito de curvas simples fechadas, podendo aplicar-se o teorema B.1. a cada um destes elementos simples fechados. No caso em que a curva fechada γ se intersecta a si própria num número infinito de pontos ainda se tem $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$, mas a demonstração é bastante mais elaborada (ver Marsden, J. E. *Basic Complex Analysis*).

Tem-se então a versão mais geral:

Teorema B.3. (Teorema de Cauchy)

Se f é uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo Ω e γ é uma curva fechada seccionalmente regular contida em Ω, então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0\,.$$

Exemplo B.1.

Calcule-se $\int_{\gamma} e^{z}dz$, onde γ é qualquer curva fechada seccionalmente regular contida em $\mathbb{C}$. Sendo a função integranda inteira, tem-se, pelo teorema B.3., $\int_{\gamma} e^{z}dz = 0$.

Exemplo B.2.

Pode concluir-se, por aplicação do teorema B.3., que $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, não é um domínio simplesmente conexo. Por absurdo, se $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ fosse simplesmente conexo, como $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, o integral $\int_{|z-z_0|=r} \dfrac{dz}{z - z_0}$ seria nulo, quando o seu valor é $2\pi i$ (ver exemplo A.13).

Os dois teoremas seguintes são consequência do teorema de Cauchy.

Teorema B.4.

Seja f uma função holomorfa num domínio Ω simplesmente conexo e sejam z_0 e z_1 dois elementos de Ω. Se γ e η são duas curvas quaisquer em Ω, unindo z_0 e z_1, então

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz .$$

Demonstração:

Seja $\beta = \gamma \vee (-\eta)$; β é um caminho fechado contido em Ω tendo-se, pelo teorema anterior,

$$\int_\beta f(z)\, dz = 0 .$$

Então, $\int_\beta f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz - \int_\eta f(z)\, dz = 0$ de onde se conclui que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\eta f(z)\, dz .$$

Observação:
Para as funções nas condições do teorema anterior a integração é independente da curva, dependendo apenas das suas extremidades, o que dá sentido à notação $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$.

Exemplo B.3.
Tendo em conta o teorema B.4. o integral do exemplo A.14 pode ser obtido integrando ao longo do segmento que une $z_1 = 0$ a $z_2 = 2+2i$, que pode ser representado parametricamente por $\gamma^*(t) = t(2+2i)$ com $t \in [0,1]$:

$$\int_\gamma z\, dz = \int_{\gamma^*} z\, dz = \int_0^1 (2+2i)t\ (2+2i)dt = (2+2i)^2 \int_0^1 t\, dt = 2(1+i)^2 .$$

Teorema B.5.

Seja f uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo Ω. Então existe uma função F holomorfa em Ω, única a menos de uma constante, tal que $F' = f$, isto é, f admite uma primitiva em Ω.

Demonstração:

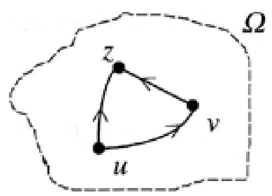
Fixando $u \in \Omega$, seja $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $F(z) = \int_u^z f(w)dw$, em que $\int_u^z$ designa o integral ao longo de qualquer caminho unindo u a z, que existe porque Ω é conexo por arcos. Então, para $\forall z, v \in \Omega$, tem-se

$$\frac{F(z)-F(v)}{z-v} - f(v) = \frac{\int_u^z f(w)dw - \int_u^v f(w)dw}{z-v} - f(v) = \frac{\int_v^u f(w)dw + \int_u^z f(w)dw - f(v)(z-v)}{z-v} =$$

$$= \frac{\int_v^z f(w)dw - f(v)(z-v)}{z-v} = \frac{\int_v^z f(w)dw - f(v)\int_v^z dw}{z-v} = \frac{\int_v^z (f(w)-f(v))\,dw}{z-v}.$$

Como f é uma função contínua, tem-se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\colon\ w, v \in \Omega \text{ e } |w-v| < \delta \Rightarrow |f(w)-f(v)| < \varepsilon.$$



Sendo Ω um conjunto aberto e z suficientemente próximo de v, tem-se $\{z : |z-v| < \delta\} \subset \Omega$, fazendo sentido integrar ao longo do segmento que une v e z. Como w pertence a este segmento, é óbvio que $|w-v| < |z-v| < \delta$, obtendo-se

$$\left|\frac{F(z)-F(v)}{z-v} - f(v)\right| = \left|\frac{\int_v^z (f(w)-f(v))\,dw}{z-v}\right| \le \frac{1}{|z-v|}\int_v^z |(f(w)-f(v))|\,|dw| \le$$

$$\le \frac{1}{|z-v|}\int_v^z \varepsilon\, dw = \frac{1}{|z-v|}\varepsilon|z-v| = \varepsilon$$

isto é,

$$\lim_{z\to v} \frac{F(z)-F(v)}{z-v} = f(v).$$

Então, F é uma primitiva de f.

Se G é outra primitiva de f em Ω tem-se $(F-G)' = f - f = 0$ e, sendo Ω um domínio, $F-G$ é constante em Ω.

Demonstrou-se assim que F é holomorfa em Ω e $(F' = f)$, sendo F única a menos de uma constante.

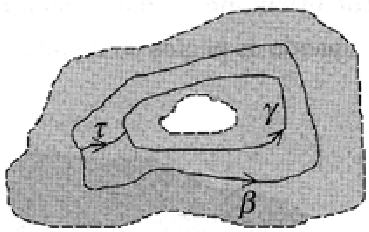
Teorema B.6. (Teorema da deformação)

Seja f uma função holomorfa num domínio Ω (não necessariamente simplesmente conexo). Para qualquer par de curvas fechadas γ e β, seccionalmente regulares, e homotópicas em Ω, tem-se

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\beta f(z)dz\,.$$

Demonstração:

Sendo as curvas γ e β homotópicas, é possível definir uma curva τ unindo um ponto de γ com um ponto de β como se representa na figura.



Seja α a curva fechada formada pela justaposição dos caminhos β, τ, $-\gamma$ e $-\tau$; tem-se então

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\beta f(z)\,dz + \int_\tau f(z)\,dz + \int_{-\gamma} f(z)\,dz + \int_{-\tau} f(z)\,dz\,.$$

Pela nota da página 122, tem-se $\int_{\alpha} f(z)\,dz = 0$ e, consequentemente,

$$\int_{\beta} f(z)\,dz + \int_{\tau} f(z)dz + \int_{-\gamma} f(z)\,dz + \int_{-\tau} f(z)\,dz = 0\,.$$

Assim,

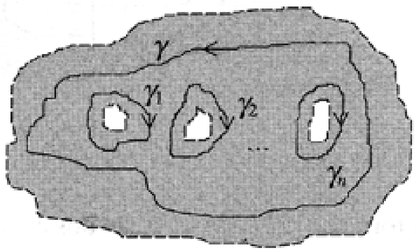
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\beta} f(z)\,dz\,.$$

Observação:
Se γ é uma curva simples fechada em $\mathbb{C}$, ela é homotópica a qualquer circunferência contida no seu interior. Assim, pelo teorema anterior, o integral de uma função holomorfa ao longo de uma curva simples fechada, seccionalmente regular, é igual ao seu integral ao longo de uma circunferência conveniente.

Exemplo B.4.
Pela observação anterior, $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, em que γ é qualquer curva simples fechada, seccionalmente regular, contendo z_0 no seu interior (ver exemplo A.13).

Definição B.1.

Sejam $\gamma, \gamma_1, ..., \gamma_n$ curvas simples fechadas, seccionalmente regulares, tais que $\gamma_1, ..., \gamma_n$ estão no interior de γ. Chama-se **bordo orientado** à reunião finita Γ das curvas $\gamma, \gamma_1, ..., \gamma_n$, as quais são descritas de forma a deixar à esquerda os pontos do domínio por elas limitado.



Tem-se a seguinte generalização do teorema de Cauchy a domínios multiplamente conexos:

Teorema B.7. (Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos)

Seja Γ um bordo orientado e f holomorfa sobre Γ e no domínio (multiplamente conexo) limitado por Γ. Tem-se $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

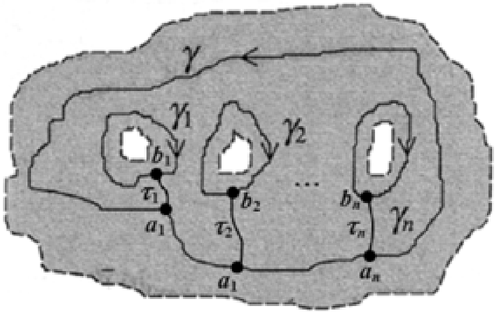
Demonstração:

Seja Γ constituído pelas curvas simples fechadas , $\gamma, \gamma_1, ..., \gamma_n$. Considerem-se n pontos $a_1, ..., a_n$ sobre γ, e n curvas $\tau_1, ..., \tau_n$ unindo esses pontos a pontos $b_1, ..., b_n$ sobre as curvas $\gamma_1, ..., \gamma_n$ respectivamente. (A consideração das curvas $\tau_1, ..., \tau_n$ tem sentido, uma vez que a curva γ é homotópica a cada uma das curvas $\gamma_1, ..., \gamma_j$). Designe-se por (a_i, b_j) a parte da curva γ compreendida entre os pontos a_i e b_j.

A curva

$$\Gamma^* = \tau_1 \vee \gamma_1 \vee (-\tau_1) \vee (a_1, a_2) \vee \tau_2 \vee \gamma_2 \vee (-\tau_2) \vee (a_2, a_3) \vee ... \vee \tau_n \vee \gamma_n \vee (-\tau_n) \vee (a_n, a_1)$$

é uma curva fechada, seccionalmente regular.



Então, pelo teorema de Cauchy, (2.ª versão),

$$\int_{\Gamma^*} f(z)dz = 0 .$$

Atendendo a que para cada $p = 1, ..., n$ se tem

$$\int_{\tau_p} f(z)\,dz + \int_{-\tau_p} f(z)\,dz = 0 \quad \text{e} \quad (a_1, a_2) \vee (a_2, a_3) \vee ... \vee (a_n, a_1) = \gamma ,$$

resulta que $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

Observação:

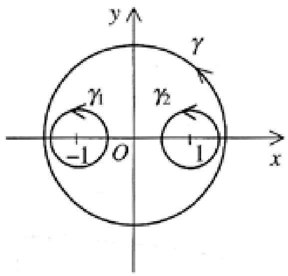
Considerando as curvas $\gamma_1, ..., \gamma_n$ orientadas no sentido directo, pelo teorema anterior conclui-se que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

Exemplo B.5.

Calcule-se $\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}dz$ onde γ é uma circunferência de centro na origem e raio $r>1$, orientada no sentido directo.

Considerando circunferências γ_1 e γ_2 de centros -1 e 1, respectivamente, e raio ε, com $\varepsilon < r-1$, orientadas no sentido directo tem-se, por aplicação do Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos e do exemplo A.13. ,



$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2-1}dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z-1} - \int_{\gamma_1}\frac{dz}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z-1} - \int_{\gamma_2}\frac{dz}{z+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(0-2\pi i) + \frac{1}{2}(2\pi i - 0) = 0\,.$$

Exercícios resolvidos

1. Represente geometricamente e indique o sentido das curvas de $\mathbb{C}$ definidas pelas seguintes funções:

a) $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ com $\varphi(t)=t+i(2t-1)$.

b) $\varphi\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ com $\varphi(t)=\left(2-2t^2\right)+it$.

c) $\varphi\colon[-1,0]\to\mathbb{C}$ com $\varphi(t)=t+i(2t^2-2)$.

d) $\varphi\colon\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]\to\mathbb{C}$ com $\varphi(t)=2e^{it}$.

e) $\varphi\colon[-1,1]\to\mathbb{C}$ com $\varphi(t)=t-i\sqrt{2-t^2}$.

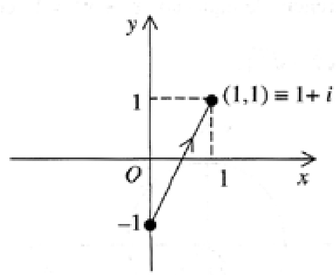
f) $\varphi\colon[1,+\infty[\,\to\mathbb{C}$ com $\varphi(t)=\dfrac{2}{t}+it$.

g) $\varphi\colon]-\infty,0[\,\to\mathbb{C}$ com $\varphi(t)=t+\dfrac{i}{t}$.

Resolução:

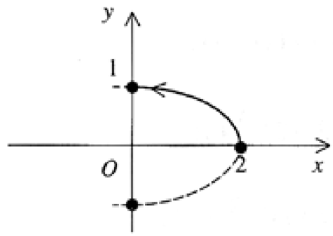
a) $z=x+iy=\varphi(t)=t+i(2t-1)\Rightarrow\begin{cases}x=t\\y=2t-1\end{cases}$, com $0\le t\le 1$.

A curva dada é o segmento da recta de equação $y=2x-1$ com origem $-i$ e extremidade $1+i$.



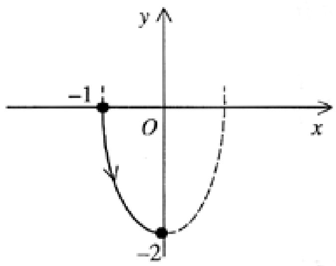
b) $z = x + iy = \varphi(t) = (2 - 2t^2) + it \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t^2 \\ y = t \end{cases}$, com $0 \le t \le 1$.

A curva em questão é o arco da parábola de eixo horizontal definida pela equação, $x = 2 - 2y^2$ com origem 2 e extremidade i.



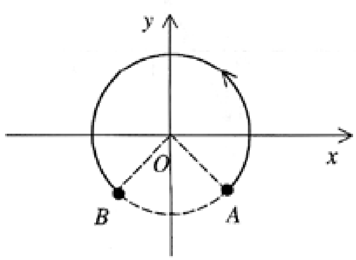
c) $z = x + iy = \varphi(t) = t + i\,(2t^2 - 2) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 - 2 \end{cases}$, com $-1 \le t \le 0$.

Então, a curva é o arco da parábola de eixo vertical definida pela equação $y = 2x^2 - 2$ com origem -1 e extremo $-2i$.



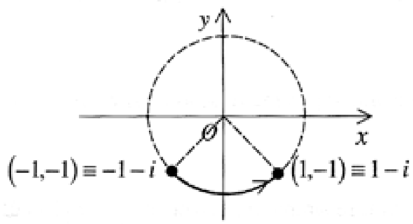
d) $z = x + iy = \varphi(t) = 2e^{it} = 2\,(\cos t + i \operatorname{sen} t) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases}$, com $-\dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{5\pi}{4}$.

A curva é, pois, o arco da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, com origem $A = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \equiv \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ e extremidade $B = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \equiv \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.



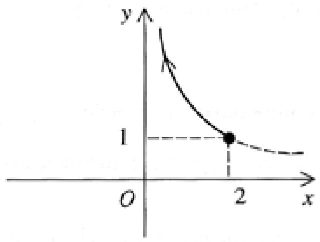
e) $z = x + iy = \varphi(t) = t - i\sqrt{2-t^2} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\sqrt{2-t^2} \end{cases}$, com $-1 \leq t \leq 1$.

A curva é assim o arco da circunferência de centro (0,0) e raio $\sqrt{2}$ com origem no ponto $-1-i$ e extremidade $1-i$.



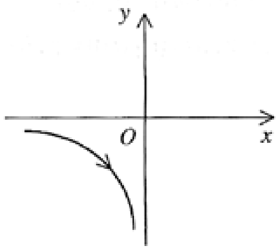
f) $z = x + iy = \varphi(t) = \dfrac{2}{t} + it \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{t} \\ \\ y = t \end{cases}$, com $1 \leq t \leq \infty$.

A curva é um arco ilimitado da hipérbole de equação $xy = 2$ com origem em $2+i$.



g) $z = x + iy = \varphi(t) = t + \dfrac{i}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$, com $-\infty < t < 0$.

A curva é o arco da hipérbole de equação $xy = 1$ sugerido pela figura seguinte:



2. Mostre que a reparametrização de caminhos é uma relação de equivalência.

Resolução:

Por definição, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ é uma reparametrização de $\tilde{\gamma}:\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]\to\mathbb{C}$, se e só se existe $\alpha:[a,b]\to\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]$, $\alpha\in C^1([a,b])$ com $\alpha'(t)>0$, $\alpha(a)=\tilde{a}$, $\alpha(b)=\tilde{b}$ tal que $\gamma(t)=\tilde{\gamma}(\alpha(t))$.

(i) Reflexividade:

É imediato que qualquer caminho é uma reparametrização de si próprio: basta considerar $\alpha(t)=t$.

(ii) Simetria:

Mostre-se que se $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ é uma reparametrização de $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$, então γ_2 é uma reparametrização de γ_1.

Por hipótese, γ_1 é uma reparametrização de γ_2, logo existe uma função $\alpha:[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$ com $\alpha'(t)>0$, $\alpha(a_1)=a_2$, $\alpha(b_1)=b_2$ tal que $\gamma_1(t)=\gamma_2(\alpha(t))$.

Como $\alpha'(t)>0$ a função α é injectiva e tem inversa $\alpha^{-1}:[a_2,b_2]\to[a_1,b_1]$ com

$$\left(\alpha^{-1}\right)'(t)>0,\ \ \alpha^{-1}(a_2)=a_1,\ \alpha^{-1}(b_2)=b_1\ \text{ e }\ \gamma_1\left(\alpha^{-1}(t)\right)=\gamma_2\left(\alpha\left(\alpha^{-1}(t)\right)\right)=\gamma_2(t)\,;$$

conclui-se, então, que γ_2 é uma reparametrização de γ_2.

(iii) Transitividade:

Mostre-se que se $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ é uma reparametrização de $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$ e $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$ é uma reparametrização de $\gamma_3:[a_3,b_3]\to\mathbb{C}$, então γ_1 é reparametrização de γ_3.

Por hipótese existem funções $\alpha_1:[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$ e $\alpha_2:[a_2,b_2]\to[a_3,b_3]$ com $\alpha_1'(t)>0$, $\alpha_1(a_1)=a_2$, $\alpha_1(b_1)=b_2$ e $\alpha_2'(t)>0$, $\alpha_2(a_2)=a_3$, $\alpha_2(b_2)=b_3$ tais que $\gamma_1(t)=\gamma_2(\alpha_1(t))$ e $\gamma_2(t)=\gamma_3(\alpha_2(t))$. Seja $\alpha=\alpha_2\circ\alpha_1$: tem-se $\alpha_2\circ\alpha_1:[a_1,b_1]\to[a_3,b_3]$ e

$$\begin{aligned}
&\alpha'(t)=\alpha_2'\left(\alpha_1(t)\right)\alpha_1'(t)>0\,,\\
&\alpha(a_1)=\alpha_2\left(\alpha_1(a_1)\right)=\alpha_2(a_2)=a_3\,,\\
&\alpha(b_1)=\alpha_2\left(\alpha_1(b_1)\right)=\alpha_2(b_2)=b_3\\
&\gamma_3(\alpha(t))=\gamma_3\left(\alpha_2\left(\alpha_1(t)\right)\right)=\gamma_2\left(\alpha_1(t)\right)=\gamma_1(t)\,,
\end{aligned}$$

logo, γ_1 é uma reparametrização de γ_3.

3. Prove que a relação de homotopia entre curvas é uma relação de equivalência.

Resolução:

A resolução apresentada refere-se à homotopia entre curvas fechadas, ficando a análise dos restantes casos ao cuidado do leitor.

Recorde-se que duas curvas fechadas $\gamma_1:[a,b]\to A$ e $\gamma_2:[a,b]\to A$ são homotópicas em A se existe $H:[a,b]\times[0,1]\to A$ contínua, tal que, para cada $s\in[0,1]$, $t\to H(t,s)=\gamma(t)$ é uma curva fechada, sendo $H(t,0)=\gamma_1(t)$ e $H(t,1)=\gamma_2(t)$.

(i) Reflexividade:

Para provar que qualquer curva fechada é homotópica a si própria, considere-se uma curva fechada $\gamma:[a,b]\to A$. Basta considerar $H:[a,b]\times[0,1]\to A$, tal que para cada $s\in[0,1]$ se tenha $H(t,s)=\gamma(t)$.

(ii) Simetria:

Mostre-se que se $\gamma_1:[a,b]\to A$ é homotópica a $\gamma_2:[a,b]\to A$ então γ_2 é homotópica a γ_1.

Se γ_1 é homotópica a γ_2, existe $H:[a,b]\times[0,1]\to A$ contínua, tal que, para cada $s\in[0,1]$, $t\to H(t,s)$ é uma curva fechada, sendo $H_1(t,0)=\gamma_1(t)$ e $H_1(t,1)=\gamma_2(t)$.

Seja $H_1:[a,b]\times[0,1]\to A$, tal que $H_1(t,s)=H(t,1-s)$.

Verifica-se que H_1 é contínua (pois H é contínua), que, para cada $s\in[0,1]$, $t\to H_1(t,s)=\gamma(t)$ é uma curva fechada (pois $H_1(a,s)=H(a,1-s)=H(b,1-s)=H_1(b,s)$) e que $H_1(t,0)=H(t,1)=\gamma_2(t)$; $H_1(t,1)=H(t,0)=\gamma_1(t)$, donde se conclui que γ_1 é homotópica a γ_3.

(iii) Transitividade:

Sejam $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3:[a,b]\to A$ curvas fechadas. Verifique-se que, se γ_1 é homotópica a γ_2 e γ_2 é homotópica a γ_3, então γ_1 é homotópica a γ_3.

Se γ_1 é homotópica a γ_2, então existe $H_1:[a,b]\times[0,1]\to A$ contínua, tal que, para cada $s\in[0,1]$, $t\to H_1(t,s)$ é uma curva fechada, sendo $H_1(t,0)=\gamma_1(t)$ e $H_1(t,1)=\gamma_2(t)$.

Se γ_2 é homotópica a γ_3, então existe $H_2:[a,b]\times[0,1]\to A$ contínua, tal que, para cada $s\in[0,1]$, $t\to H_2(t,s)$ é uma curva fechada, sendo $H_2(t,0)=\gamma_2(\mathrm{t})$ e $H_2(t,1)=\gamma_3(t)$.

Seja $H_3:[a,b]\times[0,1]\to A$ definida por

$$H_3(t,s)=\begin{cases} H_1(t,2s) & 0\le s\le \dfrac{1}{2} \\ H_2(t,2s-1) & \dfrac{1}{2}\le s\le 1. \end{cases}$$

Verifica-se que a função H_3 é contínua pois $H_1(t,1)=H_2(t,0)$, que $\gamma(t)=H_3(t,s)$ com $s\in[0,1]$ é uma curva fechada e $H_3(t,0)=H_1(t,0)=\gamma_1(t)$, $H_3(t,1)=H_2(t,1)=\gamma_3(t)$.

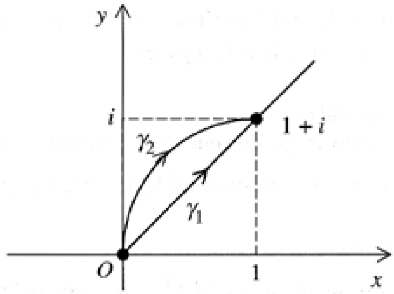
Conclui-se, então, que γ_1 é homotópica a γ_3.

4. Sejam γ_1 e γ_2 as curvas definidas, respectivamente, pelos caminhos $\gamma_1(t) = t + it$, $0 \le t \le 1$ e $\gamma_2(t) = t^2 + it$, $0 \le t \le 1$.

Utilize a função $H(t,s) = t^{1+s} + it$, definida em $[0,1] \times [0,1]$ para mostrar que γ_1 e γ_2 são curvas homotópicas.

Resolução:

Para a primeira curva tem-se



$$z = x + iy = \gamma_1(t) = t + it \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}.$$

Trata-se do segmento da recta $y = x$ com origem 0 e extremidade $1 + i$.

Para a segunda curva tem-se

$$z = x + iy = \gamma_2(t) = t^2 + it \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}.$$

Trata-se do arco da parábola $x = y^2$ com origem O e extremidade $1 + i$.

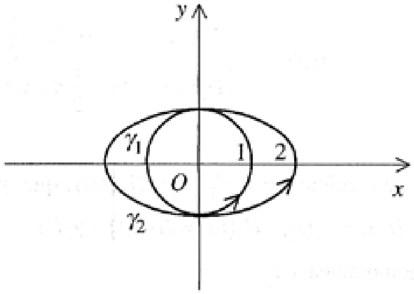
Verifica-se que $H(t,s) = t^{1+s} + it$ é uma função contínua, $H(t,0) = t + it = \gamma_1(t)$, $H(t,1) = t^2 + it = \gamma_2(t)$, $H(0,s) = 0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $H(1,s) = 1 + i = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$.

A função H define, assim, uma homotopia de extremos fixos entre γ_1 e γ_2

5. Seja γ_1 a circunferência de centro na origem e raio 1 e γ_2 a elipse de centro na origem, semieixo horizontal de comprimento 2 e semieixo vertical de comprimento 1.

Mostre que a função $H:[0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{C}$, definida por $H(t,s) = (1+s)\cos t + i \operatorname{sen} t$ define uma homotopia de caminhos fechados entre γ_1 e γ_2.

Resolução:



As curvas γ_1 e γ_2 podem ser representadas parametricamente por $\gamma_1(t)=\cos t+i \operatorname{sen} t, t\in[0,2\pi]$ e $\gamma_2(t)=2\cos t+i \operatorname{sen} t, t\in[0,2\pi]$. A função H definida em $[0,2\pi]\times[0,1]$ por $H(t,s)=(1+s)\cos t+i\operatorname{sen} t$ é contínua e tal que:

$$H(t,0)=\cos t+i\operatorname{sen} t=\gamma_1(t)$$
$$H(t,1)=2\cos t+i\operatorname{sen} t=\gamma_2(t)$$
$$H(0,s)=H(2\pi,s).$$

A função H define então uma homotopia de caminhos fechados entre γ_1 e γ_2.

6. Seja Ω um domínio convexo de $\mathbb{C}$, isto é, que contém o segmento de recta definido por quaisquer dois dos seus pontos. Mostre que quaisquer duas curvas fechadas γ_1 e γ_2 contidas em Ω são homotópicas.

Resolução:
Podem sempre considerar-se γ_1 e γ_2 curvas fechadas parametrizadas, de forma a estarem ambas definidas num mesmo intervalo $[a, b]$ (utilizando se necessário uma reparametrização conveniente).
Uma vez que Ω é conjunto convexo, o segmento que une $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ está contido em Ω. Tem assim sentido considerar uma função $H:[a,b]\times[0,1]\to\Omega$ definida por $H(t,s)=s\gamma_2(t)+(1-s)\gamma_1(t)$.
Trata-se de uma função contínua, tal que para qualquer $t\in[a,b]$, $H(t,0)=\gamma_1(t)$, $H(t,1)=\gamma_2(t)$ e $H(a,s)=s\gamma_2(a)+(1-s)\gamma_1(a)=s\gamma_2(b)+(1-s)\gamma_1(b)=H(b,s)$. A função H define pois uma homotopia de caminhos fechados entre as curvas γ_1 e γ_2.

7. Mostre que todo o domínio convexo é simplesmente conexo.

Resolução:
Sejam Ω domínio convexo, γ_1 uma curva em Ω reduzida a um ponto e γ_2 uma curva fechada qualquer em Ω. Pelo exercício anterior, conclui-se que γ_1 é homotópica a γ_2 e assim Ω é um conjunto simplesmente conexo (ver definição A.8.).

8. Prove que um conjunto conexo por arcos é conexo. Utilize um exemplo para mostrar que a condição recíproca não é verdadeira.

Resolução:
Faça-se a demonstração por redução ao absurdo.
Seja Ω um conjunto conexo por arcos e não conexo. Se Ω não é conexo, existem conjuntos A e B, abertos e não vazios, tais que $A\cap B=\varnothing$ e $A\cup B=\Omega$.
Seja $\alpha\in A$ e $\beta\in B$: como Ω é conexo por arcos, existe um caminho $\gamma:[a,b]\to\Omega$ com $\alpha=\gamma(a)$ e $\beta=\gamma(b)$.
Como γ é uma aplicação contínua e A e B são conjuntos abertos, tem-se $\gamma^{-1}(A)$ e $\gamma^{-1}(B)$ são subconjuntos abertos não vazios de $[a,b]$ tais que; $\gamma^{-1}(A)\cap\gamma^{-1}(B)=\varnothing$; $\gamma^{-1}(A)\cup\gamma^{-1}(B)=[a,b]$. Então $[a,b]$ não seria conexo, o que é absurdo, concluindo-se pois que Ω é um conjunto conexo.

A recíproca é falsa, isto é, existem conjuntos conexos que não são conexos por arcos.
Por exemplo, o conjunto $A=\{(x,y):\ x=0\}\cup\{(x,y): x>0\ \text{ e }\ y=\operatorname{sen}(1/x)\}$ é conexo e não é conexo por arcos, pois não é possível definir em A, um caminho que una $z=0$ a qualquer outro ponto de A.

9. Diga quais dos seguintes conjuntos são domínios simplesmente conexos

a) $A=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-4|\geq|z|\}$.

b) $B=\left\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\leq\frac{1}{2}\right\}$.

Resolução:

a) É fácil ver que $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\leq 2\right\}$.
Trata-se de um domínio convexo, portanto simplesmente conexo (ver exercício 7).

b) É fácil ver que $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x-1)^2+y^2\geq 1\right\}$.
Trata-se de um domínio que não é simplesmente conexo. Com efeito, é possível encontrar curvas em B cujo interior não está contido no conjunto, por exemplo, uma circunferência de centro $z_0=1$ e raio r, com $r>1$.

10. Calcular $\int_\gamma |z|dz$ onde γ é a curva definida por $\gamma(t)=3e^{it}$ onde $0\leq t\leq\frac{3\pi}{2}$.

Resolução:
A curva em questão é o arco da circunferência de centro na origem e raio 3, entre os pontos $z_0=3$ e $z_1=-i$.

Sendo $\gamma(t)=e^{it}$, $\gamma'(t)=3ie^{it}$, $t\in\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$, tem-se

$$\int_\gamma |z|dz=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left|3e^{it}\right|i3e^{it}dt=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}9ie^{it}dt=9\left[e^{it}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}=9\left(e^{i\frac{3\pi}{2}}-e^{i0}\right)=-9-9i\,.$$

11. Calcular $\int_\gamma \sqrt{z}dz$ onde γ é a curva definida por $\gamma(t)=e^{it}$, $-\pi<t\leq\pi$.
(Considerar o ramo principal da função $\sqrt{z}$.)

Resolução:
A curva em questão é a circunferência de centro na origem e raio 1.
Sendo $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in]-\pi,\pi]$, tem-se

$$\int_\gamma \sqrt{z}\ dz=\int_\gamma e^{\frac{1}{2}\log z}\,dz=$$

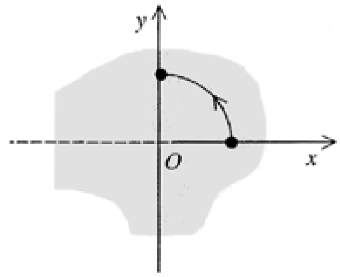
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi}e^{\frac{1}{2}\log e^{it}}\,ie^{it}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi}e^{i\frac{t}{2}}\,ie^{it}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi}ie^{i\frac{3t}{2}}\,dt=-\frac{4i}{3}$$

12. Calcular $\int_\gamma \log z dz$ onde γ é o arco da circunferência definida por $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Resolução:

Considere-se o ramo principal do logaritmo,

$$\log z = \log|z| + i\arg(z) \text{ para } \arg(z) \in \left]-\pi, \pi\right[,$$



cujo domínio de holomorfia contém a curva dada.

Então,

$$\int_\gamma \log z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log r + it)\left(ire^{it}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(ire^{it}\log r - rte^{it}\right)dt = r\log r\left[e^{it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - r\left(\left[t\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{it}}{i}dt\right) =$$

$$= r\left(1 - \log r - \frac{\pi}{2}\right) + ir(\log r - 1).$$

13. Calcular $\int_\gamma z^2 dz$, onde :

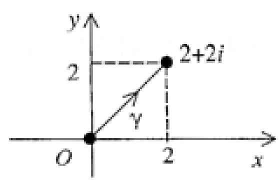
a) γ é o segmento de recta que une a origem ao ponto $2+2i$.

b) γ é o arco da parábola de equação $y = \frac{x^2}{2}$, $t \in [0,2]$.

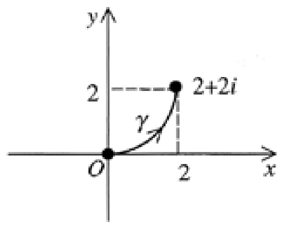
Resolução:

a) A curva em questão é definida por $\gamma(t) = t + ti$, $0 \le t \le 2$, logo

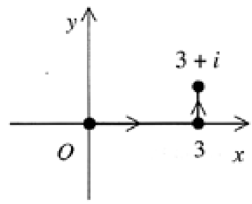
$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^2 (t + ti)^2(1+i)dt = \int_0^2 t^2(1+i)^3 dt = (1+i)^3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}(i-1)$$



b) Atendendo a que a função $f(z)=z^2$ é inteira, o teorema B.2. garante que o valor deste integral é independente da curva que une os pontos 0 e 2+2i; o seu valor é pois o obtido na alínea a).

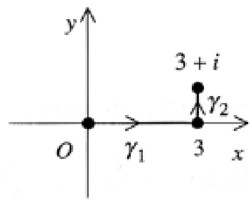


14. Calcular $\int_0^{3+i}\left(y^2-x\right)dz$ ao longo da linha indicada na figura seguinte:



Resolução:

A curva ao longo da qual se pretende calcular o integral é a justaposição das curvas γ_1 e γ_2 em que $\gamma_1(t)=t$, $0\le t\le 3$ e $\gamma_2(t)=3+it$, $0\le t\le 1$. Logo, como $f(x+iy)=y^2-x$, tem-se $f(\gamma_1(t))=-t$ e $f(\gamma_2(t))=t^2-3$, e assim:



$$\int_0^{3+i}\left((\operatorname{Im} z)^2-\operatorname{Re} z\right)dz=\int_{\gamma_1}\left((\operatorname{Im} z)^2-\operatorname{Re} z\right)dz+\int_{\gamma_2}\left((\operatorname{Im} z)^2-\operatorname{Re} z\right)dz=\int_0^3(-t)\cdot 1dt+\int_0^1\left(t^2-3\right)idt=-\frac{9}{2}-\frac{8}{3}i.$$

15. Utilizando a propriedade de majoração do integral, mostre que

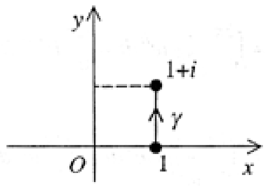
$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le 1,$$

onde γ é o segmento de recta que une os pontos 1 e $1 + i$ e $f(z)$ é definida por:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$. **b)** $f(z) = \dfrac{z-1}{z}$.

Resolução:

A curva dada é definida por $\gamma(t) = 1 + ti, \quad 0 \le t \le 1$, assim:



a) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_0^1 \left|\frac{1}{1+ti}\right| |i|dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \le \int_0^1 1dt = 1$.

b) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_0^1 \left|\frac{ti}{1+ti}\right| |i|dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \le \int_0^1 1dt = 1$.

16. Mostre que $\left|\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz\right| \le \frac{4\pi}{3}$, sendo a circunferência de equação $|z| = 2$ descrita no sentido directo.

Resolução:

Como, para $|z| = 2$, se tem $\left|\frac{1}{1+z^2}\right| = \frac{1}{\left|z^2 - (-1)\right|} \le \frac{1}{\left|\,|z^2| - 1\right|} \le \frac{1}{3}$, então pelo teorema A.8. será $\left|\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz\right| \le \frac{1}{3} L$,

em que L é o comprimento da circunferência $|z| = 2$.

Consequentemente, $\left|\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz\right| \le \frac{4\pi}{3}$.

17. Seja C a circunferência, de centro na origem e raio 1, descrita no sentido directo. Verifique que são nulos os seguintes integrais:

$$\int_C \frac{1}{|z|} dz; \qquad \int_C \frac{1}{z^2} dz; \qquad \int_C \frac{1}{|z^2|} dz.$$

Resolução:

Parametricamente, C pode ser representada por $\gamma(t) = e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Então:

$$\int_C \frac{1}{|z|} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{it}|} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{it} dt = \left[e^{it}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{-it} dt = 0$$

$$\int_C \frac{1}{|z^2|} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{2it}|} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{it} dt = 0\ .$$

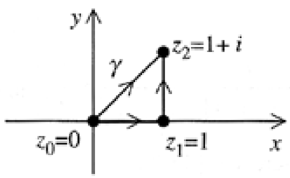
18. Seja γ a linha definida pela justaposição dos segmentos de recta que unem os pontos $z_0 = 0$ a $z_1 = 1$ e z_1 a $z_2 = 1 + i$. Calcule $\int_\gamma f(z) dz$ onde

a) $f(z) = 2z + 1$.

b) $f(z) = (\overline{z})^2$.

Resolução:

a) Como $f(z) = 2z + 1$ é uma função inteira, o integral entre dois pontos é independente da curva que os una. Pode usar-se, então, o segmento que une z_0 a z_2.



Parametrizando esse segmento por $\gamma(t) = t + it$, $0 \le t \le 1$, o integral é dado por

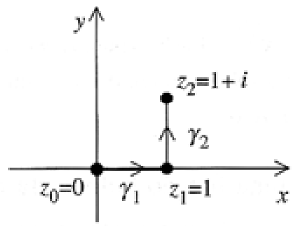
$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma (2z+1) dz = \int_0^1 \big(2(t+it)+1\big)(1+i) dt = \int_0^1 (4ti + 1 + i) dt = 1 + 3i.$$

Outra forma de resolver o problema seria utilizando o teorema A.7., pois $f(z)$ é primitivável, e uma das suas primitivas é $F(z) = z^2 + z$. Assim,

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma (2z+1) dz = \int_{z_0}^{z_2} (2z+1) dz = F(z_2) - F(z_0) = \left[z^2 + z\right]_0^{1+i} = 3i + 1\ .$$

b) A função $f(z)=(\bar{z})^2$ não é holomorfa em nenhum domínio que contenha a curva em questão, não sendo, portanto, legítimo aplicar o teorema A.7.

Sejam respectivamente γ_1 e γ_2 os segmentos que unem z_0 a z_1 e z_1 a z_2. As parametrizações de γ_1 e γ_2, podem ser respectivamente, $\gamma_1(t)=t$, $0\le t\le 1$ e $\gamma_2(t)=1+ti$, $0\le t\le 1$.



Como a função dada é contínua sobre a linha γ, tem-se

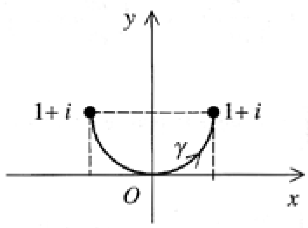
$$\int_\gamma (\bar{z})^2\,dz=\int_{\gamma_1}(\bar{z})^2\,dz+\int_{\gamma_2}(\bar{z})^2\,dz=\int_0^1 t^2\,dt+\int_0^1(1-ti)^2\,i\,dt=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i\,.$$

19. Calcule $\int_\gamma f(z)dz$, onde γ é o arco que une $z_0=-1+i$ a $z_1=1+i$ ao longo da curva de equação $y=x^2$ e

$$f(x+iy)=\begin{cases} x & \text{se } x<0 \\ y & \text{se } x\ge 0\,. \end{cases}$$

Resolução:

A curva em questão pode ser parametrizada por $\gamma(t)=t+it^2$, $-1\le t\le 1$.



Facilmente se verifica que a função f é contínua sobre a curva em questão; o integral é então dado por

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{-1}^1 f\left(t+it^2\right)(1+2it)dt=\int_{-1}^0 t(1+2ti)dt+\int_0^1 t^2(1+2ti)dt=-\frac{1}{6}+\frac{7}{6}i\,.$$

Observe-se que, neste caso, não se pode optar por integrar, por exemplo, ao longo do segmento que une $-1+i$, a $-1+i$ porque f não é holomorfa em nenhum domínio que contenha a curva.

20. Calcule $\int_\gamma \frac{e^{3z}}{z-i\pi}dz$ em que γ é a elipse de equação $|z-2|+|z+2|=6$ descrita no sentido directo.

Resolução:

Como $|i\pi-2|+|i\pi+2|=2\sqrt{\pi^2+4}>2\sqrt{3^2+4}>6$, o ponto $z=i\pi$ é exterior à elipse. Sendo $f(z)=e^{3z}$ uma função inteira, a função integranda é holomorfa sobre a elipse dada, assim como no seu interior. Então, pelo teorema de Cauchy, o integral em questão é igual a zero.

21. Sejam $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ uma função holomorfa num domínio $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ e γ uma curva regular simples fechada contida em Ω, parametrizada por $\alpha(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$.

a) Mostre que $\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dx=\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dy$ e $\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dy=-\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dx$.

b) Verifique que se estabelecem relações análogas envolvendo $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Resolução:

a) Como f é holomorfa, pelo corolário do teorema A.7., tem-se $\int_\gamma f'(z)dz=0$. Logo $\int_\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(dx+idy)=0$,

isto é, $\int_\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy\right)+i\int_\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)=0$.

Então

$$\int_\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy\right)=0 \quad \text{e} \quad \int_\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)=0,$$

logo

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dx=\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dy \quad \text{e} \quad \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dy=-\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dx .$$

b) A resolução é análoga à anterior, pois $\int_\gamma f'(z)dz=0$ pode escrever-se na forma

$$\int_\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(dx+idy)=0 .$$

Assim, $\int_\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+i\int_\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial y}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx\right)=0$, donde se conclui que

$$\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial y}dx=-\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad \text{e} \quad \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial y}dy=\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial y}dx .$$

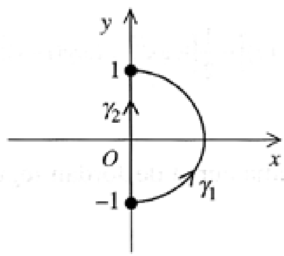
22. Sejam γ_1 e γ_2 linhas que ligam os pontos $-i$ a i parametrizadas por

$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e $\gamma_2(t) = (-1+2t)i, \quad t \in [0,1]$, respectivamente. Justifique

que os integrais $\displaystyle\int_{\gamma_1} \left(\frac{(\bar{z})^2}{2} + |z|^2\right) dz$ e $\displaystyle\int_{\gamma_2} \left(\frac{(\bar{z})^2}{2} + |z|^2\right) dz$ existem e calcule-os. Diga

porque motivo não é possivel utilizar o teorema de Cauchy.

Resolução:



Os integrais existem porque a função integranda é contínua sobre as curvas γ_1 e γ_2 que são regulares.
Considerando as parametrizações das curvas γ_1 e γ_2, os integrais são dados por:

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{(\bar{z})^2}{2} + |z|^2\right) dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{e^{-2it}}{2} + 1\right) ie^{it}\, dt = 3i \qquad \int_{\gamma_2} \left(\frac{(\bar{z})^2}{2} + |z|^2\right) dz = \int_0^1 \left(\frac{(-1+2t)^2}{2}\right) 2i\, dt = \frac{i}{3}.$$

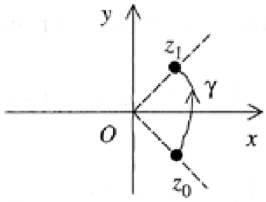
Não é possível aplicar o teorema de Cauchy, pois a função integranda não é diferenciável em algum conjunto simplesmente conexo que contenha as curvas dadas.

23. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z^2+1} dz$, onde γ é uma curva regular que une os pontos $z_0 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ a $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ contida no semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Resolução

A função $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ é primitivável no semiplano $\operatorname{Re}(z) > 0$, sendo $F(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(z^2+1\right)$ com

$\log z = \log|z| + i \arg z$ e $\arg z \in \left]-\pi, \pi\right]$, uma sua primitiva.



Pelo teorema A.7., tem-se então

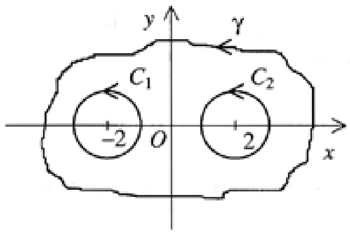
$$\int_\gamma \frac{z}{z^2+1}dz = F\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) - F\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left[\log\left(e^{i\frac{\pi}{2}}+1\right) - \log\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}+1\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\log(1+i) - \log(1-i)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\sqrt{2} + i\arg(1+i)\right] - \frac{1}{2}\left[\log\sqrt{2} + i\arg(1-i)\right] = i\frac{\pi}{4}.$$

24. Calcule $\int_\gamma \frac{1}{z^2-4}dz$, onde γ é uma curva de Jordan regular que contém os pontos 2 e −2 no seu interior.

Resolução:

Tem-se que $\frac{1}{z^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+2}\right)$. Considerem-se circunferências C_1 e C_2 de centros respectivamente iguais a −2 e 2 e raio r escolhido convenientemente, de modo que C_1 e C_2 estejam contidas no interior de γ como se ilustra na figura.



Pelo teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos, tem-se

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-4}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2-4}dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2-4}dz = \frac{1}{4}\left(\int_{C_1} \frac{1}{z-2}dz + \int_{C_2} \frac{1}{z-2}dz - \int_{C_1} \frac{1}{z+2}dz - \int_{C_2} \frac{1}{z+2}dz\right).$$

Atende-se que, pelo exemploA.13., $\int_{C_1} \frac{1}{z+2} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z-2} dz = 2\pi i$ e pelo teorema de Cauchy para um bordo simples $\int_{C_2} \frac{1}{z+2} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z-2} dz = 0$.

Então,

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-4} dz = 0 .$$

25. Se f é uma função definida num domínio simplesmente conexo Ω, holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$ e limitada numa vizinhança de z_0, então $\int_\gamma f(z)dz = 0$, para qualquer curva γ simples fechada contida em Ω e contendo z_0 seu interior.

Resolução:

Seja $\varepsilon > 0$ tal que f é uma função limitada em $\overline{D(z_0,\varepsilon)}$: designando por C_ε a fronteira deste disco, conclui-se, pelo teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos, que $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$.

Mas como $|f(z)| \le M$, $\forall z \in \overline{D(z_0,\varepsilon)}$, tem-se $\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \le 2\pi\varepsilon M$.

Então $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le 2\pi\varepsilon M$ e, fazendo ε tender par zero, obtém-se $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Capítulo

4

Consequências do Teorema de Cauchy

A. Fórmulas integrais de Cauchy

As fórmulas integrais de Cauchy têm extrema importância no estudo das funções complexas de variável complexa, uma vez que estabelecem que o conhecimento dos valores de uma função sobre uma curva fechada determina os valores dessa função e das suas derivadas nos pontos interiores à curva.

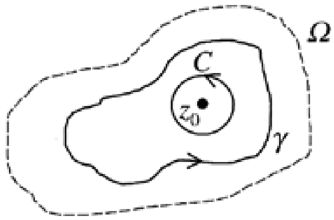
Teorema A.1.

Sejam Ω um domínio simplesmente conexo, f uma função holomorfa em Ω e γ uma curva de Jordan regular contida em Ω. Então, para todo o ponto $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$, tem-se

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad \textbf{(fórmula integral de Cauchy)}$$

Demonstração:

Tome-se $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$ e seja g: $\Omega \setminus \{z_0\} \to C$ definida por $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ (g é uma função holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$). Seja C uma circunferência de centro z_0 e raio r, com r escolhido de modo que C fique contida no interior de γ.



Do teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos resulta que $\int_\gamma g(z)dz = \int_C g(z)dz$ e assim,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_o} dz = \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_C \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z_0)}{z - z_0} \right) dz = \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) \int_C \frac{1}{z - z_0} dz \,.$$

Como $\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$ (exemplo A.13, Capítulo 3), resta ver que $\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$.

Com efeito, pela fórmula de majoração do integral (ver teorema A.9. do Capítulo 3) e atendendo a que $|z - z_0| = r$, uma vez que z está sobre C, tem-se

$$\left| \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \le \frac{1}{r} \left[\max_{z \in C} |f(z) - f(z_0)| \right] 2\pi r \,.$$

Sendo f uma função contínua em z_0 (porque f é holomorfa em Ω e $z_0 \in \Omega$), se $z \to z_0$, isto é, se $r \to 0$, tem-se $\max_{z \in C} |f(z) - f(z_0)| \to 0$, de onde se conclui que $\int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$.

Então, $\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_o} dz = 2\pi i f(z_0)$, como se pretendia concluir.

Observação:

Atendendo à definição de holomorfia sobre uma curva γ e tendo em conta que o interior de uma curva de Jordan é um conjunto simplesmente conexo, tem-se que:

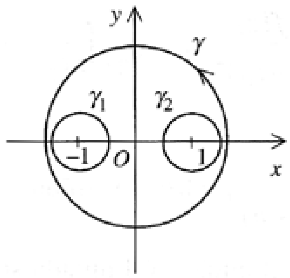
Se f é holomorfa sobre uma curva de Jordan γ e sobre o seu interior, então para qualquer ponto z_0 no interior de γ

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Exemplo A.1.

Retome-se o cálculo de $\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}dz$ (ver exemplo B.5, Capítulo 3) onde γ é uma circunferência de centro na origem e raio $r>1$ descrita no sentido directo.

Considerando circunferências γ_1 e γ_2 de centros -1 e 1, respectivamente, e raio ε, com $\varepsilon < r-1$, por aplicação do teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos e usando a fórmula integral de Cauchy, tem-se



$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}dz=\int_{\gamma_1}\frac{1}{z^2-1}dz+\int_{\gamma_2}\frac{1}{z^2-1}dz=\int_{\gamma_1}\frac{(z-1)^{-1}}{z+1}dz+\int_{\gamma_2}\frac{(z+1)^{-1}}{z-1}dz=$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{z-1}\right)_{z=-1}+2\pi i\left(\frac{1}{z+1}\right)_{z=1}=-\pi i+\pi i=0.$$

Teorema A.2.

Sejam Ω um domínio simplesmente conexo, f uma função holomorfa em Ω e γ uma curva de Jordan contida em Ω. Então, para todo o ponto z_0 interior a γ, tem-se

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$ **(fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada).**

Demonstração:

Seja $h \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 + h \in \operatorname{int} \gamma$. Por aplicação do teorema A.1, tem-se

$$f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}dz \quad \text{e} \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Então,

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z-(z_0+h)} - \frac{f(z)}{z-z_0}\right)\frac{1}{h}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^2} + \left[\frac{1}{(z-z_0)(z-z_0-h)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right]f(z)\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}f(z)dz.$$

Seja $I = \int_\gamma \frac{h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}f(z)dz$ e verifique-se que $I \to 0$ se $h \to 0$.

Como f é holomorfa sobre γ, então f é limitada sobre γ, isto é, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \le M, \quad z \in \gamma$.

Seja $L = \inf_{z\in\gamma} |z - z_0|$ e h tal que $|h| \le \frac{L}{2}$. Então $|z - z_0 - h| \ge \frac{L}{2}$, e assim:

$$|I| \le \int_\gamma \frac{|h|}{|z-z_0|^2|z-z_0-h|}|f(z)||dz| \le M\frac{|h|}{L^2\frac{L}{2}}c(\gamma),$$

em que $c(\gamma)$ designa o comprimento de γ. Conclui-se portanto, como se pretendia, que $I \to 0$ quando $|h| \to 0$.

Por consequência:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

O resultado deste teorema pode ser generalizado a derivadas de ordem superior à primeira. Mais precisamente, e utilizando o método de indução finita, demonstra-se o seguinte teorema:

Teorema A.3.

Sejam Ω um domínio simplesmente conexo, f uma função holomorfa em Ω e γ uma curva de Jordan contida em Ω. Então, para todo o ponto z_0 interior a γ, tem-se, par qualquer $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,,$$ **(fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n).**

Observação:

A fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n é ainda verdadeira quando γ é um bordo orientado (ver definição B.1. do Capítulo 3) e f é uma função holomorfa sobre γ e no domínio multiplamente conexo por ele limitado.

A fórmula integral de Cauchy para as derivadas permite concluir que se uma função é holomorfa num domínio Ω ela é indefinidamente diferenciável nesse domínio, sendo todas as suas derivadas também funções holomorfas em Ω.

Exemplo A.2.

Calcule-se $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4}\,dz$.

A função f definida em $\mathbb{C}$ por $f(z)=e^z$ é inteira e $f^{(n)}(z)=e^z$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

O ponto $z_0=1$ é interior à curva em questão (circunferência de centro na origem e raio 2 que se supõe descrita no sentido directo). Por aplicação da fórmula integral de Cauchy para as derivadas,

$$e^1 = \frac{3!}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^4}\,dz\,, \text{ e assim: } \int_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^4}\,dz = \frac{\pi e}{3}i\ .$$

Observação:

1. Os teoremas A.2 e A.3 são frequentemente enunciados no caso em que f é holomorfa sobre e no interior de uma curva de Jordan.

2. A fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n é ainda verdadeira quando γ é um bordo orientado (ver definição B.1. do Capítulo 3) e f é uma função holomorfa sobre γ no domínio multiplamente conexo por ele limitado.

3. Demonstram-se extensões dos teoremas A.1, A.2 e A.3 no caso de curvas fechadas não simples. As respectivas demonstrações baseiam-se no teorema de Cauchy (ver teorema B.3. do Capítulo 3).

Mais precisamente demonstra-se que:

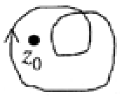
Se f é holomorfa num domínio simplesmente conexo Ω, z_0 é um ponto de Ω e γ é qualquer curva fechada, seccionalmente regular, contida em Ω e que não passa pelo ponto z_0, então

$$\mathrm{I}(\gamma, z_0) f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

em que $\mathrm{I}(\gamma, z_0)$ representa o «número de voltas» que a curva γ dá em torno de z_0, afectado de sinal + ou − consoante a curva é descrita no sentido positivo ou no sentido negativo.
Por exemplo:

– no caso 

tem-se $\mathrm{I}(\gamma, z_0) = 2$;

– no caso 

tem-se $\mathrm{I}(\gamma, z_0) = -1$;

– no caso 

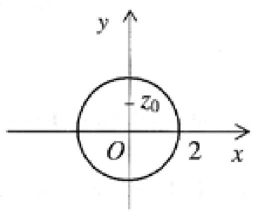
tem-se $\mathrm{I}(\gamma, z_0) = 0$;

O número $\mathrm{I}(\gamma, z_0)$ é designado por **índice** da curva γ relativamente ao ponto z_0 e prova-se que $\mathrm{I}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$.

Exemplo A.3.

Calcule-se $\int_\gamma \frac{z^2}{(z-i)^3} dz$ em que a curva γ está definida parametricamente por $\gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0, 4\pi]$.

O índice da curva γ relativamente ao ponto $z_0 = i$ é igual a 2.



Então, considerando a função inteira $f(z) = z^2$, tem-se $\mathrm{I}(\gamma, i) f''(i) = \frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-i)^3} dz$, e assim: $4 = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{z^2}{(z-i)^3} dz$.

Conclui-se então que $\int_\gamma \frac{z^2}{(z-i)^3} dz = 4\pi i$.

B. Teoremas fundamentais

Estudam-se em seguida as principais consequências das fórmulas integrais de Cauchy.

Teorema B.1. (Teorema de Morera)

Seja f uma função contínua num domínio Ω de $\mathbb{C}$ e tal que $\int_\gamma f(z)dz = 0$, para qualquer curva γ fechada, seccionalmente regular, contida em Ω. Então f é holomorfa em Ω.

Demonstração:

Se $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para qualquer curva fechada γ contida em Ω, o integral é independente da curva unindo quaisquer dois pontos de Ω. Tome-se $z_0 \in \Omega$ e seja $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$. Então $F'(z) = f(z)$, $z \in \Omega$, e F é holomorfa em Ω. A fórmula integral de Cauchy para as derivadas garante então que F tem derivadas de todas as ordens em Ω. Em particular $F'' = f'$ existe em Ω, pelo que f é holomorfa em Ω.

Observação:

1. Se Ω é um domínio simplesmente conexo o teorema de Morera é, para o conjunto das funções contínuas, recíproco do teorema de Cauchy.
2. No enunciado do teorema de Morera apresentado, exige-se que γ seja qualquer curva fechada seccionalmente regular contida em Ω, de forma a apresentar-se uma demonstração simples, com base na independência do integral ao longo das curvas unindo pontos de Ω. Contudo, o teorema é válido se se considerarem apenas as curvas simples fechadas e seccionalmente regulares contidas em Ω, conforme se referiu ao enunciar uma versão mais geral do teorema de Cauchy (teorema B.3.). Para um estudo mais aprofundado desta questão, recomenda-se a consulta de Marsden, J. E., *Basic Complex Analysis*.

Teorema B.2. (Desigualdades de Cauchy)

Seja f uma função holomorfa no disco $\overline{D}(z_0, r)$, $r > 0$, e seja $M > 0$ tal que $|f(z)| \le M$ para $|z - z_0| = r$. Então

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le M\frac{n!}{r^n}, \, n \in \mathbb{N}$$

Demonstração:

São verificadas as hipóteses da fórmula integral de Cauchy para as derivadas, pelo que, para a circunferência C de centro z_0 e raio r ($|z - z_0| = r$), se tem

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \ .$$

Então,

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\,|dz| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\int_C |dz| = \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\,2\pi r = \frac{n!M}{r^n} \ .$$

O teorema seguinte é uma consequência imediata das desigualdades de Cauchy.

Teorema B.3. (Teorema de Liouville)

Toda a função inteira e limitada em $\mathbb{C}$ é constante em $\mathbb{C}$.

Demonstração:

Como f é limitada em $\mathbb{C}$, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \le M$ em $\mathbb{C}$. Aplicando o teorema B.2. para $n = 1$, obtém-se $|f'(z_0)| \le \frac{M}{r}$ para qualquer z_0 em $\mathbb{C}$ e para qualquer $r > 0$.

Como esta desigualdade é verdadeira para valores de r arbitrariamente grandes (porque f é uma função inteira), tem-se $f'(z_0) = 0$ para qualquer z_0 em $\mathbb{C}$, logo f é constante em $\mathbb{C}$.

Exemplo B.1.

Contrariamente ao que se passa em $\mathbb{R}$, a função f definida em $\mathbb{C}$ por $f(z) = \operatorname{sen} z$ não é limitada. Com efeito, f é inteira, pelo que, se fosse limitada em $\mathbb{C}$, o teorema de Liouville garantiria que seria constante, o que é falso.

Teorema B.4. (Teorema fundamental da Álgebra)

Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ um polinómio em $\mathbb{C}$ de grau n ($n \in \mathbb{N}$) com $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Então $P(z)$ tem pelo menos uma raíz em $\mathbb{C}$, isto é, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Demonstração:

Por redução ao absurdo, suponha-se que $P(z)$ não tem raízes em $\mathbb{C}$; a função $f(z) = \frac{1}{P(z)}$

é então uma função inteira e

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{z^n}}{\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{z}+a_n}=0\text{, pois } a_n\neq 0.$$

Como $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$, existe $L>0$, tal que $|f(z)|<L$, sempre que $|z|>1$, isto é, $f(z)$ é uma função limitada no exterior do disco $D(0,1)$.

Como $f(z)$ é uma função inteira, ela é contínua no conjunto compacto $\overline{D(0,L)}$; o teorema de Weierstrass garante que $f(z)$ também é limitada em $\overline{D(0,L)}$ e, portanto, $f(z)$ é limitada em $\mathbb{C}$.

O Teorema de Liouville permite concluir que $f(z)$ é constante em $\mathbb{C}$, e assim $P(z)$ teria de ser também constante em $\mathbb{C}$, o que é absurdo, pois $a_n\neq 0$; $P(z)$ tem então pelo menos um zero em $\mathbb{C}$.

Do teorema anterior resulta que:

Corolário:

Todo o polinómio em $\mathbb{C}$, de grau n, se decompõe no produto de n polinómios de primeiro grau não necessariamente distintos.

Teorema B.5. (Teorema do valor médio)

Seja f uma função holomorfa em $\overline{D(z_0,r)}$, $z_0\in\mathbb{C}$ e $r\in\mathbb{R}^+$. Então

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)dt.$$

Demonstração:

Por aplicação da fórmula integral de Cauchy à função f em $\overline{D(z_0,r)}$, tem-se $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$.

Seja $z=\gamma(t)=z_0+r\,e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ uma parametrização da circunferência $|z-z_0|=r$; então,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+re^{it}\right)}{re^{it}}i\,re^{it}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)i\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{it}\right)dt.$$

Exercícios resolvidos

Nos exercícios seguintes, as curvas consideradas, salvo indicação em contrário, são descritas no sentido directo.

1. Calcule $\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}dz$ onde

a) γ é a circunferência de centro na origem e raio 1.

b) γ é a circunferência de centro na origem e raio 3.

Resolução:

a) A função $f(z) = \frac{e^z + z}{z-2}$ é holomorfa para $z \neq 2$, logo é holomorfa no interior de γ e sobre γ. Pelo teorema de Cauchy, tem-se então $\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}dz = 0$.

b) A função $f(z) = e^z + z$ é inteira. Pela fórmula integral de Cauchy, tem-se então $f(2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-2}dz$, e assim

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z + z}{z-2}dz = 2\pi i\left(e^2 + 2\right).$$

2. Usando a fórmula integral de Cauchy, calcule $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 2z - 3}dz$.

Resolução:

Tem-se $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 2z - 3}dz = \frac{1}{4}\int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}\right)dz = \frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}dz - \frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{1}{z+3}$.

Pelo teorema de Cauchy, $\int_{|z|=2} \frac{1}{z+3}dz = 0$ e, pela fórmula integral de Cauchy, $\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}dz = 2\pi i$.

Então $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 2z - 3}dz = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi}{2}i$.

3. Calcule $\int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz$ e $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}dz$ em que γ é uma curva de Jordan regular contendo $z = 0$ no seu interior.

Resolução:

A função $f(z)=\cos z$ é inteira. Aplicando a fórmula integral de Cauchy, obtém-se

$$1=f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz,$$

e assim:

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz=2\pi i.$$

A função $f(z)=\operatorname{sen} z$, é também inteira. Aplicando a fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada, obtém-se

$$f'(0)=\frac{1!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^2}dz.$$

Sendo $f'(z)=\cos z$ e $f'(0)=1$ resulta que $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}dz=2\pi i$.

4. Calcule

a) $\int_{|z|=1}\frac{\operatorname{sen} z}{z^4}dz$ **b)** $\int_{|z|=5}\frac{\operatorname{sen}(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}dz$

Resolução:

a) Seja $f(z)$ = sen z. Atendendo a que $f^{(3)}(z)=-\cos z$, vem $\frac{3!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}dz=-\cos 0=-1$, logo

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}dz=-\frac{2\pi i}{6}=-\frac{\pi i}{3}.$$

b) Pela fórmula integral de Cauchy: $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=5}\frac{\operatorname{sen} 3z}{z+\frac{\pi}{2}}dz=\operatorname{sen}\left[3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=1$.

Então $\int_{|z|=5}\frac{\operatorname{sen}(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}dz=2\pi i$.

5. Seja $f(x+iy)=\left(y^3-x^3+3xy^2-3x^2y\right)+i\left(x^3+y^3-3x^2y-3xy^2\right)$. Calcule $\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}dz$, onde γ é a circunferência $|z|=1$.

Resolução:

A função f é inteira, uma vez que $u(x,y) = y^3 - x^3 + 3xy^2 - 3x^2y$ e $v(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ que verificam as condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2 - 6xy = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + 6xy - 3x^2 = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

É então possível aplicar a fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada.

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}dz = 2\pi i f'(0) = 0, \quad \text{pois } f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0.$$

6. Seja γ a circunferência de centro na origem e raio 2. Calcule

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(z+3)}{z\left(z^2+9\right)}dz$. **b)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-2iz+3}dz$. **c)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4}dz.$

Resolução:

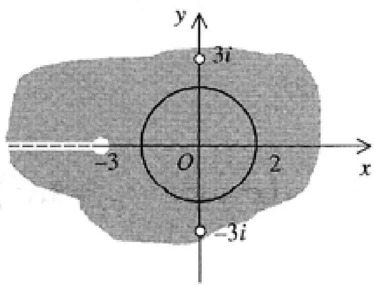
a) Considere-se o ramo principal da função logaritmo, que é holomorfo em

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy: \ \mathrm{Im}(z+3) = y = 0 \ \wedge \ \mathrm{Re}(z+3) = x+3 \le 0\} = \mathbb{C} \setminus \{z = x+iy: \ y = 0 \ \wedge \ x \le -3\}$$

A função $\dfrac{\log(z+3)}{\left(z^2+9\right)}$ é por isso holomorfa em

$$\mathbb{C} \setminus \left(\{z = x+iy: \ y=0 \ \wedge \ x \le -3\} \cup \{-3i, \ 3i\}\right),$$

e este conjunto contém a curva γ.



A fórmula integral de Cauchy é, portanto, aplicável ao cálculo deste integral, tendo-se

$$\int_\gamma \frac{\log(z+3)}{z\left(z^2+9\right)}dz = \int_\gamma \frac{\dfrac{\log(z+3)}{\left(z^2+9\right)}}{z}dz = 2\pi i\left[\frac{\log(z+3)}{\left(z^2+9\right)}\right]_{z=0} = 2\pi i\frac{\log 3}{9}.$$

b) A fórmula integral de Cauchy é aplicável, uma vez que $f(z)=\dfrac{e^z}{z-3i}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{3i\}$, e γ está contida neste domínio:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-2iz+3}dz = \int_\gamma \frac{e^z}{(z-3i)(z+i)}dz = \int_\gamma \frac{\dfrac{e^z}{(z-3i)}}{(z+i)}dz = 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-3i)}\right]_{z=-i} = 2\pi i\frac{e^{-i}}{-4i} = -\frac{\pi}{2}e^{-i}.$$

c) A função $f(z)=\cosh z$ é inteira, pelo que, por aplicação da fórmula integral de Cauchy para a terceira derivada,

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[(\cosh z)^{(3)}\right]_{z=0} = \frac{\pi i}{3}\operatorname{senh} 0 = 0.$$

7. Calcule

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=1}\frac{e^z}{(z-1)^2}dz.$

b) Atendendo ao resultado obtido na alínea anterior, prove que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta-\operatorname{sen}\theta)d\theta = 2\pi \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\operatorname{sen}(\theta-\operatorname{sen}\theta)d\theta = 0.$$

Resolução:

a) A função $f(z)=e^z$ é holomorfa em $\{z:|z-1|\le 1\}$. Por aplicação da fórmula integral de Cauchy, tem-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=1}\frac{e^z}{(z-1)^2}dz = f'(1) = e \quad \text{logo} \quad \int_{|z-1|=1}\frac{e^z}{(z-1)^2}dz = 2\pi i e.$$

b) Parametrizando a circunferência $|z-1|=1$ por $\gamma(\theta)=1+e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$, vem

$$\int_{|z-1|=1}\frac{e^z}{(z-1)^2}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{1+e^{i\theta}}}{e^{2i\theta}}\,i\,e^{i\theta}d\theta=i\,e\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}d\theta\ =\int_0^{2\pi}i\,e\,e^{(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\theta)}(\cos\theta-i\ \mathrm{sen}\theta)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}iee^{\cos\theta}\cos\theta\, e^{i\mathrm{sen}\theta}\,d\theta+\int_0^{2\pi}ee^{\cos\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta e^{i\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta=$$

$$=i\,e\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos\theta\left(\cos\left(\mathrm{sen}\theta\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{sen}\theta\right)\right)+e\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\mathrm{sen}\theta\left(\cos\left(\mathrm{sen}\theta\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{sen}\theta\right)\right)=$$

$$=ie\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\left(\cos\theta\cos\left(\mathrm{sen}\theta\right)+\mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}(\mathrm{sen}\theta)\right)d\theta\ +$$

$$+\,e\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\ \cos\left(\mathrm{sen}\theta\right)-\cos\theta\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{sen}\theta\right)\right)d\theta$$

Como, por a), $\int_{|z-1|=1}\frac{e^z}{(z-1)^2}dz=2\pi i e$, então,

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\left(\cos\theta\cos\left(\mathrm{sen}\theta\right)+\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{sen}\theta\right)\right)d\theta=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos\left(\theta-\mathrm{sen}\theta\right)d\theta=2\pi$$

e

$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\cos\left(\mathrm{sen}\theta\right)-\cos\theta\,\mathrm{sen}\left(\mathrm{sen}\theta\right)\right)d\theta=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\mathrm{sen}(\theta-\mathrm{sen}\theta)d\theta=0$$

8. Mostre que $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2+1}dz=\mathrm{sen}\,t\,,\quad t\in\mathbb{R}$

Resolução:

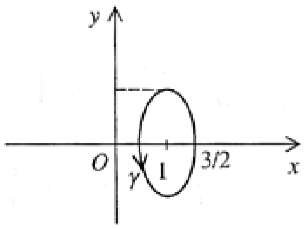
Sendo $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2+1}dz=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{2i}\left(\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z-i}dz-\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z+i}dz\right)$ e $f(z)=e^{zt}$ uma função inteira, pela fórmula integral de Cauchy tem-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z^2+1}=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{2i}\left(\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z-i}dz-\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}}{z+i}dz\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)=\mathrm{sen}\,t\,.$$

9. Calcule $\int_\gamma\frac{e^z}{(z-1)^2\cos z}dz$ onde γ é a curva definida por $\gamma(t)=\frac{1}{2}\cos t+1+i\,\mathrm{sen}\,t,\ t\in[0,2\pi]$.

Resolução:

A curva em questão é a elipse de centro 1 com semieixo horizontal igual a 1/2 e semieixo vertical igual a 1.



Como $\cos z$ não se anula no interior de γ, pela fórmula integral da Cauchy para a primeira derivada tem-se

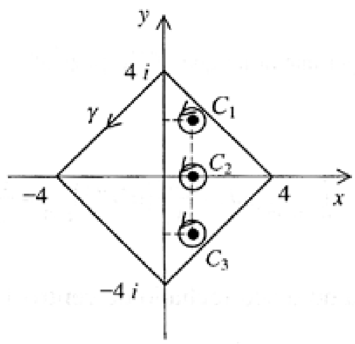
$$\int_\gamma \frac{\frac{e^z}{\cos z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{e^z}{\cos z}\right)'_{z=1} = 2\pi i\left(\frac{e^z\cos z + e^z \operatorname{sen} z}{\cos^2 z}\right)_{z=1} = 2\pi i\frac{e\cos 1 + e\operatorname{sen} 1}{\cos^2 1}.$$

10. Calcule $\int_\gamma \frac{1}{(z^2-2z+5)(z-1)}dz$, em que γ é o quadrado de vértices $-4i$, 4, $4i$, -4, usando:

a) O teorema de Cauchy. **b)** A fórmula integral de Cauchy.

Resolução

Sejam C_1, C_2 e C_3 três circunferências com centros em $z_1=1+2i$, $z_2=1$ e $z_3=1-2i$, descritas no sentido directo, com raio r escolhido de forma a elas serem interiores a γ.



Pelo teorema de Cauchy, para domínios multiplamente conexos,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2-2z+5)(z-1)} = \int_{C_1} \frac{dz}{(z^2-2z+5)(z-1)} + \int_{C_2} \frac{dz}{(z^2-2z+5)(z-1)} + \int_{C_3} \frac{dz}{(z^2-2z+5)(z-1)}.$$

a) Atendendo a que $\dfrac{1}{(z^2-2z+5)(z-1)}=\dfrac{-1/8}{z-(1+2i)}+\dfrac{-1/8}{z-(1-2i)}+\dfrac{1/4}{z-1}$ e ao teorema de Cauchy, o integral reduz-se a

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2-2z+5)(z-1)}dz=\int_{C_1}\frac{-1/8}{z-(1+2i)}dz+\int_{C_3}\frac{-1/8}{z-(1-2i)}dz+\int_{C_2}\frac{1/4}{z-1}dz=$$

$$=-\frac{1}{8}(2\pi i)-\frac{1}{8}(2\pi i)+\frac{1}{4}2\pi i=0\,.$$

b) Usando a fórmula integral de Cauchy:

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2-2z+5)(z-1)}dz=$$

$$=\int_{C_1}\frac{\left[(z-(1-2i))(z-1)\right]^{-1}}{z-(1+2i)}dz+\int_{C_2}\frac{\left(z^2-2z+5\right)^{-1}}{z-1}dz+\int_{C_3}\frac{\left[(z-(1+2i))(z-1)\right]^{-1}}{z-(1-2i)}dz=$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{(z-(1-2i))(z-1)}\right)_{z=1+2i}+2\pi i\left(\frac{1}{z^2-2z+5}\right)_{z=1}+2\pi i\left(\frac{1}{(z-(1+2i))(z-1)}\right)_{z=1-2i}=$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{-8}\right)+2\pi i\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi i\left(\frac{1}{-8}\right)=0$$

11. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^{\alpha z}}{z^{k+1}}dz$, onde $\alpha\in\mathbb{C}$ e $k\in\mathbb{N}$.

Resolução:

A função $f(z)=e^{\alpha z}$ é uma função inteira tal que $f^{(k)}(z)=\alpha^k e^{\alpha z}$. Pela fórmula integral de Cauchy para as derivadas tem-se que

$$\int_{|z|=1}\frac{e^{\alpha z}}{z^{k+1}}dz=\frac{2\pi i}{k!}\left(\alpha^k e^{\alpha z}\right)_{z=0}=\frac{2\pi i}{k!}\alpha^k$$

12. Seja f uma função holomorfa no disco fechado de centro $1+i$ e raio 1 de fronteira γ e tal que $\displaystyle\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-1-i)^n}dz=(n-1)!$. Calcule $f^{(n-1)}(1+i)$.

Resolução:

Tendo em conta a hipótese e a fórmula integral de Cauchy para as derivadas, obtém-se

$$f^{(n-1)}(1+i)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-1-i)^n}dz=\frac{(n-1)!}{2\pi i}(n-1)!=\frac{((n-1)!)^2}{2\pi i}.$$

13. Prove que, se f é uma função holomorfa em $\overline{D(0,1)}$, então $f\left(re^{i\varphi}\right)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}d\theta$.

Resolução:

Pela fórmula integral de Cauchy e para $|z|<1$, tem-se

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{1-\frac{z}{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Pondo $z=re^{i\varphi}$ e $\zeta=e^{i\theta}$ com $\theta\in[0,2\pi]$ e $r<1$, vem $d\zeta=ie^{i\theta}\,d\theta$, logo

$$f\left(re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{1-\frac{re^{i\varphi}}{e^{i\theta}}}\frac{i\,e^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(e^{i\theta}\right)}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}d\theta.$$

14. Sejam f uma função holomorfa em $D(0,r)$ com $r>1$, γ a circunferência de centro na origem e raio igual a 1, e z_0 um ponto tal que $|z_0|<1$.

a) Mostre que $\left(1-|z_0|^2\right)f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)\frac{1-z\bar{z}_0}{z-z_0}dz$.

b) Deduza alínea a) que se tem $\left(1-|z_0|^2\right)\left|f(z_0)\right|\le\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta.$

Resolução:

a) Pela fórmula integral de Cauchy, tem-se $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz$. Como $|z_0|^2=z_0\bar{z}_0$, resulta que

$$\left(1-|z_0|^2\right)f(z_0)=(1-z_0\bar{z}_0)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{1-z_0\bar{z}_0}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{1-z_0\bar{z}_0+z\bar{z}_0-z\bar{z}_0}{z-z_0}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\left(\frac{1-z\bar{z}_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}_0(z-z_0)}{z-z_0}\right)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{1-z\bar{z}_0}{z-z_0}dz+\bar{z}_0\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$$

Como, pelo teorema de Cauchy, $\int_\gamma f(z)dz = 0$, vem $\left(1-|z_0|^2\right)f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)\dfrac{1-z\bar{z}_0}{z-z_0}dz$.

b) Como $|z|=1$, tem-se $z\bar{z}=1$, logo $z=\dfrac{1}{\bar{z}}$. Então $\dfrac{1-z\bar{z}_0}{z-z_0} = \dfrac{1-\bar{z}_0/\bar{z}}{z-z_0} = \dfrac{\bar{z}-\bar{z}_0}{\bar{z}(z-z_0)} = \dfrac{\overline{(z-z_0)}}{\bar{z}(z-z_0)}$.

Atendendo à alínea anterior, parametrizando a circunferência $|z|=1$ por $\gamma(\theta)=e^{i\theta}, \theta\in[0,2\pi]$ e pondo $z_0=\rho e^{i\varphi}$ com $\rho<1$, tem-se

$$\left|\left(1-|z_0|^2\right)f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{\overline{z-z_0}}{\bar{z}(z-z_0)}dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(z)\frac{\overline{z-z_0}}{\bar{z}(z-z_0)}dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\frac{\overline{\left(e^{i\theta}-\rho e^{i\varphi}\right)}}{\left(e^{-i\theta}\right)\left(e^{i\theta}-\rho e^{i\varphi}\right)}\, ie^{i\theta}d\theta\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\left|\frac{1}{e^{-i\theta}}\right|\left|\frac{\overline{\left(e^{i\theta}-\rho e^{i\varphi}\right)}}{\left(e^{i\theta}-\rho e^{i\varphi}\right)}\right|\left|e^{i\theta}\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta.$$

15. Sejam f uma função holomorfa num disco aberto D, z_0 um ponto de D e γ uma curva de Jordan contida em D que não passa pelo ponto z_0.

Mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{(z-z_0)f'(z)-f(z)}{(z-z_0)^2}dz = 0.$

Resolução:

$$\int_\gamma \frac{(z-z_0)f'(z)-f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \int_\gamma \frac{(z-z_0)f'(z)}{(z-z_0)^2}dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

Se $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$, pela fórmula integral de Cauchy para a função f' (que é holomorfa em $\gamma\cup\operatorname{int}\gamma$), tem-se $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f'(z_0)$ e, pela fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada, $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = 2\pi i f'(z_0)$.

Então $\displaystyle\int_\gamma \frac{(z-z_0)f'(z)-f(z)}{(z-z_0)^2}dz = 0$.

Se $z_0 \in \operatorname{ext}\gamma$, o teorema de Cauchy garante que $\displaystyle\int_\gamma \frac{(z-z_0)f'(z)-f(z)}{(z-z_0)^2}dz = 0$.

16. Seja f uma função inteira, tal que, para todo o z em $\mathbb{C}$, $|f(z)| < 1 + |z|^{1/2}$. Prove que f é constante em $\mathbb{C}$.

Resolução:

Seja z_0 qualquer ponto em $\mathbb{C}$. Pela fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada, tem-se $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$ com $r > 0$ tal que $|z_0| < r$.

Então

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2}|dz| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \frac{1+|z|^{1/2}}{\big||z|-|z_0|\big|^2}|dz| \qquad (|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|)$$

$$= \frac{1+r^{1/2}}{2\pi\big|r-|z_0|\big|^2}\int_{|z|=r}|dz| = \frac{1+r^{1/2}}{2\pi\big|r-|z_0|\big|^2}2\pi r = \frac{r+r^{3/2}}{(r-|z_0|)^2}.$$

Como f é inteira, r pode ser qualquer número real positivo, e assim: $|f'(z_0)| \leq \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{r+r^{3/2}}{(r-|z_0|)^2} = 0$. Então $f'(z_0) = 0$ para todo o ponto z_0 em $\mathbb{C}$, pelo que f é constante em $\mathbb{C}$ (ver teorema C.3., Capítulo 2).

17. Sejam γ uma curva de Jordan e $P(z)$ um polinómio de grau n cujas raízes são interiores a γ. Mostre que $\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz = n\,2\pi i$.

Resolução:

Sejam $z_1, ..., z_n$ as n raízes do polinómio $P(z)$, não necessariamente distintas. O polinómio admite a decomposição $P(z) = a_0(z-z_1)...(z-z_n)$, com $a_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Como $\log P(z) = \log a_0 + \log(z-z_1) + ... + \log(z-z_n)$), tem-se, por derivação, que $\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-z_1} + ... + \frac{1}{z-z_n}$.

Então, aplicando a fórmula integral de Cauchy à função constante igual a 1, obtém-se

$$\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz = \int_\gamma \frac{1}{z-z_1}dz + ... + \int_\gamma \frac{1}{z-z_n}dz = 2\pi i + ... + 2\pi i = n\,2\pi i.$$

18. Seja f uma função holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$, cuja fronteira é uma curva simples fechada regular C. Seja P um polinómio de grau n com raízes distintas $z_1,\ z_2,\ ...,\ z_n$ interiores a C.

Ponha-se $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(w)}{P(w)}\frac{P(w)-P(z)}{w-z}\,dw$

a) Prove que $F(z_k)=f(z_k),\ \ k=1, 2, ..., n.$
b) Prove que $F(z)$ é um polinómio de grau não superior a n–1.

Resolução:

a) Como $F(z_k)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(w)}{P(w)}\frac{P(w)-P(z_k)}{w-z_k}dw$ e $P(z_k)=0$, resulta pela fórmula integral de Cauchy, que

$$F(z_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z_k}dw=f(z_k)\,.$$

b) Para cada $w\in\mathbb{C}$, seja $G(z)=\dfrac{P(w)-P(z)}{w-z}$, em que $P(z)=a_0+a_1z+...+a_nz^n$, com $a_n\neq 0$.

Então

$$G(z)=a_1+a_2(w+z)+...+a_n\left(w^{n-1}+w^{n-2}z+...+wz^{n-2}+z^{n-1}\right),$$

e, assim, $G^{(k)}(z)=0$ para $k\geq n$. Consequentemente, $F^{(k)}(z)=0$, para $k\geq n$, sendo então F um polinómio de grau não superior a n–1.

(Observe-se que para calcular $F^{(k)}(z)$ se está a aplicar uma forma do teorema de derivação de integrais paramétricos:

Seja $\varphi\,(z,w)$ uma função contínua para z num domínio Ω e w um ponto sobre uma curva C. Para cada $w\in C$, suponha-se que φ é holomorfa como função de z. Então, a função ϕ definida pelo integral paramétrico, $\phi(z)=\int_C\varphi\,(z,w)dw$, é holomorfa em Ω, tendo-se $\phi'(z)=\int_C\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w)dw$)

19. Sejam $M>0$, $k\in\mathbb{N}_0$ e f uma função inteira tal que $|f(z)|\leq M|z|^k$ para $|z|$ suficientemente grande. Mostre que f é um polinómio de grau não superior a k.

Resolução:

Demonstre-se que $f^{(k+1)}(z_0)=0,\quad\forall z_0\in\mathbb{C}$.

Dado $z_0\in\mathbb{C}$ seja C a circunferência de centro zero e raio $r>0$ tal que $|z_0|<r$. Pela fórmula integral de Cauchy para as derivadas, tem-se $f^{(k+1)}(z_0)=\dfrac{(k+1)!}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+2}}dz$.

Então,

$$\left|f^{(k+1)}(z_0)\right| \le \frac{(k+1)!}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{k+2}}|dz| \;\le \frac{(k+1)!}{2\pi}\int_C \frac{M|z|^k}{|z-z_o|^{k+1}}|dz| \le \frac{(k+1)!M\,r^k}{2\pi}\int_C \frac{|dz|}{\left||z|-|z_o|\right|^{k+2}} =$$

$$= \frac{(k+1)!M\,r^k}{2\pi\left|r-|z_o|\right|^{k+2}}2\pi r = \frac{(k+1)!M\,r^{k+1}}{\left|r-|z_0|\right|^{k+2}}$$

Mas, por hipótese, $|z|$ é suficientemente grande, tendo, portanto, sentido considerar o limite quando r tende para $+\infty$.

Como $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{(k+1)!M\,r^{k+1}}{\left|r-|z_0|\right|^{k+2}} = 0$, tem-se $f^{(k+1)}(z_0) = 0$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

20. Sejam $M > 0$ e f uma função inteira, tal que $\operatorname{Re} f(z) \le M$, $z \in \mathbb{C}$. Prove que f é constante.

Resolução:

A função $g(z) = e^{f(z)}$ é inteira e limitada em $\mathbb{C}$ pois $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \le e^M$. Pelo teorema de Liouville, a função g é constante em $\mathbb{C}$ e, consequentemente, a função f é também constante em $\mathbb{C}$.

21. Seja f uma função inteira, tal que $\operatorname{Re} f$ é uma função não positiva.

a) Prove que f é constante em $\mathbb{C}$.

b) Seja $a \in \mathbb{C}$ e γ uma curva de Jordan que não passe pelo ponto a. Mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = 0$.

Resolução:

a) Considere-se a função inteira $g(z) = e^{f(z)}$; tem-se $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$. Como $\operatorname{Re} f(z) \le 0$, $z \in \mathbb{C}$, resulta que $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \le 1$, $z \in \mathbb{C}$. Então, a função g é limitada em $\mathbb{C}$ e, pelo teorema de Liouville, ela é constante em $\mathbb{C}$. Consequentemente, f é constante em $\mathbb{C}$.

b) Se $a \in \operatorname{ext} \gamma$, o teorema de Cauchy garante o resultado.

Se $a \in \operatorname{int} \gamma$, pela fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada, tem-se $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = 2\pi i f'(a)$. Pela alínea anterior, f é constante em $\mathbb{C}$, logo $f'(a) = 0$ e, portanto, $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = 0$.

22. Seja f uma função inteira, tal que $f(0) \neq 0$ e $|f(z)| \geq e^{|z|}$, para $|z| > r > 0$. Mostre que f é constante em $\mathbb{C}$.

Resolução:

Verifique-se que a função inteira $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ é limitada em $\mathbb{C}$.

– Se $|z| > r$, tem-se $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z)|} \leq \dfrac{1}{e^{|z|}} \leq \dfrac{1}{r}$ e g é limitada.

– Se $|z| \leq r$, como g é contínua neste domínio, tem-se que g é limitada (pelo teorema de Weierstrass).

Então g é limitada para $|z| \leq r$ e $|z| > r$, logo g é limitada em $\mathbb{C}$. Pelo teorema de Liouville, g é constante em $\mathbb{C}$ e, consequentemente, f é constante em $\mathbb{C}$.

23. Prove que, se f é uma função inteira e $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$, então f é constante.

Resolução:

Seja g definida em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ por $g(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$; g é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$e é prolongável por continuidade a $\mathbb{C}$, pondo-se $g(0) = f'(0)$. Então a função $\tilde{g}$ definida em $\mathbb{C}$ por

$$\tilde{g}(z) = \begin{cases} g(z) & \text{se } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{C}$ e holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. A função $\tilde{g}$ está, então, nas condições do exercício 25 do Capítulo 3 (é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ e, sendo contínua em $z = 0$, é limitada numa vizinhança desse ponto), donde $\int_\gamma \tilde{g}(z)dz = 0$, para qualquer curva simples fechada γ, seccionalmente regular.

Atendendo ao teorema de Morera (ver observação 2, pág. 153) a função $\tilde{g}$ é inteira.

Como, por hipótese, $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$, tem-se também $\lim\limits_{z\to\infty} \tilde{g}(z) = \lim\limits_{z\to\infty}\left(\dfrac{f(z)}{z} - \dfrac{f(0)}{z}\right) = 0$. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{g}$ é limitada para $|z| > \varepsilon$; Como, pelo teorema de Weierstrass, $\tilde{g}$ é limitada para $|z| \leq \varepsilon$, $\tilde{g}$ é limitada em $\mathbb{C}$. Então, pelo teorema de Liouville, $\tilde{g}$ é constante e, assim, $\dfrac{f(z) - f(0)}{z} = k$, para todo o z em $\mathbb{C}$. Como $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z) - f(0)}{z} = 0 = k$, tem-se $k = 0$. Assim, $f(z) = f(0)$, para todo o z em $\mathbb{C}$, isto é, f é constante em $\mathbb{C}$.

24. Seja f uma função holomorfa e limitada em todo o plano complexo.

a) Prove que $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz=0$, para quaisquer números complexos a e b.

b) Utilize o resultado anterior para provar o teorema de Liouville.

Resolução:

a) Sendo M um majorante de $|f|$ em $\mathbb{C}$, para $|z|=r$, $\left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right|=\frac{|f(z)|}{|z-a||z-b|}\leq\frac{M}{||z|-|a|||z|-|b||}=\frac{M}{|r-a||r-b|}$,

logo

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right|\leq\frac{M}{|r-a||r-b|}2\pi r\ .$$

Como $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{M}{|r-a||r-b|}2\pi r=0$, conclui-se que $\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz=0$.

b) Como para quaisquer a e b em $\mathbb{C}$ existe $r>0$ tal que $|a|<r$ e $|b|<r$, tem-se, por aplicação da fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz=\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz=\frac{1}{a-b}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz-\frac{1}{a-b}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-b}dz=$$

$$=\frac{1}{a-b}f(a)-\frac{1}{a-b}f(b)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\ .$$

Pela alínea anterior, $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=0$. Então, para quaisquer a e b em $\mathbb{C}$, tem-se $f(b)=f(a)$, o que significa que f é constante em $\mathbb{C}$.

Capítulo
5

Representação em Série das Funções Holomorfas

A. Sucessões e séries de funções. Série de potências

Definição A.1.

Sejam Ω um domínio contido em $\mathbb{C}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$.

(i) Diz-se que a sucessão de funções (f_n) converge em $z \in \Omega$, se a sucessão numérica $(f_n(z))$ é convergente.

(ii) Diz-se que a sucessão de funções (f_n) **converge pontualmente** em Ω, se a sucessão numérica $(f_n(z))$ é convergente para todo o ponto $z \in \Omega$, isto é,

$$\forall \delta > 0 \, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \delta .$$

(A ordem p depende de δ e do ponto z).
Neste caso, à função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \lim f_n(z)$ chama-se **função limite** e escreve-se $\lim f_n = f$.

(iii) Diz-se que a sucessão de funções (f_n) **converge uniformemente** para uma função f num conjunto K contido em Ω, se

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| < \delta .$$

(A ordem p depende de δ e é independente do ponto z).
De uma forma equivalente,

$$\lim \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = 0 .$$

■

Exemplo A.1.
A sucessão $f_n : D(0,1) \to \mathbb{C}$ com $f_n(z) = z^n$ converge uniformemente para a função nula em cada conjunto compacto K contido em $D(0,1)$. Com efeito, seja $0 < r < 1$ tal que $K \subseteq \overline{D(0,r)}$; tem-se

$$\lim \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = \lim \sup_{z \in K} |z^n| \leq \lim r^n = 0 .$$

Definição A.2.

Sejam Ω um domínio contido em $\mathbb{C}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$. Seja $f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ uma série de funções, e designe-se por (S_n) a sucessão das suas somas parciais ($S_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$):

(i) Diz-se que a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge pontualmente** em Ω, se a sucessão (S_n) for pontualmente convergente em Ω.

Neste caso, à função $S : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $S(z) = \lim S_n(z)$ chama-se **função soma da série** e escreve-se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = S$.

(ii) Diz-se que a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge uniformemente** num conjunto K contido em Ω, se a sucessão (S_n) for uniformemente convergente em K.

■

Exemplo A.2.
A série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ (série geométrica de razão z) é uniformemente convergente em qualquer conjunto compacto contido em $D(0,1)$.

Com efeito para a sucessão (S_n) das somas parciais tem-se $S_n(z)=1+z+z^2+\ldots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Como $|z|<1$, conclui-se que $\lim S_n(z)=\dfrac{1}{1-z}$ e para cada conjunto compacto K contido em $D(0,1)$ seja $0<r<1$ tal que $K\subseteq\overline{D(0,r)}$ tem-se

$$\lim\sup_{z\in K}\left|S_n(z)-S(z)\right|=\lim\sup_{z\in K}\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}-\frac{1}{1-z}\right|=\lim\sup_{z\in K}\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right|\leq\lim\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}\leq\lim\frac{r^{n+1}}{1-r}=0\,.$$

É possível estabelecer para as sucessões e séries complexas teoremas análogos aos correspondentes para sucessões e séries de funções reais de variável real. (No Apêndice 6 enumeram-se os principais resultados sobre sucessões e séries de funções definidas em $\mathbb{R}$. Recomenda-se a consulta de Figueira, Mário S.R., *Fundamentos de Análise Infinitesimal*.)

Apresentam-se em seguida alguns resultados relativos a sucessões e séries de funções definidas em $\mathbb{C}$ e que são directamente utilizados na sequência deste texto.

Teorema A.1. (Critério de Weierstrass para a convergência uniforme)

Sejam Ω um domínio contido em $\mathbb{C}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $f_n:\Omega\to\mathbb{C}$, uma série de funções; suponha-se que se tem a partir de uma certa ordem, $|f_n(z)|\leq u_n$ para qualquer $z\in\Omega$, onde $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ é uma série de termos positivos.

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ for convergente, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em Ω.

Demonstração:

A demonstração é análoga à do teorema correspondente para séries de funções reais.

Exemplo A.3.

Do critério de Weierstrass conclui-se imediatamente que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ é uniformemente convergente em qualquer conjunto compacto K contido em $D(0,1)$, como já foi verificado no exemplo A.2. Com efeito, tomando $0<r<1$ tal que $K\subseteq\overline{D(0,r)}$ tem-se que $|z^n|\leq r^n$ e a série de números reais $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ é convergente (pois é uma série geométrica de razão r, $0<r<1$).

Teorema A.2.

Sejam Ω um domínio contido em $\mathbb{C}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Se (f_n) **converge uniformemente** para uma função f num conjunto K contido em Ω, então f é contínua em K.

Demonstração:

A demonstração é análoga à do teorema correspondente para séries de funções reais.

Corolário:

Sejam Ω um domínio contido em $\mathbb{C}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, uma série de funções contínuas. Se a série converge uniformemente num conjunto K contido em Ω, a sua função soma é uma função contínua em K.

Teorema A.3.

Sejam Ω um domínio contido em $\mathbb{C}$, γ uma curva regular contida em Ω e, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ uma sucessão de funções contínuas sobre γ. Se a sucessão (f_n) converge uniformemente em Ω para uma função f, então f é integrável ao longo de γ e tem-se

$$\lim \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Demonstração:

Seja $\gamma : [a,b] \to K$ uma curva regular.

Observe-se que a sucessão de funções $F_n(t) = f_n(\gamma(t))\gamma'(t)$ converge uniformemente em $[a,b]$ para $F(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Então

$$\lim \int_\gamma f_n(z)dz = \lim \int_a^b f_n(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f(z)dz$$

e assim $\lim \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$.

Corolário:

Sejam Ω um domínio contido em $\mathbb{C}$, γ uma curva regular contida em Ω e $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ uma sucessão de funções contínuas sobre γ. Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em Ω, então a sua função soma é integrável ao longo de γ e tem-se

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\gamma f_n .$$

Definição A.3.

Seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Designa-se por **série de potências** de $(z - z_0)$ uma série da forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

onde z é uma variável complexa e a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ são constantes, denominadas coeficientes da série.

■

Exemplo A.4.

A série geométrica de razão z é um exemplo de uma série de potências:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

Neste caso, tem-se $z_0 = 0$ e $a_n = 1$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

As séries de potências constituem uma classe muito importante de séries de funções. Tendo em conta os conhecimentos sobre séries de números complexos e os teoremas A.1. e A.2., demonstra-se, de uma forma análoga à utilizada para séries de potências reais, que:

Teorema A.4.

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, existe r, $0 \le r \le +\infty$, dado por $r = \overline{\lim} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ (ou $r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, desde que este limite exista) tal que:

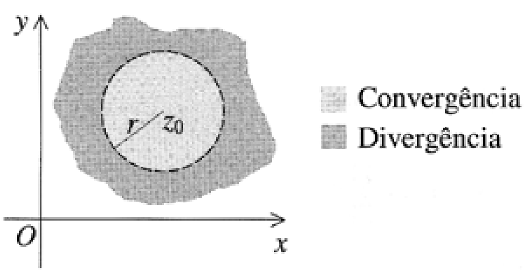
(i) a série de potências converge absolutamente no disco aberto

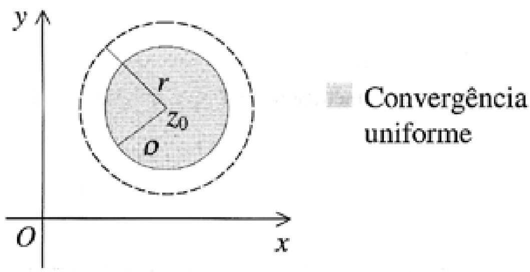
$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\};$$

(ii) a série de potências converge uniformemente em cada disco compacto centrado em z_0 contido em $D(z_0, r)$, isto é, em cada disco fechado

$$\overline{D(z_0, \rho)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le \rho < r\};$$

(iii) a série é divergente no exterior de $D(z_0, r)$, isto é, no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$;





(iv) se $r \neq 0$, para cada $z \in D(z_0, r)$ seja $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$: a função S é contínua em $D(z_0, r)$.

Observação:

1. O número r é designado por **raio de convergência** da série e o disco $D(z_0,r)$ por **disco de convergência absoluta** da série.
2. O teorema não estabelece a natureza da série na fronteira do disco de convergência absoluta, $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$. Para estes pontos é necessário realizar uma análise directa da série.
3. Se $r = 0$, a série de potências só converge para $z = z_0$, sendo a sua soma igual a a_0. Se $r = +\infty$, a série de potências converge absolutamente para qualquer valor de z, isto é, o seu disco de convergência absoluta é $\mathbb{C}$.

Definição A.4.

A função $S(z)$ diz-se **analítica** em z_0 se existe $r > 0$ tal que $S(z)$ é representada por uma série de potências, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, no disco $D(z_0,r)$, e diz-se **analítica num aberto Ω** se for analítica em z_0, $\forall z_0 \in \Omega$.

■

Exemplo A.5.

O raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ é igual a 1, pois atendendo a que $a_n = 1$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, tem-se $r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{1}{1} = 1$. Assim, a série é absolutamente convergente em $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Este resultado é confirmado pelas propriedades das séries geométricas (ver Apêndice 3): a série $\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n$ sendo uma série geométrica de razão $|z|$ só converge, quando $|z| < 1$ .Pelo exemplo A.2.,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad z \in D(0,1).$$

A função $\frac{1}{1-z}$ é, então, analítica em $D(0,1)$.

Note-se que $|z| = 1$ equivale a $z = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ ou ainda a $z^n = e^{nit}$; como $\lim e^{nit} \neq 0$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nit} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, com $|z| = 1$, é divergente.

Exemplo A.6.

Considere-se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (iz)^n$. A sua série dos módulos, $\sum_{n=0}^{+\infty} |iz|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n$, é convergente apenas para $|z| < 1$.

A série dada é, então, absolutamente convergente quando $z \in D(0,1)$.

Exemplo A.7.

Considere-se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,(z-1)^n$. O seu raio de convergência é

$$r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Então, a série só converge quando $z = 1$, sendo a sua soma, neste caso, igual a $a_0 = 1$.

Exemplo A.8.

O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ é $+\infty$; a série é, então, absolutamente convergente em $\mathbb{C}$ definindo uma função analítica em $\mathbb{C}$. Mostrar-se-á, na secção B, que a função soma desta série é $S(z) = e^z$.

Como, pelo teorema A.4., uma série de potências com raio de convergência r converge uniformemente em cada disco compacto centrado em z_0 contido em $D(z_0, r)$, resulta do corolário do teorema A.3.

Teorema A.5.(Integração de séries de potências)

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ tem raio de convergência $r > 0$, ela pode ser integrada termo a termo ao longo de qualquer curva regular γ contida no seu disco de convergência absoluta $D(z_0, r)$, ou seja:

$$\int_\gamma \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\right] dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_\gamma a_n(z-z_0)^n\, dz\right].$$

Exemplo A.9.

No exemplo A.2., conclui-se que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad z \in D(0,1).$$

A função $S(z)=\dfrac{1}{1-z}$ é contínua e primitivável em $D(0,1)$, sendo uma sua primitiva a função $-\log(1-z)$, considerando o ramo principal da função. Note-se que a função $\log(1-z)$ é holomorfa em

$$\Omega=\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy:\ y=0\ \wedge\ x\geq 1\}\quad \text{e}\quad D(0,1)\subset\Omega\,.$$

Integrando a série termo a termo, ao longo de qualquer curva regular que una a origem a qualquer ponto $z\in D(0,1)$ (pelo teorema B.4. do Capítulo 3, o integral é independente do caminho), vem, pelo teorema A.5,

$$-\log(1-z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1},\ z\in D(0,1)\ \Leftrightarrow\ \log\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1},\ z\in D(0,1)$$

Conclui-se então que $\log\dfrac{1}{1-z}$ é analítica em $D(0,1)$.

Teorema A.6. (Derivação de séries de potências)

Sejam $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ uma série com raio de convergência $r>0$ e $S(z)$ a sua função soma.

Então:

(i) A função $S(z)$ é função holomorfa no disco de convergência absoluta $D(z_0,r)$.

(ii) A série pode ser derivada termo a termo no disco $D(z_0,r)$, ou seja

$$S'(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[a_n(z-z_0)^n\right]'=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

A série obtida por derivação termo a termo tem o mesmo disco de convergência absoluta que a série dada, isto é, $D(z_0,r)$, $r>0$, e converge uniformemente para $S'(z)$ em qualquer disco fechado $\overline{D(z_0,\rho)}$, $\rho<r$.

Demonstração:

(i) Pelo teorema A.4. sabe-se que a função $S(z)$ é contínua em $D(z_0,r)$ e pelo teorema A.5. tem-se

$$\int_\gamma S(z)dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_\gamma a_n(z-z_0)^n dz\right]\quad (*)$$

para qualquer curva regular γ contida em $D(z_0,r)$. Em particular, para γ curva simples e fechada $\int_\gamma \left[a_n(z-z_0)^n\right]=0,\ \ \forall n\geq 0$, logo o segundo membro de (*) é nulo e, assim, $\int_\gamma S(z)dz=0$.

O teorema de Morera permite concluir que $S(z)$ é uma função holomorfa em $D(z_0,r)$.

(ii) Seja $w\in D(z_0,r)$. Como $D(z_0,r)$ é um conjunto aberto, é possível definir uma curva regular γ, simples fechada, contida em $D(z_0,r)$ e tal que w está no seu interior. Aplicando a fórmula integral de Cauchy para a 1.ª derivada, obtém-se

$$S'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{S(z)}{(z-w)^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n}{(z-w)^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{(z-z_0)^n}{(z-w)^2}dz$$

Atendendo ao corolário do teorema A.3., vem

$$S'(w)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma a_n\frac{(z-z_0)^n}{(z-w)^2}dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma a_n\frac{(z-z_0)^n}{(z-w)^2}dz.$$

Aplicando novamente a fórmula integral de Cauchy para a 1.ª derivada às funções $a_n(z-z_0)^n,\ \ n\geq 0$, obtém-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{a_n(z-z_0)^n}{z-w}dz=\left(a_n(w-z_0)^n\right)'=na_n(w-z_0)^{n-1},$$

logo

$$S'(w)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left[(z-z_0)^n\right]'_{z=w}=\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(w-z_0)^{n-1}\qquad \text{(note-se que se } n=0,\ \ (a_0)'=0\text{)},$$

como se pretendia demonstrar, uma vez que w é um ponto arbitrário em $D(z_0, r)$.

Considere-se a série de potências, $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, obtida derivando termo a termo a série dada. O seu raio de convergência absoluta é

$$\lim \frac{|na_n|}{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim \frac{n}{n+1}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r.$$

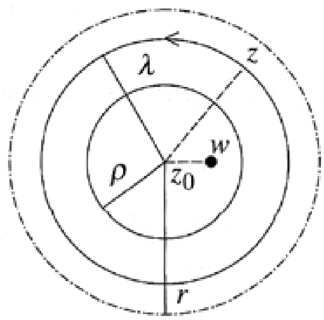
Assim, a série converge absolutamente em $D(z_0, r)$.

Demonstre-se agora que a série anterior converge uniformemente para $S'(z)$ em $\overline{D(z_0, \rho)}$, $\rho < r$, isto é,

$$\left| S'(w) - \sum_{k=0}^{n-1} \left[a_k(z-z_0)^k \right]'_{z=w} \right| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \left[a_k(z-z_0)^k \right]'_{z=w} \right|$$

é uma quantidade arbitrariamente pequena quando $n \to +\infty$.

Considerem-se λ tal que $\rho < \lambda < r$ e a curva $|z-z_0| = \lambda$ que contém w no seu interior:



Aplicando a fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada e o corolário do teorema A.3., vem

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\left[a_k(z-z_0)^k\right]'_{z=w}\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\lambda}\frac{a_k(z-z_0)^k}{(z-w)^2}dz\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-z_0|=\lambda}\frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k}{(z-w)^2}dz\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=\lambda}\frac{\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k\right|}{|z-w|^2}|dz|$$

Dado z na curva $|z-z_0|=\lambda$, tem-se

$$|z-w| = |(z-z_0)-(w-z_0)| \geq \left||z-z_0|-|w-z_0|\right| \geq \lambda-\rho,$$

de onde se infere a relação $\dfrac{1}{|z-w|} \leq \dfrac{1}{\lambda-\rho}$.

Pelo teorema A.4., a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$, cuja função soma é $S(z)$, converge uniformemente em $\overline{D(z_0,\lambda)}$, isto é, para $\varepsilon>0$, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq p$, se tem

$$\left|S(z)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k(z-z_0)^k\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}a_k(z-z_0)^k\right| < \varepsilon,$$

obtém-se a majoração

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\left[a_k(z-z_0)^k\right]'_{z=w}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=\lambda} \frac{\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k\right|}{|z-w|^2}|dz| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi(\lambda-\rho)^2}\int_{|z-z_0|=\lambda} = \frac{\varepsilon}{2\pi(\lambda-\rho)^2}2\pi\lambda = \frac{\varepsilon\lambda}{(\lambda-\rho)^2}.$$

Atendendo a que ε é um número positivo tão pequeno quanto se queira, fica estabelecida a convergência uniforme da série das derivadas.

Exemplo A.10.

Partindo da igualdade $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $z \in D(0,1)$ (ver exemplo A.2.), podem obter-se outros desenvolvimentos por derivação termo a termo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n, \quad z \in D(0,1),$$

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)z^n, \quad z \in D(0,1)$$

e assim sucessivamente.

Observação:

Este teorema permite concluir que toda a função representada por uma série de potências num disco é holomorfa nesse disco. Tem sentido estudar o problema inverso, isto é, se toda a função holomorfa num disco pode ser representada por uma série de potências convergente nesse disco, ou seja, se a função é analítica.

Na Secção B seguinte, demonstrar-se-á que de facto para as funções complexas de variável complexa os conceitos de função holomorfa e de função analítica são equivalentes, o que não se verifica nas funções reais com as correspondentes noções de função diferenciável e de função analítica. (Ver Apêndice 6).

O conceito de série de potências pode ser generalizado a séries onde figuram potências com expoentes negativos:

$$b_0 + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

onde $z_0 \in \mathbb{C}$, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ são constantes e z é uma variável complexa.

Nesta secção considerar-se-á $z \neq z_0$; posteriormente será dado significado à série quando $z = z_0$ (ver Capítulo 9).

Teorema A.7.

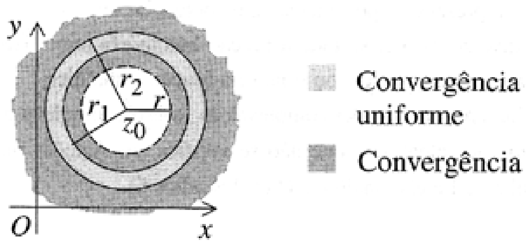
Dada a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$, existe um número $r > 0$, tal que

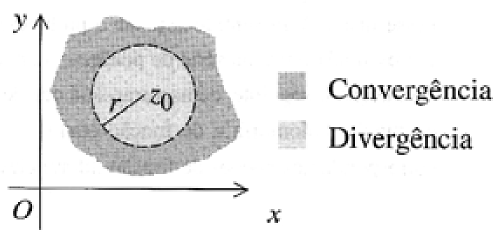
(i) a série é absolutamente convergente no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$;

(ii) a série é uniformemente convergente em cada conjunto da forma

$$\{z \in \mathbb{C} : r < r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\};$$

(iii) a série é divergente no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.





Demonstração:

(i) A série dada pode ser estudada efectuando-se a substituição $w = \dfrac{1}{z - z_0}$ que a reduz a uma série de potências de expoentes não negativos, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n w^n \ (w \neq 0)$, à qual se pode aplicar o teorema A.4.

A convergência absoluta desta série é, então, garantida num disco: $\{w \in \mathbb{C} : |w| < r^*\}$, sendo a série dada absolutamente convergente num conjunto da forma

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{|z - z_0|} < r^*\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| > \frac{1}{r^*} = r\right\},$$

isto é, no exterior do disco $D(z_0, r)$ com $r > 0$.

As afirmações (ii) e (iii) têm demonstrações análogas.

Exemplo A.11.

Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{z^n n!} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2 2} + \ldots$

Fazendo $w = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$, obtém-se $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{w^n}{n!}$, série de potências cujo raio de convergência é $r = +\infty$. Então, o teorema A.4. permite estabelecer que esta série é absolutamente convergente no conjunto $\{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |w| < +\infty\}$, e assim a série dada é absolutamente convergente no conjunto

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \ \left|\frac{1}{z}\right| < +\infty\right\} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > 0\}.$$

É também possível definir séries de potências onde figuram simultaneamente potências de expoentes positivos e negativos:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Definição A.5.

A série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ diz-se uma **série convergente** para $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$, quando as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ (parte principal) e $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ (parte regular) forem convergentes nesse ponto.

Teorema A.8.

Dada uma série de potências $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$, existem r e R, com $0 < r < R \le +\infty$, tais que:

(i) A série é absolutamente convergente na coroa circular

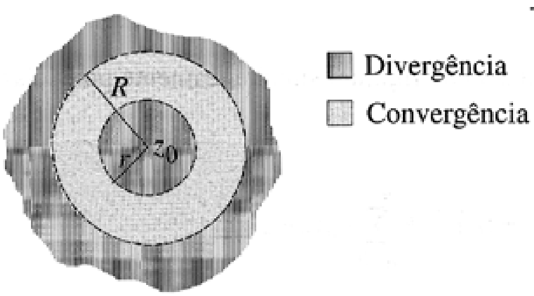
$$C(z_0, r, R) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R \right\};$$

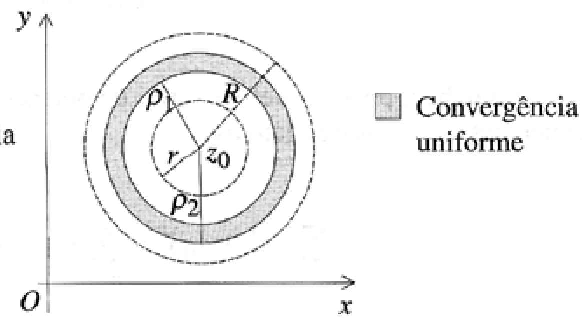
(ii) A série é uniformemente convergente em cada subconjunto compacto

$$C(z_0, \rho_1, \rho_2) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ r < \rho_1 \le |z - z_0| \le \rho_2 < R \right\};$$

(iii) A série é divergente no exterior de $C(z_0, r, R)$, isto é, no conjunto

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \vee |z - z_0| > R \right\}.$$





Demonstração:

O resultado é facilmente estabelecido aplicando-se o teorema A.4. à parte regular e à parte principal com a mudança de variável $w=\left(z-z_0\right)^{-1}$.

Exemplo A.12.

Para se estudar a convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-2)^n$ comece-se por analisar a convergência absoluta de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}$.

Fazendo $w=\frac{1}{z-2}$, a série reduz-se a $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}w^n$, cujo raio de convergência é $r^*=1$. Assim, a série de potências com expoentes negativos será absolutamente convergente para valores de z tais que $\left|\frac{1}{z-2}\right|<1\Leftrightarrow|z-2|>1$, isto é, no exterior de $D\ (2,1)$. Note-se ainda que, para $|z-2|=1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}1$ é divergente.

Considere-se agora a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(z-2)^n$. O seu raio de convergência é $r=\lim\frac{\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\right|}=3$, pelo que a série é absolutamente convergente em $\{z\in\mathbb{C}:\ |z-2|<3\}=D(2,3)$.

Para $|z-2|=3$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3^n}(z-2)^n\right|=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}3^n=\sum_{n=0}^{+\infty}1$ é divergente.

Conclui-se, então, que a série inicial é absolutamente convergente na intersecção de $D\,(2,3)$ com o exterior de $D\ (2,1)$, ou seja em $\{z\in\mathbb{C}:\ 1<|z-2|<3\}$.

B. Teorema de Taylor. Funções analíticas

Nesta secção será estabelecida a equivalência entre holomorfia e analiticidade para as funções de variável complexa.

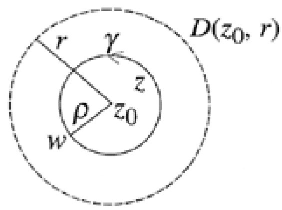
Teorema B.1. (Teorema de Taylor)

Sendo f uma função holomorfa no disco $D(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|<r\}$, $0<r\leq+\infty$, então, f é analítica em $D(z_0,r)$, isto é, para cada ponto $z\in D(z_0,r)$, $f(z)$ pode ser representada por uma série de potências que converge para $f(z)$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \text{onde}\ a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Demonstração:

Sejam $\rho>0$ *tal que* $\rho<r$ *e* γ a circunferência $|z-z_0|=\rho$ definida parametricamente por $\gamma(t)=z_0+\rho e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$



Sendo $w\in\gamma$, a fórmula integral de Cauchy aplicada à função f permite escrever para qualquer ponto z interior a γ,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw\quad(*)\,.$$

Note-se que

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-z_0+z_0-z}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}.$$

Como $z \in \operatorname{int}\gamma$ e $w \in \gamma$, tem-se $|z-z_0| < \rho$ e $|w-z_0| = \rho$, logo $\left|\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$, concluindo-se que $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}}$ é a soma da série geométrica de razão $\dfrac{z-z_0}{w-z_0}$ e primeiro termo igual a 1.

Substituindo na igualdade (*), obtém-se

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[f(w)\frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n}\right]dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right]dw.$$

Por aplicação do critério de Weierstrass para a convergência uniforme (ver teorema A.1), é possível concluir a convergência uniforme da série integranda $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ em γ; a função f é contínua no disco fechado $\overline{D(z_0,\rho)}$, logo é limitada sobre γ, isto é, $\exists\, M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(w)| < M,\ \ w \in \gamma$ (teorema de Weierstrass). Assim,

$$\left|\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\right| |z-z_0|^n \le \frac{M}{|w-z_0|}\left(\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|}\right)^n = \frac{M}{\rho}\left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n.$$

Mas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\left|\dfrac{z-z_0}{\rho}\right| < 1$ $\left(z \in \operatorname{int}\gamma,\ \ \text{logo } |z-z_0| < \rho\right)$, independente de w; então, a série integranda que se pretendia estudar é uniformemente convergente sobre γ.

Pelo teorema de integração termo a termo de séries uniformemente convergentes (ver o corolário do teorema A.3.), tem-se, aplicando a fórmula integral de Cauchy das derivadas,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Atendendo a que ρ, raio da circunferência γ, é arbitrário, esta igualdade fica demonstrada para o maior disco aberto centrado em z_0 onde f seja holomorfa.

Observação:

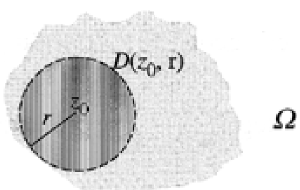
1. A série definida no teorema anterior chama-se **série de Taylor** da função $f(z)$, em torno do ponto z_0. Os coeficientes $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ chamam-se **coeficientes de Taylor** de f no ponto z_0, sendo este designado por **ponto regular** da função.

2. Quando $z_0=0$, a série correspondente $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ é designada por **série de Maclaurin** da função f.

3. Se f é holomorfa num domínio Ω contendo o ponto z_0, o teorema de Taylor garante que f é analítica no maior disco aberto de centro z_0 contido em Ω, isto é,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

para $z\in D(z_0,r)$ com r máximo, de forma a $D(z_0,r)$ estar contido em Ω.



4. O teorema de Taylor estabelece uma propriedade importante das funções complexas: a existência de $f'(z)$ num disco aberto garante que a função pode ser soma da sua série de Taylor nesse disco. Uma propriedade análoga a esta não é verdadeira para funções reais (ver Apêndice 6) onde é necessária a existência de derivadas de todas as ordens, entre outras hipóteses.

Atendendo à identidade estabelecida entre funções holomorfas num disco $D(z_0,r)$, (com $r>0$) e funções analíticas em z_0, no texto que se segue usar-se-á com significado idêntico «função holomorfa num domínio Ω» e « função analítica em Ω».

Exemplo B.1.

Construa-se o desenvolvimento de Maclaurin de algumas funções elementares inteiras:

Função exponencial:

A função $f(z)=e^z$ é inteira; logo, pelo teorema de Taylor, para qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Como $f^{(n)}(z_0)=e^{z_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, tem-se

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Em particular, se $z_0=0$, obtém-se o desenvolvimento de Maclaurin da função:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funções trigonométricas:

Como sen z e cos z são funções inteiras, as respectivas séries de Maclaurin convergem, em $\mathbb{C}$, para estas funções, isto é,

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Note-se que, pelo teorema A.4., a partir da série de Maclaurin de sen z pode obter-se, por derivação termo a termo, a série da função cos z e reciprocamente.

Funções hiperbólicas:

As funções senh z e cosh z são inteiras; assim, efectuando operações algébricas admissíveis com séries convergentes, vem

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left[1-(-1)^n\right] z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Os coeficientes de ordem par desta série são nulos, logo

$$\operatorname{senh} z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Analogamente, $\cosh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C}$

Teorema B.2. (Unicidade do desenvolvimento de Taylor)

Se f é uma função holomorfa no disco $D(z_0,r)$, $r>0$, então o desenvolvimento de f em série de potências de $(z-z_0)$ é único, dado por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, onde a_n são os coeficientes de Taylor de f em z_0:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \text{ com } 0<\rho<r.$$

Demonstração:

Suponha-se que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in D(z_0,r)$, $r>0$. Tem-se $f(z_0) = a_0$. Aplicando sucessivas vezes o teorema A.6.,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}, \text{ logo } f'(z_0) = a_1,$$

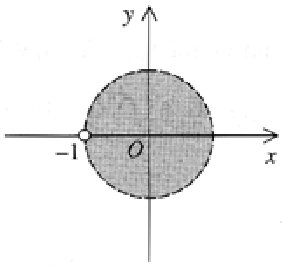
$$f''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}, \text{ logo } f''(z_0) = 2a_2, \text{ isto é, } a_2 = \frac{f''(z_0)}{2}.$$

Em geral, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k}$, de onde se obtém $f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\ldots(k-k+1)a_k = k!a_k$, ou seja, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Conclui-se que os coeficientes da série de potências estão univocamente determinados e são os coeficientes de Taylor da função f em z_0.

Exemplo B.2.

Procure-se o desenvolvimento de Maclaurin da função $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$. Sendo f uma função holomorfa para $z \neq -1$, é analítica num disco de centro na origem e raio máximo 1, $D(0,1)$ (ver observação 3 do teorema de Taylor).



A função pode ser relacionada com uma série geométrica, do seguinte modo:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n.$$

A série anterior só é convergente quando $|-z| = |z| < 1$, isto é, para $z \in D(0,1)$. Pelo teorema anterior, esta é a série de Maclaurin da função $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$.

Por integração da série obtida termo a termo, obtém-se, considerando o ramo principal da função logarítmica, o desenvolvimento de Maclaurin para a função $\log(1+z)$ que é holomorfa em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy:\ x \leq -1 \ \wedge\ y = 0\}$, logo analítica no disco $D(0,1)$. Assim, $\log(1+z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$, com $|z| < 1$.

Note-se que, para qualquer $z \in D(0,1)$, $\displaystyle\int_0^z \frac{1}{1+w}\,dw = \log(1+z)$, onde a holomorfia da função garante que o integral é independente do caminho.

Exemplo B.3.

A função $f(z)=(1+z)^{\alpha}=e^{\alpha\log(1+z)}$ com $\alpha\in\mathbb{C}$ (considerando-se o ramo principal do logaritmo) é holomorfa em $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy\colon x\le -1 \ \wedge\ y=0\}$, logo analítica em $D(0,1)$. Tendo em conta que $(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ e construindo as sucessivas derivadas de f no ponto 0, obtém-se a série binomial $(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}z^n, \quad |z|<1$, onde,

$$\binom{\alpha}{0}=1 \quad \text{e} \quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}, \ n\ge 1.$$

Definição B.1.

Seja f uma função analítica numa vizinhança de $z_0\in\mathbb{C}$.

Se $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(k-1)}(z_0)=0$ e $f^{(k)}(z_0)\neq 0$, o ponto z_0 diz-se um **zero de ordem *k*** para a função f.

Exemplo B.4.

Sendo $f(z)=\operatorname{sen}^2 z$, o ponto $z_0=0$ é um zero de ordem 2 da função, uma vez que

$$f(0)=0$$
$$f'(z)=2\operatorname{sen} z\cos z, \quad f'(0)=0$$
$$f''(z)=2\cos^2 z-2\operatorname{sen}^2 z, \quad f''(0)=2\neq 0$$

Teorema B.3.

Sejam f uma função analítica em $D(z_0,r)$ e z_0 um seu zero de ordem k. Então, $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z), \ z\in D(z_0,r)$, onde φ é uma função analítica em $D(z_0,r)$ e tal que $\varphi(z_0)\neq 0$.

Demonstração:

Pelo teorema de Taylor, sendo $z\in D(z_0,r)$,

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\ldots$$

Visto z_0 ser um zero de ordem k, o primeiro coeficiente não nulo é o de ordem k, então,

$$f(z)=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k+\frac{f^{(k+)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1}+\ldots=(z-z_0)^k\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}+\frac{f^{(k+)1}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)+\ldots\right]=$$

$$=(z-z_0)^k\varphi(z),\quad z\in D(z_0,r).$$

A função φ é analítica em $D(z_0,r)$, pois é soma de uma série de potências de $(z-z_0)$ e $\varphi(z_0)=a_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\neq 0$ (atendendo à ordem do zero z_0).

Exemplo B.5.

Considere-se a função $f(z)=\operatorname{sen} z^3$, inteira, para a qual $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ e $f^{(3)}(0)=6\neq 0$, ou seja, é um zero de ordem 3 para *f*.

Sendo $\operatorname{sen} w=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}w^{2n+1},\quad w\in\mathbb{C}$ (exemplo B.1.).

$$\operatorname{sen} z^3=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{6n+3}=z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{6n},\quad z\in\mathbb{C},$$

onde $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{6n},\quad z\in\mathbb{C}$, é uma função inteira tal que $\varphi(0)=1\neq 0$.

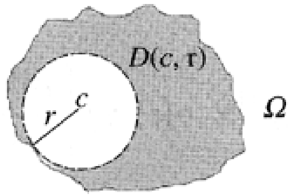
Teorema B.4.

Seja *f* uma função analítica num domínio Ω e não identicamente nula em Ω. Se $z_0\in\Omega$ é um zero de *f*, z_0 é um ponto isolado do conjunto Z_f dos zeros de *f* em Ω, isto é, existe uma vizinhança de z_0, onde $f(z)\neq 0$ para $z\neq z_0$.

Demonstração:

Suponha-se que existe $c\in\Omega$, ponto de acumulação de Z_f. Então, existe uma sucessão (c_n) de pontos de $Z_f\setminus\{c\}$ tal que $\lim c_n=c$. Como *f* é contínua em Ω,

$$f(c)=f(\lim c_n)=\lim f(c_n)=\lim 0=0.$$



Considere-se $D(c,r)$ com r tal que $D(c,r) \subset \Omega$. Pelo teorema de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n, \quad z \in D(c,r).$$

Como, $f(c) = a_0 = 0$, vem

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-c)^n = (z-c) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-c)^{n-1} = (z-c)\, \varphi_1(z),$$

onde $\varphi_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-c)^{n-1}$.

Mas, dado que $c_n \in Z_f \setminus \{c\}$,

$$f(c_n) = (c_n - c)\varphi_1(c_n) \Leftrightarrow \varphi_1(c_n) = \frac{f(c_n)}{(c_n - c)} \Leftrightarrow \varphi_1(c_n) = 0.$$

Então, pela continuidade de φ_1, $\varphi_1(c) = a_1 = \lim \varphi_1(c_n) = 0$.

Usando o método de indução finita e repetindo o raciocínio anterior, conclui-se que $a_n = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$, isto é, que f é nula numa vizinhança de c.

Resta mostrar que nas condições anteriores f seria identicamente nula em Ω.

Seja $E \subset \Omega$ o conjunto dos pontos, tais que f é identicamente nula numa sua vizinhança. E é um conjunto aberto, não vazio, pois $c \in E$, como se acabou de demonstrar.

Por outro lado, E é igualmente um conjunto fechado em Ω, pois contém o limite de todas as suas sucessões: com efeito, se $(b_n) \subset E$, $f(b_n) = 0$ e $\lim b_n = b \in \Omega$, o raciocínio anterior permite concluir que f se anula numa vizinhança de b, e assim, $b \in E$.

Sendo Ω um conjunto conexo e E não vazio, simultaneamente aberto e fechado, vem $E = \Omega$, e f identicamente nula em Ω, o que é absurdo. Assim, Z_f não pode ter pontos de acumulação, isto é, todos os elementos de Z_f são pontos isolados.

Observação:
O teorema B.4. pode enunciar-se na seguinte forma:
Sejam f uma função analítica, não identicamente nula, num domínio Ω e Z_f o conjunto dos zeros de f em Ω. Então Z_f não tem pontos de acumulação em Ω.

Exemplo B.6.

Seja f uma função inteira, tal que $Z_f \supseteq \left\{ \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$. Visto o ponto $z_0 = 0$ ser um ponto de acumulação de Z_f, pela observação ao teorema B.4., f é identicamente nula em $\mathbb{C}$.

Corolário

Sejam f uma função analítica num domínio Ω e $A \subset \Omega$ um subconjunto compacto de Ω. Se f não é identicamente nula, A só pode conter um número finito de zeros da função f.

Demonstração:

Basta ter em conta que todo o subconjunto infinito de um conjunto compacto tem pelo menos um ponto de acumulação. Assim, como pelo teorema B.4. o subconjunto dos zeros de f contido em A não pode ter pontos de acumulação, terá de ser finito.

Exemplo B.7.

Seja $f(z)$ uma função inteira, tal que $f(x + i0) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.
Definindo $\varphi(z) = f(z) - e^z$, tem-se que φ é uma função contínua e $\varphi(x + i0) = f(x + i0) - e^{x+i0} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Então o conjunto dos zeros de φ tem pontos de acumulação, logo, pela observação ao teorema B, φ é identicamente nula, isto é, $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$. A função exponencial e^z é assim a única função inteira que prolonga a função exponencial real a $\mathbb{C}$.

C. Singularidades. Teorema de Laurent

Definição C.1.

Diz-se que f tem no ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ uma **singularidade**, ou que z_0 é um **ponto singular** de f, quando f não é analítica em z_0, (podendo existir em qualquer vizinhança de z_0 pontos onde a função seja analítica).

Diz-se que f tem uma **singularidade isolada** no ponto z_0, ou que z_0 é um **ponto singular isolado** de f, quando f é analítica numa vizinhança de z_0 excluindo esse ponto, isto é, quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que f é analítica em $D^*(z_0,\varepsilon)=\left\{z\in\mathbb{C}:\ 0<\left|z-z_0\right|<\varepsilon\right\}$ (vizinhança reduzida de z_0).

Notação: Usar-se-á a notação $D^*(z_0,\varepsilon)$ para designar o disco aberto centrado em z_0 e raio ε, privado do seu centro.

Exemplo C.1.

A função $f(z)=\dfrac{1}{z}$ só não é analítica em $z = 0$; este ponto é uma singularidade isolada para f.

A função $f(z)=\log z$ (ramo principal) é analítica no conjunto $\Omega=\mathbb{C}\setminus\left\{z=x+iy:\ x\le 0\ \wedge\ y=0\right\}$. Qualquer ponto do eixo real não positivo é ponto singular não isolado da função.

Observação:

Note-se que, se z_0 é uma singularidade não isolada da função f, qualquer vizinhança de z_0 tem outros pontos singulares. Assim, se a função f tem uma singularidade não isolada, tem necessariamente uma infinidade de singularidades que podem ser isoladas ou não, como se ilustrará no exemplo seguinte.

Exemplo C.2.

Considere-se a função $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{z}\right)}$, que é analítica no conjunto

$$\mathbb{C}\setminus\left(\{0\}\cup\left\{z\in\mathbb{C}:\ \frac{\pi}{z}=n\pi,\ \ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}\right)=\mathbb{C}\setminus\left(\{0\}\cup\left\{z\in\mathbb{C}:\ z=\frac{1}{n},\ \ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}\right).$$

Assim, todos os pontos da forma $\dfrac{1}{n}$ $\left(n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right)$ são singularidades isoladas de f enquanto que $z = 0$ é uma singularidade não isolada de f (em qualquer vizinhança de 0 existem pontos singulares de f da forma $\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$).

Analise-se o comportamento de uma função $f(z)$ na vizinhança de um ponto singular isolado:

Definição C.2.

Seja z_0 um ponto singular isolado de uma função $f(z)$. Então,

(i) Se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l,\ l \in \mathbb{C}$, z_0 diz-se uma **singularidade removível** de f;

(ii) Se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, z_0 diz-se um **pólo** de f;

(iii) Se não existe $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, isto é, se z_0 não é uma singularidade removível ou pólo para f, z_0 diz-se uma **singularidade essencial** de f.

Exemplo C.3.

Considere-se $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$, $g(z) = \dfrac{1}{z}$ e $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada para estas funções. No entanto

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z \to 0} e^z = 1, \quad \lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \to 0} h(z) = \lim_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$$

não existe, pois a função exponencial é uma função periódica.

Assim, $z_0 = 0$ é singularidade removível para f, pólo para g e singularidade essencial para h.

Observação:

Sendo z_0 uma singularidade removível de uma função $f(z)$ definida em $\Omega \subset \mathbb{C}$, e sendo $l = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, tem-se que:

(i) a função f admite um prolongamento ao ponto z_0 como função contínua:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega \\ l & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

(ii) a função f é limitada numa vizinhança reduzida de z_0, isto é, $\exists M > 0$ e $\exists \varepsilon > 0$, tal que $|f(z)| \leq M,\ \forall z \in D^*(z_0, \varepsilon)$;

(iii) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

Exemplo C.4.

A função $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$ tem em $z=0$ uma singularidade removível, como se concluiu no exemplo anterior. Então, o prolongamento de $f(z)$, a $\mathbb{C}$:

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases}\dfrac{e^z-1}{z} & \text{se } z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\\ 1 & \text{se } z=0\end{cases}$$

é uma função contínua em $\mathbb{C}$ e analítica em $\mathbb{C}/\{0\}$.

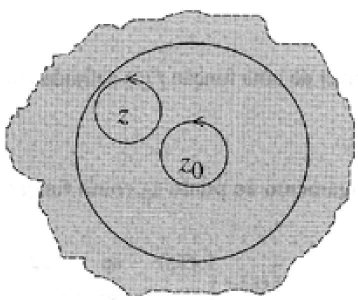
O teorema seguinte permite concluir que funções complexas nas condições do exemplo anterior, isto é, contínuas num domínio Ω e analíticas em $\Omega\setminus\{z_0\}$, são ainda funções analíticas em z_0. Este resultado, como se sabe, não é verdadeiro para funções reais de variável real.

Teorema C.1.

Seja f uma função complexa, contínua num domínio Ω contido em $\mathbb{C}$ e analítica em $\Omega\setminus\{z_0\}$. Então, f é analítica em Ω.

Demonstração:

Sejam $r<0$, tal que $\overline{D(z_0,r)}\subset\Omega$ e $z\in D^*(z_0,r)$.



Considere-se $\varepsilon>0$, tal que $2\varepsilon<|z-z_0|$ e $D(z,\varepsilon)\subset D(z_0,r)$ e seja φ definida por $\varphi(w)=\dfrac{f(w)}{w-z}$, analítica em $D(z_0,r)\setminus\{z_0,z\}$. Pelo teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos, tem-se

$$\int_{|w-z_0|=r} \varphi(w)dw = \int_{|w-z|=\varepsilon} \varphi(w)dw + \int_{|w-z_0|=\varepsilon} \varphi(w)dw .$$

Como $z \notin \overline{D(z_0,\varepsilon)}$ a função φ é contínua em $\overline{D(z_0,\varepsilon)}$, logo é limitada nesse conjunto, isto é, existe $M>0$ tal que $|\varphi(w)| \le M$, $w \in \overline{D(z_0,\varepsilon)}$. Então

$$\left| \int_{|w-z_0|=\varepsilon} \varphi(w)dw \right| \le 2M\varepsilon\pi .$$

Como f é analítica em $D(z,\varepsilon)$, pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{w-z} dw = 2\pi i f(z) = \int_{|w-z|=\varepsilon} \varphi(w)dw .$$

Então

$$\lim_{z \to z_0} \int_{|w-z_0|=r} \varphi(w)dw = \lim_{z \to z_0} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \lim_{z \to z_0} \left(\int_{|w-z|=\varepsilon} \varphi(w)dw + \int_{|w-z_0|=\varepsilon} \varphi(w)dw \right) =$$
$$= \lim_{z \to z_0} 2\pi i f(z) + 0 = 2\pi i f(z_0).$$

Consequentemente, e tendo em conta as propriedades dos integrais paramétricos (ver observação no exercício 18 do Capítulo 4), vem

$$2\pi i f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z_0} dw .$$

Pela derivação do integral paramétrico, e procedendo como na demonstração do teorema A.2. do Capítulo 4, garante-se a existência de $f'(z_0)$, concluindo-se assim que f é analítica em z_0.

Teorema C.2. (Teorema de Riemann)

Seja f uma função analítica e limitada em $D^*(z_0,r)$, $r>0$. Então, z_0 é uma singularidade removível para a função f.

Demonstração:

Se f é uma função limitada em $D^*(z_0,r)$, então $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$

Defina-se a função

$$g(z)=\begin{cases}(z-z_0)f(z) & \text{se } z\neq z_0\\ 0 & \text{se } z=z_0\end{cases}$$

que é analítica em $D^*(z_0,r)$ e contínua em z_0.

Aplicando o teorema C.1. à função g, conclui-se que g também é analítica em z_0 e, sendo assim, é soma da sua série de Taylor

$$\begin{aligned}g(z)&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad z\in\mathbb{C}\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad \text{pois } a_0=g(z_0)=0.\end{aligned}$$

Então, para $z\neq z_0$,

$$f(z)=\frac{g(z)}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(z-z_0)^{n-1},$$

concluindo-se que $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a_1\in\mathbb{C}$, ou seja, z_0 é uma singularidade removível para a função f.
(A função g construída é a extensão analítica de f a z_0.)

Definição C.3.

Seja z_0 um pólo de uma função complexa f. Diz-se que z_0 tem **ordem k** quando $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=L$, com L diferente de 0 e de ∞. Se $k=1$ diz-se que o pólo é simples.

Observação:

Se z_0 é um pólo de ordem k para f, então

1. $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=\infty$ se $n<k$ e $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=0$ se $n>k$.

2. Atendendo a que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ tem um valor finito, $(z - z_0)^k f(z)$ é uma função limitada numa vizinhança de z_0, isto é, existe $M > 0$ tal que $|z - z_0|^k |f(z)| \leq M \Leftrightarrow |f(z)| \leq \dfrac{M}{|z - z_0|^k} \quad (z \neq z_0)$.

Teorema C.3.

Seja z_0 um polo de uma função complexa f. Então, z_0 é uma singularidade removível para a função $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, que tem uma extensão analítica a z_0.

Demonstração:

Como z_0 é um pólo de f, $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, logo $\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$ e z_0 é uma singularidade removível de g. Seja $\tilde{g}$ a função igual a g nos pontos do domínio de g e tal que $\tilde{g}(z_0) = 0$. O teorema C.1. permite concluir a analiticidade da função $\tilde{g}(z)$ em z_0 e assim $\tilde{g}$ constitui a extensão analítica de g a z_0.

Exemplo C.5.

O ponto $z_0 = 0$ é um pólo de $f(z) = \dfrac{1}{z}$; então, para $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, $\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} z = 0$, isto é, $z_0 = 0$ é uma singularidade removível de $\dfrac{1}{f(z)}$.

Definição C.4.

Uma função analítica num domínio Ω, com a possível excepção de singularidades isoladas que sejam pólos, diz-se uma **função meromorfa** em Ω.

Exemplo C.6.

A função $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ é analítica em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}\}$.

Os pontos $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ são pólos simples de $f(z)$, pois $\lim_{z \to n\pi} \dfrac{1}{\operatorname{sen} z} = \infty$, $n \in \mathbb{Z}$ e $\lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) \dfrac{1}{\operatorname{sen} z} = (-1)^n$.

Conclui-se assim que f é meromorfa em Ω.

Os teoremas seguintes caracterizam o comportamento «algo instável» de uma função na vizinhança de uma singularidade essencial, onde ao mesmo tempo é ilimitada e arbitrariamente próxima de zero.

Teorema C.4. (Teorema de Casorati-Weierstrass)

Se z_0 é uma singularidade essencial de uma função f, então, quaisquer que sejam $L \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, em qualquer vizinhança de z_0 existe um ponto z tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$, isto é, numa vizinhança de z_0, f é arbitrariamente próxima de qualquer número complexo.

Demonstração:

Sejam $D^*(z_0, r)$ uma vizinhança reduzida de z_0, onde f é analítica, e L um número complexo arbitrário. Suponha-se a existência de $\varepsilon > 0$, tal que $|f(z) - L| \geq \varepsilon > 0$, $\forall z \in D^*(z_0, r)$.

Então, a função $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - L}$ é analítica e limitada em $D^*(z_0, r)$, isto é, z_0 é uma singularidade isolada para $\varphi(z)$ e $|\varphi(z)| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Pelo teorema C.2. conclui-se que z_0 é uma singularidade removível para a função $\varphi(z)$ que pode então ser prolongada como função analítica a z_0.

A função $f(z) = L + \dfrac{1}{\varphi(z)}$ $(\varphi(z) \neq 0)$ tem uma singularidade removível em z_0, se $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) \neq 0$ ou um pólo se $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = 0$. Logo, se z_0 é uma singularidade essencial de f, então

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists z \in D^*(z_0, r) : |f(z) - L| \leq \varepsilon .$$

Observação:

O teorema anterior pode enunciar-se nas formas:

1. Sendo $D^*(z_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, uma vizinhança de uma singularidade essencial, $\overline{f\left(D^*(z_0, \varepsilon)\right)} = \mathbb{C}$.

2. Qualquer número complexo é sublimite de f na vizinhança de uma singularidade essencial, isto é, se z_0 é uma singularidade essencial de f, para qualquer $L \in \mathbb{C}$, existe uma sucessão (z_n) numa vizinhança reduzida de z_0, $(z_n) \subset \left(D^*(z_0, \varepsilon)\right)$, tal que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z_n) = L$.

O teorema de Casorati-Weierstrass é uma forma mais fraca do teorema de Picard.

Teorema C.5. (Teorema de Picard)

Uma função f toma, na vizinhança de uma singularidade essencial, todos os valores em $\mathbb{C}$, com possível excepção de um único, num número infinito de vezes.

Omite-se neste texto a demonstração do teorema de Picard que pode encontrar-se, por exemplo, em Ahlfors, L., *Complex Analysis*.

Apresenta-se seguidamente uma ilustração deste teorema.

Exemplo C.6.

A função $e^{\frac{1}{z}}$ tem uma singularidade essencial em $z_0 = 0$ (exemplo C.3.) e para qualquer número complexo w, não nulo, $e^{\frac{1}{z}}$ toma o valor w uma infinidade de vezes numa vizinhança de $z = 0$. Por exemplo, a equação $e^{\frac{1}{z}} = i$ é satisfeita por um número infinito de valores z numa vizinhança da singularidade essencial $z = 0$, pois

$$e^{\frac{1}{z}} = i \Leftrightarrow z_k = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} i \,.$$

No teorema seguinte analisa-se a possibilidade de uma função poder ser representada por uma série de potências em torno de um ponto singular.

Teorema C.6. (Teorema de Laurent)

Seja $f(z)$ uma função analítica na coroa circular $C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z - z_0| < R\}$.

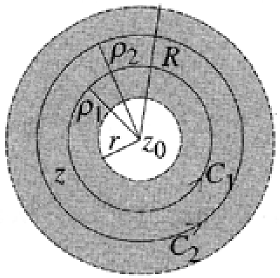
Então, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, $z \in C(z_0, r, R)$, sendo a convergência da série absoluta em $C(z_0, r, R)$ e uniforme em cada coroa fechada $\{z \in \mathbb{C} : r < \rho_1 \le |z - z_0| \le \rho_2 < R\}$. Os coeficientes da série são dados pelas fórmulas:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{onde } r < \rho < R.$$

Demonstração:

Sejam z um ponto qualquer da coroa $C(z_0, r, R)$ e ρ_1 e ρ_2 tais que $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$.

Designem-se por C_1, C_2, respectivamente, as circunferências de equações $|z - z_0| = \rho_1$ e $|z - z_0| = \rho_2$.



Então, pela fórmula integral de Cauchy para domínios multiplamente conexos (ver observação 2 do teorema A.3. do Capítulo 4)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{z-w}dw \quad (*)$$

O primeiro integral da igualdade (*) pode ser desenvolvido como se procedeu na demonstração do teorema de Taylor, obtendo-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{onde } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\,.$$

Considere-se, agora, o segundo integral da igualdade (*). Note-se que

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0+z_0-w} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w-z_0}{z-z_0}}.$$

Como $\left|\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \dfrac{|w-z_0|}{|z-z_0|} < 1$ ($w \in C_1$, $z \in \operatorname{ext} C_1$, logo $|w - z_0| < |z - z_0|$), tem-se

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} .$$

Então $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{z-w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \right] dw \int_{C_1} .$

Procedendo como na demonstração do teorema de Taylor, conclui-se a convergência uniforme da série da função integranda sobre a curva C_1, podendo aplicar-se a integração termo a termo das séries uniformemente convergentes (corolário do teorema A.3.).

Tem-se então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{z-w} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} dw \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(w)(w-z_0)^n dw \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-z_0)^n} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-z_0)^n} b_n \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw.$$

Substituindo em (*) os desenvolvimentos obtidos, vem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (z-z_0)^{-n} ,$$

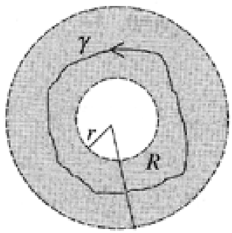
com $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(z-z_0)^{n+1}} dw \ (z \in \operatorname{int} C_2)$ e $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(w)(z-z_0)^{n-1} dw \quad (z \in \operatorname{ext} C_1)$

ou, abreviadamente, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ onde, sendo C a circunferência $|z-z_0| = \rho$

e $r < \rho < R$, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$ (se $n \geq 0$, $c_n = a_n$ e se $n < 0$, $c_n = b_n$).

Observação:

1. A série definida no teorema C.6. chama-se **série de Laurent** da função f em torno do ponto z_0. Aos coeficientes a_n e b_n chamam-se **coeficientes de Laurent** da função, respectivamente da parte regular e da parte principal da série.
2. A demonstração do teorema C.6. foi feita usando circunferências de centro z_0 e raio conveniente. O teorema de deformação permite obter o mesmo resultado para qualquer curva fechada, γ, contida na coroa $C(z_0, r, R)$ e contendo z_0 no seu interior.



Exemplo C.7.

Desenvolvam-se as seguintes funções em série de potências, em torno da origem:

a) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$.

A função é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < +\infty\} = C(0,0,+\infty)$.

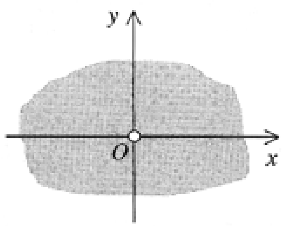
O teorema de Laurent permite concluir que f admite um desenvolvimento da forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$.

Atendendo ao exemplo B.1., tem-se

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \ z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad e^z - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \ z \in \mathbb{C}.$$

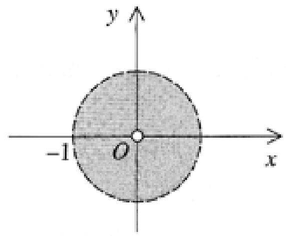
Então, $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = C(0,0,+\infty)$.

Note-se que todos os coeficientes da parte principal da série são nulos, e portanto, a função é analítica em todo o plano.



b) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1+z)}$

Esta função é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0,-1\}$. É então possível definir uma coroa circular, $C(0,0,1) = \{z \in \mathbb{C}: \ 0 < |z| < 1\}$, onde f é analítica e o teorema de Laurent pode ser aplicado.



Atendendo ao teorema B.2.

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n,\quad z\in D(0,1).$$

Logo, $\dfrac{1}{z^3(1+z)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{n-3}=\sum_{n=-3}^{+\infty}(-1)^{n+3}z^4,\quad z\in D^*(0,1)=C(0,0,1)$, a parte principal da série obtida só tem três coeficientes (a_{-3},a_{-2},a_{-1}) não nulos.

c) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

Tendo-se $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n,\quad z\in\mathbb{C}$, vem, por substituição,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n},\quad z\in C(0,0,+\infty). \end{aligned}$$

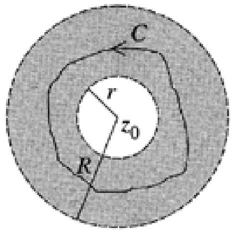
A parte regular desta série só tem o termo a_0 não nulo, enquanto os coeficientes da parte principal são todos diferentes de zero.

Teorema C.7. (Unicidade do desenvolvimento de Laurent)

Seja $f(z)$ uma função analítica na coroa circular $C(z_0,r,R)$ e tal que, para qualquer z em $C(z_0,r,R)$, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ é uniformemente convergente em qualquer coroa fechada $\{z\in\mathbb{C}:\ r<\rho_1\le|z-z_0|\le\rho_2<R\}$. Então a_n são os coeficientes de Laurent de f no ponto z_0, isto é, a série dada é a série de Laurent de f em $C(z_0,r,R)$.

Demonstração:

Considere-se a curva C nas condições da figura anexa e $w \in C(z_0, r, R)$.



Então, $f(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (w - z_0)^n$. Para qualquer $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} \left[a_n (w-z_0)^{n-k-1} + \frac{a_k}{w-z_0} \right].$$

Integrando ao longo de C

$$\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} \left[a_n \int_C (w-z_0)^{n-k-1} dw + a_k \int_C \frac{1}{w-z_0} dw \right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{k-1} \left[a_n \int_C (w-z_0)^{n-k-1} dw \right] +$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left[a_n \int_C (w-z_0)^{n-k-1} dw \right] + a_k \int_C \frac{1}{w-z_0} dw$$

Como, pela fórmula integral de Cauchy para as derivadas os integrais $\int_C (w-z_0)^{n-k-1} dw$ são nulos, conclui-se que $\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw = a_k \int_C \frac{1}{w-z_0} dw = a_k 2\pi i$

Observação:

Para se estabelecer a unicidade da série de Laurent num ponto z_0, é necessário concretizar a coroa circular onde o desenvolvimento é dado, isto é, a unicidade está associada a um ponto e a uma coroa circular centrada nesse ponto. Uma função pode ter mais de um desenvolvimento em torno de um ponto z_0, contudo, com diferentes domínios de convergência. No exemplo seguinte pretende-se ilustrar esta observação.

Exemplo C.8.

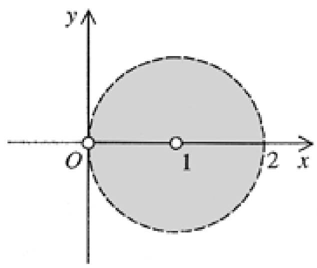
Seja $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$. O ponto $z_0=1$ é uma singularidade isolada para a função f. É possível obter dois desenvolvimentos da função em série de potências de $(z-1)$:

– Em $C(1,0,1)$

$$\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-[-(z-1)]}$$

$$=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad (\text{pois } 0<|z-1|<1)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{n-1}.$$

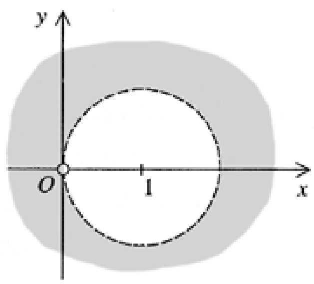


– Em $C(1,1,+\infty)$

$$\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z-1}\right)} \qquad (\text{pois } |z-1|>1)$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}.$$



Exemplo C.9.

A função $f(z)=\dfrac{1}{z}$ tem uma singularidade isolada em $z_0=0$. Então, em $C(0,0,+\infty)$, pode ser desenvolvida em série de potências de z:

$$\frac{1}{z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n\,, \quad z\in C(0,0,+\infty)$$

A unicidade do desenvolvimento de Laurent permite concluir que $a_n = 0$ se $n \neq -1$, isto é, a série reduz-se ao termo $\frac{1}{z}$.

Teorema C.8.

Sejam $f(z)$ uma função analítica na coroa circular $C(z_0,0,r) = \{z: \ 0 < |z - z_0| < r\}$ e $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ a sua série de Laurent nessa coroa circular. Então:

(i) Se $a_n = 0$ para $n < 0$, z_0 é uma singularidade removível para *f* e reciprocamente se z_0 é uma singularidade removível para *f*, a respectiva série de Laurent em $C(z_0,0,r)$ é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n ;$$

(ii) Se apenas um número finito de coeficientes da parte principal da série é diferente de zero, isto é, se $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ para $n < -k$ e $a_{-k} \neq 0$, z_0 é um pólo de ordem *k* para *f*. Reciprocamente, se *f* tem um pólo de ordem *k*, a respectiva série de Laurent em $C(z_0,0,r)$ é

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n ;$$

(iii) Se um número infinito de coeficientes da parte principal da série é diferente de zero, então z_0 é uma singularidade essencial. Reciprocamente, se z_0 é uma singularidade essencial de *f*, a respectiva série de Laurent em $C(z_0,0,r)$ tem uma infinidade de termos não nulos na parte principal. Sendo a respectiva série de Laurent em $C(z_0,0,r)$ definida por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Demonstração:

(i) Se $a_n = 0$, $n < 0$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in C(z_0,0,r)$. Então, $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$ e z_0 é uma singularidade removível.

Reciprocamente, se f tem em z_0 uma singularidade removível, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l, \ l \in \mathbb{C}$, a função

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } \ z \in C(z_0, 0, r) \\ l & \text{se } \ z = z_0 \end{cases}$$

é analítica em $D(z_0, r)$ (teorema C.1.). Então, pelo teorema de Taylor,

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ (a_0 = l) \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \ z \in C(z_0, 0, r),$$

ou seja, $a_n = 0, \ n < 0$.

(ii) Se existe $k \in \mathbb{N}: \ a_n = 0, \ n < -k$ e $c_{-k} \neq 0$,

$$f(z) = a_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^k} + \ldots + a_{-1} \frac{1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n =$$

$$= \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} \left[1 + \frac{a_{-k+1}}{a_{-k}} (z - z_0) + \frac{a_{-k+2}}{a_{-k}} (z - z_0)^2 + \ldots \right] = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} [1 + g(z)].$$

onde $g(z)$ é uma função analítica em z_0 e $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$. Então, para qualquer $\delta > 0$ e em particular para $\delta = \frac{1}{2}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|z - z_0| < \varepsilon$ implica $|g(z)| < \frac{1}{2}$, e assim,

$$|1 + g(z)| \geq |1 - |g(z)|| \geq \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Logo, $|f(z)| = \dfrac{|a_{-k}|}{|z - z_0|^k} |1 + g(z)| > \dfrac{|a_{-k}|}{\varepsilon^k} \dfrac{1}{2}$.

Se z tende para z_0, ε^k tende para zero e $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, logo $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, z_0 é, assim, um pólo para a função. Como

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}[1+g(z)]=a_{-k}[1+g(0)]\neq 0\,,$$

conclui-se que a sua ordem é k.

Reciprocamente, se z_0 é um pólo de ordem k para a função f, a função $h(z)=(z-z_0)^k f(z)$ tem nesse ponto uma singularidade removível. Novamente o teorema C.1. permite escrever $h(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,\ 0<|z-z_0|<r$, ou seja,

$$(z-z_0)^k f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ e assim } f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-k},\ \ z\in C(z_0,0,r).$$

como se pretendia concluir.

(iii) Se a parte principal da série de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0,0,r)$ tem uma infinidade de coeficientes não nulos, por (i) e (ii), z_0 não pode ser uma singularidade removível nem um pólo; é então uma singularidade essencial e reciprocamente.

Exemplo C.10.

Os desenvolvimentos de Laurent das funções do exemplo C.3. na singularidade $z=0$, na coroa circular $C(0,0,r)$, $r>0$, são:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!},\ \ z\in C(0,0,+\infty) \text{ (exemplo C.7. a)).}$$

Como a parte principal desta série tem todos os coeficientes nulos, $z=0$ é uma singularidade removível de f.

$$g(z)=\frac{1}{z}=\ldots 0+\frac{1}{z}+0+\ldots,\ z\in C\,(0,0,+\infty) \text{ (exemplo C.9),}$$

como a parte principal tem os coeficientes c_k, $k<-1$, todos nulos, $z=0$ é um pólo de primeira ordem de g.

Finalmente,

$$h\,(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n},\ \ z\in C\,(0,0,+\infty) \text{ (exemplo C.7),}$$

e, como a parte principal possui todos os coeficientes não nulos, $z=0$ é uma singularidade essencial de h.

Exercícios resolvidos

1. Estude quanto à convergência absoluta as séries de potências seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^3}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$. **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}$. **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (z+e)^n$. **f)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n (z-i)^n}{n!}$.

Resolução:

a) Calcule-se o raio de convergência, r, da série dada, centrada em $z_0 = 0$:

$$r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}} = 1 .$$

Então, o disco de convergência absoluta é $D(0,1) = \{z\colon |z| < 1\}$ e a série diverge para valores de z tais que $|z| > 1$.

Para $|z| = 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente (série de Dirichlet com $\alpha = 3 > 1$ (ver Apêndice 3)).

Conclui-se, assim, que a série é absolutamente convergente no conjunto $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

b) O raio de convergência desta série é

$$r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1 .$$

A série é, então, absolutamente convergente no disco $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}\colon \ |z| < 1\}$ e divergente em $\{z \in \mathbb{C}\colon \ |z| > 1\}$.

Para os pontos z tais que $|z| = 1$, obtém-se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, série cujo termo geral não é um infinitésimo, visto que $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; trata-se, assim, de uma série divergente.

A série só é absolutamente convergente em $D(0,1)$.

c) O raio de convergência da série é

$$r=\lim\left|\frac{\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}\right|=\lim\frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n^n(n+1)n!}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\,,$$

e para pontos z, tais que $|z|=e$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}|z|^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$ é divergente, visto que

$$\lim\frac{\dfrac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!e^n}{n^n}}=e\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=1^+\ \text{(ver Apêndice 3).}$$

Conclui-se, então, que a série dada é absolutamente convergente no disco $D\,(0,e)$.

d) Como se trata de uma série geométrica de razão $\frac{z-i}{2}$, ela converge absolutamente para pontos z tais que $\left|\frac{z-i}{2}\right|<1$, isto é, em $D\,(i,2)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-i|<2\}$ e diverge no conjunto complementar deste disco.

e) Esta série é geométrica de razão [2 (z+e)]. Assim, ela converge absolutamente quando $|2\,(z+e)|<1$, isto é, o seu disco de convergência absoluta é $D\left(-e,\frac{1}{2}\right)$ e diverge no conjunto complementar deste disco.

f) O raio de convergência da série é

$$r=\lim\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\left|\frac{\dfrac{e^n}{n!}}{\dfrac{e^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim\frac{e^n(n+1)n!}{n!e^{n+1}}=+\infty\,,$$

donde se conclui que a série é absolutamente convergente no conjunto $\mathbb{C}$.

2. Justifique que as séries seguintes são uniformemente convergentes no disco fechado $\overline{D(0,1)}$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n3^n}$. **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+i)^n}{e^n}$.

Resolução:

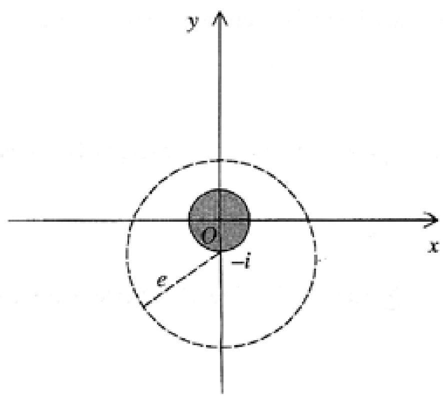
a) O disco de convergência absoluta da série é $D\,(0,2)$, uma vez que se trata de uma série geométrica de razão $\frac{z}{2}$. Pelo teorema A.4., como a série é absolutamente convergente em $D\,(0,2)$, ela é uniformemente convergente em cada disco fechado contido em $D\,(0,2)$. Em particular em $\overline{D(0,1)} \subset D(0,2)$.

b) A série é absolutamente convergente no disco $D(0,3)$, pois o seu raio de convergência é

$$r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \left|\frac{\frac{1}{n3^n}}{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}}\right| = 3\,.$$

Como $\overline{D(0,1)}$ é um disco compacto centrado em $z_0 = 0$ tal que $\overline{D(0,1)} \subset D(0,3)$, pelo teorema A.4., a série é uniformemente convergente nesse disco.

c) A série tem como raio de convergência $r = \lim \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \left|\dfrac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{e^{n+1}}}\right| = e$, logo é absolutamente convergente no disco $D(-i,e)$. Como o disco compacto $\overline{D(0,1)}$ está contido em $D(-i,e)$ porque $e > 2$, conclui-se que a série é uniformemente convergente em $\overline{D(0,1)}$



3. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$, com raio de convergência $r > 0$.

a) Mostre que as séries seguintes têm raio de convergência r.

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+2)^2}(z-z_0)^n$.

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}a_n(z-z_0)^n$.

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$.

iv) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$.

b) Determine o raio de convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{\alpha n}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Resolução:

a) Se r é o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, tem-se $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r$.

i) $\lim \dfrac{\frac{|a_n|}{(n+2)^2}}{\frac{|a_{n+1}|}{(n+3)^2}} = \lim \frac{(n+3)^2}{(n+2)^2} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r.$

ii) $\lim \frac{\sqrt{n}|a_n|}{\sqrt{n+1}|a_{n+1}|} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r.$

iii) Note-se que esta série se obtém da dada por derivação termo a termo, pelo que o teorema A.6. garante o resultado.

iv) O teorema A.5. permite concluir que esta série, que se obtém da dada por integração termo a termo, tem raio de convergência r.

b) Seja $w = (z-z_0)^\alpha$. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w^n$ tem raio de convergência r, sendo, por isso, uma série absolutamente convergente para $|w| < r \Leftrightarrow |z-z_0|^\alpha < r$.

Conclui-se, assim, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{\alpha n}$ é absolutamente convergente para $|z-z_0| < \sqrt[\alpha]{r}$, e que o seu raio de convergência é $\sqrt[\alpha]{r}$.

4. Estude a holomorfia das seguintes funções:

a) $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{z^n}$.

b) $g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$.

c) $h(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$.

d) $k(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\right)(z+i)^n$.

Resolução:

a) A série em questão é uma série de potências de expoentes negativos.

Seja $w=\frac{1}{z}$, $z\neq 0$; estude-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}nw^n$:

$$\lim\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\frac{|n|}{|n+1|}=1,$$

isto é, a série converge absolutamente no conjunto $\{w\in\mathbb{C}:\ |w|<1\}$, pelo que a série dada é absolutamente convergente em $\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:\ \left|\frac{1}{z}\right|<1\right\}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1\}$. O teorema A.7. permite concluir a holomorfia da função soma $f(z)$ no conjunto Ω.

b) A série converge absolutamente no conjunto $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$, pois o seu raio de convergência é

$$r=\lim\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=1\,.$$

Pelo teorema A.4. conclui-se a holomorfia de $g(z)$ em Ω. Note-se, no entanto, que, para $|z|=1$, a série também é absolutamente convergente, pois $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente (ver Apêndice 3). Então $g(z)$ é analítica em $D(0,1)$.

c) A série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$ é absolutamente convergente em $\mathbb{C}$, pois

$$r=\lim\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\frac{\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}}{\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}}=+\infty\,.$$

Logo, pelo teorema A.4. conclui-se que a função $h\ (z)$ é holomorfa no conjunto $\mathbb{C}$.

d) Como $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\right)(z+i)^n = \frac{1}{n}(z+i)^n + \frac{1}{n!}(z+i)^n$, estude-se a natureza das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(z+i)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+i)^n$.

O raio de convergência da primeira série é 1 e para pontos z tais que $|z+i|$ obtém-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}|z+i|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ que é divergente, logo a primeira série é absolutamente convergente em $D(-i,1)$. O raio de convergência da segunda série é ∞, logo esta é absolutamente convergente no conjunto $\mathbb{C}$. Conclui-se, portanto, que a série inicial $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\right)(z+i)^n$ é absolutamente convergente em $D\ (-i,\ 1)$. Mais uma vez pelo teorema A.4., a função $k\ (z)$ é holomorfa no conjunto $D(-i,1)$.

5. Mostre que as séries seguintes definem funções holomorfas respectivamente em $D(0,2)$ e no conjunto complementar de $\overline{D(1,e)}$. Indique outra expressão para essas funções.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$. **b)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n+1}}{(z-1)^n}$.

Resolução:

a) A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, sendo uma série geométrica de razão $\frac{z}{2}$, é absolutamente convergente quando $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$, isto é, define uma função holomorfa em $D(0,2)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\ \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}$

(pela expressão da soma de uma série geométrica convergente – ver exemplo A.2.).

b) A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n+1}}{(z-1)^n}$, sendo uma série geométrica de razão $\frac{e}{z-1}$, é absolutamente convergente quando $\left|\frac{e}{z-1}\right| < 1$, isto é, quando $|z-1| > e$. Fica assim definida uma função holomorfa no conjunto complementar de $\overline{D(1,e)}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e\left(\frac{e}{z-1}\right)^n = e\,\frac{1}{1-\frac{e}{z-1}} = \frac{e\,(z-1)}{z-1-e}.$$

6. Obtenha o desenvolvimento de Maclaurin das seguintes funções, indicando o respectivo disco de convergência absoluta.

a) z^3e^{2z}. **b)** e^{2z-1}. **c)** $f(z)=\int_0^z e^{t^2}\,dt$.

Resolução:

a) A função $f(z)=z^3e^{2z}$ é inteira; logo, pelo teorema de Taylor, $z^3e^{2z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ para $z\in\mathbb{C}$.

Como $e^w=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!}$ para qualquer $w\in\mathbb{C}$ (ver exemplo B.1.), fazendo $w=2z$, tem-se $e^{2z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2z)^n}{n!}$ para $z\in\mathbb{C}$. Então $z^3e^{2z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n z^{n+3}}{n!}$, sendo, $\mathbb{C}$ o disco de convergência absoluta.

b) Como obtido na alínea a) $f(z)=e^{2z-1}=e^{2z}e^{-1}=e^{-1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n z^n}{n!}$, $z\in\mathbb{C}$.

Logo, $f(z)=e^{2z-1}$ é uma função inteira, tendo-se $e^{2z-1}=e^{-1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n z^n}{n!}$ para qualquer $z\in\mathbb{C}$, isto é, o disco de convergência absoluta é $\mathbb{C}$.

c) A função $f(t)=e^{t^2}$ é inteira, pelo que o integral $\int_0^z e^{t^2}\,dt$ é calculado ao longo de uma curva regular arbitrária que une $z_0=0$ a qualquer ponto $z\in\mathbb{C}$ (ver observação ao teorema A.7. do Capítulo 3).

Atendendo ao exemplo B.1. tem-se

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{n!}\ \text{ com } z\in\mathbb{C},$$

logo, $\int_0^z f(t)\,dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ com $z\in\mathbb{C}$.

7. **a)** Desenvolva a função $f(z)=e^{z^3}$ em série de potências em torno do ponto $z_0=0$. Indique o domínio de convergência absoluta da série.

b) Utilizando a série obtida na alínea a), calcule o valor de $f^{(20)}(0)$ e $f^{(21)}(0)$.

Resolução:

a) Como $e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}$ com $w \in \mathbb{C}$, fazendo $w = z^3$, obtém-se $e^{z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{n!}$ para qualquer valor $z \in \mathbb{C}$.
O disco de convergência absoluta desta série é $\mathbb{C}$.

b) A unicidade do desenvolvimento de uma função analítica em série de potências num ponto permite afirmar que se $f(z) = e^{z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{n!}$, os coeficientes a_n desta série são os coeficientes de Maclaurin definidos por $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Então, os coeficientes das potências z^{20} e z^{21} são, respectivamente, $a_{20} = \frac{f^{(20)}(0)}{(20)!} = 0$ e $a_{21} = \frac{f^{(21)}(0)}{(21)!} = \frac{1}{7!}$. Logo $f^{(20)}(0) = 0$ e $f^{(21)}(0) = \frac{(21)!}{7!}$.

8. Utilize o desenvolvimento de Maclaurin das funções senh z e sen z para mostrar a igualdade

$$\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz), \quad z \in \mathbb{C}$$

Resolução:

Atendendo ao exemplo B.1., para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. Assim,

$$(-i)\operatorname{sen}(iz) = (-i)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} i^{2n+2} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\left(i^2\right)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{senh} z$$

9. Utilize o desenvolvimento de Maclaurin das funções cosh z e cos z para mostrar que $\cosh z = \cos(iz)$, $z \in \mathbb{C}$.

Resolução:

Pelo exemplo B.1., $\cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ e $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\cos(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(i^2\right)^n z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cosh z.$$

10. **a)** Obtenha o desenvolvimento de Maclaurin das seguintes funções, indicando o respectivo disco de convergência absoluta.

i) $f(z) = \operatorname{sen}(2z)$. ii) $f(z) = \cos z^3$.

iii) $f(z) = \operatorname{senh} z^2$. iv) $f(z) = z \operatorname{senh} z^2$.

b) Para as funções das alíneas ii) e iii) calcule $f^{(18)}(0)$ e $f^{(20)}(0)$.

Resolução:

a) Atendendo aos resultados obtidos no exemplo B.1. obtêm-se os seguintes desenvolvimentos de Maclaurin convergentes em $\mathbb{C}$ (os raios de convergência são $+\infty$,).

i) $\operatorname{sen}(2z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. ii) $\cos z^3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{6n}}{(2n)!}$.

iii) $\operatorname{senh} z^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}$. iv) $z \operatorname{senh} z^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{4n+3}}{(2n+1)!}$.

b) Pela unicidade do desenvolvimento de Maclaurin, tem-se

$$\frac{f^{(18)}(0)}{18!} = a_{18} \Leftrightarrow f^{(18)}(0) = 18!a_{18} \quad \text{e} \quad \frac{f^{(20)}(0)}{20!} = a_{20} \Leftrightarrow f^{(20)}(0) = 20!a_{20}.$$

Para $f(z) = \cos z^3$, o coeficiente de z^{18}, a_{18}, é igual a $\frac{(-1)^3}{6!}$ e o coeficiente de z^{20}, a_{20}, é 0.

Logo, $f^{(18)}(0) = \frac{18!(-1)^3}{6!}$ e $f^{(20)}(0) = 0$.

Sendo $f(z) = \operatorname{senh} z^2$, $a_{18} = \frac{1}{9!}$ e $a_{20} = 0$, logo $f^{(18)}(0) = \frac{18!}{9!}$ e $f^{(20)}(0) = 0$.

11. Defina um ramo da função $f(z) = \sqrt{1-z^2}$ holomorfo em $D(0,1)$ e determine o respectivo desenvolvimento de Maclaurin.

Resolução:

Atendendo a que $f(z) = \sqrt{1-z^2} = e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)}$ e tomando o ramo principal do logaritmo,

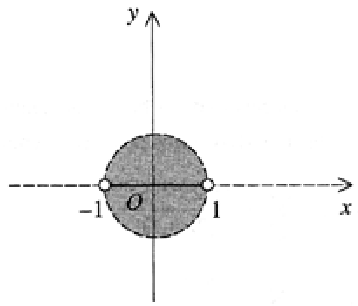
$$1 - z^2 = 1 - (x+iy)^2 = 1 - x^2 + y^2 - i2xy$$

não pode ter valores em $\mathbb{R}_0^-$. Ora sendo

$$\begin{cases} 1-x^2+y^2 \le 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+y^2 \le 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-x^2 \le 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ y = 0 \end{cases},$$

o ramo da função considerado é holomorfo em

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy : (x \le -1 \vee x \ge 1) \wedge y = 0\},$$



pelo que é possível definir o desenvolvimento de Maclaurin em $D\,(0,1)$.

Atendendo ao desenvolvimento binomial (ver exemplo B.3) tem-se

$$\sqrt{1-z^2} = \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2^2 2!}z^4 + \frac{1.3}{2^3 3!}z^6 - \dots$$

válido para $\left|z^2\right| < 1$, isto é, para $z \in D\,(0,1)$.

12. Obtenha o desenvolvimento de Maclaurin da função $\operatorname{sen}^{-1} z$.

Resolução:

Considerando o ramo principal na definição de $\operatorname{sen}^{-1} z$ (ver Capítulo 2) e atendendo ao desenvolvimento binomial (ver exemplo B.3) tem-se para $\left|z^2\right| < 1$, isto é, para $z \in D(0,1)$, que

$$\left(\operatorname{sen}^{-1} z\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}z^4 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} z^{2n}.$$

Primitivando termo a termo a série obtida, conclui-se que

$$\operatorname{sen}^{-1} z = z + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} z^{2n+1}, \text{ com } z \in D\,(0,1)$$

13. Obtenha o desenvolvimento de Maclaurin das seguintes funções, indicando o respectivo disco de convergência absoluta.

a) $\dfrac{1}{1-z^2}$. **b)** $\log\dfrac{1+z}{1-z}$. **c)** $\dfrac{1}{1+z^2}$.

d) $\operatorname{arctg} z = tg^{-1}z$ **e)** $\dfrac{z^2+z^3}{1+z^2}$. **f)** $\dfrac{z^2}{z^4+4}$.

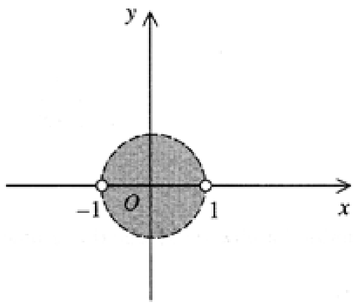
g) z^2+2z. **h)** $\dfrac{1}{(2-z)^3}$.

Resolução:

a) A função $\dfrac{1}{1-z^2}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{1,-1\}$. Logo, pelo teorema de Taylor, será analítica no disco $D(0,1)$.

A função dada é a soma da série geométrica

$$\frac{1}{1-z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^2\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2n},$$



convergente sempre que $\left|z^2\right|<1$, isto é, que $z\in D(0,1)$.

Este desenvolvimento pode ser igualmente obtido, tendo em conta que

$$\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{(1-z)(1+z)}=\frac{\frac{1}{2}}{1+z}+\frac{\frac{1}{2}}{1-z}$$

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{+\infty}1(-1)^n z^n \text{ para } |-z|<1\Leftrightarrow|z|<1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n \text{ para } |z|<1.$$

Tem-se, então, $\dfrac{1}{1-z^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left((-1)^n+1\right)z^n$, para $|z|<1$.

Quando n é impar, a série tem coeficientes nulos e para n par $(n=2k)$ tem-se $\dfrac{1}{1-z^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}z^{2k}$, para $|z|<1$, isto é, $z\in D(0,1)$.

b) Considerando o ramo principal do logaritmo, a função $\log\dfrac{1+z}{1-z}$ é analítica em $D(0,1)$, tendo-se

$$\log\frac{1+z}{1-z}=\log(1+z)-\log(1-z) \text{ e } \left[\log\frac{1+z}{1-z}\right]'=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}.$$

Procedendo como na alínea anterior e aplicando o teorema de integração termo a termo das séries de potências, conclui-se que

$$\left[\log\frac{1+z}{1-z}\right]'=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}2z^{2n},\quad z\in D(0,1)\quad \text{e}\quad \log\frac{1+z}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1},\quad z\in D(0,1).$$

c) Sendo $\dfrac{1}{1+z^2}$ holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$, pelo teorema de Taylor é analítica no disco $D(0,r)$ com $r\le 1$. Tem-se

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-\left(-z^2\right)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

A série anterior é a série de Maclaurin da função $\dfrac{1}{1+z^2}$ que é convergente, sempre que $\left|-z^2\right|<1$, isto é, que $z\in D(0,1)$.

d) A partir das propriedades da função tg z deduz-se que arctg z é uma função analítica, tal que $(\operatorname{arctg} z)'=\dfrac{1}{1+z^2}$ e $\operatorname{arctg} 0=0$ e, pela alínea anterior, $(\operatorname{arctg} z)'=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}$ para $z\in D(0,1)$. O teorema da primitivação termo a termo garante que $\operatorname{arctg} z=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ converge absolutamente para $z\in D(0,1)$, sendo o desenvolvimento pretendido.

e) $$\frac{z^2+z^3}{1+z^2}=\frac{z^2}{1+z^2}+\frac{z^3}{1+z^2}=z^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}+z^3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}=z^2+z^3-z^4-z^5+\ldots$$

f) $$\frac{z^2}{z^4+4}=\frac{\dfrac{z^2}{4}}{1+\dfrac{z^4}{4}}=\frac{z^2}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{4n}}{4^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{4n+2}}{4^{n+1}}.$$

O disco de convergência absoluta da série é

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z^4}{4}\right| < 1\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}\right\} = D\left(0, \sqrt{2}\right).$$

g) Atendendo à unicidade do desenvolvimento de Maclaurin de uma função holomorfa, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ com

$a_1 = 2,\ \ a_2 = 1$ e os restantes coeficientes nulos.

h) Atendendo a que $\dfrac{1}{(2-z)^3} = \dfrac{1}{2^3}\dfrac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3}\left(1-\dfrac{z}{2}\right)^{-3}$, pode aplicar-se o desenvolvimento binomial (ver exemplo B.3) para obter a série procurada.

De outra forma, atendendo a que $\left(\dfrac{1}{2-z}\right)'' = \dfrac{2}{(2-z)^3}$ e a que $\dfrac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$ se $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$, obtém-se, derivando duas vezes a série termo a termo,

$$\frac{2}{(2-z)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} n\,(n-1) z^{n-2} \text{ com } z \in D(0,2).$$

14. Para as séries seguintes indique o respectivo domínio de convergência absoluta e a respectiva função soma.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)z^n.$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+2}}{n!}.$

Resolução:

a) Note-se que $(n+1)\,z^n = \left(z^{n+1}\right)'$. Assim, a série dada sugere a derivação termo a termo de uma série geométrica de razão igual a $(-z)$ e primeiro termo igual a $(-z)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} z^{n+1}$.

Então, se $\dfrac{-z}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} z^{n+1}$ com $z \in D\,(0,1)$, vem $\left(\dfrac{-z}{1+z}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}(n+1)z^n$, donde se conclui que

$$\frac{-1}{(1+z)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)\,z^n \text{ , no disco de convergência absoluta } D(0,1)\,.$$

b) Tem-se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+2}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}z^2}{n!}=z^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(z^2\right)^n}{n!}=z^2e^{z^2}$, sendo o disco de convergência da série igual a $\mathbb{C}$.

15. Desenvolva em série de Taylor, em torno dos pontos indicados, as seguintes funções:

a) e^z em $z_0=1.$

b) $\dfrac{1}{z}$ em $z_0=1\,.$

c) $\dfrac{1}{z^2}$ em $z_0=1\,.$

d) $\log z$ em $z_0=1$ (ramo principal).

e) $\dfrac{1}{1+z}$ em $z_0=i\,.$

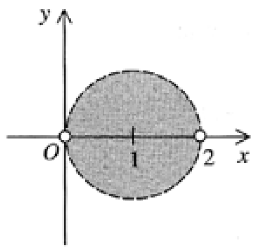
f) $\operatorname{sen} z$ em $z_0=\dfrac{\pi}{2}\,.$

Resolução:

a) $\displaystyle e^z=e\cdot e^{z-1}=e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e(z-1)^n}{n!},$ para $z\in\mathbb{C}$ (ver exemplo B.1.)

b) $\displaystyle \frac{1}{z}=\frac{1}{1-\left[-(z-1)\right]}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n$, sendo o disco de convergência absoluta definido por

$$\{z\in\mathbb{C}:\ \left|-(z-1)\right|<1\}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-1|<1\}=D(1,1)\,.$$



Note-se que, sendo f holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, pelo teorema de Taylor, o disco de maior raio que se pode definir onde a função é analítica é $D\ (1,1)$.

c) Utilizando o desenvolvimento da alínea b) e o teorema da derivação termo a termo de séries de potências tem-se,

$$\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=-\sum_{n=1}^{+\infty}n\,(-1)^n(z-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}n\,(-1)^{n+1}(z-1)^{n-1}$$

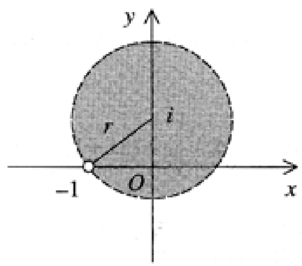
no disco de convergência absoluta $D(1,1)\,.$

d) A função log z (ramo principal) é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy: x\le 0 \ \wedge\ y=0\}$, logo é analítica em $D(1,1)$.

Atendendo a que $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$, e que, pela alínea b), $\dfrac{1}{z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n$ para $z\in D(1,1)$, então, integrando termo a termo esta série ao longo de qualquer curva contida em $D(1,1)$ unindo $z_0=1$ a um ponto arbitrário $z\in D(1,1)$, tem-se $\log z=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1}$ para qualquer $z\in D(1,1)$.

e) A função $\dfrac{1}{1+z}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, logo é analítica no disco $D(i,r)$ onde o valor máximo de r é a distância de $z_0=i$ a $z=-1$, $r\le|i-(-1)|=\sqrt{2}$. Obtém-se, então, o desenvolvimento

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{(1+i)+(z-i)}=\frac{\dfrac{1}{1+i}}{1-\left[-\dfrac{z-i}{1+i}\right]}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+i}\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}}$$



válido para $\left|-\dfrac{z-i}{1+i}\right|<1 \Leftrightarrow |z-i|<\sqrt{2}$, como já se tinha concluído.

f) Faça-se $w=z-\dfrac{\pi}{2}$; como $\operatorname{sen} z=\operatorname{sen}\left(w+\dfrac{\pi}{2}\right)$, a série pedida pode obter-se desenvolvendo $\operatorname{sen}\left(w+\dfrac{\pi}{2}\right)$ em potências de w.

Atendendo a que $\operatorname{sen} z=\operatorname{sen}\left(w+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos w=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{w^{2n}}{(2n)!}$ com $w\in\mathbb{C}$, tem-se

$$\operatorname{sen} z=\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n},$$

sendo o desenvolvimento válido em $\mathbb{C}$.

16. Calcule os três primeiros coeficientes do desenvolvimento de Maclaurin das funções:

a) $f(z)=\dfrac{e^z}{z+1}$. **b)** $g(z)=\dfrac{z}{\cos z}$.

Resolução:

a) A função $f(z)=\dfrac{e^z}{z+1}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$. Assim, será soma da sua série de Maclaurin no disco $D(0,1)$:

$$\frac{e^z}{z+1}=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

Como $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots$, com $z\in\mathbb{C}$, e $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots$, sempre que $|z|<1$, tem-se

$$\frac{e^z}{z+1}=1+(1-1)z+\left(1-1+\frac{1}{2!}\right)z^2+\ldots,\text{ quando } |z|<1.$$

A unicidade do desenvolvimento de Maclaurin permite concluir que $a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=\dfrac{1}{2}$.

b) A função $g(z)=\dfrac{z}{\cos z}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\left\{z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, pelo que pode ser desenvolvida em série de Maclaurin em D (0,r) com $r<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{z}{\cos z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$.

Sendo $z=\dfrac{z}{\cos z}\cos z$, tem-se

$$0+z+0+\ldots=\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots\right)\left(1+0-\frac{z^2}{2!}+0+\ldots\right)$$

e assim $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0$.

17. a) Obtenha o desenvolvimento em série de potências de $(z+2)$ para a função

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4z+7}.$$

b) A partir da série obtida na alínea a), determine a série de Taylor em torno do ponto −2, para a função $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{z+2}{\sqrt{3}}\right)$.

Resolução:

a) Atendendo a que

$$\frac{1}{z^2+4z+7}=\frac{1}{\left(z^2+4z+4\right)+3}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\left[-\left(\frac{z+2}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(-\frac{(z+2)^2}{\sqrt{3}}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z+2)^{2n}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2n+2}},$$

quando $\left|-\left(\dfrac{z+2}{\sqrt{3}}\right)^2\right|<1$, isto é, no conjunto

$$\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z+2|^2<3\right\}=\left\{z\in\mathbb{C}:\ |z+2|<\sqrt{3}\right\}=D\left(-2,\sqrt{3}\right).$$

Note-se que, sendo a função dada holomorfa em

$$\mathbb{C}\setminus\left\{z\in\mathbb{C}:\ z^2+4z+7=0\right\}=\mathbb{C}\setminus\left\{z\in\mathbb{C}:-2\pm i\sqrt{3}\right\},$$

o teorema de Taylor indica que o disco de convergência absoluta seria $D(-2,r)$ com

$$r\le\left|\left(-2\pm i\sqrt{3}\right)-(-2)\right|=\sqrt{3}\ .$$

b) Observe-se que $\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{z+2}{\sqrt{3}}\right)\right)'=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{z+2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3+(z+2)^2}=\sqrt{3}f(z)$.

Então, por primitivação termo a termo da série obtida em a),

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{z+2}{\sqrt{3}}\right)=C+\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z+2)^{2n+1}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n+2}(2n+1)},\quad z\in D\left(-2,\sqrt{3}\right).$$

Fazendo $z=-2$, como $\operatorname{arctg}0=0$, tem-se $C=0$ e, assim,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{z+2}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z+2)^{2n+1}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n+2}(2n+1)},\quad z\in D\left(-2,\sqrt{3}\right).$$

18. Para as funções $f(z)$ seguintes, indique quais os zeros e a respectiva ordem:

a) $\dfrac{z^2+1}{z}$. **b)** $\left(e^z+1\right)^2$. **c)** $2\cosh(2z)+2$.

Resolução:

a) No domínio da função, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, tem-se

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z}=0 \Leftrightarrow z^2+1=0 \Leftrightarrow z=\pm i \text{ e } f'(z)=\left(\frac{z^2+1}{z}\right)'=1-\frac{1}{z^2}.$$

Logo, $f'(i)=2\neq 0$ e $f'(-i)=2\neq 0$, ou seja, i e $-i$ são zeros simples da função.

b) O domínio da função é o conjunto $\mathbb{C}$, e os zeros da função são os pontos, tais que:

$$f(z)=\left(e^z+1\right)^2=0 \Leftrightarrow e^z+1=0 \Leftrightarrow e^z=-1 \Leftrightarrow z=i\pi+2k\pi i=i\pi\,(2k+1),\quad k\in\mathbb{Z}$$

A função derivada é definida por: $f'(z)=2\left(e^z+1\right)e^z$, logo os zeros de f' coincidem com os de f. Como $f''(z)=2e^{2z}+2\left(e^z+1\right)e^z$, para os pontos $z=i\pi\,(2k+1)$ verifica-se que $f''\left(i\pi\,(2k+1)\right)\neq 0$. Os zeros da função são pois zeros de ordem 2.

c) $f(z)=2\cosh 2z+2=2\left(\dfrac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}\right)+2=e^{2z}+e^{-2z}+2$

$$f(z)=0 \Leftrightarrow e^{2z}+e^{-2z}+2=0 \Leftrightarrow e^{4z}+2e^{2z}+1=0 \underset{w=e^{2z}}{\Leftrightarrow} w^2+2w+1=0 \Leftrightarrow (w+1)^2=0 \Leftrightarrow w+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2z}=-1 \Leftrightarrow e^{2z}=e^{i\pi} \Leftrightarrow 2z=i\pi+2k\pi i,\quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow z_k=\frac{(2k+1)\pi}{2}i,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Os zeros da função são $z_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}i$, $k\in\mathbb{Z}$.

Sendo

$$f'(z)=4\operatorname{senh} 2z=0 \Leftrightarrow 4\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{2}=0 \Leftrightarrow e^{2z}=e^{-2z} \Leftrightarrow z=0+k\frac{\pi}{2}i,\quad k\in\mathbb{Z}$$

e como $\frac{(2k+1)\pi}{2}i = 2k\pi i \Leftrightarrow 2k+1 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ é impossível, tem-se que $f'(z_k) \neq 0$ e assim os zeros de $f(z)$ são simples.

19. Seja f uma função analítica em $D(0,1)$. Suponha que, para a sucessão $u_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, se tem $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que f é nula em $D(0,1)$.

Resolução:

Sendo f uma função analítica em $D(0,1)$, ela é contínua nesse conjunto. Assim, se $\lim u_n = \lim \frac{1}{n^2} = 0$, tem-se que $\lim f(u_n) = \lim f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 = f\left(\lim \frac{1}{n^2}\right) = f(0)$, logo $z_0 = 0$ é um zero não isolado de f. A observação ao teorema B.4 permite concluir que f é identicamente nula em $D(0,1)$.

20. Considere a função

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{1}{z}} - 1 & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}.$$

a) Determine o conjunto, Z_f, dos zeros de f.

b) Verifique que Z_f tem um ponto de acumulação e que f não é nula em $\mathbb{C}$. Explique por que razão não se contradiz o teorema B.4.

Resolução:

a) Os zeros da função f são; o ponto 0, pois $f(0) = 0$ e os pontos $z \neq 0$ tais que

$$e^{\frac{1}{z}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z_k} = 0 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Leftrightarrow z_k = \frac{1}{2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Assim, $Z_f = \left\{ z_k = \frac{1}{2k\pi i}, \quad k \in Z \setminus \{0\} \right\} \cup \{0\}$.

b) Os zeros de f da forma $\dfrac{1}{2k\pi i}$ são zeros isolados, mas $z = 0$ é um ponto de acumulação de Z_f.

Não se contradiz o teorema B.4., pois não se verifica a hipótese de f ser analítica em Z_f. De facto, para $z = 0$,

$\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right)$ não existe, razão pela qual a função não é contínua e portanto, não analítica nesse ponto.

21. Sejam f uma função analítica num domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ e γ uma circunferência contida em Ω, descrita no sentido positivo.

Mostre que, se f só tem um zero, z_0, de ordem 1, tal que $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$, então

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z)}dz$$

Resolução:

Seja $D(z_0, r)$ um disco fechado contido no interior de γ. Pelo teorema B.3., $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$, com $z \in D(z_0, r)$ sendo $\varphi(z)$ uma função analítica em $D(z_0, r)$, tal que $\varphi(z_0) \neq 0$.

Pelo teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{z f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{z\left[\varphi(z) + (z-z_0)\varphi'(z)\right]}{(z-z_0)\varphi(z)}dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{z}{z-z_0}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz.\end{aligned}$$

Por aplicação da fórmula integral de Cauchy à função $g(z) = z$, verifica-se que a primeira parcela é igual a z_0 e aplicando o teorema de Cauchy à função $h(z) = \dfrac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, conclui-se que a segunda parcela é igual a zero. Então,

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z)}dz\,.$$

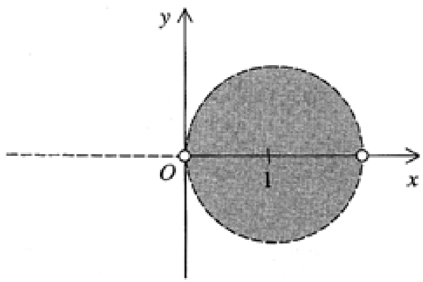
22. Considerando o ramo principal do logaritmo, diga que valor se deve atribuir às constantes k e r, de modo que

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\log z}{z-1} & \text{se} \quad z\neq 1\\[2ex] k & \text{se} \quad z=1\end{cases}$$

seja analítica no conjunto $\{z\in\mathbb{C}: |z-1|<r\}$.

Resolução:

A função f está definida no conjunto $\{z\in\mathbb{C}:\ |z-1|<1\}=D(1,1)$, sendo analítica em $D^*(1,1)=D(1,1)\setminus\{1\}$.



Analise-se a continuidade no ponto $z = 1$:
Pela regra de L'Hospital (ver exercício 24 do Capítulo 2),

$$\lim_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\log z}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z}=1,$$

logo, se $k=f(1)=1$, a função é contínua no ponto $z = 1$. Então, para $k = 1$, a função é contínua em $D\,(1,1)$ e analítica em $D^*\,(1,1)$; pelo teorema C.1., a função é então analítica em $D\,(1,1)$.

23. Sejam $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$, onde f e g são funções analíticas em $\Omega\subset\mathbb{C}$ e z_0 um zero de ordem k para f e um zero de ordem p para g. Mostre que:

i) Se $k\geq p$, z_0 é uma singularidade removível para $\varphi\,(z)$.

ii) Se $k<p$, z_0 é um pólo de ordem $(p–k)$ de $\varphi\,(z)$.

***Resolução*:**

A função φ é analítica em $\Omega \setminus Z_g$ (Z_g designa-se o conjunto dos zeros de g).

i) Se $k > p$,

$$\varphi(z) = \frac{(z-z_0)^k f^*(z)}{(z-z_0)^p g^*(z)} = (z-z_0)^{k-p} \frac{f^*(z)}{g^*(z)},$$

onde $f^*(z)$ e $g^*(z)$ são analíticas e $f^*(z) \neq 0$ e $g^*(z) \neq 0$ numa vizinhança de z_0 (ver teorema B.3.). Então

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^{k-p} \frac{f^*(z)}{g^*(z)} = 0,$$

donde se conclui que z_0 é uma singularidade removível de $\varphi(z)$.

Se $k = p$,

$$\varphi(z) = \frac{(z-z_0)^p f^*(z)}{(z-z_0)^p g^*(z)} = \frac{f^*(z)}{g^*(z)}.$$

Então

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f^*(z)}{g^*(z)} = \frac{f^*(z_0)}{g^*(z_0)},$$

como $g^*(z) \neq 0$ numa vizinhança de z_0, conclui-se que z_0 é uma singularidade removível de $\varphi(z)$.

ii) Se $k < p$, tal como em i),

$$\varphi(z) = \frac{(z-z_0)^k f^*(z)}{(z-z_0)^p g^*(z)} = \frac{f^*(z)}{(z-z_0)^{p-k} g^*(z)}.$$

Então

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f^*(z)}{(z-z_0)^{p-k} g^*(z)} = \infty,$$

pois $f^*(z) \neq 0$ numa vizinhança de z_0, logo z_0 é um pólo para $\varphi(z)$. Como

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^{p-k} \varphi(z) = \frac{f^*(z)}{g^*(z)} \neq 0, \infty,$$

conclui-se que a ordem do pólo é $p-k$.

24. Classifique as singularidades das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{\cos z}$. **b)** $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z\ (1-z)}$. **c)** $\dfrac{1}{z \operatorname{sen}(\pi z)}$.

d) tg z. **e)** $\dfrac{z-1}{z^3-1}$. **f)** $\dfrac{z^3+i}{(z-1)\left(z^2+1\right)}$,

g) $\dfrac{e^z}{\operatorname{senh} z}$. **h)** $\cos\dfrac{1}{z}$.

Resolução:

a) As singularidades da função $\dfrac{1}{\cos z}$ são $\{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\} = \left\{z \in \mathbb{C} :\ z = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Para $n \in \mathbb{Z}$, tem-se que $\lim\limits_{z \to (2n+1)\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos z} = \infty$ e $\lim\limits_{z \to (2n+1)\frac{\pi}{2}} \left(z-(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\dfrac{1}{\cos z} = 1 \neq 0, \infty$, as singularidades são pólos simples (ver definição C.2. ii) e definição C.3.)

b) As singularidades de $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z\ (1-z)}$ são $\{z \in \mathbb{C} : z = 0 \ \ \wedge \ \ 1-z=0\} = \{0,1\}$.

Atendendo a que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z(1-z)} = 1$, a singularidade $z = 0$ é removível. Como $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z\,(1-z)} = \infty$ e $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{(z-1)\operatorname{sen} z}{z\,(1-z)} = -\operatorname{sen} 1 \neq 0, \infty$ o ponto $z = 1$ é um pólo de ordem 1.

c) As singularidades de $\dfrac{1}{z \operatorname{sen}(\pi z)}$ são $\{z \in \mathbb{C} :\ \ z = 0 \ \ \vee \ \ z = n,\ \ n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

Como $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{z \operatorname{sen}(\pi z)} = \infty$ e $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^2}{z \operatorname{sen}(\pi z)} = \dfrac{1}{\pi}$ conclui-se que a singularidade $z = 0$ é um pólo de ordem 2.

Para as singularidades $z = n,\ \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{z \to n} \dfrac{1}{z \operatorname{sen}(\pi z)} = \infty$, tendo-se para n par $\lim\limits_{z \to n} \dfrac{(z-n)}{z \operatorname{sen}(\pi z)} = \dfrac{1}{n\pi}$ e para n impar $\lim\limits_{z \to n} \dfrac{(z-n)}{z \operatorname{sen}(\pi z)} = -\dfrac{1}{n\pi}$; então estas singularidades são polos de ordem 1 da função.

d) As singularidades da função $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ são $\left\{ z \in \mathbb{C} : \ z = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Para $n \in \mathbb{Z}$, tem-se que $\lim\limits_{z \to \frac{\pi}{2} + n\pi} \operatorname{tg} z = \infty$; estes pontos singulares são pólos. Pelo exercício 23 (ii) pode concluir-se que são pólos simples (atendendo que a função sen z não se anula para $z = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$).

e) Os pontos $\left\{ 1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \right\}$ são as singularidades da função $\dfrac{z-1}{z^3 - 1}$.

Para o ponto $z = 1$,

$$\lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z^3 - 1} = \frac{1}{3},$$

logo este ponto é uma singularidade removível da função.

Para o ponto $z = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$,

$$\lim_{z \to \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{(z-1)}{z^3 - 1} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \to \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{\left(z - \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \right)(z-1)}{z^3 - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}i},$$

logo este ponto é um pólo de ordem 1.

Para $z = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$,

$$\lim_{z \to \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{(z-1)}{z^3 - 1} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \to \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{\left(z - \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right)(z-1)}{z^3 - 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}i},$$

donde se conclui que este ponto é um pólo de ordem 1.

f) Os pontos $\{1, i, -i\}$, são as singularidades da função.

Para $z = 1$, tem-se $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^3+i}{(z-1)\left(z^2+1\right)} = \infty$ e $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{(z-1)\left(z^3+i\right)}{(z-1)\left(z^2+1\right)} = \dfrac{1+i}{2}$, logo $z = 1$ é um pólo de ordem 1.

Para $z = i$, como $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^3+i}{(z-1)\left(z^2+1\right)} = \dfrac{3}{2+2i}$, este ponto é uma singularidade removível da função.

Para $z = -i$, tem-se $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z^3+i}{(z-1)\left(z^2+1\right)} = \infty$ e $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{(z+i)\left(z^3+i\right)}{(z-1)\left(z^2+1\right)} = \dfrac{1}{1+i}$, logo $z = -i$ é um pólo de ordem 1.

g) As singularidades da função $\dfrac{e^z}{\operatorname{senh} z}$, são os zeros de senh z, isto é, os pontos z tais que

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^z\left(1 - e^{-2z}\right) = 0 \Leftrightarrow z_k = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Para estes pontos, tem-se

$$\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{e^z}{\operatorname{senh} z} = \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{2e^z}{e^z - e^{-z}} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{2e^z(z - 2k\pi i)}{e^z - e^{-z}} = e^{2k\pi i} = 1;$$

os pontos z_k são assim pólos de ordem 1 da função.

h) O ponto $z = 0$ é uma singularidade essencial da função $\cos\dfrac{1}{z}$, uma vez que não existe o seu limite quando z tende para zero.

25. Determine os desenvolvimentos de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ em série de Laurent válidos nos seguintes domínios:

a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. **b)** $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. **c)** $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

Resolução:

A função $f(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0,1,2\}$, sendo as suas singularidades pólos de ordem 1.

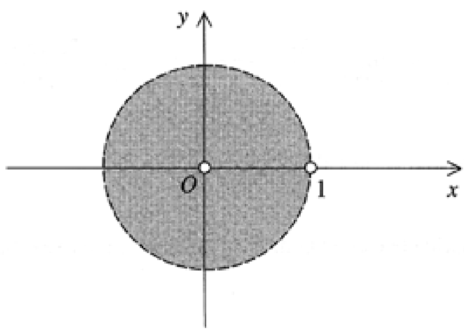
a) O desenvolvimento em série de Laurent no conjunto $\{z \in \mathbb{C}: \ 0 < |z| < 1\} = C(0,0,1)$ é em torno do pólo simples $z_0 = 0$, logo é da forma $\sum_{n=-1}^{+\infty} c_n z^n$ (ver teorema C.8.).

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}\right) \underset{(*)}{=} \frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right] =$$

$$= \frac{1}{z}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \left(-\frac{1}{2^{n+1}} + 1\right)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1}\left(-\frac{1}{2^{n+1}} + 1\right) = \sum_{n=-1}^{+\infty} z^n \left(-\frac{1}{2^n} + 1\right),$$

(*) a convergência absoluta destas séries ocorre, respectivamente, em $\left\{z \in \mathbb{C}: \ \left|\frac{z}{2}\right| < 1\right\}$ e $\{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1\}$

e assim a convergência absoluta da série em causa verifica-se em $\{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1\} \setminus \{0\} = C(0,0,1)$.



b) Atendendo a que

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right) \underset{(*)}{=} \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{z^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+2}} =$$

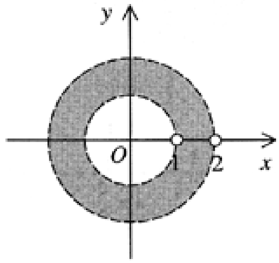
$$= \ldots + \frac{1}{z^2} + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)\frac{1}{z} + \left(-\frac{1}{2^2} - 1\right) - \frac{1}{2^3}z + \ldots,$$

(*) a primeira série é absolutamente convergente no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ e a segunda é absolutamente convergente no conjunto

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{1}{z}\right| < 1, \ (z \neq 0)\right\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

A série pretendida é pois absolutamente convergente na intersecção dos dois domínios, isto é, no conjunto

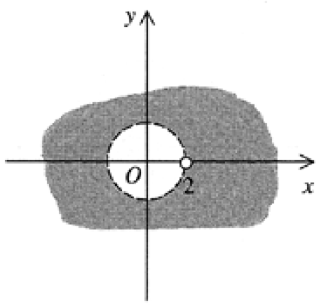
$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} = C(0,1,2).$$



c) $f(z) = \dfrac{1}{z}\left[\dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}\right] = \dfrac{1}{z^2}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+2}}\left(2^n - 1\right)$

A série anterior converge absolutamente no conjunto

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{2}{z}\right| < 1\right\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{1}{z}\right| < 1\right\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} = C(0,2,+\infty).$$



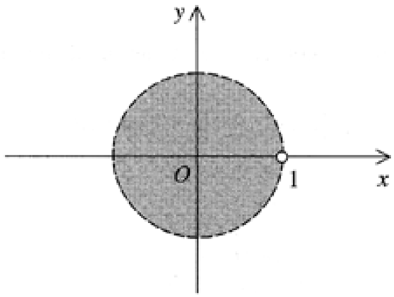
26. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$.

a) Desenvolva f em série de Maclaurin.

b) Desenvolva f em série de potências de $(z-1)$ e em potências de $(z-2)$.

Resolução:

a) A função dada está definida no conjunto $D=\left\{z\in\mathbb{C}: z^2-3z+2\neq 0\right\}=\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$, podendo ser desenvolvida em série de Maclaurin no disco $D(0,1)$.

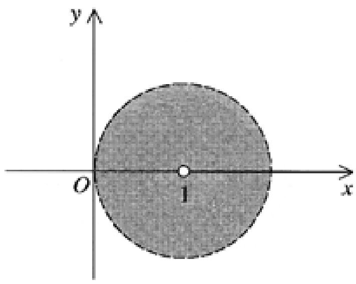


$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)}{2^{n+1}}+1\right)z^n.$$

esta série converge absolutamente no conjunto

$$\left\{z\in\mathbb{C}:\left|\frac{z}{2}\right|<1\right\}\cap\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\right\}=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\right\}.$$

b) Atendendo a que $z_0=1$ é um pólo de 1.ª ordem da função f, pois $\lim\limits_{z\to 1}f(z)=\infty$ e $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z)=-1$, pode desenvolver-se f em série de Laurent em torno do ponto $z_0=1$ em $C(1,0,1)$ (ver teorema C.6. e C.8.)



$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{(z-1)-1}\right)=\frac{1}{z-1}\left(\frac{-1}{1-(z-1)}\right)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)(z-1)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)(z-1)^{n-1}=\sum_{n=-1}^{+\infty}(-1)(z-1)^n.$$

Analogamente se obteria o desenvolvimento em série de potências de $(z-2)$ na coroa circular $C(2,0,1)$.

27. Considere a função $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{z-1}\right)$. Classifique a singularidade $z=1$ e determine o desenvolvimento de Laurent da função neste ponto.

Resolução:

Visto $\lim\limits_{z\to 1}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{z-1}\right)$ não existir, $z=1$ é uma singularidade essencial. Atendendo ao exemplo B.1., tem-se

$\operatorname{sen} w = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}w^{2n+1}$ com $w\in\mathbb{C}$, logo

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}\text{ , isto é para } z\in C(1,0,+\infty).$$

28. Desenvolva a função $e^{\frac{z}{z-1}}$ em série de Laurent em torno do ponto $z=1$ e classifique esta singularidade.

Resolução:

A função $e^{\frac{z}{z-1}}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, logo pode ser desenvolvida em série de Laurent em torno da singularidade $z=1$. Assim, na coroa circular $C(1,0,+\infty)$, tem-se

$$e^{\frac{z}{z-1}}=e^{\frac{z-1+1}{z-1}}=e^{1+\frac{1}{z-1}}=e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}=e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}\frac{1}{n!}.$$

29. Considere a função $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+2z+1}$.

a) Desenvolva f em série de potências de $(z+1)$.

b) Desenvolva f em torno de $z=0$.

Resolução:

a) A função $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+2z+1}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ tendo um pólo de ordem 2 no ponto $z=-1$, pois

$$\lim_{z\to-1}\frac{2z+1}{z^2+2z+1}=\infty\quad\text{e}\quad\lim_{z\to-1}(z+1)^2\frac{2z+1}{z^2+2z+1}=-1\neq 0,\infty.$$

Então, a unicidade do desenvolvimento em série de Laurent permite concluir que o respectivo desenvolvimento se reduz a

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+2z+1}=\frac{2(z+1)-1}{(z+1)^2}=\frac{2}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2} \quad \text{em } C(1,0,+\infty),$$

isto é, a parte regular possui todos os coeficientes nulos.

b) Tendo-se

$$\frac{2z+1}{z^2+2z+1}=\frac{2}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}$$

e como $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$ com $|z|<1$, tem-se $-\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n z^{n-1}$ e assim

$$\begin{aligned}\frac{2z+1}{z^2+2z+1}&=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n z^{n-1} \quad \text{com } z\in D(0,1)\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)z^n\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(1-(n+1))z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nz^n \quad \text{com } z\in D(0,1).\end{aligned}$$

30. Considere a função $f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{z}$. Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ para o qual se pode ter $\int_0^z \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$, e calcule os coeficientes c_n.

Resolução:

a) A função $f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Como $\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1$, $z_0=0$ é uma singularidade removível para a função.

Como $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, com $z \in \mathbb{C}$, obtém-se $\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$ com $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então

$$\int_0^z \frac{\operatorname{sen}\, t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad \text{com } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Como para $z = 0$ a igualdade anterior é trivialmente verdadeira, pode escrever-se que

$$\int_0^z \frac{\operatorname{sen}\, t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \quad \text{com } z \in \mathbb{C}.$$

Capítulo 6

RESÍDUOS

A. Cálculo de resíduos

Pelo teorema de Laurent (ver Capítulo 5), se uma função f é analítica em

$$C(z_0,0,r)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-z_0|<r\}\quad(0<r\leq+\infty),$$

então admite um desenvolvimento em série de Laurent no ponto, z_0,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\ \text{ com }\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,$$

em que C é qualquer circunferência de centro z_0 e raio ρ tal que $0<\rho<r$.

Definição A.1.

Chama-se **resíduo** de uma função f na singularidade isolada z_0, ao coeficiente c_{-1} do desenvolvimento de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0,0,r)$, e escreve-se

$$\text{res}\ (f,\ z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz\,.$$

Observação:
O coeficiente c_{-1} destaca-se dos restantes coeficientes do desenvolvimento de Laurent pelo seu papel fundamental no cálculo de integrais, já que $\int_C f(z)dz = 2\pi i c_{-1}$.

Analisa-se em seguida o cálculo de resíduos nos diferentes tipos de singularidades.

1. z_0 é uma *singularidade removível* de f:

Neste caso, existe $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$ com $|L| < +\infty$, e a série de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0,0,r)$ tem os coeficientes da parte principal nulos (ver teorema C.8. do Capítulo 5), isto é,

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ \dots \ \text{ em } \ C(z_0,0,r)\,.$$

Então, $c_{-1} = \text{res}\left(f, z_0\right) = 0$.

2. z_0 é um *pólo* de f de ordem k, $k \in \mathbb{N}$:

Neste caso, a parte principal da série de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0,0,r)$ tem um número finito de termos não nulos (ver teorema C.8. do Capítulo 5); tem-se assim

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ \dots \ + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $(z-z_0)^k$, obtém-se

$$(z-z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \ \dots \ + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + c_1(z-z_0)^{k+1} + \ \dots$$

A série que figura no segundo membro da igualdade é uma série de potências positivas de $(z-z_0)$, pelo que pode ser derivada termo a termo um número qualquer de vezes (ver teorema A.6. do Capítulo 5). Então, derivando $(k-1)$ vezes, obtém-se

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]=(k-1)!c_{-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[c_n(z-z_0)^{k+n}\right].$$

Como os termos da série correspondentes a $n \geq 0$ contêm o factor $(z-z_0)$, tem-se

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]=(k-1)!\,c_{-1},$$

isto é,

$$c_{-1}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right].$$

Observação:

1. Note-se que c_{-1} é o coeficiente de ordem k–1 no desenvolvimento de Taylor no ponto z_0 da função $g(z)=(z-z_0)^k f(z)$. Então,

$$c_{-1}=\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}g}{dz^{k-1}}(z_0).$$

2. Em particular, se z_0 é um pólo simples de f, tem-se $c_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Exemplo A.1.

Se f é definida por $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, f tem um pólo simples em $z=1$ e um pólo duplo em $z=-1$. Então,

$$\operatorname{res}(f,1)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right)\right]=\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{res}(f,-1)=\lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right)\right]=-\frac{1}{4}.$$

Exemplo A.2.

Seja $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ em que φ e ψ são funções analíticas em z_0 tais que $\varphi(z_0)\neq 0$ e z_0 é um zero simples de ψ, então $\operatorname{res}(f,z_0)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$. Com efeito, se z_0 é um zero simples de ψ, tem-se $\psi(z)=(z-z_0)\psi^*(z)$ com $\psi^*(z_0)\neq 0$. Então,

$$\operatorname{res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)\psi^*(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi^*(z_0)}.$$

Como $\psi'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{(z-z_0)\psi^*(z)}{z-z_0}=\psi^*(z_0)$, tem-se finalmente $\operatorname{res}(f,z_0)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

3. z_0 é uma *singularidade essencial* de f:

Como, neste caso, a parte principal da série de Laurent de f no ponto z_0 tem uma infinidade de termos não nulos, o cálculo do resíduo de f no ponto z_0 faz-se recorrendo à própria série.

Exemplo A.3.

A função f definida em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ por $f(z)=e^{-2/z}$ tem uma singularidade essencial em $z=0$. No exemplo B.1 do Capítulo 5 obteve-se em $\mathbb{C}$, $e^z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}z^n$ e, portanto,

$$f(z)=1+\left(-\frac{2}{z}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{2}{z}\right)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{2}{z}\right)^n,$$

de onde se conclui que $\operatorname{res}(f,0)=-2$.

B. Teorema dos resíduos de Cauchy

O teorema dos resíduos de Cauchy desempenha para as funções com singularidades isoladas um papel análogo ao que o teorema de Cauchy representa para as funções holomorfas. Trata-se de um resultado com numerosas aplicações, quer teóricas, quer práticas, algumas das quais serão tratadas na Secção C.

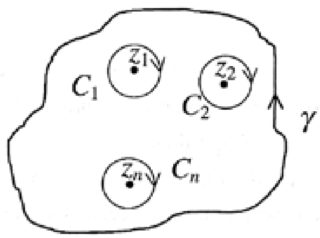
Teorema B.1. (Teorema dos resíduos de Cauchy)

Seja f uma função analítica num domínio Ω de $\mathbb{C}$ excepto num número finito de singularidades isoladas z_j, $1 \leq j \leq n$, e seja γ uma curva de Jordan seccionalmente regular contida em Ω que contém os pontos z_j no seu interior. Então,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}\left(f, z_j\right).$$

Demonstração:

Considerem-se circunferências C_1, ..., C_n de centros z_1, ..., z_n e raio r, com r escolhido de modo que estas circunferências sejam disjuntas e fiquem no interior de γ.



Do teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos (teorema B.7. do Capítulo 3) resulta que $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz$.

Mas, sendo f analítica no interior de cada C_j excepto em z_j ($1 \leq j \leq n$), tem-se, pelo teorema de Laurent e pelo teorema A.5 do Capítulo 5, que

$$\int_{C_j} f(z)dz = \int_{C_j} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(z - z_j\right)^n \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{C_j} c_n \left(z - z_j\right)^n dz \right).$$

Se $n = -1$, conclui-se, por aplicação da fórmula integral de Cauchy, que

$$\int_{C_j} c_{-1}\left(z - z_j\right)^{-1} dz = c_{-1}\int_{C_j} \frac{1}{z - z_j} dz = c_{-1} 2\pi i = 2\pi i \ \operatorname{res}\left(f, z_j\right).$$

Se $n > -1$ conclui-se, pelo teorema de Cauchy, que $\int_{C_j} c_n\left(z - z_j\right)^n dz = 0$.

Se $n < -1$ conclui-se, por aplicação da fórmula integral de Cauchy para as derivadas, que

$$\int_{C_j} c_n\left(z - z_j\right)^n dz = c_n \int_{C_j} \frac{1}{\left(z - z_j\right)^{-n}} dz = 0,$$

pois $-n > -1$ e a derivada da função constante igual a 1 é zero. Assim,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}\left(f, z_j\right).$$

Observação:
Pode demonstrar-se uma versão mais geral do teorema dos resíduos de Cauchy para curvas fechadas não simples. Tem-se neste caso um enunciado que faz intervir os índices $I\,(\gamma, z_j)$ da curva γ relativamente a cada z_j (ver a observação no final da Secção A do Capítulo 4):
Seja f uma função holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$ excepto num número finito de singularidades isoladas z_j, $1 \le j \le n$ e γ uma curva fechada seccionalmente regular contida em Ω e contendo os pontos z_j no seu interior. Então,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}\left(f, z_j\right) I\left(\gamma, z_j\right),$$

em que $I\,(\gamma, z_j)$ designa o índice da curva γ relativamente a z_j. (Para um maior desenvolvimento desta questão ver, por exemplo, Ahlfors, L., *Complex Analysis*.)

Exemplo B.1.

Calcule-se $\int_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz$.

Seja $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$; o ponto $z_1=1$ é um pólo simples de f e $z_2=-1$ é um pólo duplo de f, ambos interiores à circunferência $|z|=2$. Pelo exemplo A.1, $\operatorname{res}(f,1)=\frac{1}{4}$ e $\operatorname{res}(f,-1)=-\frac{1}{4}$.

Por aplicação do teorema dos resíduos de Cauchy, tem-se então

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=0.$$

Exemplo B.2.

A fórmula integral de Cauchy pode demonstrar-se à custa do teorema dos resíduos de Cauchy. Com efeito, se f é analítica no interior e sobre uma curva de Jordan γ seccionalmente regular e z_0 é um ponto interior a γ, a função $g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$ é analítica no interior de γ excepto em z_0 e assim

$$\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(g,z_0).$$

Se $f(z_0)\neq 0$, z_0 é um pólo simples de g e, então, $\operatorname{res}(g,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)=f(z_0)$, obtendo-se

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0), \text{ isto é, } f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Se $f(z_0)=0$, z_0 é uma singularidade removível de g (porque $\lim_{z\to z_0} g(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$) e $\operatorname{res}(g,z_0)=0$, obtendo-se $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0 = 2\pi i f(z_0)$.

Conclui-se assim que

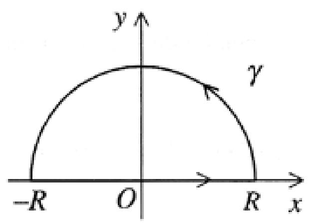
$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

C. Aplicações

De entre as aplicações do teorema dos resíduos de Cauchy, destaca-se o cálculo de alguns integrais definidos e impróprios de funções reais de variável real. Nestas aplicações, surge frequentemente a necessidade de calcular o integral ao longo de circunferências com raio a tender para infinito e ao longo de circunferências com raio a tender para zero. Analisam-se em seguida alguns resultados auxiliares que serão utilizados neste tipo de situações.

Teorema C.1.

Seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ uma função contínua sobre a curva C, formada pela justaposição da semi-circunferência parametrizada por $\gamma(\theta)=Re^{i\theta}$, com $\theta\in[0,\pi]$, e pelo segmento de recta com origem $(-R,0)$ e extremidade $(0,R)$.



(i) Se existem constantes $M>0$ e $k>1$ tais que para z sobre γ se tem $|f(z)|\leq\dfrac{M}{R^k}$, então

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\gamma f(z)dz=0.$$

(ii) Se existem constantes $M>0$ e $k>0$ tais que para z sobre γ se tem $|f(z)|\leq\dfrac{M}{R^k}$, então

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\gamma e^{imz}f(z)dz=0 \text{ para } m>0.$$

Demonstração:

(i) Se f é tal que, para z sobre γ se tem $|f(z)|\leq\dfrac{M}{R^k}$, com $M>0$ e $k>1$, pela majoração do integral (ver teorema A.8. do Capítulo3), $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\leq\dfrac{M}{R^k}\pi R=\dfrac{\pi M}{R^{k-1}}$.

Como $k > 1$, tem-se

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi M}{R^{k-1}} = 0 \quad \text{e consequentemente} \quad \lim_{R\to+\infty}\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(ii) Suponha-se que f é tal que, para z sobre γ, se tem $|f(z)| \le \dfrac{M}{R^k}$, com $M > 0$ e $k > 0$. Tem-se

$$\left|\int_\gamma e^{imz} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi e^{im(R\cos\theta + iR\,\text{sen}\,\theta)} f\left(Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \le$$

$$\le \int_0^\pi \left|e^{im(R\cos\theta+iR\,\text{sen}\,\theta)} f\left(Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}\right| d\theta \le$$

$$\le \int_0^\pi e^{-mR\,\text{sen}\,\theta}\frac{M}{R^k}R\,d\theta = \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^\pi e^{-mR\,\text{sen}\,\theta}d\theta =$$

$$= \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta.$$

Como, para $0 < \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ a função $\varphi(\theta) = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$ decresce à medida que θ cresce, conclui-se que, para $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi(\theta) \ge \varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi/2}$, isto é, $\text{sen}\,\theta \ge \dfrac{2\theta}{\pi}$ sempre que $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Obtém-se, então,

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta \le \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2mR\theta/\pi}\,d\theta = \frac{\pi M}{mR^k}\left(1 - e^{-mR}\right).$$

Sendo $\left|\int_\gamma e^{imz} f(z)dz\right| \le \dfrac{2M}{R^{k-1}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\,\text{sen}\,\theta}\,d\theta \le \dfrac{\pi M}{mR^k}\left(1 - e^{-mR}\right)$, tem-se

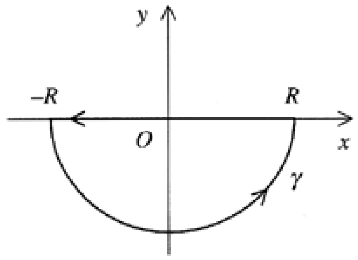
$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_\gamma e^{imz} f(z)dz\right| \le \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi M}{mR^k}\left(1 - e^{-mR}\right) = 0 \ \text{(pois } m > 0\text{)}$$

e, assim,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\gamma e^{imz} f(z)dz = 0.$$

Observação:

1. Para $m < 0$ o teorema anterior mantém-se verdadeiro e tem uma demonstração análoga, desde que se considere a curva formada pela justaposição da semi-circunferência parametrizada por $\gamma(\theta) = R\, e^{i\theta}$, com $\theta \in [\pi, 2\pi]$, e pelo segmento de recta com origem $(0, R)$ e extremidade $(-R, 0)$.



2. Se f é uma função racional própria, $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, em que os graus de P e Q são respectivamente n e m, existem $M > 0$ e $R > 0$, tais que, para $|z| \geq R$, se tem

$$|f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{R^k} \quad \text{com } k = m-n.$$

Teorema C.2.

Seja f uma função analítica em $C(z_0, 0, r)$ com um pólo simples em z_0 e tal que $\operatorname{res}(f, z_0) = b$.

Seja $\gamma_\varepsilon(\theta) = z_0 + \varepsilon\, e^{i\theta}$ em que $0 < \varepsilon < r$ e $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Então,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz = ib(\theta_2 - \theta_1).$$

Demonstração:

Como z_0 é um pólo simples da função f, $\operatorname{res}(f, z_0) = b = \lim_{z \to a} (z - z_0) f(z)$.

Definindo em $C(z_0, 0, r)$ a função g por

$$g(z) = (z - z_0) f(z) - b,$$

verifica-se que $\lim_{z \to a} g(z) = 0$, isto é, dado $\delta > 0$, existe $\eta > 0$ tal que $|g(z)| < \delta$, sempre que $0 < |z - z_0| < \eta$.

Tomando $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < \eta$ sempre que z está sobre γ_ε, tem-se $\gamma'_\varepsilon(\theta) = \varepsilon i e^{i\theta} = i(z - z_0)$ e, consequentemente,

$$\left|\left(\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\right) - ib(\theta_2 - \theta_1)\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[f(\gamma_\varepsilon(\theta))\,\gamma'_\varepsilon(\theta) - ib\right]d\theta\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[f(\gamma_\varepsilon(\theta))\,\varepsilon i e^{i\theta} - ib\right]d\theta\right| =$$

$$= \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[f(\gamma_\varepsilon(\theta))(\gamma_\varepsilon(\theta) - z_0) - b\right]d\theta\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\gamma_\varepsilon(\theta))d\theta\right| < \delta(\theta_2 - \theta_1).$$

Resulta, assim, que

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = ib(\theta_2 - \theta_1).$$

No cálculo de certos integrais definidos e impróprios de funções de variável real, é frequente utilizar-se o teorema dos resíduos de Cauchy, aplicado a uma função de variável complexa e a uma curva adequadas.

Atendendo a que vão estar envolvidos integrais impróprios, convém recordar previamente algumas questões que podem surgir associadas ao tipo de funções envolvidas e ao tipo de curvas auxiliares escolhidas.

Assim, recorde-se que:

(i) Se f é uma função (real ou complexa) integrável em cada intervalo da forma $[0, R]$, $0 < R < +\infty$, o **integral impróprio de** f **em** $[0, +\infty[$ é convergente se existe e é finito o limite $\lim_{R \to +\infty}\int_0^R f(x)dx$, e escreve-se

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \to +\infty}\int_0^R f(x)dx.$$

(ii) Se f é uma função (real ou complexa) integrável em cada subintervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$, o **integral impróprio de f em $\mathbb{R}$** é convergente se existe e é finito o limite $\lim_{R,S \to +\infty}\int_{-S}^R f(x)dx$, caso este limite exista, e escreve-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R,S \to +\infty}\int_{-S}^R f(x)dx.$$

(iii) Se f é uma função (real ou complexa) integrável em cada subintervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$, o **valor principal (V. P.) do integral de f em $\mathbb{R}$** é definido por $\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$, caso este limite exista e seja finito, e escreve-se

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx .$$

É óbvio que se existe o integral impróprio da função f em $\mathbb{R}$, também existe o valor principal do integral desta função em $\mathbb{R}$ e têm o mesmo valor.

Contudo, a condição recíproca é falsa. Por exemplo, não existe o integral impróprio da função identidade em $\mathbb{R}$, pois $\int_{-S}^{R} x\,dx = \frac{\left(R^2 - S^2\right)}{2}$ e $\frac{R^2 - S^2}{2}$ não tem limite quando R e S tendem para $+\infty$.

Porém V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$, pois $\int_{-R}^{R} x\,dx = 0$ para qualquer número real R.

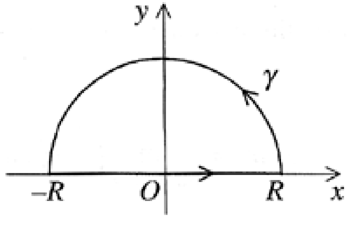
Assim, a existência do integral impróprio deve ser sempre verificada.

Uma **condição suficiente** para que exista o integral impróprio da função f em $\mathbb{R}$ é que f seja integrável em qualquer intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$ e exista $p > 1$ tal que $f(x) = O\left(|x|^{-p}\right)$ quando $|x| \to +\infty$, isto é, $|x|^p f(x)$ é limitada quando $|x| \to +\infty$.

Estuda-se em seguida o cálculo de alguns tipos de integrais de funções de variável real que surgem com frequência nas aplicações.

1. Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$

Seja C a linha formada pela justaposição de uma semicircunferência γ de centro na origem e raio R $\left(z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\right)$ e o segmento de recta com origem $(-R, 0)$ e extremo $(R, 0)$.



Considere-se a função de variável complexa obtida substituindo na expressão analítica de F a variável x por z (que será ainda designada por F).

Suponha-se que esta função F não tem singularidades sobre o eixo real e é tal que, para z sobre γ se tem $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, com $M > 0$ e $k > 1$.

Tem-se, pelo teorema A.4. do Capítulo 3, que

$$\int_C F(z)dz = \int_{-R}^{R} F(x)dx + \int_\gamma F(z)dz.$$

Estude-se o limite da igualdade anterior quando $R \to +\infty$:

Como F é tal que, para z sobre γ se tem $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, com $M > 0$ e $k > 1$, pelo teorema C.1.(i), conclui-se que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_\gamma F(z)dz = 0$. Então,

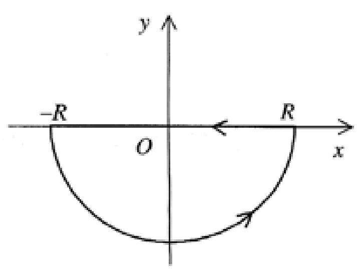
$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = \lim_{R \to +\infty} \int_C F(z)dz.$$

Observação:

1. No caso de F ser uma função par, tem-se $\int_{-R}^{R} F(x)dx = 2\int_0^R F(x)dx$. Note-se que ao converter o domínio de integração em $[0, R]$ antes de passar ao limite torna-se desnecessária a introdução do valor principal do integral. O processo descrito pode assim ser adaptado ao cálculo de integrais do tipo $\int_0^{+\infty} F(x)dx$.

2. Pode-se utilizar a linha C representada na figura, formada pela justaposição de uma semicircunferência e de um segmento de recta, tendo-se

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = -\lim_{R \to +\infty} \int_C F(z)dz.$$



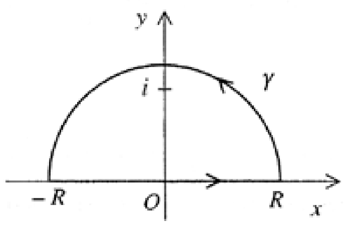
Esta linha simplifica consideravelmente o cálculo efectuado quando o número de singularidades da função F no semiplano $\text{Im}z > 0$ é superior ao número de singularidades da função F no semiplano $\text{Im}z < 0$. Por exemplo, se todas as singularidades de F se situam no semiplano $\text{Im}\, z > 0$, tem-se $\int_C f(z)dz = 0$.

Exemplo C.1.

Calcule-se $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

As condições de existência do integral impróprio sobre $\mathbb{R}$ da função $F(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ estão garantidas (F é integrável em cada subintervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $F(x) = O\left(|x|^{-4}\right)$ quando $|x| \to +\infty$).

Tome-se a função de variável complexa F definida por $F(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ e retome-se a linha C considerada no início deste paragrafo, constituída pela semicircunferência γ de centro na origem e raio R (considera-se aqui $R > 1$), $z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$ e o segmento com origem $(-R, 0)$ e extremo $(R, 0)$. A função F tem os pólos duplos $z_0 = i$ e $z_1 = -i$, sendo $z_0 = i$ interior a C.



Tem-se

$$\text{res}(F,i) = \lim_{z\to i} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\right] = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

Pelo teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_C F(z)dz = 2\pi i \,\text{res}(F,i) = \frac{\pi}{2}$$

Para z sobre γ, tem-se

$$\left|\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\right| = \frac{1}{\left|(z+i)^2(z-i)^2\right|} = \frac{1}{|z+i|^2|z-i|^2} \leq \frac{1}{\left||z|-|i|\right|^2\left||z|-|i|\right|^2} = \frac{1}{(r-1)^4}.$$

Como $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{1}{(r-1)^4}=0$, conclui-se que $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_\gamma F(z)dz=0$ e, consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{R\to+\infty}\int_C F(z)\,dz = \frac{\pi}{2}$$

2. Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\cos(mx)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\operatorname{sen}(mx)dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{imx}dx$ com $m\in\mathbb{R}$.

Se $m>0$, utilize-se a linha C já referida no início do parágrafo anterior, formada pela justaposição de uma semi-circunferência γ de centro na origem e raio R $\left(z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\right)$ e o segmento com origem $(-R,0)$ e extremo $(R,0)$. Considere-se a função complexa obtida substituindo na expressão analítica de F a variável x por z, que será ainda designada por F, e seja G a função definida por $G(z)=e^{imz}F(z)$.
Suponha-se que F não tem singularidades no eixo real e é tal que, para z sobre γ, se tem $|F(z)|\leq\frac{M}{R^k}$, com $M>0$ e $k>0$.

Pelo teorema C.1.(ii), tem-se que $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_\gamma e^{imz}F(z)dz=0.$

Resta ter em conta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{imx}F(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\cos(mx)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\operatorname{sen}(mx)dx,$$

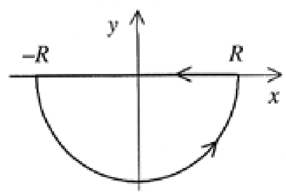
logo,

$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\cos(mx)dx = \operatorname{Re}\left[\lim_{R\to+\infty}\int_C e^{imz}F(z)dz\right]$$

e

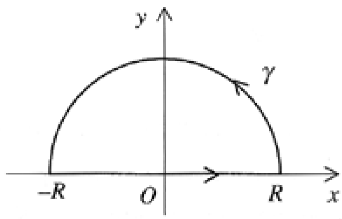
$$\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\operatorname{sen}(mx)dx = \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty}\int_C e^{imz}F(z)dz\right].$$

Observação:
Se $m < 0$ deve usar-se a linha



Exemplo C.2.

Calcule-se $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx$ com $m > 0$.



Considere-se a linha C formada pela justaposição de uma semicircunferência γ de centro na origem e raio R, $z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$, sendo $R > 1$ e o segmento com origem $(-R, 0)$ e extremo $(R, 0)$ e calcule-se $\int_C \frac{1}{z^2+1} e^{imz} dz$.
Os pontos $z_0 = i$ e $z_1 = -i$ são pólos simples da função integranda, mas só $z_0 = i$ está no interior de C.
Pelo teorema dos resíduos de Cauchy, tem-se que

$$\int_C \frac{1}{z^2+1} e^{imz} dz = 2\pi i \frac{e^{-m}}{2i} = \pi e^{-m}.$$

Como, para z sobre γ, se tem

$$\left| \frac{1}{z^2+1} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \leq \frac{2}{R^2} \quad (\text{para } R^2 \geq 2),$$

estão preenchidas as condições que garantem que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_\gamma \frac{1}{z^2+1} e^{imz} dz = 0$, logo V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1} dx = \pi e^{-m}$.

Como $F(x)=\dfrac{\cos(mx)}{x^2+1}$ é integrável em todo o intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $F(x)=\dfrac{\cos(mx)}{x^2+1}=O\left(|x|^{-2}\right)$, as condições de existência sobre $\mathbb{R}$ do integral impróprio da função $F(x)=\dfrac{\cos(mx)}{x^2+1}$ verificam-se, tendo-se pois

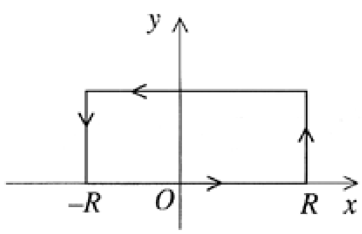
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(mx)}{x^2+1}dx=\pi e^{-m}.$$

Atendendo à paridade da função $F(x)=\dfrac{\cos(mx)}{x^2+1}$, pode concluir-se que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(mx)}{x^2+1}dx=\frac{\pi e^{-m}}{2}$.

3. Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\cos(mx)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\ \mathrm{sen}\ (mx)dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{imx}dx$ em que $F(z)$ tem uma infinidade de pólos

Suponha-se que a função F não tem singularidades sobre o eixo real. A linha utilizada no parágrafo anterior não é conveniente neste caso, uma vez que envolveria a soma de uma infinidade de resíduos. Usa-se então o rectângulo indicado na figura, escolhido de forma que os lados horizontais não passem por nenhum pólo de F.

A escolha de $x=R$ e $x=-S$ e não $x=\pm R$ é feita no sentido de evitar a consideração do valor principal do integral.



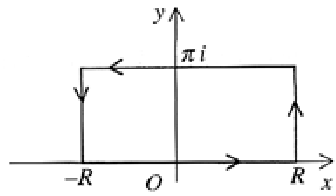
O procedimento neste caso é ilustrado no exemplo que se segue:

Exemplo C.3.

Calcule-se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\cosh x}dx$.

A função $F(z)=\dfrac{e^{\frac{z}{2}}}{\cosh z}$ tem uma infinidade de pólos simples, $z_k=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}i$, $k\in\mathbb{Z}$.

Utilizando a linha indicada na figura



verifica-se que, para quaisquer valores de R e S, o único pólo interior à curva é $z_0 = \dfrac{\pi}{2} i$, tendo-se

$$\operatorname{res}(F, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(z - \frac{\pi}{2} i \right) F(z) = -ie^{\frac{\pi i}{4}} .$$

Por um lado, tem-se, pelo teorema dos resíduos de Cauchy, que $\int_C F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F, z_0) = 2\pi e^{\frac{\pi i}{4}}$.
Por outro lado,

$$\int_C F(z)\,dz = \int_R^{-S} \frac{e^{\frac{\pi i + x}{2}}}{\cosh(\pi i + x)} dx + \int_{-S}^{R} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\cosh x} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{R+iy}{2}}}{\cosh(R+iy)} i\,dy + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{\frac{-S+iy}{2}}}{\cosh(-S+iy)} i\,dy .$$

Mas

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{R+iy}{2}}}{\cosh(R+iy)} i\,dy \right| \le \int_0^{\pi} \frac{2e^{\frac{R}{2}}}{\left| e^{R+iy} + e^{-(R+iy)} \right|} dy \le \int_0^{\pi} \frac{2e^{\frac{R}{2}}}{\left\| e^{R+iy} \right| - \left| e^{-(R+iy)} \right\|} dy = \pi \frac{2e^{\frac{R}{2}}}{e^{R} - e^{-R}}$$

e como

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{2e^{\frac{R}{2}}}{e^{R} - e^{-R}} = \lim_{R \to +\infty} \frac{2e^{3\frac{R}{2}}}{e^{2R} - 1} = 0 ,$$

resulta que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{R+iy}{2}}}{\cosh(R+iy)} i\,dy = 0 .$$

Analogamente,

$$\left|\int_{\pi}^{0}\frac{e^{\frac{-S+iy}{2}}}{\cosh(-S+iy)}i\,dy\right|\leq\pi\frac{2e^{-\frac{S}{2}}}{\left|e^{-S}-e^{S}\right|}\quad \text{e}\quad \lim_{S\to+\infty}\int_{\pi}^{0}\frac{e^{\frac{-S+iy}{2}}}{\cosh(-S+iy)}i\,dy=0.$$

Como $R,S\to+\infty$ pode-se concluir que

$$2\pi e^{\frac{\pi i}{4}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\cosh x}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{\pi i+x}{2}}}{\cosh(\pi i+x)}dx.$$

e finalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\cosh x}dx=\frac{2\pi e^{\frac{\pi i}{4}}}{1+e^{\frac{\pi i}{2}}}=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,\pi.$$

4. Integrais do tipo $\int_0^{+\infty}F(x)\log x\,dx$

Suponha-se que a função de variável complexa obtida substituindo a variável x por z na expressão analítica de F, e que será ainda designada por F, é uma função meromorfa. Como em $\mathbb{C}$ a função logaritmo não é unívoca, considera-se o ramo adequado à resolução da questão pretendida. O exemplo que se segue exemplifica a técnica a utilizar nestes casos.

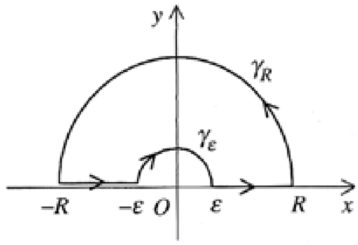
Exemplo C.4.

Calcule-se $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{1+x^2}dx$.

Tome-se o ramo principal do logaritmo, $\log z=\log|z|+i\theta$, com $-\pi<\theta\leq\pi$.

A função $F(z)=\dfrac{\log z}{1+z^2}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\left(\left\{z=|z|e^{i\theta},\,\theta=\pi\right\}\cup\{-i,+i\}\right)$ isto é $z_0=i$ e $z_1=-i$ são pólos simples.

Considere-se a linha C indicada na figura em que γ_R e γ_ε são semicircunferências de centro na origem e com raios R e ε, respectivamente, descritas no sentido positivo $\left(C=\gamma_r\vee[-R,-\varepsilon]\vee\gamma_\varepsilon\vee[\varepsilon,R]\right)$.



Tem-se

$$\int_C F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F,i) = 2\pi i \frac{\log i}{2i} = \pi \log i$$

$$= \frac{\pi^2 i}{2} = \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_{\gamma_R} F(z)\,dz + \int_\pi^0 \frac{\log x + i\pi}{1+x^2}(-dx) - \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)dz.$$

Como

$$\left|\int_{\gamma_R} F(z)\,dz\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{\log R + i\theta}{1+R^2 e^{2i\theta}} Rie^{i\theta}\right| d\theta \le \pi \frac{(\log R + \pi)R}{R^2-1} \quad \text{e} \quad \lim_{R\to+\infty} \pi \frac{(\log R+\pi)R}{R^2-1} = 0,$$

resulta que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} F(z)\,dz = 0.$$

Analogamente,

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} F(z)dz\right| \le \pi \frac{(\log|\varepsilon| + \pi)\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1},$$

resultando que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} F(z)\,dz = 0.$$

Obtém-se, finalmente,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{\log x + i\pi}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^2 i}{2},$$

isto é,

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^2 i}{2}.$$

Igualando as partes reais, conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0.$$

5. Integrais do tipo $\int_0^{2\pi} G(\text{sen }\theta, \cos\theta)d\theta$, com G função racional de sen θ e cos θ

Seja γ a circunferência de centro na origem e raio 1, $\left(z=e^{i\theta}, \theta\in[0,2\pi]\right)$. A mudança de variável $z=e^{i\theta}$ (sen $\theta=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, cos $\theta=\dfrac{z-z^{-1}}{2}$ e $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$) tranforma o integral dado num integral do tipo $\int_\gamma F(z)dz$, onde F é um quociente de polinómios complexos, que se pode calcular utilizando o teorema dos resíduos de Cauchy, desde que esta função não tenha singularidades sobre a circunferência γ.

Exemplo C.5.

Calcule-se $\int_0^{2\pi} \dfrac{1}{1+a\cos\theta}\,d\theta$ em que $a\in\mathbb{R}$ e $|a|<1$.

Fazendo a mudança de variável anteriormente indicada, $z=e^{i\theta}$ com $\theta\in[0,2\pi]$, o integral é igual a

$$\int_\gamma \frac{1}{1+\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{2z+az^2+a}.$$

Analisem-se as singularidades de $F(z)=\dfrac{1}{2z+az^2+a}$ e a sua situação relativamente ao interior da circunferência $|z|=1$. A função F tem dois pólos simples, $z_0=\dfrac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ e $z_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-a^2}}{a}$, tendo-se $|z_0|=\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{|a|}<1$ e $|z_1|=\dfrac{\left|-1-\sqrt{1-a^2}\right|}{|a|}=\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{|a|}>\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{1}>1$; assim, somente z_0 está no interior da circunferência $|z|=1$.

Pelo teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_\gamma F(z)dz=2\pi i\,\text{res}\left(F,\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)=2\pi i\,\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$$

e, finalmente,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\cos\theta}\,d\theta=\frac{2}{i}\int_\gamma\frac{dz}{2z+az^2+a}=2\pi\,\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Exercícios resolvidos

1. Calcule o resíduo de $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ em cada uma das suas singularidades.

Resolução:

Os pontos singulares da função são $z=i$ e $z=-i$. Como

$$\lim_{z\to i}\frac{1}{z^2+1}=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2i},$$

$z_0=i$ é um pólo simples da função e

$$\operatorname{res}(f,i)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}.$$

Analogamente, como

$$\lim_{z\to -i}\frac{1}{z^2+1}=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{z^2+1}=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}=-\frac{1}{2i},$$

$z_1=-i$ é um pólo simples da função e

$$\operatorname{res}(f,-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{z^2+1}=-\frac{1}{2i}.$$

2. Calcule o resíduo de $f(z)=tg\, z$ em cada uma das suas singularidades .

Resolução:

As singularidades da função são $z_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Como cada z_k é pólo simples de f, tem-se

$$\operatorname{res}(f,z_k)=\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}=-1$$

3. Calcule o resíduo de $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{(z^2+1)^2}$ em $z_0 = i$.

Resolução:

Como

$$\lim_{z\to i} \frac{z^2-1}{\left(z^2+1\right)^2} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to i} (z-i)^2 \frac{\left(z^2-1\right)}{\left(z^2+1\right)^2} = \lim_{z\to i} \frac{\left(z^2-1\right)}{(z+i)^2} = \frac{1}{2},$$

$z_0 = i$ é um pólo duplo da função f. Então,

$$\operatorname{res}(f,i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{\left(z^2-1\right)}{\left(z^2+1\right)^2}\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{\left(z^2-1\right)}{(z+i)^2}\right] = \lim_{z\to i}\frac{2(iz+1)}{(z+i)^3} = 0\,.$$

4. Calcule o resíduo de $f(z) = \dfrac{z^3}{\operatorname{sen}^3 z}$ em $z_0 = 0$.

Resolução:

Como $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z^3}{\operatorname{sen}^3 z} = 1$, a singularidade $z_0 = 0$ é removível e assim $\operatorname{res}(f, 0) = 0$.

5. Calcule o resíduo de $f(z) = \dfrac{1}{z \operatorname{sen} z}$ em $z_0 = 0$.

Resolução:

Como

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z\operatorname{sen} z} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to 0} z^2 \frac{1}{z \operatorname{sen} z} = 1,$$

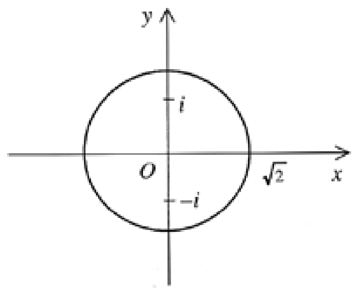
$z_0 = 0$ é um pólo duplo da função f. Então,

$$\operatorname{res}(f,0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{1}{z\operatorname{sen} z}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z - z\cos z}{\operatorname{sen}^2 z} = 0.$$

6. Calcule $\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2-4)}$ em que C é a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

Resolução:

A função integranda tem as singularidades $z = i$ e $z = -i$, interiores à curva C e $z = 2$ *e* $z = -2$ exteriores à curva C.



Para $z = i$ tem-se

$$\lim_{z\to i} \frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2-4)} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2-4)} = \frac{1}{-10i} = \frac{i}{10},$$

pelo que $z = i$ é um pólo simples e $\operatorname{res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}, i\right) = \frac{i}{10}$.

Analogamente, para $z = -i$ tem-se

$$\lim_{z\to -i} \frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2-4)} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2-4)} = \frac{1}{10i} = -\frac{i}{10},$$

pelo que $z = -i$ é um pólo simples e $\operatorname{res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}, -i\right) = -\frac{i}{10}$.

Então, pelo teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2-4)} = 2\pi i\left(\frac{i}{10} - \frac{i}{10}\right) = 0.$$

7. Calcule $\int_C \frac{1+z}{1-\operatorname{sen} z}dz$ em que C é a circunferência de centro na origem e raio igual a 2.

Resolução:

A função $f(z)=\frac{1+z}{1-\operatorname{sen} z}$ tem as singularidades isoladas $z_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, sendo apenas z_0 interior à curva C. Como

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+z}{1-\operatorname{sen} z}=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{1+z}{1-\operatorname{sen} z}=\lim_{z\to 0} z^2\frac{1+z+\frac{\pi}{2}}{1-\operatorname{sen}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{z\to 0} z^2\frac{1+z+\frac{\pi}{2}}{1-\cos z}=2\left(1+\frac{\pi}{2}\right),$$

o ponto $z_0=\frac{\pi}{2}$ é um pólo duplo de f. Tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}\left(f,\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dz}\left[\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{1+z}{1-\operatorname{sen} z}\right]= \\
&= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\frac{1+z}{1-\operatorname{sen} z}+\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{1-\operatorname{sen} z+\cos z(1+z)}{(1-\operatorname{sen} z)^2}\right]= \\
&= \lim_{z\to 0}\left[2z\frac{1+z+\frac{\pi}{2}}{1-\cos z}+z^2\frac{1-\cos z-\operatorname{sen} z\left(1+z+\frac{\pi}{2}\right)}{(1-\cos z)^2}\right]= \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{(z+i)^3 1-\cos z}\left[\frac{2\left(1+z+\frac{\pi}{2}\right)}{x}+\frac{1-\cos z}{1-\cos z}-\frac{\operatorname{sen} z\left(1+z+\frac{\pi}{2}\right)}{1-\cos z}\right]=2
\end{aligned}$$

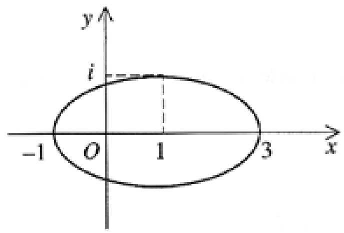
Pelo teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_C\frac{1+z}{1-\operatorname{sen} z}dz=2\pi i\operatorname{res}\left(f,\frac{\pi}{2}\right)=2\pi i\,(4+\pi).$$

8. Calcule $\int_\gamma\frac{e^z}{(z-i)^2\operatorname{sen} z}dz$ em que γ é a curva definida parametricamente por

$$\gamma(t)=1+2\cos t+i\operatorname{sen} t,\ \text{com}\ t\in[0,2\pi].$$

Resolução:
A curva em questão é a elipse com centro $z = 1$ representada na figura



As singularidades da função são $z = i$ e $z = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, sendo $z = 0$ (correspondente a $k = 0$) a única singularidade interior a γ. Como

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-i)^2 \operatorname{sen} z} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{(z-i)^2 \operatorname{sen} z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-i)^2}\frac{z}{\operatorname{sen} z} = -1\,,$$

o ponto $z = 0$ é um pólo simples e $\operatorname{res}\left(\frac{e^z}{(z-i)^2 \operatorname{sen} z}, 0\right) = -1$.

Pelo teorema dos resíduos de Cauchy, tem-se então

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)^2 \operatorname{sen} z}\,dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i\,.$$

9. Para cada $r \neq 0$ e $r \neq 1$ considere a curva γ_r definida por $\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcule

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^z - e^{-z}}{z^3(z-1)}\,dz.$$

Resolução:
A função integranda tem as singularidades isoladas $z = 0$ e $z = 1$. Como

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - e^{-z}}{z^3(z-1)} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to 1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^3(z-1)} = \infty\,,$$

ambas as singularidades são pólos.

Observe-se que

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-e^{-z}}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}-1}{ze^{z}}=\lim_{z\to 0}\frac{2}{e^{z}}\frac{e^{2z}-1}{2z}=2\,,$$

resultando que

$$\lim_{z\to 0} z^{2}\frac{e^{z}-e^{-z}}{z^{3}(z-1)}=-2\,,$$

pelo que $z=0$ é um pólo duplo. Então,

$$\operatorname{res}\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{z^{3}(z-1)},0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^{2}\frac{e^{z}-e^{-z}}{z^{3}(z-1)}\right]=-2.$$

Como $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{z^{3}(z-1)}=e-e^{-1}$, $z=1$ é um pólo simples, tendo-se

$$\operatorname{res}\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{z^{3}(z-1)},1\right)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{z}-e^{-z}}{z^{3}(z-1)}=e-e^{-1}.$$

Resta analisar, em função de r, quais as singularidades que estão no interior da curva γ_r dada (circunferência de centro em $z=0$ e raio r) e aplicar o teorema dos resíduos de Cauchy:

1.º caso: $0<r<1$

Neste caso, o pólo $z_0=1$ é exterior à curva γ_r e tem-se

$$\int_{\gamma_r}\frac{e^{z}-e^{-z}}{z^{3}(z-1)}dz=2\pi i\,(-2)=-4\pi i\,;$$

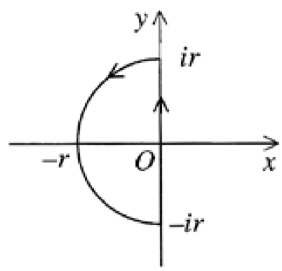
2.º caso: $1<r$

Neste caso, ambos os pólos $z_0=1$ e $z_1=0$ são interiores à curva γ_r e tem-se

$$\int_{\gamma_r}\frac{e^{z}-e^{-z}}{z^{3}(z-1)}dz=2\pi i\left(-2+\left(e-e^{-1}\right)\right).$$

(Note-se que o integral não existe quando $r=1$, uma vez que a função integranda não seria contínua sobre a curva.)

10. Sendo $r > 0$, considere a linha simples fechada C_r indicada na figura, formada pela justaposição de uma semicircunferência de centro na origem e raio r com o segmento de recta com origem em $(0, -r)$ e extremidade em $(0, r)$.



Calcule $\displaystyle\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2+3z+2}dz$, onde r é tal que a função integranda não tem singularidades sobre C_r.

Resolução:

A função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+3z+2}dz$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ excepto para os valores de z tais que $z^2+3z+2=0$, ou seja, em $\mathbb{C}\setminus\{-2,-1\}$. Como

$$\lim_{z\to-1}\frac{e^{iz}}{z^2+3z+2}=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to-1}(z+1)\frac{e^{iz}}{z^2+3z+2}=\lim_{z\to-1}\frac{e^{iz}}{z+2}=e^{-i},$$

$z_0=-1$ é um pólo simples e $\operatorname{res}(f,-1)=e^{-i}$.

Analogamente, verifica-se que $z_1=-2$ é um pólo simples e que $\operatorname{res}(f,-2)=-e^{-2i}$.

Resta analisar, em função de r, quais as singularidades que estão no interior da linha C_r considerada e aplicar o teorema dos resíduos de Cauchy. São de considerar os casos $0<r<1$, $1<r<2$ e $r>2$.

1.º caso: $0<r<1$

Neste caso a função é holomorfa sobre e no interior de C_r e, pelo teorema de Cauchy,

$$\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z^2+3z+2}dz=0.$$

2.º caso: $1 < r < 2$

A função integranda tem, neste caso, um pólo simples no interior de C_r. Pelo teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2+3z+2}\,dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+3z+2},-1\right) = 2\pi i\, e^{-i}.$$

3.º caso: $r > 2$

A função integranda tem, neste caso, dois pólos simples no interior de C_r. Pelo teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z^2+3z+2}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+3z+2},-1\right)+\operatorname{res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+3z+2},1\right)\right) = 2\pi i\left(e^{-i}-e^{-2i}\right).$$

11. Calcule $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{cotg} z}{z}\,dz$, sendo a circunferência $|z| = 2$.

Resolução:

As singularidades de $f(z) = \frac{\operatorname{cotg} z}{z} = \frac{\cos z}{z \operatorname{sen} z}$ são $z_k = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. A única singularidade de f no interior da circunferência $|z| = 2$ é $z_0 = 0$. Como

$$\lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{z \operatorname{sen} z} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z\to 0} z^2 \frac{\cos z}{z \operatorname{sen} z} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z}\cos z = 1,$$

$z_0 = 0$ é um pólo duplo da função f. Então,

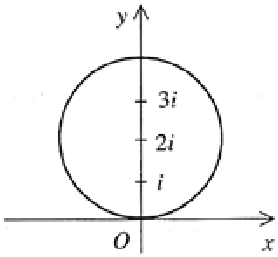
$$\operatorname{res}(f,0) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{\cos z}{z \operatorname{sen} z}\right)\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{d}{dz}\frac{z\cos z}{\operatorname{sen} z}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{(\cos z - z \operatorname{sen} z)\operatorname{sen} z - z\cos^2 z}{\operatorname{sen}^2 z}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z \operatorname{sen} z - z}{\operatorname{sen}^2 z} = 0.$$

Então, pelo teorema dos resíduos de Cauchy, $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{cotg} z}{z}\,dz = 0$.

12. Calcule $\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)(z^2+9)}dz$ com $\gamma:[0,2\pi]\to C$ definida por $\gamma(\theta)=2e^{i\theta}+2i$.

Resolução:



A função integranda tem singularidades (pólos simples) em $z=i$, $z=+3i$ e $z=-3i$, sendo $z=-3i$ exterior a γ. Pelo teorema dos resíduos de Cauchy, tem-se

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)(z^2+9)}dz = 2\pi i\left[\operatorname{res}\left(\frac{e^z}{(z-i)(z^2+9)},i\right)+\operatorname{res}\left(\frac{e^z}{(z-i)(z^2+9)},3i\right)\right]=$$

$$=2\pi i\left[\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^z}{(z-i)(z^2+9)}+\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^z}{(z-i)(z-3i)(z+3i)}\right]=$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^i}{8}+\frac{e^{3i}}{-12}\right)=\frac{\pi i e^i}{4}-\frac{\pi i e^{3i}}{6}.$$

13. Seja $f(z)=\dfrac{e^z-e^{\frac{1}{z}}}{z}$.

a) Estude a singularidade de f e determine o resíduo correspondente.

b) Calcule $\int_{|z|=1} f(z)dz$.

Resolução:

a) Como $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ e $e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$, o desenvolvimento em série de Laurent de f no ponto $z=0$ em $C(0,0,+\infty)$ é

$$f(z)=\frac{-e^{\frac{1}{z}}+e^{z}}{z}=\frac{1}{z}\left(\ldots-\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n}}-\ldots-\frac{1}{1!}\frac{1}{z}-\frac{1}{0!}+\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^{2}+\ldots+\frac{1}{n!}z^{n}+\ldots\right)=$$
$$=\ldots-\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n+1}}-\ldots-\frac{1}{z^{2}}+1+\frac{z}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}z^{n-1}+\ldots$$

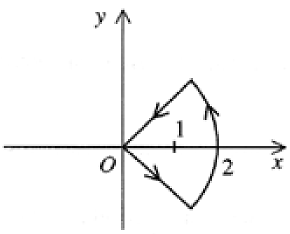
Como a parte principal deste desenvolvimento tem uma infinidade de termos não nulos, $z=0$ é uma singularidade essencial de f e $\operatorname{res}(f,0)=c_{-1}=0$.

b) O ponto $z=0$ é a única singularidade de f e encontra-se no interior da circunferência $|z|=1$. Por aplicação do teorema dos resíduos de Cauchy, tem-se $\int_{|z|=1} f(z)dz=2\pi i \operatorname{res}(f,0)=0$.

14. Considere a função $f(z)=\dfrac{e^{\frac{a}{z-1}}-e^{\frac{b}{z-1}}}{(z-1)^{2}}$ com $z, a, b \in \mathbb{C}$, sendo a e b constantes.

a) Estude o comportamento de f na vizinhança do ponto $z_0 = 1$.

b) Calcule $\int_{\gamma} f(z)dz$ em que γ é a curva orientada indicada na figura (fronteira de um sector circular).



Resolução:

a) Como

$$e^{\frac{a}{z-1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n}}{(z-1)^{n}} \quad \text{e} \quad e^{\frac{b}{z-1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^{n}}{(z-1)^{n}}\frac{1}{n!} \text{ em } C(1,0,\infty),$$

o desenvolvimento de Laurent de f no ponto $z_0=1$ é

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(a^{n}-b^{n}\right)}{n!}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}.$$

A parte principal deste desenvolvimento tem uma infinidade de termos não nulos, pelo que $z_0=1$ é uma singularidade essencial da função f. O coeficiente do termo de ordem -1 é nulo e assim $\operatorname{res}(f,1)=0$.

b) Como $z_0 = 1$ é interior à curva dada, pelo teorema dos resíduos de Cauchy tem-se que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}(f,1) = 0 \, .$$

15. Seja $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$,

a) Estude a função quanto à analiticidade e classifique a sua singularidade.

b) Calcule $\int_0^{2\pi} e^{4i\theta} e^{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} d\theta$.

Resolução

a) A função f é analítica em $C \setminus \{0\}$.

O desenvolvimento de Laurent de f no ponto $z_0 = 0$ em $C(0,0,\infty)$ é

$$f(z) = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n}\frac{1}{n!} = \frac{1}{z^{-3}}\frac{1}{0!} + \frac{1}{z^{-2}}\frac{1}{1!} + \frac{1}{z^{-1}}\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z}\frac{1}{4!} + \frac{1}{z^2}\frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{z^{n-3}}\frac{1}{n!} + \ldots =$$

$$= \ldots + \frac{1}{n!} z^{-n+3} + \ldots + \frac{1}{5!} z^{-2} + \frac{1}{4!} z^{-1} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} z + z^2 + z^3$$

cuja parte principal contém uma infinidade de termos não nulos. A singularidade $z_0 = 0$ é pois essencial.

b) Seja C a circunferência de centro na origem e raio 1 e calcule-se $\int_C f(z)\, dz$.

Atendendo ao desenvolvimento da função f apresentado na alínea anterior, tem-se $\operatorname{res}(f,0) = \frac{1}{4!}$. Como $z_0 = 0$ é interior à circunferência considerada, resulta que

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \frac{1}{4!} = \frac{\pi i}{12} \, .$$

Parametrizando a curva C por $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$, tem-se

$$z^3 = e^{3i\theta} \quad \text{e} \quad \frac{1}{z} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \, .$$

Então,

$$\frac{\pi i}{12} = \int_C z^3 e^{\frac{1}{z}} dz = \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} e^{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{4i\theta} e^{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} d\theta \, ,$$

de onde se conclui que

$$\int_0^{2\pi} e^{4i\theta} e^{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

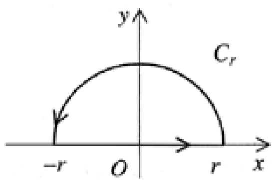
16. Utilizando o teorema dos resíduos de Cauchy, prove que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$.

Resolução:

Seja $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$.

As singularidades da função f são os pontos $z_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e todos pólos simples.

Considere-se a curva fechada γ indicada na figura (formada pela justaposição do segmento de recta $[-r, r]$ com a semicircunferência C_r de centro na origem e raio r maior do que 1.



Apenas $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_1 = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ são interiores a γ.

Calcule-se o resíduo de f em z_0 e em z_1:

$$\mathrm{res}(f, z_0) = \lim_{z \to \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{z^2\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}{\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}4\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2i} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{8i}.$$

Do mesmo modo se obtém $\mathrm{res}(f, z_1) = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{8i}$.

Pelo teorema dos resíduos de Cauchy, tem-se

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{8i}+\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{8i}\right)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Então,

$$\int_{-r}^{r}\frac{x^2}{1+x^4}dx+\int_{C_r}f(z)dz=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

Para z sobre C_r, tem-se $|f(z)|=\left|\frac{z^2}{1+z^4}\right|<\frac{1}{|z|^2}=\frac{1}{r^2}$ (ver observação 2 ao teorema C.1.) e, assim, $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{C_r}f(z)dz=0$ (teorema C.1. (i)). Então, $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$, isto é, $\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$

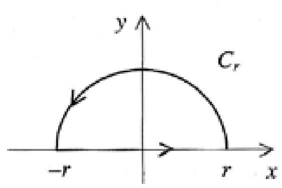
Como $f(x)=\frac{x^2}{1+x^4}$ é integrável em todo o intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $f(x)=O\left(|x|^{-2}\right)$ quando $|x|\to+\infty$, o integral impróprio de f sobre $\mathbb{R}$ existe, e

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

17. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$, utilizando uma função de variável complexa e uma curva convenientes.

Resolução:

Calcule-se $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx$, utilizando a curva γ indicada na figura, em que C_r designa a semicircunferência de centro na origem e raio r, $r>1$, e a função $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+1}$.



A função $f(z)$ é holomorfa em $C\setminus\{-i,+i\}$. A única singularidade de f interior à curva é $z_0=i$, que é um pólo simples de f e

$$\text{res}\,(f,i) = \lim_{z \to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Então, pelo teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1}.$$

Atendendo a que, para z sobre a semicircunferência C_r, tem-se

$$\left|\frac{1}{z^2+1}\right| < \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Então, pelo teorema C.1. (ii),

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{C_r} e^{iz}\frac{1}{z^2+1}dz = 0$$

e assim

$$\pi e^{-1} = \lim_{r \to +\infty} \int_\gamma f(z)dz = \lim_{r \to +\infty}\left(\int_{-r}^{r} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx + \int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz\right);$$

resulta que $\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = \pi e^{-1}$ e consequentemente $\text{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx = \pi e^{-1}$.

Como o integral impróprio sobre $\mathbb{R}$ de $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2+1}$ existe (porque g é integrável em todo o intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $g(x) = O\left(|x|^{-2}\right)$), tem-se

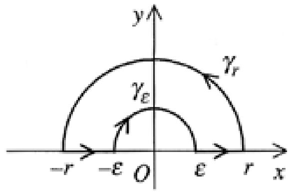
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx = \pi e^{-1}.$$

18. Prove que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\text{sen } x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Resolução:

Considere-se a função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$; esta função tem uma singularidade $z = 0$.

Designe-se por C a curva da figura, onde γ_r e γ_ε são semicircunferências de centro na origem e raios r e ε, respectivamente.



A função f é analítica sobre a curva C e no seu interior. Então, pelo teorema de Cauchy, tem-se $\int_C f(z)dz = 0$.
Então,

$$0 = \int_{C_r} f(z)dz = \int_\varepsilon^r \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{-\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz =$$

$$(*) \quad = \int_\varepsilon^r \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_\varepsilon^r \frac{e^{-ix}}{x}dx + \int_{-\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz =$$

$$= \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz + 2i\int_\varepsilon^r \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx.$$

Para z sobre γ_r, como $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r}$, pelo teorema C.1 (ii), conclui-se que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$$

Por outro lado, $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ tem um pólo simples em $z = 0$ e $\operatorname{res}(f,0) = \lim\limits_{z\to 0} z\dfrac{e^{iz}}{z} = 1$.

Pelo teorema C.2., atendendo a que f é analítica em $C(0,0,+\infty)$, tem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz = i(\pi - 0) = i\pi.$$

Passando ao limite quando $r \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0$ a igualdade (*), obtém-se

$$0 = 2i\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx + 0 - i\pi, \quad \text{ou seja,} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

19. Calcule, usando o teorema dos resíduos de Cauchy, o integral $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

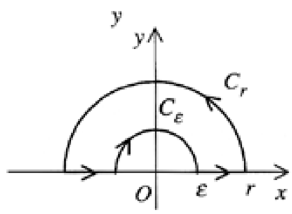
Resolução:

Atendendo à paridade da função co-seno pode-se, sem perda de generalidade, considerar apenas $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Sendo $\cos(ax) = \operatorname{Re} e^{iax}$ e $\cos(bx) = \operatorname{Re} e^{ibx}$, calcule-se

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2} dx.$$

Seja $f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$ e calcule-se o seu integral ao longo da linha γ indicada na figura em que C_r e C_ε são semicircunferências de centro na origem e raios r e ε respectivamente, descritas no sentido directo.



Como a única singularidade de f, $z_0 = 0$, é exterior à curva tem-se, pelo teorema de Cauchy, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Então,

$$0 = \int_\varepsilon^r f(z)dz + \int_{C_r} f(z)dz + \int_{-r}^{-\varepsilon} f(z)dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz,$$

isto é,

$$\int_\varepsilon^r \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2} dx + \int_{C_r} f(z)dz - \int_r^\varepsilon \frac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{x^2} dx - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = 0,$$

ou ainda

$$(*) \int_\varepsilon^r \left(\frac{e^{iax} + e^{-iax}}{x^2} - \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{x^2} \right) dx + \int_{C_r} f(z)dz - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = 0.$$

Estude-se $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)dz$; tem-se:

$$\left|\int_{C_r}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{ia(r\cos\theta+ir\,\mathrm{sen}\,\theta)}-e^{ib(r\cos\theta+ir\,\mathrm{sen}\,\theta)}}{r^2e^{2i\theta}}re^{i\theta}d\theta\right| \le$$

$$\le \int_0^\pi \frac{\left|e^{ia(r\cos\theta+ir\,\mathrm{sen}\,\theta)}\right|+\left|e^{ib(r\cos\theta+ir\,\mathrm{sen}\,\theta)}\right|}{r\left|e^{i\theta}\right|}d\theta = \int_0^\pi \frac{e^{-ar\,\mathrm{sen}\,\theta}+e^{-br\,\mathrm{sen}\,\theta}}{r}d\theta$$

Sendo $a>0$ e $b>0$ e $\theta\in[0,\pi]$ tem-se, para $r\ge\max\{a,b\}$, $1\le e^{ar\,\mathrm{sen}\,\theta}\le e^{ar}$ e $1\le e^{br\,\mathrm{sen}\,\theta}\le e^{br}$ e, assim,

$$\frac{e^{-ar\,\mathrm{sen}\,\theta}+e^{-br\,\mathrm{sen}\,\theta}}{r}\le\frac{2}{r};$$

então $\int_0^\pi \frac{e^{-ar\,\mathrm{sen}\,\theta}+e^{-br\,\mathrm{sen}\,\theta}}{r}d\theta\le\frac{2\pi}{r}$ e $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{2\pi}{r}=0$, concluindo-se que $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)dz=0$.

Observe-se que

$$\lim_{z\to o} z\,f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{(ia-ib)z}-1}{z}=ia-ib,$$

pelo que f tem um pólo simples em $z_0=0$, tendo-se $\mathrm{res}(f,0)=ia-ib$. Por aplicação do teorema C.2. tem-se então

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)dz=i(ia-ib)\pi=(b-a)\pi\,.$$

Passando ao limite, quando $r\to+\infty$ e $\varepsilon\to 0$, a igualdade (*), obtém-se

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{x^2}-\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{x^2}\right)dx=(b-a)\pi\,.$$

Atendendo a que $\cos(kx)=\dfrac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$, tem-se

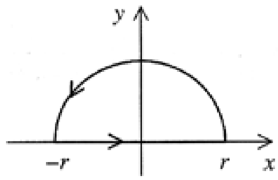
$$\int_0^{+\infty}\left(2\frac{\cos(ax)}{x^2}-2\frac{\cos(bx)}{x^2}\right)dx=(b-a)\pi$$

e finalmente,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}dx=\frac{b-a}{2}\pi\,.$$

20. Considere a linha simples C_r constituída pela justaposição de uma semicircunferência γ com centro na origem, raio r, descrita no sentido positivo, e pelo segmento de recta $[-r,r]$.

Seja $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $|w| \neq r$, $|w| \neq r^{-1}$ e $\operatorname{Im} w \neq 0$.



a) Calcule $\displaystyle\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{(z-w)(wz-1)}\,dz$.

b) Use a alínea anterior para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{w\left(x^2+1\right)-\left(w^2+1\right)x}\,dx$.

Resolução:

a) A função $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z-w)(wz-1)}dz$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \left\{w, w^{-1}\right\}$.

Analise-se a situação de w e w^{-1} relativamente a C_r. Como $|w| \neq r$, $|w| \neq r^{-1}$ e $\operatorname{Im} w \neq 0$, w e w^{-1} não estão sobre a curva C_r (porque também se tem $\operatorname{Im} w \neq 0$, já que $\operatorname{Im}\left(w^{-1}\right) = -\dfrac{\operatorname{Im} w}{|w|}$).

1.º caso: $|w| > r$, $\operatorname{Im} w < 0$ ou, de uma forma equivalente, $\left|w^{-1}\right| < r$ e $\operatorname{Im}\left(w^{-1}\right) > 0$.
Neste caso, $w \notin \operatorname{int} C_r$ mas $w^{-1} \in \operatorname{int} C_r$.

2.º caso: $|w| > r$, $\operatorname{Im} w > 0$ ou, de uma forma equivalente, $\left|w^{-1}\right| < r$ e $\operatorname{Im} w < 0$.
Neste caso, w e w^{-1} são ambos exteriores a C_r.

3.º caso: $|w| < r$, $\operatorname{Im} w < 0$ ou, de uma forma equivalente, $\left|w^{-1}\right| > r$ e $\operatorname{Im}\left(w^{-1}\right) > 0$.
Também, neste caso, w e w^{-1} são ambos exteriores a C_r.

4.º caso: $|w| < r$, $\operatorname{Im} w > 0$ ou, de uma forma equivalente, $\left|w^{-1}\right| > r$ e $\operatorname{Im}\left(w^{-1}\right) < 0$.
Neste caso, $w \in \operatorname{int} C_r$ e w^{-1} é exterior a C_r.

No 2.º caso e no 3.º caso, o teorema de Cauchy permite concluir que $\int_{C_r} f(z)dz = 0$, pois não existem singularidades no interior de C_r.

No 1.º caso:

$$\int_{C_r} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(f, w^{-1}\right) = 2\pi i \lim_{z\to w^{-1}}\left(z - w^{-1}\right)\frac{e^{iz}}{w(z-w)\left(z-w^{-1}\right)} = 2\pi i\frac{e^{iw^{-1}}}{w\left(w^{-1}-w\right)} = \frac{2\pi i e^{iw^{-1}}}{1-w^2}.$$

No 4.º caso:

$$\int_{C_r} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f,w) = 2\pi i \lim_{z\to w}(z-w)\frac{e^{iz}}{(z-w)(wz-1)} = 2\pi i\frac{e^{iw}}{w^2-1}.$$

b) A semicircunferência γ pode ser parametrizada por $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. Então,

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-w)(wz-1)}dz = \int_0^\pi \frac{e^{ir(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}}{\left(re^{i\theta}-w\right)\left(wre^{i\theta}-1\right)} ire^{i\theta}d\theta = \int_0^\pi \frac{e^{-r\operatorname{sen}\theta + ir\cos\theta}}{r^2we^{2i\theta} - re^{i\theta}w^2re^{i\theta} + w} ire^{i\theta}d\theta\,,$$

e

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-w)(wz-1)}dz\right| \le \int_0^\pi \frac{\left|e^{-r\operatorname{sen}\theta + ir\cos\theta}\right|}{\left|w\left(r^2e^{2i\theta}+1\right) - re^{i\theta}\left(w^2+1\right)\right|}\left|ire^{i\theta}\right|d\theta = \int_0^\pi \frac{e^{-r\operatorname{sen}\theta}}{\left|w\left(r^2e^{2i\theta}+1\right) - re^{i\theta}\left(w^2+1\right)\right|}r\,d\theta\,.$$

Tendo em conta que

$$\left|wr^2e^{2i\theta} + w - re^{i\theta}\left(w^2+1\right)\right| \ge \left|\left|wr^2e^{2i\theta}\right| - |w| - \left|re^{i\theta}\left(w^2+1\right)\right|\right| = \left||w|r^2 - |w| - r\left|w^2+1\right|\right|$$

e, para $\theta \in [0,\pi]$, se tem $1 \le e^{r\operatorname{sen}\theta} \le e^r$,

$$\int_0^\pi \frac{e^{-r\operatorname{sen}\theta}}{\left|w\left(r^2e^{2i\theta}+1\right) - re^{i\theta}\left(w^2+1\right)\right|}r\,d\theta \le \frac{1}{\left||w|r^2 - |w| - r\left|w^2+1\right|\right|}\; r\pi\,.$$

Então,

$$\lim_{r\to+\infty}\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z-w)(wz-1)}dz\right| \le \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\left||w|r^2 - |w| - r\left|w^2+1\right|\right|}\; r\pi = 0\,.$$

Como $\int_{[-r,r]} f(z)dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{ix}}{(x-w)(wx-1)}dx$ e $\int_{C_r} f(z)dz = \int_{[-r,r]} f(z)dz + \int_{\gamma} f(z)dz$, passando ao limite quando $r \to +\infty$, obtém-se

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-w)(wx-1)}dx = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{e^{iw^{-1}}}{1-w^2} & \text{se } \operatorname{Im} w < 0 \\[2ex] 2\pi i \dfrac{e^{iw}}{w^2-1} & \text{se } \operatorname{Im} w > 0 \end{cases}$$

Observando que $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{(x-w)(wx-1)}$ é integrável em cada subintervalo compacto de $\mathbb{R}$ e que $f(x) = O\left(|x|^{-2}\right)$, tem-se que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-w)(wx-1)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-w)(wx-1)}dx$$

e, assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-w)(wx-1)}dx = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{e^{iw^{-1}}}{1-w^2} & \text{se } \operatorname{Im} w < 0 \\[2ex] 2\pi i \dfrac{e^{iw}}{w^2-1} & \text{se } \operatorname{Im} w > 0 \end{cases}.$$

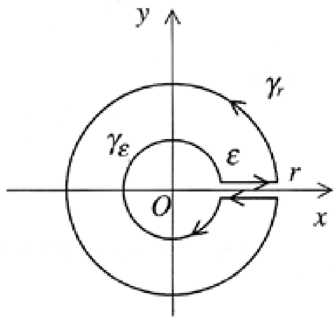
Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{w\left(x^2+1\right)-x\left(w^2+1\right)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\left(wx^2+w\right)-\left(x+w^2x\right)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-w)(wx-1)}dx,$$

resulta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-w)(wx-1)}dx = \begin{cases} 2\pi i \dfrac{e^{iw^{-1}}}{1-w^2} & \text{se } \operatorname{Im} w < 0 \\[2ex] 2\pi i \dfrac{e^{iw}}{w^2-1} & \text{se } \operatorname{Im} w > 0 \end{cases}.$$

21. Prove que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \pi \operatorname{cosec}(\pi x)$, $0 < \alpha < 1$, integrando uma função conveniente ao longo da linha C da figura (em que γ_r e γ_ε são respectivamente circunferências de centro na origem e raios r e ε, descritas no sentido positivo).



Resolução:

Tome-se $f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$; tendo em conta a curva escolhida, considere-se o ramo do logaritmo $\log z = \log|z| + i\theta$ com $0 < \theta \leq 2\pi$ e assim $z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)(\log|z|+i\theta)}$ com $0 < \theta \leq 2\pi$. O ponto $z = -1$ é um pólo simples da função f no interior da curva (supondo $\varepsilon < 1$ e $r > 1$) e

$$\operatorname{res}(f,-1) = \lim_{z\to-1} (z+1)\frac{z^{\alpha-1}}{z+1} = \lim_{z\to-1} e^{(\alpha-1)(\log|z|+i\arg z)} = e^{(\alpha-1)i\pi}.$$

Pelo teorema dos resíduos de Cauchy, $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i e^{(\alpha-1)i\pi}$ e, assim,

$$(*)\ \int_{\gamma_r} f(z)dz + \int_\varepsilon^r \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_r^\varepsilon \frac{e^{(\alpha-1)(\log x+i2\pi)}}{1+x}dx = 2\pi i\, e^{(\alpha-1)\,i\pi}.$$

Analise-se $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz$ e $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$ quando $r \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0$:

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)dz\right| \leq \int_{\gamma_r} \left|\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\right| |dz| \leq \frac{r^{\alpha-1}}{r-1} 2\pi r \quad \text{e} \quad \left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| \leq \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{\varepsilon-1} 2\pi\varepsilon = 2\pi \frac{\varepsilon^\alpha}{\varepsilon-1};$$

então, como $0 < \alpha < 1$, $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 0$ e $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$.

Obtém-se então de (*) que

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{(\alpha-1)\log x}}{1+x}-\frac{e^{(\alpha-1)(\log x+i2\pi)}}{1+x}\right)dx=2\pi i e^{(\alpha-1)(i\pi)},$$

isto é,

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{(\alpha-1)\log x}\left(1-e^{(\alpha-1)(2i\pi)}\right)}{1+x}dx=2\pi i\,e^{(\alpha-1)i\pi},$$

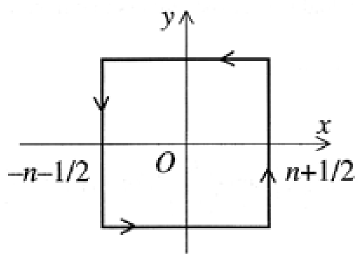
ou seja,

$$\left(1-e^{(\alpha-1)(2i\pi)}\right)\int_0^{+\infty}\frac{e^{(\alpha-1)\log x}}{1+x}dx=2\pi i\,e^{(\alpha-1)i\pi}.$$

Finalmente

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=2\pi i\frac{e^{(\alpha-1)i\pi}}{1-e^{(\alpha-1)2i\pi}}=\pi e^{i\pi}\frac{2ie^{\alpha i\pi}}{1-e^{2\alpha i\pi}}=\pi\frac{2ie^{\alpha i\pi}}{e^{2\alpha i\pi}-1}=\frac{2i\pi}{e^{\alpha i\pi}-e^{-\alpha i\pi}}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}=\pi\operatorname{cosec}(\alpha\pi).$$

22. Utilizando o integral de $f(z)=\dfrac{\pi\operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2}$, ao longo da fronteira do quadrado Q_n com vértices $(\pm1\pm i)\left(n+\dfrac{1}{2}\right)n\in\mathbb{N}$, calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.



Resolução:

Os pontos $z_n=n$, $n\in\mathbb{Z}/\{0\}$ são pólos simples da função e $z_0=0$ é um pólo triplo da função.

Tem-se: $\operatorname{res}(f,z_n)=\dfrac{1}{n^2}$, $\operatorname{res}(f,0)=-\dfrac{\pi^2}{3}$

Como o quadrado é tal que não existiem singularidades da função sobre os seus lados, pelo teorema dos resíduos de Cauchy,

$$\int_{Q_n} f(z)dz = 2\pi i\left(-\frac{\pi^2}{3}+2\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Observe-se que $|\text{cotg}\pi z|$ é uma função limitada sobre o quadrado Q_n. Com efeito, para z sobre os lados horizontais do quadrado, tem-se $z = x \pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)$ e, assim,

$$|\text{cotg}\pi z| = \left|\frac{e^{i\pi\left(x\pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}+e^{-i\pi\left(x\pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}}{e^{i\pi\left(x\pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}-e^{-i\pi\left(x\pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}}\right| \leq \frac{e^{\mp\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+e^{\mp\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{\left|e^{\mp\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}-e^{\mp\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right|}$$

$$\leq \frac{e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}+e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}-e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}} = \text{cotg}\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Como a função real de variável real cotg x é decrescente para $x \geq 0$, resulta que $\text{cotg}\left(n+\frac{1}{2}\pi\right) < \text{cotg}\frac{3}{2}\pi$ e $|\text{cotg}\pi z|$ é limitada sobre os lados horizontais de Q_n.

Sobre os lados verticais do quadrado, tem-se $z = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)+iy$ e assim, $|\text{cotg}\pi z| = |\text{tg}\, i\pi\, y| = |\text{tg}\pi y| \leq 1$, isto é, $|\text{cotg}\pi z|$ é limitada sobre os lados verticais de Q_n.

Então $|\text{cotg}\pi z|$ é limitada sobre o quadrado Q_n, existindo assim um número real positivo K, tal que $|\text{cotg}\pi z| \leq K$.

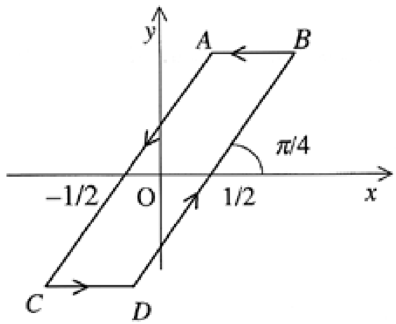
O comprimento de Q_n é $L_n = 4(2n+1)$ e, assim,

$$\left|\int_{Q_n} f(z)dz\right| \leq \left(\sup_{z\in Q_n}\frac{\pi K}{|z^2|}\right)4(2n+1) \leq \pi K\frac{4(2n+1)\pi}{(n+1/2)^2}.$$

Como $\pi K\dfrac{4(2n+1)\pi}{(n+1/2)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, resulta que $\lim\limits_{n}\int_{Q_n} f(z)dz = 0$. Consequentemente, $2\pi i\left(-\frac{\pi}{3}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = 0$ e assim

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

23. Integrando a função $f(z)=\dfrac{e^{i\pi z^2}}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ ao longo do paralelogramo indicado na figura, em que $A=-\dfrac{1}{2}+re^{i\frac{\pi}{4}}$, $B=\dfrac{1}{2}+re^{i\frac{\pi}{4}}$, $C=-\dfrac{1}{2}-re^{i\frac{\pi}{4}}$ e $D=-\dfrac{1}{2}-re^{i\frac{\pi}{4}}$, $r>0$, prove que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.



Resolução:

Como $f(z)=\dfrac{e^{i\pi z^2}}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ tem apenas a singularidade $z=0$ (pólo simples) no interior de C, tem-se

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\operatorname{res}(f,0) = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{ze^{i\pi z^2}}{\operatorname{sen}(\pi z)} = 2\pi i\frac{1}{\pi} = 2i.$$

Os lados oblíquos do paralelogramo podem ser parametrizados por $\gamma(t)=te^{i\frac{\pi}{4}}\pm\dfrac{1}{2}$ com $-r\le t\le r$. Para z sobre DB ou AC, tem-se

$$f(z)=\frac{e^{i\pi\left(te^{i\frac{\pi}{4}}\pm\frac{1}{2}\right)}}{\operatorname{sen}\left(\pi\left(te^{i\frac{\pi}{4}}\pm\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{e^{i\pi\left(t^2e^{i\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\pm te^{i\frac{\pi}{4}}\right)}}{\cos\left(\pi te^{i\frac{\pi}{4}}\right)}.$$

e, assim,

$$\int_{DB} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r}\frac{e^{i\pi\left(t^2e^{i\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}-te^{i\frac{\pi}{4}}\right)}}{\cos\left(\pi te^{i\frac{\pi}{4}}\right)}e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt\,,\quad \int_{AC} f(z)\,dz = -\int_{-r}^{r}\frac{e^{i\pi\left(t^2e^{i\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}-te^{i\frac{\pi}{4}}\right)}}{\cos\left(\pi te^{i\frac{\pi}{4}}\right)}e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt\,.$$

Então,

$$\int_{DB} f(z)dz + \int_{AC} f(z)dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-r}^{r} \frac{e^{-\pi t^2 + \frac{i\pi}{4}}\left(e^{te^{i\frac{\pi}{4}}} - e^{-te^{i\frac{\pi}{4}}}\right)}{\cos\left(\pi t e^{i\frac{\pi}{4}}\right)} dt =$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{2}} \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} dt = 2i \int_{-r}^{r} e^{-\pi t^2} dt = \frac{4i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{\pi}}} e^{-x^2} dx .$$

Ao longo dos lados horizontais, que podem ser parametrizados por $\gamma(t) = \pm r e^{i\frac{\pi}{4}} + t$ com $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$, o integral de f toma a forma $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i\pi\left(\pm re^{i\frac{\pi}{4}} + t\right)^2}}{\operatorname{sen}\left(\pi\left(\pm re^{i\frac{\pi}{4}} + t\right)\right)} dt$.

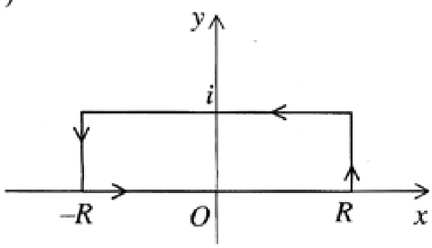
Tendo em conta que $\left|\operatorname{sen}(x+iy)\right| \geq \frac{\left|e^{-y} - e^{y}\right|}{2}$ e que $\left|e^{x+iy}\right| = e^x$, obtém-se, depois de efectuados alguns cálculos,

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i\pi\left(\pm re^{i\frac{\pi}{4}} + t\right)^2}}{\operatorname{sen}\left(\pi\left(\pm re^{i\frac{\pi}{4}} + t\right)\right)} dt\right| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2 \frac{e^{-\pi r^2 \mp \sqrt{2} t r \pi}}{e^{\frac{r\pi}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{r\pi}{\sqrt{2}}}} dt$$

Fazendo r tender para $+\infty$, resulta que

$$2i = \lim_{r \to +\infty} \frac{4i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{\pi}}} e^{-x^2} dx \quad \text{e assim,} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

24. Sabendo que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, (ver exercício 23), use o rectângulo indicado na figura para calcular $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2x) \, dx$.



Resolução:

Designe-se por C o rectângulo indicado na figura e considere-se a função f definida em $\mathbb{C}$ por $f(z)=e^{-z^2}$.

Como f é holomorfa em $\mathbb{C}$, tem-se que $\int_C f(z)\,dz=0$ e, assim,

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx+\int_0^1 e^{-(R+it)^2}\,i\,dt+\int_R^{-R} e^{-(x+i)^2}\,dx+\int_1^0 e^{-(-R+it)^2}\,i\,dt=0;$$

esta igualdade pode escrever-se na forma

$$\int_0^1 e^{-\left(R^2-t^2\right)}(-2i)\operatorname{sen}(2Rt)\,dt+\left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx-e\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\left(\cos(2x)+i\operatorname{sen}(2x)\right)dx\right]=0\,;$$

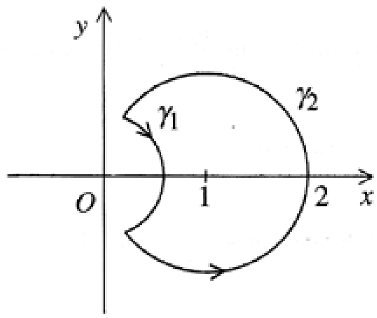
tomando as partes reais em ambos os lados desta igualdade e tendo em conta a paridade das funções integrandas, resulta que

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx-e\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\cos(2x)\,dx\;=2\left(\int_0^{R} e^{-x^2}\,dx-e\int_0^{R} e^{-x^2}\cos(2x)\,dx\right)=0\,.$$

Passando ao limite quando R tende para $+\infty$, obtém-se

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2x)\,dx=\frac{2}{e}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{e}\,.$$

25. Seja C a curva fechada, orientada no sentido positivo e representada na figura, em que γ_1 é um arco da circunferência C_1 com centro na origem e raio ε, $\varepsilon<1$, e γ_2 é um arco da circunferência C_2 com centro no ponto $z=1$ e raio 1, sendo Re $z>0$ em γ_1.



a) Mostre que a função f definida por $f(z)=\dfrac{\log z}{z-1}$ é analítica no semiplano Re $z>0$ (onde $\log z$ representa o ramo principal do logaritmo). Calcule $\int_C f(z)dz$.

b) Prove que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)dz=0$.

c) Tendo em conta os resultados das alíneas anteriores, verifique que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos\theta)d\theta=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

Resolução:

a) Como $\log z$ representa o ramo principal do logaritmo, cujo domínio de analiticidade contém o conjunto $\{z:\operatorname{Re} z>0\}$, a função $f(z)=\dfrac{\log z}{z-1}$ é em particular analítica em $\{z:\operatorname{Re} z>0\}\setminus\{1\}$. A única singularidade de f interior a C é $z_0=1$ que é uma singularidade removível de f (porque $\lim_{z\to 1}\dfrac{\log z}{z-1}=1$). Pelo teorema dos resíduos de Cauchy, tem-se então que $\int_C f(z)dz=0$.

b) Tem-se $\left|\int_{\gamma_1}\dfrac{\log z}{z-1}dz\right|\le M\pi\varepsilon$ em que $M\ge\sup_{z\in\gamma_1}\left|\dfrac{\log z}{z-1}\right|$. Como, para z sobre γ_1, se tem

$$\left|\frac{\log z}{z-1}\right|=\frac{|\log z|}{|1-z|}\le\frac{|\log z|}{|1-|z||}=\frac{|\log|z|+i\arg z|}{1-\varepsilon}\le\frac{\log|z|+|\arg z|}{1-\varepsilon}\le\frac{\log\varepsilon+\pi}{1-\varepsilon},$$

tome-se $M=\dfrac{\log\varepsilon+\pi}{1-\varepsilon}$.

Atendendo a que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M\pi\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\varepsilon+\pi}{1-\varepsilon}\pi\varepsilon=\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\log\varepsilon+\pi\varepsilon}{1-\varepsilon}=0,$$

pode concluir-se que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)dz=0$.

c) Pela alínea anterior $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)dz=0$; como $\int_C f(z)dz=\int_{\gamma_2} f(z)dz-\int_{\gamma_1} f(z)dz=0$, resulta que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz=0.$$

Então, sendo $z-1=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, tem-se:

$$\int_{C_2} f(z)\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{\log\left(1+e^{it}\right)}{e^{it}}ie^{it}\,dt=i\int_0^{2\pi}\log\left(1+e^{it}\right)dt=0,$$

de onde se deduz que $\int_0^{2\pi}\log\left|1+e^{it}\right|dt=0$, isto é,

$$\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+\cos^2 t+2\cos t+\operatorname{sen}^2 t}\;dt=\int_0^{2\pi}\log\sqrt{2+2\cos t}\;dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\log\sqrt{2}+\log\sqrt{1+\cos t}\right)dt=$$

$$=\pi\log 2+\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+\cos t}\,dt=0,$$

ou ainda, tendo em conta que $\left|\cos\frac{t}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}$,

$$\pi\log 2+\int_0^{2\pi}\log\left(\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\right)dt=0.$$

Fazendo a mudança de variável $\theta=\frac{t}{2}$, obtém-se

$$2\pi\log 2+\int_0^{\pi}2\log\left|\cos\theta\right|d\theta=0\iff\int_0^{\pi}\log\left|\cos\theta\right|d\theta=-\pi\log 2$$

e, finalmente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\cos\theta\right)d\theta=-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Capítulo

7

FUNÇÕES HARMÓNICAS

A. Princípio do módulo máximo e do módulo mínimo

No Capítulo 2 analisou-se a existência de máximo e mínimo da função módulo de funções contínuas em conjuntos compactos (teorema B.3.).

Neste capítulo apresenta-se o estudo do máximo e mínimo do módulo de funções analíticas.

Teorema A.1. (Princípio do módulo máximo)

Seja f uma função não constante, analítica num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{C}$ e contínua na fronteira C de Ω. Então, $|f|$ assume o máximo na fronteira de Ω, isto é, existe $z^* \in C$, tal que

$$|f(z)| \leq |f(z^*)|, \quad \forall z \in \Omega .$$

Demonstração:

A função f, sendo contínua no conjunto $\overline{\Omega}$, está nas condições do teorema B.3. do Capítulo 2, pelo que a existência de um valor máximo de $|f(z)|$ está garantida. Seja M esse valor máximo.

Para provar que M só é atingido na fronteira de Ω, suponha-se, por redução ao absurdo, que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\left|f(z_0)\right|$ é igual ao valor máximo de $|f|$ em $\overline{\Omega}$, isto é, $\left|f(z_0)\right| = M$.

(i) Demonstre-se que $\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta = 2\pi M$ para r suficientemente pequeno:

Considere-se o disco $\overline{D(z_0,r)}$ de forma a que $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$.

O teorema do valor médio permite estabelecer que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta.$$

Assim:

$$M = \left|f(z_0)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta,$$

isto é,

$$2\pi M \le \int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta.$$

Atendendo a que M é o valor máximo de $|f|$ em Ω, tem-se que

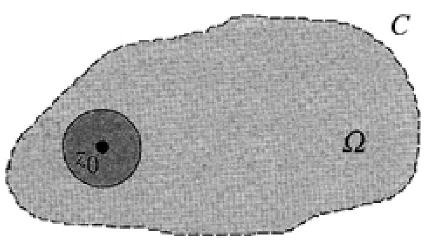
$$\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right| \le M, \quad \forall\theta\in[0,\ 2\pi]$$

e, então,

$$2\pi M \le \int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta \le \int_0^{2\pi} M d\theta = 2\pi\, M,$$

de onde se conclui que

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta = 2\pi\, M.$$



(ii) Mostre-se que, nas condições estabelecidas,

$$\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| = M, \qquad \forall \theta \in [0,\ 2\pi],$$

isto é, $|f|$ é constante na circunferência $|z - z_0| = r$. Para tal, admita-se que existe um ponto da circunferência onde $|f|$ não toma o valor M, isto é,

$$\exists \alpha \in [0,\ 2\pi] : \left|f\left(z_0 + re^{i\alpha}\right)\right| < M$$

ou, mais precisamente, para certo $\varepsilon > 0$ tem-se $\left|f\left(z_0 + re^{i\alpha}\right)\right| < M - \varepsilon$.

Seja $\delta > 0$ tal que $[\alpha - \delta,\ \alpha + \delta] \subset]0,\ 2\pi[$ e $\left|(f(z_0 + re^{i\theta})\right| \leq M - \varepsilon$ em $[\alpha - \delta,\ \alpha + \delta]$.

Então,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta &= \int_0^{\alpha-\delta}\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta + \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta}\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta + \int_{\alpha+\delta}^{2\pi}\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta \leq \\ &\leq M(\alpha-\delta) + (M-\varepsilon)[(\alpha+\delta)-(\alpha-\delta)] + M[2\pi - (\alpha+\delta)] = \\ &= M2\pi - 2\varepsilon\delta.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon\delta > 0$, tem-se

$$\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right|d\theta \neq 2M\pi,$$

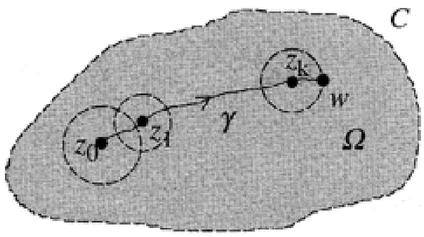
o que contradiz o que se havia estabelecido em (i). Assim,

$$\left|f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right| = M, \quad \forall \theta \in [0,\ 2\pi],$$

para qualquer ponto da circunferência $|z - z_0| = r$.

(iii) Tendo em conta (i) e (ii), conclua-se que M só é atingido na fronteira de Ω.

Seja w um ponto qualquer de Ω. Como Ω é um conjunto conexo, tem-se que Ω é conexo por arcos. É então possível definir uma curva γ, contida em Ω, unindo z_0 a w; $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = w$. (Em geral, um conjunto conexo não é conexo por arcos. Contudo, se Ω é um subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{C}$, então Ω é conexo se e só se é conexo por arcos (recomenda-se a leitura de Stephen Willard, *General Topology*).)



Se $|f(w)| = |f(\gamma(1))| < M$ seja $t^* = \sup\{t > 0 : |f(\gamma(t))| = M\}$; tem-se $0 < t^* < 1$; então por continuidade $|f(\gamma(t^*))| = M$ e o mesmo numa vizinhança de $\gamma(t^*)$, como se viu anteriormente.

Como $D(\gamma(t^*), r)$ contém pontos $\gamma(t)$ com $t > t^*$ arbitrariamente próximos, obtém-se uma contradição. Conclui-se assim que não existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)|$ seja o valor máximo de $|f|$.

Observação:

1. O princípio do módulo máximo pode também enunciar-se na forma:

Uma função analítica no domínio limitado Ω, contínua na sua fronteira e tal que o valor máximo de $|f|$ é assumido num ponto de Ω, é uma função constante em Ω.

2. Este resultado não se estende ao caso em que Ω não é um conjunto limitado. Por exemplo considere-se o semiplano superior

$$\Omega = \{z = x + iy : y > 0\}$$

e a função $f(z) = \operatorname{sen} z$. A fronteira de Ω é o conjunto dos números reais, na qual, sendo x a parte real de z, se tem

$$|f(z)| = |\operatorname{sen} z| = |\operatorname{sen} x|,$$

de onde se deduz que

$$\max_{z \in fr(\Omega)} |f(z)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |\operatorname{sen} x| = 1.$$

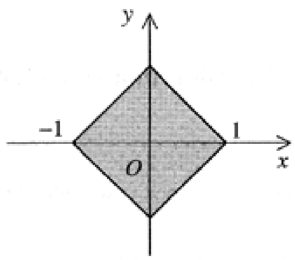
Porém, $|\operatorname{sen} i| > 1$ (exemplo A.6. do Capítulo 2), o que significa que o máximo de $|\operatorname{sen} z|$ não é assumido na fronteira.

3. Este teorema traduz uma diferença de comportamento entre as funções complexas e as funções reais. De facto, para as funções reais, o máximo absoluto pode ser assumido no interior do domínio.

Exemplo A.1.

Considere-se a função $f(z) = e^z$ definida no subconjunto de $\mathbb{C}$:

$$\overline{\Omega} = \{z = x + iy : y \geq |x| - 1 \wedge y \leq -|x| + 1\}.$$



Em $\overline{\Omega}$ tem-se que

$$|f(z)| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^x,$$

isto é, $|f|$ é uma função real estritamente crescente, pelo que o valor máximo é assumido no ponto $x = 1$, ou seja,

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = e^1.$$

Exemplo A.2.

Nas condições do teorema A.1., se f se anula na fronteira de Ω então f anula-se em todos os pontos de Ω.

Exemplo A.3.

Seja $r > 0$ e $f(z)$ uma função analítica no disco $D(0,r)$ e contínua em $\overline{D(0,r)}$.

É consequência directa do teorema A.1. que, se existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ na circunferência $|z| = r$, então $|f(z)| \leq M$ no disco.

Note-se que a igualdade $|f(z)| = M$ para z no disco só se verifica se f for uma função constante.

Corolário (Princípio do módulo mínimo)

Seja f uma função não constante, analítica num domínio limitado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, e contínua na sua fronteira C.

Se f não se anula em nenhum ponto de $\overline{\Omega}$, então $|f|$ assume o mínimo na fronteira de Ω, isto é, existe $z^* \in C$ tal que

$$|f(z)| \geq |f(z^*)|, \quad \forall z \in \Omega.$$

Demonstração:

Como f não se anula em Ω, a função $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ está nas condições do princípio do módulo máximo e, portanto,

$$\exists\, z^* \in C \quad \text{tal que} \quad |F(z)|<|F(z^*)|\ ,\ \forall z \in \Omega\ ,$$

isto é, para qualquer $z \in \Omega$,

$$|f(z)|>|f(z^*)|.$$

Conclui-se então que $|f(z^*)|$ é o valor mínimo da função $|f|$.

Observação:
A hipótese de f não se anular em $\overline{\Omega}$ é fundamental para demonstrar o resultado anterior. Com o exemplo que se segue ilustra-se este facto:
Seja $f(z) = z$ definida em $\overline{D(0,1)}$. Designemos por C a circunferência de centro na origem e raio 1, que se pode parametrizar do seguinte modo:

$$z=e^{i\theta},\quad \theta \in [0,2\pi].$$

Em C tem-se que $|f(z)|=1$, no entanto o valor mínimo de $|f(z)|$ ocorre no interior de C, pois $f(0) = 0$.

Exemplo A.1.
Considere-se a função inteira $f(z)=e^z$ que não se anula em $\overline{D(0,1)}$. Pelo princípio do módulo mínimo, tem-se que o valor mínimo de $|f(z)|$ é assumido na circunferência de centro em 0 e raio 1. Na verdade,

$$|f(z)|=e^{\operatorname{Re} z}\geq e^{-1},\quad \forall z \in \overline{D(0,1)},$$

isto é, o mínimo é assumido no ponto da circunferência de menor parte real, $x = -1$.

Teorema A.2. (Lema de Schwarz)
Seja f uma função analítica em $D(0,1)$ e contínua em $\overline{D(0,1)}$. Suponha-se que $|f(z)|\leq 1$, para z em $D(0,1)$ e $f(0) = 0$. Então tem-se

$$|f'(0)|\leq 1 \quad \text{e} \quad |f(z)|\leq |z|\ ,\ \forall z \in D(0,1).$$

Se $|f(z_0)|=|z_0|$ para algum $z_0 \neq 0$ pertencente a $D(0,1)$, ou se $|f'(0)|=1$, então $f(z) = cz$, onde c é uma constante de módulo igual a 1.

Demonstração:

Defina-se, em $\overline{D(0,1)}$, a função g por

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Esta função é contínua em $\overline{D(0,1)}$, pois

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = f'(0) = g(0),$$

e, pelo teorema C.1. do Capítulo 5, é analítica em $D(0,1)$.

Uma vez que, sobre a circunferência $|z| = 1$,

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = |f(z)| \leq 1,$$

tem-se, aplicando o princípio do módulo máximo à função g em $\overline{D(0,1)}$, que o valor máximo de $|g|$ terá de ser assumido na fronteira de $\overline{D(0,1)}$, isto é, na circunferência $|z| = 1$. Então, $|g(z)| \leq 1$, para $z \in D(0,1)$, isto é,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |f(z)| \leq |z|$$

para $z \neq 0$, e

$$|g(0)| \leq 1 \Leftrightarrow |f'(0)| \leq 1.$$

Como, por hipótese, $f(0) = 0$, conclui-se, para qualquer $z \in \overline{D(0,1)}$, que $|f(z)| \leq |z|$.

Se $|f(z_0)| = |z_0|$ para algum $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, ter-se-á que $|g(z_0)| = 1$, isto é, $|g|$ assume o valor máximo num ponto interior de $D(0,1)$ e, portanto, a função g é constante em $\overline{D(0,1)}$.

Se $|f'(0)| = 0$, então $|g(0)| = 1$ e o valor máximo de g é assumido no interior de $D(0,1)$, em $z = 0$, de onde se deduz novamente que g é constante em $\overline{D(0,1)}$.

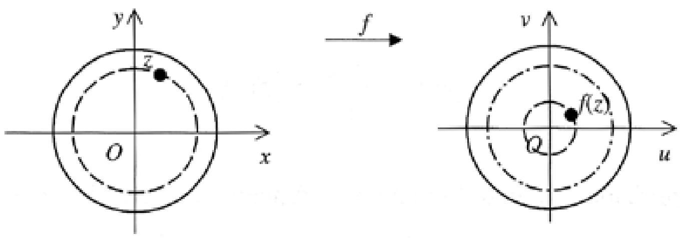
Tem-se então, em qualquer dos casos, que

$$|g(z)| = 1, \qquad \forall z \in \overline{D(0,1)},$$

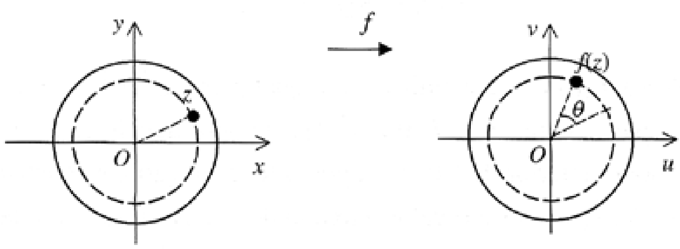
ou seja, $g(z) = c$ onde c, é uma constante de módulo igual a 1. Isto é,

$$\frac{f(z)}{z} = c \Leftrightarrow f(z) = cz, \qquad |c| = 1.$$

Observação:
No teorema anterior, a constante c encontrada é tal que $c = e^{i\theta}$ para algum número real θ, e assim $f(z) = e^{i\theta} z$.
Geometricamente, uma função nas condições do lema de Schwarz ou é uma contracção ou é uma rotação.
Com efeito, tem-se:
– ou f aplica um disco de centro na origem, noutro disco de centro na origem, contraindo as distâncias à origem



– ou, se a distância à origem de algum ponto, z_0, se mantém invariante por f, isto é, $|f(z_0)| = |z_0|$, então f é uma rotação em torno da origem.



B. Funções harmónicas

Sendo $f = u + iv$ uma função analítica num domínio Ω, sabe-se pelo teorema C.2. do Capítulo 2 que u e v são funções harmónicas que verificam as condições de Cauchy-Riemann. Um par de funções harmónicas num domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que verificam as condições de Cauchy-Riemann dizem-se **harmónicas conjugadas**.

Põe-se agora a questão de saber em que condições, dada uma função u, de classe C^2 e harmónica num domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, é possível encontrar funções v de classe C^2 e harmónicas, tais que $f = u + iv$ seja analítica em Ω.

Teorema B.1.

Sejam Ω um domínio simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ e u uma função harmónica e de classe C^2 em Ω. Então, existe $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em Ω e tal que $u = \operatorname{Re} f$.

Demonstração:

Considere-se a função complexa

$$g(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

e verifique-se que ela está nas condições do teorema C.2. do Capítulo 2.

Atendendo a que u é uma função de classe C^2 harmónica em Ω e que

$$\operatorname{Re} g = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} g = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

são funções diferenciáveis em Ω, e como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

verificam-se as condições de Cauchy-Riemann. Então, g é holomorfa (analítica) em Ω e, pelo teorema B.5. do Capítulo 3, é primitivável em Ω; isto é, existe

$$G : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad G = U + iV,$$

analítica em Ω e tal que $G' = g$, ou seja,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

e ainda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y). \end{cases}$$

Como as funções U e u têm as mesmas derivadas parciais em Ω, que é um domínio, então U e u diferem por uma constante. Tem-se, então, que existe uma constante real k, tal que

$$U - u = k \quad \text{logo} \quad G = (u + k) + iV$$

e assim

$$G - k = u + iV$$

é uma função analítica em Ω cuja parte real é a função harmónica u dada.

Observação:
Já foi exemplificado no Capítulo 2 como se procede na prática para, dada uma função harmónica u, se obterem as suas funções harmónicas conjugadas, nas condições do teorema B.1. Para tal recomenda-se a leitura, nesse capítulo, dos exercícios 18, 19 e 20.

Exemplo B.1.
A função $u(x,y) = e^x \cos y$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e facilmente se verifica que é harmónica em $\mathbb{R}^2$. Tem-se que

$$f(x+iy) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^{x+iy}$$

é uma função inteira da qual u é a parte real.

Teorema B.2.

Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^2$ e u uma função harmónica em Ω. Então, para cada $z_0 \in \Omega$, existem uma vizinhança de z_0, $D(z_0,r)$, $r>0$, e uma função analítica f em $D(z_0,r)$, tal que $u = \operatorname{Re} f$.

Demonstração:

Como Ω é um conjunto aberto, para qualquer $z_0 \in \Omega$ existe $r>0$, tal que $D(z_0,r) \subseteq \Omega$. Atendendo à observação 2 da definição A.8. do Capítulo 3, $D(z_0,r)$ é um domínio simplesmente conexo e então o teorema B.1. permite concluir a existência da função analítica f nas condições pedidas.

Observação:

1. O teorema B.1. estabelece uma condição global de existência da função f nas condições indicadas, enquanto que o teorema B.2. estabelece as condições locais de existência de f.

2. Atendendo a que as funções harmónicas estão relacionadas com funções analíticas, elas são funções de classe C^∞.

Exemplo B.2.

Seja $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, função harmónica e de classe C^2 em $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (conjunto este que não é simplesmente conexo), não havendo portanto garantia de existência de uma função analítica em Ω de que u seja a parte real. Considerando-se o ramo principal

$$\log z = \log|z| + i\arg z, \quad \arg z \in [-\pi,\pi[$$

e pondo $z = x+iy$, tem-se

$$\log(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\,\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Esta função é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy : y=0 \wedge x \leq 0\}$ (conjunto simplesmente conexo).

Teorema B.3. (Teorema do valor médio)

Seja $u(x,y)$ uma função de classe C^2 e harmónica em $\overline{D((x_0,y_0),r)}$ com $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r>0$. Então,

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\,\operatorname{sen} t)\,dt.$$

Observação:
No texto que se segue, em vez de se escrever $u(x_0, y_0)$ escreve-se, por comodidade, $u(z_0)$, quando $z_0 = x_0 + iy_0$, nomeadamente

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt\ .$$

Demonstração:

A função u definida em $\overline{D((x_0, y_0), r)}$ está nas condições do teorema B.1., o que significa que existe uma função analítica f em $\overline{D(z_0, r)}$, onde $z_0 = x_0 + iy_0$ é tal que $u = \operatorname{Re} f$.

O teorema do valor médio para funções analíticas, estabelece que, para f,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$$

e então, atendendo à definição A.9. do Capítulo 3,

$$\operatorname{Re} f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt,$$

isto é,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt,$$

o que demonstra o teorema.

Estabelecem-se em seguida resultados, para funções harmónicas, análogos aos princípios do máximo e do mínimo para funções analíticas. Atendendo a que as funções harmónicas estão relacionadas com funções analíticas, elas são funções de classe C^∞.

Teorema B.4. (Princípio do máximo para funções harmónicas)

Seja $f = u + iv$ uma função não constante num domínio limitado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e contínua na sua fronteira C. Então, u assume o máximo num ponto da fronteira C de Ω, isto é, existe (x^*, y^*) pertencente a C tal que

$$u(x, y) \leq u(x^*, y^*), \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Demonstração:

Se u é uma função constante em $\overline{\Omega}$ o resultado é óbvio. Se u não é uma função constante, considere-se a função (não constante) analítica em Ω e contínua na fronteira de Ω :

$$F(z) = e^{f(z)},$$

sendo $z = x + iy$. Aplicando o teorema A.1. à função $F(z)$, tem-se que o valor máximo de

$$|F(z)| = \left|e^{f(z)}\right| = e^{\operatorname{Re} f(z)} = e^{u(x,y)},$$

é assumido na fronteira de Ω ; isto é, existe $z^* = x^* + iy^*$ na fronteira de Ω tal que $|F(z^*)|$ é máximo.

Como $e^{u(x,y)}$ é uma função real estritamente crescente, o seu valor máximo, $e^{u(x^*,\, y^*)}$ ocorre quando $u(x,y)$ também fôr máximo, isto é, no ponto (x^*,y^*) na fronteira de Ω: $u(x,y) \leq u(x^*, y^*), \quad \forall (x,y) \in \Omega$.

Corolário do Teorema B.4. (Princípio do mínimo para funções harmónicas)

Nas condições do teorema B.4., a função u assume o mínimo na fronteira de Ω.

Demonstração:

Seja

$$\tilde{f}(z) = -f(z) = -u - iv$$

A função $-u$ é também harmónica e o seu valor máximo corresponde ao valor mínimo de u. Aplicando o teorema anterior à função $-u$ tem-se o resultado pretendido.

Exemplo B.3.

Seja $u(x,y) = x^2 - y^2$ definida em $\overline{D(0,1)}$. O máximo de u ocorre quando $y^2 = 0$, sendo

$$\max_{x\in[-1,1]} u(x,y) = \max_{x\in[-1,1]} (x,0) = \max_{x\in[-1,1]} x^2 = 1$$

o máximo é então assumido nos pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$ (pontos na fronteira de $\overline{D(0,1)}$). Note-se que se $(x,y) \in D(0,1)$, tem-se que $u(x,y) < 1$.

Analogamente se verifica que o mínimo é -1 sendo assumido nos pontos da fronteira de $\overline{D(0,1)}$): $(0,1)$ e $(0,-1)$.

C. Problemas de Dirichlet no disco. Integral de Poisson

Como complemento ao estudo das funções harmónicas, apresenta-se neste parágrafo o problema de valores na fronteira conhecido como Problema de Dirichlet, que tem uma vasta aplicação na Física Matemática.

Problema de Dirichlet

Dados um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^2$ e uma função real φ contínua na fronteira C de Ω, que se supõe ser uma curva seccionalmente regular, o problema de Dirichlet consiste em procurar uma função $u(x,y)$ harmónica em Ω, contínua em $\overline{\Omega}$ e que coincida com a função na fronteira de Ω. (O problema também pode ser formulado quando a função φ é seccionalmente contínua na fronteira C de Ω.)

O problema de Dirichlet é um problema de valores na fronteira, pois trata-se de procurar uma função solução, em Ω, da equação diferencial,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ (equação de Laplace)}$$

e tal que $u(x,y) = \varphi(x,y)$ para $(x,y) \in C$.

Em certas condições é possível demonstrar a existência e a unicidade de solução para o problema de Dirichlet.

Unicidade de solução do problema de Dirichlet

Sejam u e $\tilde{u}$ duas soluções do problema. Então $U = u - \tilde{u}$ é uma função harmónica no domínio Ω, contínua em $\overline{\Omega}$ e nula na fronteira de Ω. Os princípios do máximo e do mínimo para funções harmónicas permitem concluir que U é nula em Ω (ver exercício 14 deste capítulo). Logo, $u = \tilde{u}$ em Ω, isto é, se existir, a solução é única.

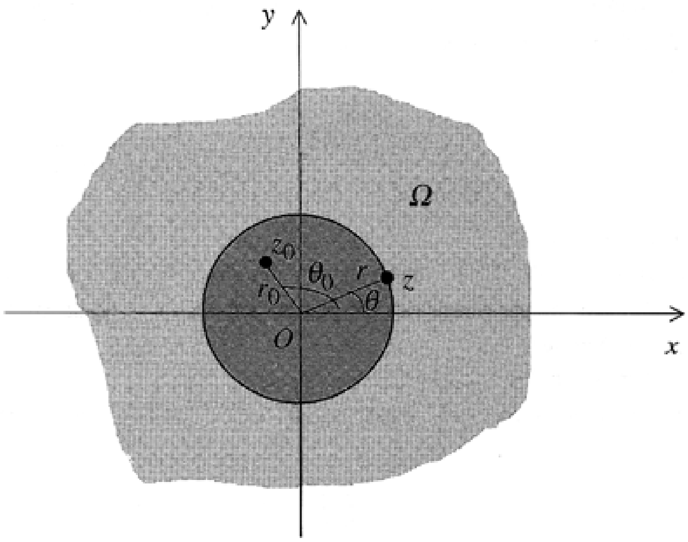
Observação:
Como se viu, a solução do problema de Dirichlet é única quando a função φ é contínua em Ω. Quando φ tem descontinuidades, não há unicidade da solução.

Existência de solução do problema de Dirichlet

É possível, em certas condições, encontrar uma expressão explícita para a solução do problema de Dirichlet. Neste texto trata-se apenas o caso em que o domínio Ω é um disco $D(0,r)$, $r>0$, para o que é necessário obter-se a seguinte fórmula integral de Poisson.

Teorema C.1. (Fórmula integral de Poisson)

Seja $f=u+iv$ uma função analítica num domínio Ω que contém a circunferência $|z|=r$, com $r>0$. Seja $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ um ponto do disco $D(0,r)$, com $0<r_0<r$, $0\le\theta_0\le 2\pi$.



Então

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}u(re^{i\theta})d\theta$$

e

$$v(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}v(re^{i\theta})d\theta.$$

Observação:

1. As fórmulas enunciadas são designadas por **fórmula integral de Poisson** para as funções u e v respectivamente, no disco $\overline{D(0,r)}$.

Note-se que dar uma função contínua na fronteira de $D\,(0,r)$ é equivalente a dar uma função contínua e 2π periódica em $\mathbb{R}$ com a identificação $\varphi\,(x,y)=\varphi\left(re^{i\theta}\right)=\varphi\,(\theta)$. Assim as expressões obtidas podem escrever-se na forma

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}\varphi\,(0)d\theta$$

e

$$v(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}\psi\,(0)d\theta\,.$$

2. Sendo $f=u+iv$, analítica em Ω, a função u é harmónica em Ω. A fórmula integral de Poisson dá os valores da função harmónica u no interior do círculo a partir dos valores sobre a circunferência, à semelhança da fórmula integral de Cauchy para as funções holomorfas.

3. A função

$$N(r_0,r,\theta-\theta_0)=\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}$$

é conhecida por **núcleo de Poisson**.

Nos exercícios 18 e 19 demonstram-se algumas das propriedades do núcleo de Poisson, nomeadamente, que é uma função positiva, par e periódica (de período 2π) como função de $\theta-\theta_0$ e harmónica como função de (r_0,θ_0). Também se tem que

(i) $r_0=0\Rightarrow N(0,r,\theta-\theta_0)=1$.

(ii) Se u for a função constante igual a 1, da fórmula integral de Poisson deduz-se que

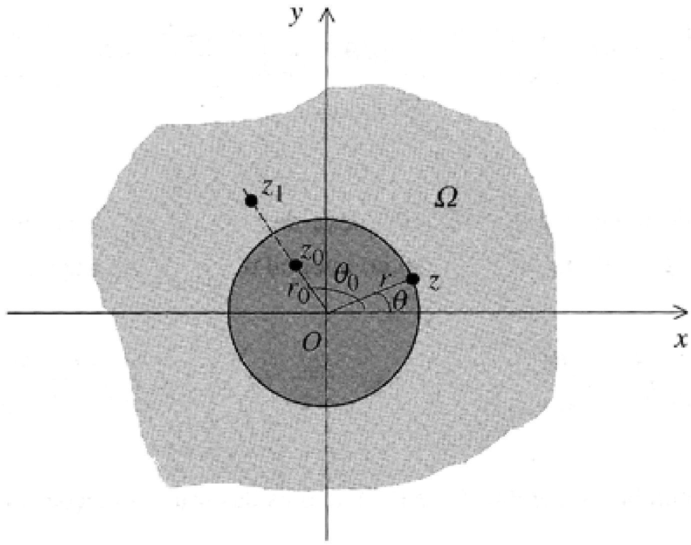
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r_0,r,\theta-\theta_0)d\theta=1.$$

Demonstração:

Seja $f=u+iv$ uma função analítica em $\overline{D(0,r)}$. Aplicando, neste domínio, a fórmula integral de Cauchy à função f, obtém-se

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \qquad (*)$$

Suponha-se que $z_0\neq 0$ e considere-se o ponto $z_1=\dfrac{r^2}{\bar{z}_0}$ exterior à circunferência $|z|=r$.



Como a função $\dfrac{f(z)}{z-z_1}$ é analítica em $\overline{D(0,r)}$ tem-se, pelo teorema de Cauchy, que

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_1}\,dz = 0,$$

isto é,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\dfrac{r^2}{\overline{z}_0}}\,dz = 0. \qquad (**)$$

Fazendo $z = re^{i\theta}$, com $\theta \in [0,2\pi]$, tem-se $dz = ire^{i\theta}d\theta = izd\theta$ (no que se segue atente-se ao abuso de linguagem já referido, na observação ao teorema B.3. deste capítulo).

Substituindo em (*), obtém-se

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z-z_0}\,zd\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u+iv}{z-z_0}\,zd\theta\ ;$$

substituindo em (**) e, atendendo a que $z\overline{z} = r^2$, resulta que

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z-\frac{r^2}{\bar{z}_0}}z\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u+iv}{z-\frac{r^2}{\bar{z}_0}}z\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u+iv}{z-\frac{z\bar{z}}{\bar{z}_0}}z\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\bar{z}_0(u+iv)}{\left(\bar{z}_0-\bar{z}_0\right)}d\theta\,.$$

A definição de integral de função complexa de variável real (Capítulo 3, definição A.9.) garante que o conjugado do integral é igual ao integral da função conjugada. Então

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\bar{z}_0(u+iv)}{\left(\bar{z}_0-\bar{z}\right)}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z_0(u-iv)}{z_0-z}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-z_0}{z-z_0}(u-iv)d\theta\,.$$

Subtraindo, membro a membro (*) e (**), depois das transformações efectuadas, obtém-se

$$\begin{aligned}
f(z_0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{z}{z-z_0}(u+iv)+\frac{z_0}{z-z_0}(u-iv)\right]d\theta=\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z+z_0}{z-z_0}u+i\frac{z-z_0}{z-z_0}v\right)d\theta=\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z+z_0}{z-z_0}u(z)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z)d\theta\,.
\end{aligned}$$

Igualando as partes reais, tem-se

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{z+z_0}{z-z_0}\right)\right]u(z)d\theta \qquad (***).$$

Fazendo, $z=re^{i\theta}$ e $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ em (***), resulta que

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+r_0e^{i\theta_0}}{re^{i\theta}-r_0e^{i\theta_0}}\right)\right]u(z)d\theta\,,$$

de onde se conclui que

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}u(re^{i\theta})d\theta\,.$$

Procedendo analogamente para a função $f=v-iu$, obtém-se o resultado correspondente para a função v.

Observação:
Note-se que a igualdade (***) da demonstração anterior ainda é verdadeira quando $z_0=0$, pois

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z)d\theta\,,\quad \text{isto é,}\quad u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta\,,$$

que é o teorema do valor médio para funções harmónicas, já demonstrado (teorema B.3.).

Teorema C.2. (Solução do problema de Dirichlet no disco $D(0,r)$)

Seja $\varphi(\theta)$ uma função contínua e de período 2π. A função

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}\varphi\,(0)d\theta$$

é a solução do problema de Dirichlet em $D(0,r)$ com condição de fronteira φ, isto é, u é harmónica em $D(0,r)$ e admite um prolongamento contínuo a $\overline{D(0,r)}$ com valores φ: $\lim_{z_0\to re^{i\theta_1}} u(z_0)=\varphi(\theta_1)$

Demonstração:

A função φ definida na fronteira do disco dado pode em coordenadas polares designar-se por $\varphi(re^{i\theta})$ mas atendendo a que r é fixo, representar-se-á, por comodidade, por $\varphi(\theta)$.

Para se demonstrar que

$$u(r_0,\theta_0)=u(r_0e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,r_0,\theta-\theta_0)\varphi(\theta)d\theta,\quad r_0<r,\quad \theta_0\in[0,2\pi]$$

é uma solução do problema de Dirichlet, verifique-se que u é uma função harmónica de (r_0,θ_0): escreva-se a equação de Laplace em coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r_0^2}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta_0^2}=0\,,$$

atendendo à continuidade da função integranda e das suas derivadas parciais de 1.ª e 2.ª ordens pode derivar-se sob o sinal de integração e, então,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r_0^2}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta_0^2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 r_0^2}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta_0^2}\right)\int_0^{2\pi} N(r,r_0,\theta-\theta_0)\varphi(\theta)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial r_0^2}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial N}{\partial r_0}+\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 N}{\partial \theta_0^2}\right)\varphi(\theta)d\theta=0,$$

pois N é harmónica como função de r_0 e θ_0 (ver exercício 19).

Resta agora provar a continuidade da função u em $\overline{D(0,r)}$. Para tal mostre-se que $\lim\limits_{r_0\to r,\, r_0<r} u(r_0,\theta_0)=\varphi(\theta_0)$, isto é, para qualquer $\delta>0$, existe $\varepsilon>0$ tal que, se $0<r-r_0<\varepsilon$, então $|u(r_0,\theta_0)-\varphi(\theta_0)|<\delta$. Como

$$|u(r_0,\theta_0)-\varphi(\theta_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r_0,r,\theta-\theta_0)\varphi(\theta)d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta_0)d\theta\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r_0,r,\theta-\theta_0)[\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)]d\theta\right|,$$

e atendendo a que a função φ é contínua em θ_0, existe $\varepsilon_1>0$ tal que $|\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)|<\frac{\delta}{2}$ quando θ é tal que $|\theta-\theta_0|<\varepsilon_1$.

Prolongando φ como função periódica de período 2π e sendo N uma função periódica de período 2π, tem-se que $\int_0^{2\pi} = \int_{\theta_0-\varepsilon_1}^{\theta_0-\varepsilon_1+2\pi}$ e o integral anterior pode decompor-se na forma

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r_0,r,\theta-\theta_0)\left[\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)\right]d\theta\right| = |I_1+I_2| \leq |I_1|+|I_2|$$

em que

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0-\varepsilon_1}^{\theta_0+\varepsilon_1} N(r_0,r,\theta-\theta_0)\left[\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)\right]d\theta$$

e

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0+\varepsilon_1}^{\theta_0-\varepsilon_1+2\pi} N(r_0,r,\theta-\theta_0)\left[\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)\right]d\theta.$$

Majorando I_1 e I_2 obtém-se o resultado pretendido.

Para completar a demonstração resta mostrar que para $\theta_0 \in [0,2\pi]$, $\lim_{re^{i\theta}\to re^{i\theta_0}} u\left(re^{i\theta}\right) = \varphi(\theta_0)$, o que resulta facilmente da continuidade da função φ.

Observação:

1. A resolução do problema de Dirichlet pode ser deduzida para um disco não centrado na origem, $D(z^*,r)$, $r>0$, a partir da solução apresentada por uma simples translação.
   Quando o problema de Dirichlet é posto num domínio Ω, cuja fronteira C se supõe regular, pode definir-se uma aplicação $w=f(z)$ que aplica o domínio Ω no disco $D(0,r)$ e a fronteira C na circunferência $|w|=r$. Sendo $u(w)$ solução do problema de Dirichlet neste disco, $u\circ f$ é ainda uma função harmónica em Ω (ver exercício 16) e que resolve o problema.
2. O problema de Dirichlet pode ainda ser formulado quando φ tem descontinuidades na fronteira. Para desenvolver o estudo neste caso, recomenda-se a leitura de Churchill R.V. e Brown J.W., *Complex Variables and Applications*.

Exercícios resolvidos

1. Qual o valor do máximo do módulo da função $f(z)=e^{z^2}$ em $\overline{D(0,1)}$?

Resolução:

A função $f(z)=e^{z^2}$ é inteira, logo é analítica em $D(0,1)$ e contínua em $\overline{D(0,1)}$, conjunto fechado e limitado, pelo que a existência do máximo está garantida. O princípio do módulo máximo indica que esse máximo é atingido na fronteira de $D(0,1)$, isto é, sobre a circunferência $|z|=1$:

$$\max_{|z|\le 1}\left|e^{z^2}\right| = \max_{|z|=1}\left|e^{z^2}\right| = \max_{|z|=1} e^{\operatorname{Re}(z^2)} = \max_{\substack{z=e^{i\theta}\\ \theta\in[0,2\pi]}} e^{\operatorname{Re}(e^{2i\theta})} = \max_{\theta\in[0,2\pi]} e^{\cos(2\theta)} = e,$$

pois o valor máximo de $\cos(2\theta)$, para $\theta\in[0,2\pi]$, é igual a 1.

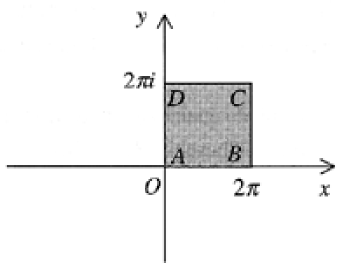
2. Considere o subconjunto de $\mathbb{C}$:

$$\overline{\Omega}=\{z=x+iy\colon\ x\in[0,2\pi], y\in[0,2\pi]\}$$

e estude o valor máximo de $|\operatorname{sen} z|$ sobre $\overline{\Omega}$.

Resolução:

A função $f(z)=\operatorname{sen} z$ é inteira, logo analítica em $\Omega=\{z=x+iy: x\in\,]0,2\pi[, y\in\,]0,2\pi[\}$ e contínua em $\overline{\Omega}$:



O princípio do módulo máximo permite concluir que o valor máximo de $|\operatorname{sen} z|$ ocorre na fronteira do quadrado. Estudem-se os valores $|\operatorname{sen} z|$ nos lados do quadrado:

i) se $z \in AB$, tem-se que $z = x + i0,\ x \in [0,2\pi]$

$$|\text{sen}\, z| = |\text{sen}(x + i0)| = |\text{sen}\, x|, \quad x \in [0,2\pi]$$

cujo valor máximo é igual a 1 e é atingido quando $x = \frac{\pi}{2}$.

ii) se $z \in BC$, tem-se que $z = 2\pi + iy,\ y \in [0,2\pi]$ e, atendendo a que a função seno tem período 2π, obtém-se

$$|\text{sen}\, z| = |\text{sen}(2\pi + iy)| = |\text{sen}(iy)|, \quad y \in [0,2\pi].$$

Como

$$|\text{sen}(iy)| = \left|\frac{e^{iiy} - e^{-iiy}}{2i}\right| = \left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\right| = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \text{senh}\, y, \quad y \in [0,2\pi]$$

e a função real senh y é uma função estritamente crescente, o seu valor máximo é atingido quando $y = 2\pi$, isto é, senh (2π) é o valor máximo sobre o segmento BC.

iii) se $z \in CD$, tem-se que $z = x + 2\pi i,\ x \in [0,2\pi]$. Atendendo ao exercício 5 do Capítulo 2, obtém-se

$$|\text{sen}\, z| = |\text{sen}(x + 2\pi i)| = \sqrt{\text{sen}^2 x + \text{senh}^2(2\pi)}$$

que atinge o valor máximo quando $\text{sen}^2 x$ for máximo, o que ocorre quando $x = \frac{\pi}{2}$. O valor máximo, neste segmento, é assim assumido no ponto $\frac{\pi}{2} + i2\pi$ e é igual a $\sqrt{1 + \text{senh}^2(2\pi)}$.

iv) se $z \in DA$, tem-se que $z = 0 + iy,\ y \in [0,2\pi]$. Então,

$$|\text{sen}\, z| = |\text{sen}(0 + iy)| = |\text{sen}(iy)| = \left|\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\right| = \text{senh}\ y, \quad y \in [0,2\pi],$$

cujo valor máximo, como já se verificou em ii), é atingido no ponto $y = 2\pi$.

Conclui-se então que o valor máximo de $|\text{sen}\, z|$ é atingido no ponto $z = \frac{\pi}{2} + i2\pi$ e é igual a $\sqrt{1 + \text{senh}^2(2\pi)}$.

3. Seja f uma função analítica num domínio limitado Ω. Suponha-se que Ref assume um máximo em Ω. Mostre que f é constante em Ω.
Analogamente, mostre que se Im f assume um máximo em Ω, então f é constante em Ω.

Resolução:

Considere-se a função $e^{f(z)}$, que é analítica em Ω ; tem-se então:

– Se $\operatorname{Re} f$ assume um máximo em Ω, isto é, se existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} f(z_0)$ para qualquer $z \in \Omega$, tem-se

$$\left|e^{f(z)}\right| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^{\operatorname{Re} f(z_0)} = \left|e^{f(z_0)}\right|.$$

Então existe $z_0 \in \Omega$ tal que $\left|e^{f(z)}\right| \leq \left|e^{f(z_0)}\right|$, qualquer que seja $z \in \Omega$, isto é, $\left|e^{f(z)}\right|$ atinge um máximo em z_0. Conclui-se assim, pelo princípio do módulo máximo, que $e^{f(z)}$ é constante em Ω e consequentemente a função f também é constante em Ω.

– Se $\operatorname{Im} f$ assume um máximo em Ω, existe $z_0 \in \Omega$ tal que

$$\operatorname{Im} f(z) \leq \operatorname{Im} f(z_0),$$

para qualquer $z \in \Omega$. Considere-se então a função analítica em Ω, $e^{-if(z)}$, para a qual se tem qualquer que seja $z \in \Omega$,

$$\left|e^{-if(z)}\right| = e^{\operatorname{Re}(-if(z))} = e^{\operatorname{Im} f(z)} \leq e^{\operatorname{Im} f(z_0)} = \left|e^{-f(z_0)}\right|.$$

Então existe $z_0 \in \Omega$ tal que, para qualquer $z \in \Omega$,

$$\left|e^{-if(z)}\right| \leq \left|e^{-if(z_0)}\right|,$$

isto é, $\left|e^{-if(z)}\right|$ atinge um máximo em z_0.

Então, pelo princípio do módulo máximo, $e^{-if(z)}$ é uma função constante em Ω e consequentemente a função f é constante em Ω.

4. Seja f uma função analítica que se anula num ponto de um domínio limitado Ω. Mostre que, se $\operatorname{Re} f \leq 0$, em Ω, então f é constante em Ω.

Resolução

Considere-se a função, $e^{f(z)}$, analítica em Ω. Para qualquer $z \in \Omega$, tem-se

$$\left|e^{f(z)}\right| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq 1.$$

Como f se anula em Ω, seja $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$; tem-se

$$\left|e^{f(z_0)}\right| = e^0 = 1$$

e $e^{f(z)}$ assume o valor máximo (1) no ponto z_0. O princípio do módulo máximo garante que $e^{f(z)}$ é constante em Ω e assim $f(z)$ também é constante em Ω.

5. Considere a função $f(z) = z^2 - 4$.

a) Justifique que existem $m, M \in \mathbb{R}^+$

$$m = \min_{z \in \overline{D(0,1)}} |f(z)|, \qquad M = \max_{z \in \overline{D(0,1)}} |f(z)|$$

tais que, para $z_0 \in D(0,1)$, se tem $m < |f(z_0)| < M$.

b) Diga se a desigualdade anterior se mantém verdadeira quando $z_0 \in D(0,3)$.

Resolução:

a) A função $f(z)$ é inteira, logo é contínua em $\overline{D(0,1)}$ que é um conjunto compacto. Aplicando o teorema B.3. do Capítulo 2, conclui-se que $|f|$ tem um valor mínimo m e um valor máximo M em $\overline{D(0,1)}$.

Seja $z_0 \in D(0,1)$. O princípio do módulo máximo garante que $|f(z_0)| < M$. Como f não se anula em $\overline{D(0,1)}$, pois os seus zeros são 2 e -2, o princípio do módulo mínimo permite concluir que $m < |f(z_0)|$.

b) Sejam $m^* = \min_{z \in \overline{D(0,3)}} |f(z)|$ e $M^* = \max_{z \in \overline{D(0,3)}} |f(z)|$. Se $z_0 \in D(0,3)$, o princípio do módulo máximo garante que $|f(z_0)| < M^*$. Porém, como f se anula em $D(0,3)$, tem-se $m^* = 0$ e assim $m^* \leq |f(z_0)|$ (se $f(z_0) = 0$ tem-se $m^* = 0 = f(z_0)$).

6. Mostre que, se f é uma função analítica em $D(0,r)$, $r > 0$, contínua em $\overline{D(0,r)}$ e existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \leq M$ para z na fronteira de $D(0,r)$, então, para $z \in D(0,r)$.

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{r}.$$

Resolução:

Proceda-se como na demonstração do lema de Schwarz, definindo a função

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z} & \text{se } z\neq 0\\[2ex] f\,'(0) & \text{se } z=0\end{cases}$$

que é analítica em $D(0,r)$.

Sobre a circunferência $|z|=r$, tem-se

$$|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}=\frac{|f(z)|}{r}\leq\frac{M}{r};$$

o princípio do módulo máximo permite concluir que, em $D(0,r)$, também se tem $|g(z)|\leq\dfrac{M}{r}$ e, assim, $|f(z)|\leq\dfrac{M}{r}|z|$, para $z\in D(0,r)$.

7. Seja f uma função analítica em $\overline{D(0,1)}$ e tal que $f(0)=0$ e $|f(z)|\leq 1$ para z na circunferência de centro na origem e raio igual a 1. Mostre que, para $z\in\overline{D(0,1)}$

$$\left|e^{f(z)}-1\right|\leq(1+e)|z|.$$

Resolução:

Seja $G(z)=e^{f(z)}-1$; a função G é analítica em $\overline{D(0,1)}$.

Como $|\operatorname{Re} f(z)|\leq|f(z)|$ e $|f(z)|\leq 1$ para z na fronteira de $D(0,1)$, tem-se

$$|G(z)|=\left|e^{f(z)}-1\right|\leq\left|e^{f(z)}\right|+1=e^{\operatorname{Re} f(z)}+1\leq e^{|\operatorname{Re} f(z)|}+1\leq e+1.$$

Então a função G está nas condições do exercício anterior e, assim,

$$|G(z)|\leq(e+1)|z|,\ \text{ isto é, }\ \left|e^{f(z)}-1\right|\leq(e+1)|z|.$$

8. Seja f uma função analítica num domínio limitado Ω e contínua em $\overline{\Omega}$. Designe-se a fronteira de Ω por $\partial\overline{\Omega}$. Mostre que

$$\max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)|=\max_{z\in\partial\,\Omega}|f(z)|.$$

Resolução:

Se f é uma função constante em $\overline{\Omega}$, a igualdade é imediata. Suponha-se então que f não é uma função constante. Se a igualdade não fosse verdadeira

$$\max_{z\in\partial\Omega}|f(z)| < \max_{z\in\Omega}|f(z)|,$$

e o máximo de $|f|$ seria atingido num ponto interior de Ω. Então, existiria $z_0 \in \Omega$ tal que $\max_{z\in\Omega}|f(z)| = |f(z_0)|$ e, pelo princípio do módulo máximo, f teria de ser constante em Ω, o que contradiz a suposição feita. Conclui-se então que a igualdade é verdadeira.

9. Considere a função $f:\Omega \to \mathbb{C}$ analítica no domínio Ω. Suponha que existem z_0 e z_1 em Ω tais que $f(z_0) \neq 0$ e $f'(z_1) \neq 0$. Sendo $r > 0$, tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$, prove que existem w e w_1 em $D(z_0, r)$ tais que

$$0 < |f(w_1)| < |f(z_0)| < |f(w)|.$$

Resolução:

A existência de $z_1 \in \Omega$, tal que $f'(z_1) \neq 0$, garante que f não é uma função constante em Ω. Sendo $0 < \rho < r$ tem-se, pelo princípio do módulo máximo, que

$$\max_{D(z_0,\rho)}|f(z)| = \max_{|z-z_0|=\rho}|f(z)| = |f(w)|,$$

onde w está sobre a circunferência $|z - z_0| = \rho$, isto é, $|w - z_0| = \rho$. Como $\rho < r$, tem-se que $w \in D(z_0, r)$ e, assim $|f(w)| \geq |f(z_0)|$.

Se $|f(w)| = |f(z_0)|$, o máximo seria atingido em z_0 que é um ponto interior a $w \in D(z_0, \rho)$, pelo que a função seria constante em $D(z_0, \rho)$, isto é,

$$f(z) = k, \quad \forall \quad z \in D(z_0, \rho)$$

com k constante. Seja $\Omega^* = \{z \in \Omega : f(z) = k\}$; o conjunto Ω^* dos zeros da função analítica $f(z) - k$, tem pelo menos um ponto de acumulação em Ω; pelo teorema B. 4. do Capítulo 5, $\Omega = \Omega^*$, o que é falso, uma vez que a existência de $z_1 \in \Omega$, tal que $f'(z_1) \neq 0$, garante que f não é uma função constante em Ω. Assim $|f(w)| > |f(z_0)|$.

Como $f(z_0) \neq 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(z_0,\varepsilon) \subset D(z_0,r)$ e $f(z) \neq 0$, para qualquer $z \in D(z_0,\varepsilon)$. Então,

$$\min_{z \in D(z_0,\varepsilon)} |f(z)| = \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z)| = |f(w_1)| \leq |f(z_0)|.$$

Analogamente se conclui que a igualdade $|f(w_1)| = |f(z_0)|$ não se pode verificar, pelo que $|f(w_1)| < |f(z_0)|$.

10. Sejam *f* uma função analítica em $D(0,r)$, $r > 0$ e $M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$ para $0 \leq \rho < r$.

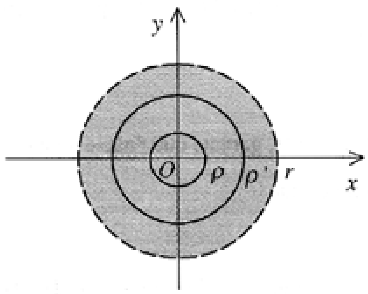
a) Mostre que $M(\rho)$ é uma função crescente.

b) Prove que se *f* não é constante então $M(\rho)$ é estritamente crescente.

c) Verifique que se *f* é inteira e não constante então $\lim_{\rho \to +\infty} M(\rho) = +\infty$.

Resolução:

a) Sejam ρ e ρ' tais que $0 < \rho < \rho' < r$.



Então, atendendo a que $D(0,\rho) \subset D(0,\rho')$, tem-se que

$$M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)| = \max_{|z|\leq\rho} |f(z)| \leq \max_{|z|\leq\rho'} |f(z)| = \max_{|z|=\rho'} |f(z)| = M(\rho'),$$

isto é, $M(\rho)$ é uma função crescente.

b) Sejam $0 < \rho < \rho' < r$ tais que $M(\rho) = M(\rho')$. Então, existe z_0 tal que $|z_0| = \rho$ e

$$|f(z_0)| = \max_{|z|=\rho} |f(z)| = \max_{|z|=\rho'} |f(z)| = \max_{|z|\leq\rho'} |f(z)|$$

isto é, o máximo é atingido no ponto z_0 que é um ponto interior a $D(0,\rho')$, pelo que *f* teria de ser constante em $D(0,\rho')$ (princípio do módulo máximo).

Então $f(z)=k$, com k constante, para z no disco aberto $D(0,\rho')$. A função $g(z)=f(z)-k$ anula-se assim em $D(0,\rho')$ (conjunto aberto), pelo que o conjunto dos seus zeros tem um ponto de acumulação em $D(0,r)$. O teorema B. 4. do Capítulo 5 permite concluir que f teria de ser constante em $D(0,r)$, o que não acontece. Logo, tem-se que

$$0<\rho<\rho'<r \Rightarrow M(\rho)<M(\rho'),$$

isto é, $M(\rho)$ é uma função estritamente crescente.

c) Se $M(\rho)$ é uma função real estritamente crescente, ou é uma função limitada em $\mathbb{R}^+$ ou $\lim\limits_{\rho\to+\infty} M(\rho)=+\infty$.

Se $M(\rho)$ fosse uma função limitada, então $M(\rho)\le L$ para qualquer $\rho>0$. Então, $|f(z)|\le L$ para qualquer número complexo z. Sendo f uma função limitada e inteira, teria de ser constante, pelo teorema de Liouville, o que vai contra a hipótese. Então, $\lim\limits_{\rho\to+\infty} M(\rho)=+\infty$.

11. Sejam Ω um domínio que contém $D(0,1)$ e f uma função analítica em Ω tal que $f(0)=1$ e $|f(z)|\ge a>1$ para z tal que $|z|=1$. Mostre que f se anula necessariamente em algum ponto de $D(0,1)$.

Resolução:
Suponha-se que, nas condições dadas, f não se anula em $D(0,1)$ e defina-se a função

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}$$

que também é analítica em $D(0,1)$. Então,

$$\max_{z\in \overline{D(0,1)}}|g(z)|=\max_{z\in \overline{D(0,1)}}\left|\frac{1}{f(z)}\right|\le \max_{|z|=1}\left|\frac{1}{f(z)}\right|=\frac{1}{\min\limits_{|z|=1}|f(z)|}<\frac{1}{a}<1,$$

o que é absurdo, pois $0\in D(0,1)$ e, por hipótese, $\left|\frac{1}{f(0)}\right|=1>\frac{1}{a}$. Logo, f anula-se em $D(0,1)$.

12. Considere uma função complexa f, não constante e analítica num domínio Ω. Suponha que existe $z_0\in\Omega$ tal que $f(z_0)\ne 0$. Mostre que existe $\varepsilon>0$ tal que $|f|$ assume valores maiores e menores que $|f(z_0)|$ em $D(z_0,\varepsilon)$.

Resolução:

Se não existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f|$ não tome valores maiores que $|f(z_0)|$ em $D(z_0,\varepsilon)$, então $|f(z_0)|$ seria o valor máximo de $|f|$ em Ω. Como z_0 é um ponto interior de Ω, a função teria de ser constante em Ω, o que não acontece. Assim, $|f|$ assume valores maiores que $|f(z_0)|$.

Se f se anula em $D(z_0,\varepsilon)$, isto é, se existe $z_1 \in D(z_0,\varepsilon)$ tal que $f(z_1)=0$, o princípio do módulo mínimo garante que $\min\limits_{z\in D(z_0,\varepsilon)} |f(z)| = 0$ e, portanto,

$$|f(z_1)| = 0 < |f(z_0)| \neq 0,$$

isto é, existem valores de $|f|$ menores que $|f(z_0)|$.

Se f não se anula em $D(z_0,\varepsilon)$, o princípio do módulo mínimo garante que $|f(z_0)|$ não pode ser mínimo, porque não sendo f uma função constante, o mínimo de $|f|$ terá de ser assumido na fronteira e não no interior. Assim, existem valores de $|f|$ maiores que $|f(z_0)|$.

13. Seja $f(z)$ um função analítica e não constante no interior e sobre uma curva fechada C. Suponha que existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)| \geq m$, para $z \in C \cup \operatorname{int} C$. Mostre que

$$|f(z)| \geq m, \quad \forall z \in \operatorname{int} C.$$

Resolução:

Se existir $z_0 \in \operatorname{int} C$ tal que não se verifica $|f(z_0)| > m$, ter-se-á, atendendo a que $|f(z)| \geq m$ para $z \in C \cup \operatorname{int} C$, que $|f(z_0)| = m$. Então, $|f|$ atinge o mínimo num ponto interior a C e não se anula em $C \cup \operatorname{int} C$, e f seria constante em C (princípio do módulo mínimo), o que contradiz a hipótese.

14. Seja u uma função harmónica num domínio limitado Ω e nula na fronteira de Ω. Mostre que u é nula em Ω.

Resolução:

Se u é nula na fronteira de Ω tem-se, por um lado, e por aplicação do princípio do máximo, que

$$u(x,y) \leq 0, \quad \forall\ (x,y) \in \Omega$$

e, por outro lado, por aplicação do princípio do mínimo, que

$$u(x,y) \geq 0, \quad \forall\ (x,y) \in \Omega\,.$$

Então, u é nula em Ω.

15. Seja u uma função harmónica num domínio limitado Ω e limitada na fronteira de Ω. Mostre que u é uma função constante em $\overline{\Omega}$.

Resolução:

Suponha-se que $u(z)=k$ para z na fronteira de Ω e seja $\varphi = u - k$; a função φ é harmónica em Ω e nula na sua fronteira. Então, pelo exercício 14, φ é nula em $\overline{\Omega}$, de onde se conclui que u é uma função constante em $\overline{\Omega}$.

16. Seja u uma função harmónica num domínio simplesmente conexo, limitado, Ω^* e seja g uma função complexa analítica no domínio Ω tal que $\Omega = g(\Omega^*)$. Mostre que $u \circ g$ é uma função harmónica em Ω^*.

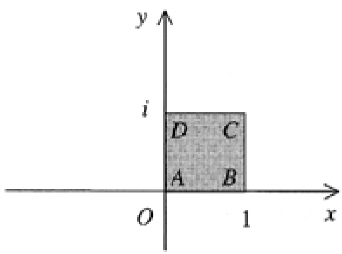
Resolução:

Pelo teorema B.1. sabe-se que existe uma função f analítica em Ω^*, cuja parte real é u, isto é, $f = u + iv$. A função $f \circ g$ é também analítica em Ω^* e, assim, a sua parte real, $U = \mathrm{Re}(f \circ g) = u \circ g$, é uma função harmónica (pelo teorema C.4. do Capítulo 2).

17. Calcule, em $\overline{\Omega} = \{z = x + iy\colon\ x \in [0,1] \wedge y \in [0,1]\}$, o máximo das funções:

a) $u(x,y) = x^2 - y^2$. **b)** $f(z) = e^{z^2}$.

Resolução:



a) Observe-se que $u(x,y) = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(z^2)$ e, atendendo a que $f(z) = z^2$ é uma função analítica em $\overline{\Omega}$, a função u é harmónica em Ω e contínua em $\overline{\Omega}$, logo verifica as condições do máximo para funções harmónicas. Então o máximo de $u(x,y)$ é assumido na fronteira do quadrado $ABCD$:

i) Sobre o segmento AB, tem-se que $z = x + i0$, com $x \in [0,1]$ e então

$$\max_{z\in AB}(u) = \max_{\substack{z=x+i0\\ x\in[0,1]}} (\mathrm{Re}\, z^2) = \max_{x\in[0,1]} (x^2) = 1 .$$

ii) Sobre o segmento BC, tem-se que $z = 1 + iy$, com $y \in [0,1]$ e então

$$\max_{z\in BC}(u) = \max_{\substack{z=1+iy\\ y\in[0,1]}} (\mathrm{Re}\, z^2) = \max_{y\in[0,1]} (1 - y^2) = 0,$$

valor máximo este atingido quando $y = 0$.

iii) Sobre o segmento CD, tem-se que $z = x + i$, com $x \in [0,1]$ e então

$$\max_{z\in CD}(u) = \max_{\substack{z=x+i \\ x\in[0,1]}}(\operatorname{Re} z^2) = \max_{x\in[0,1]}(x) = 1.$$

iv) Sobre o segmento DA, tem-se que $z = 0 + iy$, com $y \in [0,1]$ e então

$$\max_{z\in DA}(u) = \max_{\substack{z=0+iy \\ y\in[0,1]}}(\operatorname{Re} z^2) = \max_{y\in[0,1]}(iy)^2 = \max_{y\in[0,1]}(-y^2) = 0,$$

valor máximo este atingido quando $y = 0$.

Assim, pode concluir-se que o valor máximo é 1 atingido nos pontos (1, 0) e (1, 1).

b) Tem-se que $\left|e^{z^2}\right| = e^{\operatorname{Re}(z^2)}$ atinge o valor máximo quando $\operatorname{Re}(z^2)$ atingir o valor máximo. Por a), tal acontece quando $z = 1$ e $z = 1 + i$, sendo o valor máximo igual a 1. Assim,

$$\max_{z\in\Omega}\left|e^{z^2}\right| = \max_{z\in\Omega}(e^{\operatorname{Re}(z^2)}) = e^{\max_{z\in\Omega}(\operatorname{Re}(z^2))} \le e^1.$$

18. Mostre que o núcleo de Poisson, $N(r_0, r, \theta - \theta_0)$, é uma função

a) Positiva.

b) Par e periódica de período 2π como função de $\theta - \theta_0$.

c) Se $r_0 = 0$, então $N(0, r, \theta - \theta_0) = 1$.

d) Tal que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} N(r_0, r, \theta - \theta_0)d\theta = 1$.

Resolução:

a) Tem-se que

$$0 < (r - r_0)^2 = r^2 + r_0{}^2 - 2rr_0 \le r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)$$

e, portanto, o núcleo de Poisson é uma função positiva.

b) Atendendo à paridade e ao período da função co-seno, tem-se

$$N(r_0, r, (\theta - \theta_0) + 2\pi) = N(r_0, r, \theta - \theta_0).$$

c) Se $r_0 = 0$, então

$$N(0,r,\theta-\theta_0) = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

d) Se $f = u = 1$ então

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r_0,r,\theta-\theta_0)d\theta .$$

19. O núcleo de Poisson $N(r_0,r,\theta-\theta_0)$, nas condições do teorema C.1., é uma função harmónica de r_0 e θ_0 em $D(0,r_0)$, $r_0 < r$, com $z = re^{i\theta}$.

Resolução:
A expressão do núcleo de Poisson é

$$N(r_0,r,\theta-\theta_0) = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2\cos(\theta-\theta_0)} = \operatorname{Re}\left(\frac{z+z_0}{z-z_0}\right)$$

como se viu na demonstração do teorema C.1. (fórmula (***)).
Atendendo a que a função $g(z) = \dfrac{z+z_0}{z-z_0}$ é analítica em $D(0,r)$, a sua parte real, $N(r_0,r,\theta-\theta_0)$, é uma função harmónica em $D(0,r)$.

20. Resolva o problema de Dirichlet no disco unitário com a condição de fronteira $\varphi(z) = \operatorname{Re} z = x$.

Resolução:
Sendo $r = 1$, tem-se que a solução do problema para $z_0 \in D(0,1)$, é a função harmónica

$$u(z_0) = u(e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r_0^2)\varphi(\theta)}{1+r_0^2 - 2r_0\cos(\theta-\theta_0)}d\theta .$$

Ora $\varphi(z) = \varphi(e^{i\theta}) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \cos\theta$, logo

$$u(z_0) = u(r_0e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r_0^2)\cos\theta}{1+r_0^2 - 2r_0\cos(\theta-\theta_0)}d\theta = \frac{(1-r_0^2)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1+r_0^2 - 2r_0\cos(\theta-\theta_0)}d\theta .$$

Atendendo a que $u\left(r_0e^{i\theta_0}\right) = r_0\cos\theta_0$, tem-se

$$r_0\cos(\theta_0) = \frac{(1-r_0^2)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1+r_0^2 - 2r_0\cos(\theta-\theta_0)}d\theta .$$

Capítulo
8

APLICAÇÃO CONFORME

A. Teoria básica das aplicações conformes

Como é bem sabido, uma função real de variável real $y = f(x)$ determina no plano xOy uma curva (x e y coordenadas rectangulares). A representação geométrica de uma função constitui uma ajuda valiosa para o seu estudo.

Conforme já foi referido no Capítulo 2, no caso de uma função de variável complexa, $w = f(z)$, tal representação não é possível, pois sendo z e w números complexos, uma representação geométrica da função requereria quatro coordenadas reais. Existe, no entanto, outra forma de analisar sob o ponto de vista geométrico o comportamento da função $w = f(z)$ com z e w números complexos, interpretando z e w como pontos de dois planos diferentes, o z–plano e o w–plano, e f como uma aplicação ou transformação de pontos do z–plano em pontos do w–plano.

Mais precisamente, se $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, as equações $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ estabelecem uma correspondência entre pontos dos planos xOy e $uO'v$.

Das condições de Cauchy-Riemann resulta que, se f é holomorfa num domínio Ω, o jacobiano $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ da transformação $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ é dado por

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=|f'(z)|^2.$$

Assim, se f é holomorfa em Ω e biunívoca de Ω sobre $f(\Omega)$, tem-se necessariamente $f'(z)\neq 0$ para qualquer z em Ω.

Lema:

Se f é uma função holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$, a imagem por f de uma linha de classe C^1 contida em Ω é uma linha de classe C^1 contida em $f(\Omega)$.

Demonstração:

Se $z=x+iy$ e $f=u+iv$, a imagem da linha definida em coordenadas paramétricas por $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ com $t\in[t_1,t_2]$ é a linha $\begin{cases}u=u(x(t),y(t))\\ v=v(x(t),y(t))\end{cases}$ com $t\in[t_1,t_2]$. Como u e v são funções contínuas como funções de (x,y) tem-se que u e v são funções contínuas como funções de t (pois $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas). Da derivabilidade de f resulta que, sendo $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ de classe C^1, então $\begin{cases}u=u(x(t),y(t))\\ v=v(x(t),y(t))\end{cases}$ também é de classe C^1 (composição de funções de classe C^1).

Observação:

Se a linha em Ω é simples e passa por dois pontos z_1 e z_2 tais que $f(z_1)=f(z_2)$, a sua imagem por f não é uma linha simples.

Por exemplo, a função $f(z)=z^2$ está nas condições do lema e tranforma a circunferência $z=e^{i\theta}$ com $\theta\in[0,2\pi]$ na circunferência $w=f(z)=e^{2i\theta}$ com $\theta\in[0,2\pi]$, onde todos os pontos têm multiplicidade dois, com excepção da origem e extremidade que têm multiplicidade três.

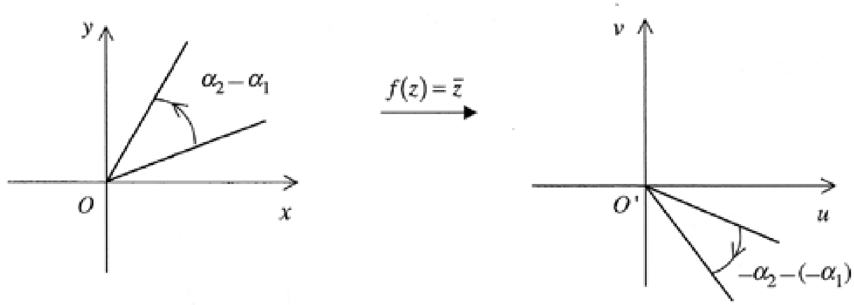
Assim, juntando às hipóteses do lema a injectividade de f em Ω, pode afirmar-se que a imagem por f de uma linha simples de classe C^1 contida em Ω é uma linha simples de classe C^1 contida em $f(\Omega)$.

Definição A.1.

A aplicação $w = f(z)$ diz-se **conforme** num ponto $z_0 \equiv (x_0, y_0)$ se quaisquer duas curvas γ_1 e γ_2 seccionalmente de classe C^1 que se intersectam em $z_0 \equiv (x_0, y_0)$ e que formam entre si um ângulo θ (isto é, o ângulo formado pelas rectas tangentes às curvas γ_1 e γ_2 no ponto z_0 é igual a θ) são transformadas em duas curvas Γ_1 e Γ_2 que se intersectam em $w_0 \equiv (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ e que formam entre si o mesmo ângulo θ (em medida e sentido).

Exemplo A.1.

É imediato que a aplicação identidade $f(z) = z$ preserva os ângulos em qualquer $z \in \mathbb{C}$, logo é conforme em qualquer $z \in \mathbb{C}$. Porém, a função $f(z) = \bar{z}$ não preserva o sentido dos ângulos:



Teorema A.1.

Seja f uma função holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$ e tal que $f'(z) \neq 0$ para todo o ponto $z \in \Omega$. Então a aplicação $w = f(z)$ é conforme em todos os pontos de Ω.

Demonstração:

Sejam $z_0 \in \Omega$ e γ_1 uma curva que passa por z_0 e está totalmente contida em Ω.

Se $w_0 = f(z_0) \equiv (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$, f aplica γ_1 numa curva Γ_1 do plano $uO'v$ que passa pelo ponto w_0.

Para qualquer ponto z de Ω, tem-se

$$w - w_0 = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

e, consequentemente,

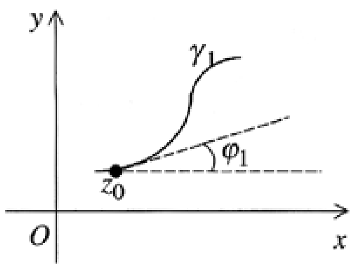
$$\arg(w-w_0)=\arg\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\arg(z-z_0).$$

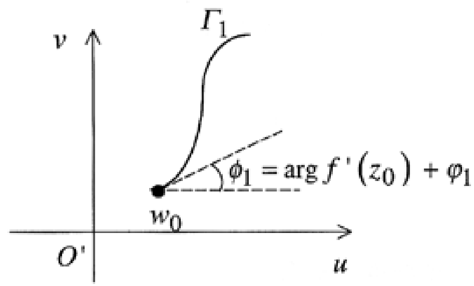
Note-se que arg $(z-z_0)$ é o ângulo entre o semieixo positivo (no plano xOy) e o vector que une z_0 e z. O limite de arg $(z-z_0)$, quando z tende para z_0 ao longo de γ_1, é o ângulo φ_1 entre o semieixo positivo e a tangente a γ_1 em z_0. Analogamente, arg $(w-w_0)$ tende para o ângulo ϕ_1 entre o semieixo positivo (no plano $uO'v$) e a tangente a Γ_1 em w_0.

Como $\arg f'(z_0)$ está bem definido, uma vez que $f'(z_0)\neq 0$, passando ao limite quando z tende para z_0 ao longo de γ_1, tem-se

$$\phi_1=\arg f'(z_0)+\varphi_1.$$

Geometricamente,



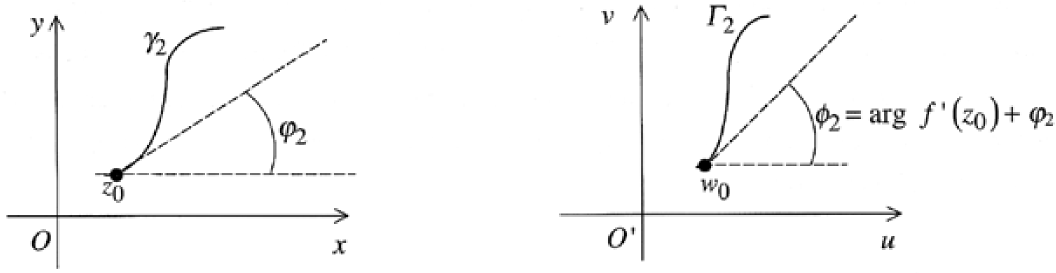


Se γ_2 é outra curva que passa por z_0 e está totalmente contida em Ω, f aplica γ_2 numa curva Γ_2 do plano $uO'v$ que passa pelo ponto w_0. Se z tende para z_0 ao longo de γ_2, tem-se também

$$\phi_2=\arg f'(z)+\varphi_2,$$

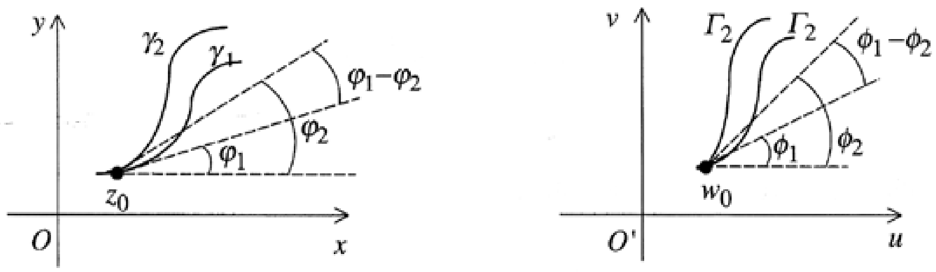
em que φ_2 é o ângulo entre o semieixo positivo e a tangente a γ_2 em z_0 e ϕ_2 é o ângulo entre o semieixo positivo e a tangente a Γ_2 em w_0.

Geometricamente,



Então $\phi_1 - \phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, e a aplicação $w = f(z)$ preserva (em medida e sentido) o ângulo entre as duas curvas, como se pretendia demonstrar.

Geometricamente,



Observação:

1. O teorema A.1. estabelece uma condição suficiente para que f preserve os ângulos entre curvas que se intersectem num ponto do seu domínio. Reciprocamente, verifica-se que:
Se $df = du + idv$ existe e não é nulo em z_0 e se f preserva os ângulos em z_0 então $f'(z_0)$ existe e é diferente de zero. (Para a demonstração deste resultado consultar, por exemplo, Ahlfors, L. V., *Complex Analysis* ou Rudin, W., *Real and Complex Analysis*.)

2. Nenhuma função analítica preserva os ângulos em pontos onde a sua derivada seja nula. Contudo, o seu diferencial pode ser nulo num ponto onde os ângulos sejam preservados.
Por exemplo, a função $f(z) = z|z| = |z|^2 e^{i\arg z}$ conserva os ângulos no ponto $z_0 = 0$ e no entanto o seu diferencial é nulo em $z_0 = 0$.

3. Sendo $f'(z_0) \neq 0$ (logo $|f'(z_0)| \neq 0$), e atendendo a que $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$, tem-se que $|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)||z - z_0|$. Assim, $|f'(z_0)|$ comporta-se como um coeficiente de dilatação ou de contracção numa vizinhança de z_0.

Teorema A.2.

Seja f uma função analítica num domínio Ω de $\mathbb{C}$ tal que f' tem um zero de ordem $k-1$ num ponto z_0 de Ω (isto é, $f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(k)}(z_0) \neq 0$). Se γ_1 e γ_2 são duas curvas seccionalmente de classe C^1 que se intersectam no ponto z_0, fazendo entre si um ângulo θ, são transformadas em duas curvas Γ_1 e Γ_2 que se intersectam em $w_0 \equiv \big(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)\big)$ e que formam entre si o ângulo $k\theta$.

Demonstração:

Sendo f uma função analítica em Ω e z_0 tal que $f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, o seu desenvolvimento de Taylor para z numa vizinhança de z_0 é

$$f(z) = f(z_0) + a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots, \text{ com } a_k \neq 0.$$

Então

$$f(z) - f(z_0) = (z-z_0)^k\, g(z),$$

em que g é analítica em z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Resulta que

$$\arg\,(f(z) - f(z_0)) = k(z-z_0) + \arg\ g(z).$$

Passando ao limite quando z tende para z_0 ao longo das curvas γ_1 e γ_2 e mantendo as notações do teorema A.1., tem-se

$$\phi_1 = k\varphi_1 + \arg\ g(z_0) \quad \text{e} \quad \phi_2 = k\varphi_2 + \arg\ g(z_0)$$

e finalmente $\phi_1 - \phi_2 = k(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Exemplo A.2.

A função $f(z) = z^n$ com $n > 1$ está nas condições do teorema A.2. em $z_0 = 0$ com $k = n$.

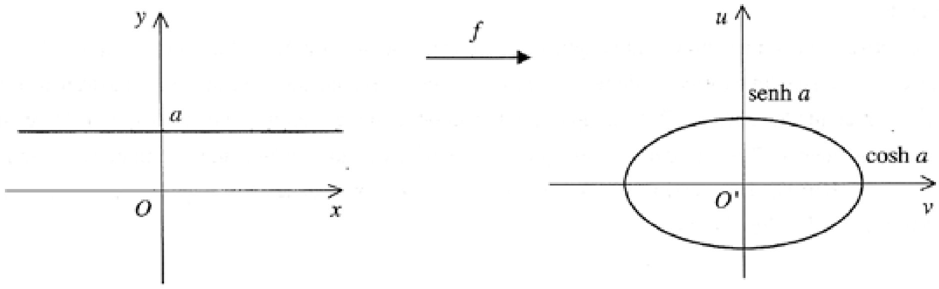
Exemplo A.3.

Estudem-se as transformadas das rectas Im $z = a$ e Re $z = b$, com a e b constantes reais, pela aplicação $w = f(z) = \cos z$. Tem-se

$$w = u + iv = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y, \text{ logo } \begin{cases} u = \cos x \cosh y \\ v = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y \end{cases}.$$

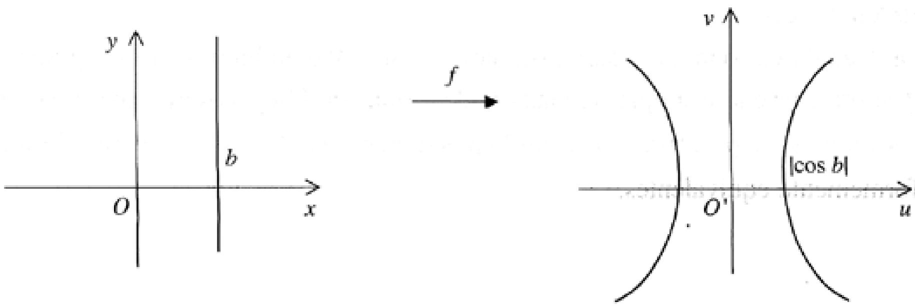
Estudem-se as imagens por f das rectas horizontais $y = a$:

Se $a \neq 0$, $\dfrac{u}{\cosh a} = \cos x$ e $\dfrac{v}{\operatorname{senh} a} = -\operatorname{sen} x$. Então, $\dfrac{u^2}{\cosh^2 a} + \dfrac{v^2}{\operatorname{senh}^2 a} = 1$ e as imagens são as elipses centradas na origem e com semieixos $|\cosh a|$ e $|\operatorname{senh} a|$.



Se $a = 0$, tem-se $\begin{cases} u = \cos x \\ v = 0 \end{cases}$, sendo a sua imagem o segmento do eixo real $[-1,1]$.

Analogamente, as imagens das rectas verticais $x = b$ ($b \neq 0, \pm \pi/2, \pm \pi, \ldots$) são as hipérboles $\dfrac{u^2}{\cos^2 b} - \dfrac{v^2}{\operatorname{sen}^2 b} = 1$.



Se $b = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, tem-se $\begin{cases} u = (-1)^n \cosh y \\ v = 0 \end{cases}$; assim, se n é par, a sua imagem é o segmento do eixo real $[1,+\infty[$, e se n é impar, a sua imagem é o segmento do eixo real $]-\infty,-1]$ (recorde-se que o contradomínio de $\cosh y$ é $[1,+\infty[$).

Se $b = (2n+1)\ \pi/2,\ n \in \mathbb{Z}$, tem-se $\begin{cases} u = 0 \\ v = (-1)^{n+1} \operatorname{senh} y \end{cases}$; assim, para qualquer n, a sua imagem é eixo imaginário (recorde-se que o contradomínio de senh y é $\mathbb{R}$.).

Note-se que, como os semieixos das elipses são $|\cosh a|$ e $|\operatorname{senh} a|$, a distância dos focos à origem é $\sqrt{\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a} = 1$, todas elas têm os focos em $w = \pm 1$. Como $\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b = 1$, o mesmo se passa com as hipérboles.

Tendo em conta que, se $a \neq 0$ e $b \neq 0, \pm \pi/2, \pm \pi, \ldots, f(z) = \cos z$ é conforme em $z = b + ia$ e assim as elipses e as hipérboles intersectam-se nas imagens destes pontos segundo ângulos rectos.

Observação:
Não é verdade que a imagem por uma aplicação conforme de um domínio Ω seja um domínio. Com efeito, uma aplicação conforme transforma conjuntos conexos em conjuntos conexos mas, em geral, não transforma conjuntos abertos em conjuntos abertos. Por exemplo, a imagem de qualquer conjunto aberto pela função constante não é um conjunto aberto. Observe-se no entanto que se f é analítica e não constante num domínio Ω, então f transforma abertos em abertos. (Para maior desenvolvimento destas propriedades topológicas veja-se Choquet, *Cours d'Analyse*, vol.II – *Topologie*).

Definição A.2.

Dois domínios Ω e Ω' dizem-se **conformemente equivalentes ou difeomorfos** se existir uma aplicação biunívoca e analítica de Ω sobre Ω'.

■

Teorema A.3.

Seja f analítica sobre uma curva simples fechada γ e no interior Ω de γ. Suponha-se que f aplica γ sobre uma curva simples fechada Γ, de forma que Γ seja descrita por $w = f(z)$ no sentido positivo, sempre que z percorra γ no sentido positivo, e seja Ω' o interior de Γ. Então Ω e Ω' são conformemente equivalentes.

Demonstração:

Atendendo a que, conforme se referiu no início do parágrafo, a derivada de uma função biunívoca nunca se anula, o teorema ficará demonstrado se se provar que f aplica biunivocamente Ω sobre Ω'.

O número de vezes que w_0 é valor da função é dado por

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz,$$

desde que $f(z) \neq w_0$, sempre que z esteja sobre a curva γ. (Este resultado decorre do teorema B.1. do Capítulo 5 e será analizado com mais promenor no Capítulo 9 – teorema A.1.)

Através da mudança de variável $w = f(z)$, a expressão anterior pode escrever-se na forma

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-w_0}dw,$$

sendo Γ percorrido no sentido positivo. Se w_0 é interior a Γ, pelo teorema dos Resíduos de Cauchy tem-se $N = 1$ e w_0 é valor da função num só ponto. Se w_0 é exterior a Γ, pelo teorema de Cauchy, tem-se $N = 0$ e w_0 não é valor da função. Consequentemente, cada valor de Ω' é atingido uma só vez e nenhum número complexo que seja exterior a Γ é valor da função. Provou-se assim que f aplica bijectivamente Ω sobre Ω'.

Para a demonstração do seguinte importante resultado o leitor poderá consultar, por exemplo, Rudin W., *Real and Complex Analysis*.

Teorema A.4. (Teorema da aplicação de Riemann)

Todo o domínio simplesmente conexo $\Omega \neq C$ é conformemente equivalente ao disco aberto unitário $D(0,1) = \{z \in C : |z| < 1\}$.

Observação:

O caso $\Omega = C$ tem de ser excluído do enunciado, pois, se existisse uma aplicação biunívoca e conforme f de Ω sobre o disco unitário, pelo teorema de Liouville (ver Capítulo 4) f seria constante, o que é absurdo.

B. Algumas aplicações conformes elementares

Transformação homográfica

Um exemplo simples, mas muito importante, de uma aplicação conforme é a função

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

em que a, b, c, d, são constantes complexas tais que $ad - bc \neq 0$.

A aplicação f é designada por **transformação homográfica** (também conhecida por transformação bilinear, transformação fraccionária linear ou transformação de Mobïus).

A transformação $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ com a condição $ad - bc \neq 0$ é conforme no seu domínio $\left(\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \text{se } c \neq 0 \text{ ou } \mathbb{C} \text{ se } c = 0\right)$.

Com efeito:

– se $c \neq 0$, tem-se $f'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$, pois $ad - bc \neq 0$;

– se $c = 0$ e $d \neq 0$, tem-se $f'(z) = \dfrac{a}{d} \neq 0$ pois $ad - bc = ad \neq 0$.

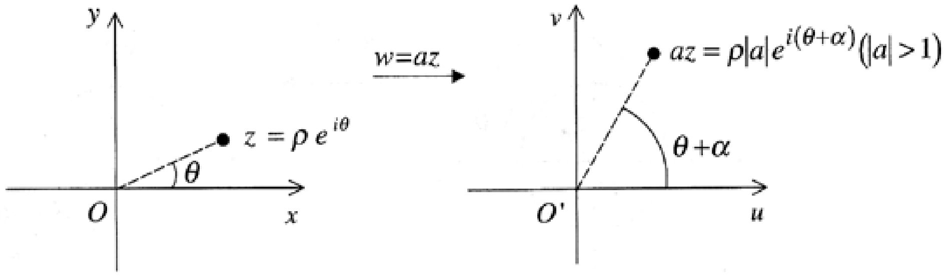
1.º caso: $b = 0$, $c = 0$ e $d = 1$

A transformação é $w = f(z) = az$. Em coordenadas trigonométricas,

$$z = \rho e^{i\theta}, a = |a|^{i\alpha} \text{ logo } az = \rho |a| e^{i(\theta+\alpha)};$$

geometricamente, tem-se uma dilatação se $|a| > 1$ (ou uma contração se $|a| < 1$) e uma rotação (de amplitude α).

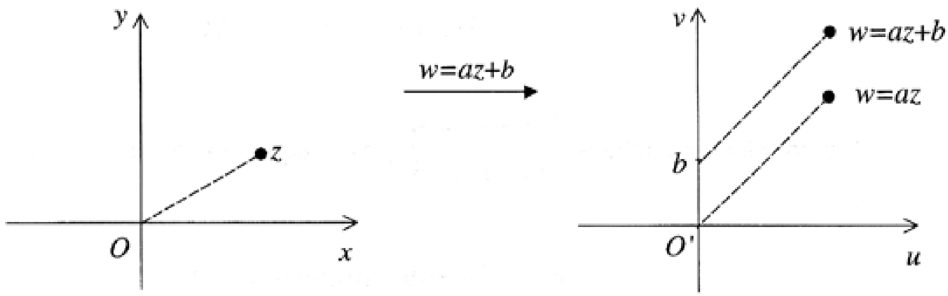
É imediato que neste caso a aplicação transforma circunferências em circunferências.



2.º caso: $c = 0$ e $d = 1$

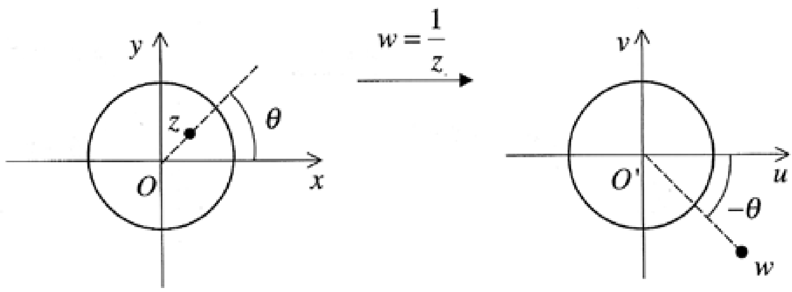
A transformação é $w = f(z) = az + b$, tem-se portanto uma *dilatação*, se $|a| > 1$, ou uma *contração*, se $|a| > 1$, uma *rotação* (de amplitude α) e uma *translação* (de b); se b é um número real, todos os pontos sofrem uma translação horizontal, mas se b é um número complexo, além de uma translação horizontal, ter-se-á também uma translação vertical.

É também imediato neste caso que a aplicação transforma circunferências em circunferências.



3.º caso: $a = d = 0$ e $b = c$

A transformação é $w = \dfrac{1}{z}$. Se $z = re^{i\theta}$, tem-se $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ e, neste caso, a aplicação transforma pontos interiores a uma circunferência de raio $r \neq 1$ em pontos exteriores a esta circunferência e reciprocamente. Note-se que a circunferência unitária é transformada em si própria mas descrita em sentido contrário, já que $\arg w = -\arg z$.



Verifica-se em seguida que a transformação $w=\frac{1}{z}$ transforma circunferências no z–plano $(z=x+iy)$ ou em circunferências ou em rectas no w–plano. Interpretando uma recta como uma circunferência «passando pelo infinito», pode dizer-se que a transformação $w=\frac{1}{z}$ transforma circunferências no z–plano em circunferências no w–plano.

Com efeito, a equação geral de uma circunferência no z–plano é

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \quad A,B,C\in\mathbb{R}.$$

Em coordenadas polares $\left(\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\operatorname{sen}\theta\end{cases}\right)$ estas equações tomam a forma

$$r^2+r\left(A\cos\theta+B\operatorname{sen}\theta\right)+C=0.$$

Sendo $z=x+iy=re^{i\theta}$, $r\neq 0$, tem-se $w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$; pondo $\rho=\frac{1}{r}$ e $\varphi=-\theta$ a circunferência de equação $r^2+r\left(A\cos\theta+B\operatorname{sen}\theta\right)+C=0$ é transformada em

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho}\left(A\cos(-\varphi)+B\operatorname{sen}(-\varphi)\right)+C=0,$$

ou seja,

$$C\rho^2+\rho\left(A\cos\varphi-B\operatorname{sen}\varphi\right)+1=0.$$

– Se $C \neq 0$, pode escrever-se a equação anterior com a forma

$$\rho^2 + \rho\left(\frac{A}{C}\cos\varphi - \frac{B}{C}\operatorname{sen}\varphi\right) + \frac{1}{C} = 0,$$

que é a equação de uma circunferência em coordenadas polares no plano dos w, $w = u + iv = \rho e^{i\varphi}$.

– Se $C = 0$, a equação $\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(A\cos(-\varphi) + B\operatorname{sen}(-\varphi)\right) + C = 0$ reduz-se a

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(A\cos(-\varphi) + B\operatorname{sen}(-\varphi)\right) = 0,$$

isto é,

$$\rho\left(A\cos\varphi - B\operatorname{sen}\varphi\right) + 1 = 0,$$

ou ainda

$$A(\rho\cos\varphi) - B(\rho\operatorname{sen}\varphi) + 1 = 0.$$

– Se $w = u + iv = \rho e^{i\varphi}$, a equação anterior toma a forma $Au - Bv + 1 = 0$, que é a equação de uma recta no plano dos w, que pode ser interpretada como circunferência «passando pelo infinito».

4.º caso: Caso geral

Retome-se a transformação inicial $w = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ com $ad - bc \neq 0$.

Observe-se que se $c \neq 0$ a expressão anterior pode escrever-se na forma

$$w = \frac{acz + bc}{c(cz + d)} = \frac{acz + bc + ad - ad}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d) + (bc - ad)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}.$$

Verifica-se assim que f pode ser decomposta nas seguintes transformações elementares sucessivas:

$$z \xrightarrow{f_1} cz + d \xrightarrow{f_2} \frac{1}{cz + d} \xrightarrow{f_3} \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz + d}.$$

As transformações f_1 e f_3 são do tipo estudado no 2.º caso e a transformação f_2 é do tipo estudado no 3.º caso. Como se verificou que estas transformações transformam circunferências em circunferências, a transformação $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ aplica circunferências no plano dos z sobre circunferências no plano dos w.

Observe-se que, se $z = -\dfrac{d}{c}$, atendendo a que $ad - bc \neq 0$, tem-se $f\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$; assim, a transformação f está definida em $\mathbb{C}$, tranformando as circunferências que passam pelo ponto $z = -\dfrac{d}{c}$ em rectas (interpretadas como circunferências «passando pelo infinito»).

Teorema B.1.

A transformação homográfica $w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc \neq 0$ é injectiva em $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Demonstração:

Sejam $z_1 \neq z_2$ pertencentes a $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ e $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$; tem-se $w_1 = \dfrac{az_1+b}{cz_1+d}$ e $w_2 = \dfrac{az_2+b}{cz_2+d}$, logo

$$w_1 - w_2 = \frac{(ad-bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$$

e consequentemente $w_1 \neq w_2$; a transformação f é pois injectiva em $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Observação:

A transformação homográfica, sendo injectiva em $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, admite inversa definida em $f\left(\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\right)$ (ver exercício 9 deste capítulo).

Teorema B.2.

Sejam z_1, z_2, z_3, w_1, w_2 e $w_3 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em que $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ e $w_1 \neq w_2 \neq w_3$. Então existe uma única transformação homográfica f tal que $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.

Demonstração:

Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 pontos distintos do z–plano, nenhum deles coincidente com $z = -\dfrac{d}{c}$, e w_1, w_2, w_3, e w_4 as respectivas imagens. Deduz-se da igualdade $w_1 - w_2 = \dfrac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$ que

$$\frac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)} = \frac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}.$$

Seja z um ponto qualquer do z–plano e w a sua imagem por f. Para obter a expressão analítica de f, basta resolver em ordem a w a equação

$$\frac{(w_1-w)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w)} = \frac{(z_1-z)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}.$$

Esta relação é pois equivalente a uma transformação homográfica.

Observação:

A expressão $\dfrac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$ é chamada a **razão cruzada** (*cross-ratio*) dos quatro pontos z_1, z_2, z_3, e z_4 e a igualdade $\dfrac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)} = \dfrac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$ mostra que a razão cruzada de quatro pontos é igual à razão cruzada das respectivas imagens.

Se, por exemplo, o ponto w_1 é «próximo de infinito», o primeiro membro da igualdade

$\dfrac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)}=\dfrac{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$ reduz-se a $\dfrac{(w_3-w_2)}{(w_3-w_4)}$, que pode ser interpretada como a razão cruzada dos pontos ∞, w_2, w_3 e w_4.

Exemplo B.1.

Determine-se a transformação homográfica *f*, tal que $f(0)=i, f(-i)=1$ e $f(-1)=0$.

Substituindo os dados do problema na expressão $\dfrac{(w_1-w)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w)}=\dfrac{(z_1-z)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$, obtém-se

$$\frac{(i-w)(0-1)}{(i-1)(0-w)}=\frac{(0-z)(-1-(-i))}{(0-(-i))(-1-z)}, \quad \text{isto é,} \quad \frac{w-i}{w(1-i)}=\frac{z(1-i)}{(z+1)(-i)};$$

resolvendo em ordem a *w*, conclui-se que $w=f(z)=-i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

Seja C_z, uma circunferência no *z*–plano e C_w uma circunferência no *w*–plano. Tendo em conta que uma circunferência fica univocamente determinada por três pontos e uma transformação homográfica pela expressão $\dfrac{(w_1-w)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w)}=\dfrac{(z_1-z)(z_3-z_2)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$, é possível determinar qual a transformação homográfica que transforma C_z em C_w, podendo o interior da circunferência C_z ser tranformado no interior ou no exterior da circunferência C_w. Observando que, como já foi referido, a imagem de $z=-\dfrac{d}{c}$ é $w=f\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty$, tem-se:

– se $z=-\dfrac{d}{c}$ é interior a C_z, a sua imagem é necessariamente exterior a C_w e o interior de C_z é transformado no exterior de C_w;

– se $z=-\dfrac{d}{c}$ é exterior a C_z, o interior de C_z é transformado no interior de C_w. Se C_w se reduz a uma recta, o interior e o exterior de C_z são transformadas em semiplanos limitados pela recta C_w.

Exemplo B.2.

Procure-se uma transformação homográfica que transforme o eixo real no plano dos z no eixo real no plano dos w.

Atendendo à expressão

$$\frac{(w_1 - w)(w_3 - w_2)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w)} = \frac{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)},$$

que caracteriza a transformação $w = f(z)$, conhecidas as imagens de três pontos, são de considerar as transformações f para as quais z_1, z_2, z_3, w_1, w_2 e w_3 são números reais.

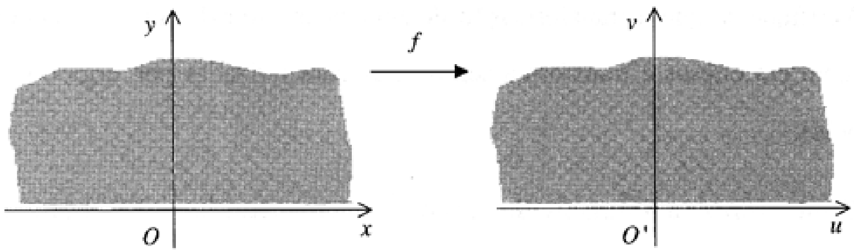
Resolvendo a equação

$$\frac{(w_1 - w)(w_3 - w_2)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w)} = \frac{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}$$

em ordem a w, obtém-se $w = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ com a, b, c e d números reais. Reciprocamente, se a, b, c e d são números reais, e se z é um número real, $w = f(z)$ também é um número real.

Exemplo B.3.

Procure-se uma transformação homográfica f que transforme o semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ no semiplano $\operatorname{Im} w > 0$.



Pelo anteriormente exposto, uma transformação homográfica que transforme o semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ no semiplano $\operatorname{Im} w > 0$ tem de tranformar o eixo real no z–plano no eixo real no w–plano. Pelo exemplo B.2., ela é da forma $w = f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ com a, b, c e d números reais. Resta caracterizar a, b, c e d de modo que a imagem de um ponto no semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ seja um ponto do semiplano $\operatorname{Im} w > 0$. Tome-se, por exemplo, $z = i$; tem-se

$$f(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(d - ci)}{(ci + d)(d - ci)} = \frac{(ai + b)(d - ci)}{c^2 + d^2} = \frac{(bd + ac) + i(ad - bc)}{c^2 + d^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f(i) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Conclui-se então que a transformação f transforma o semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ no semiplano $\operatorname{Im} w > 0$ se $ad - bc > 0$. (Se $ad - bc < 0$, o semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ é transformado no semiplano $\operatorname{Im} w < 0$.)

Transformação de Joukowsky

Chama-se transformação de Joukowsky a aplicação

$$f(z) = a\left(z + z^{-1}\right) \text{ com } a \in \mathbb{R}.$$

Analisa-se em seguida a forma da transformação de Joukowsky correspondente a $a = \frac{1}{2}$, isto é, definida pela função $f(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}$. A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e conforme em $\mathbb{C} \setminus \{-1,0,1\}$. Como $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ e $f''(z) = \frac{1}{z^3}$, a função f' tem zeros de primeira ordem em $z = -1$ e $z = 1$. Então, pelo teorema A.2., curvas seccionalmente regulares que passem por $z = -1$ ou $z = 1$ e formem entre si o ângulo θ são transformadas em curvas seccionalmente regulares que formam entre si o ângulo 2θ.

Verifique-se que a transformação de Joukowsky transforma as circunferências de centro na origem em elipses e transforma semi-rectas caracterizadas por $\arg z = k$, com k em $\mathbb{R}$, em hipérboles:

Com efeito, a imagem de $z = re^{i\theta}$ é constituída pelos pontos $w = u + iv$ com $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$ e $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$. Então $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$, e a imagem da circunferência $|z| = r$ é a elipse centrada na origem e de semieixos $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ e $\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$.

Observe-se que, se $r = 1$, isto é, se a circunferência passa pelos pontos $z = -1$ e $z = 1$, a elipse degenera no segmento de extremos $w = -1$ e $w = 1$.

A imagem da semirecta $\arg z = k$ é constituída pelos pontos $w = u + iv$ com $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos k$ e $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen} k$.

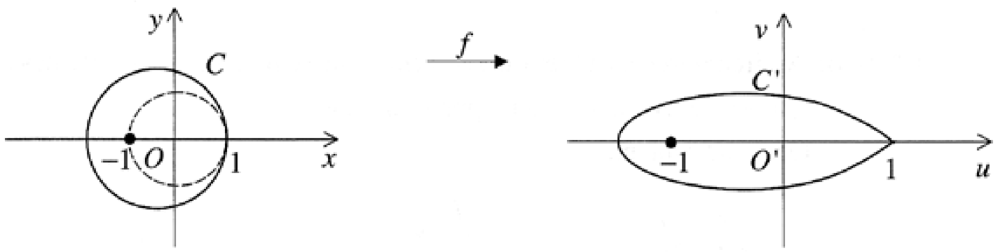
Então, $\frac{u^2}{\cos^2 k} = \frac{1}{4}\left(|z|^2 + \frac{1}{|z|^2} + 2\right)$, $\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 k} = \frac{1}{4}\left(|z|^2 + \frac{1}{|z|^2} - 2\right)$ e assim, $\frac{u^2}{\cos^2 k} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 k} = 1$; a imagem da semirecta $\arg z = k$ é pois uma hipérbole.

Refere-se em seguida o efeito da transformação de Joukowsky $w = f(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}$ sobre as circunferências que passem pelo ponto $z = -1$ ou $z = 1$.

1.º caso: A circunferência C tem o seu centro sobre o eixo real, passa pelo ponto $z = 1$ e tem $z = -1$ como ponto interior.

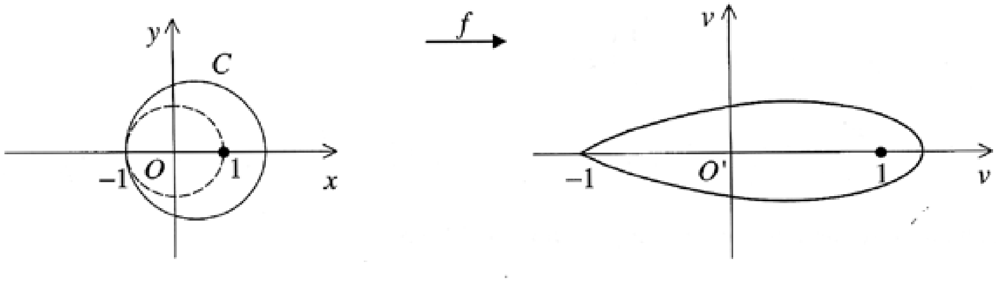
Neste caso, à medida que os pontos sobre C se aproximam de pontos sobre a circunferência $|z| = 1$, a sua imagem C' aproxima-se do segmento de recta que une os pontos $w = -1$ e $w = 1$ (que é a imagem da circunferência $|z| = 1$).

Geometricamente,



2.º caso: A circunferência C tem o seu centro sobre o eixo real, passa pelo ponto $z = -1$ e tem $z = 1$ como ponto interior.

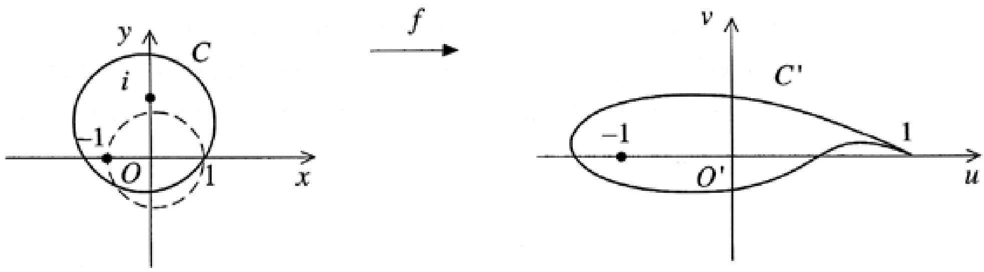
Geometricamente,



3.º caso: A circunferência C tem o seu centro no semi-plano $\operatorname{Im} z > 0$, passa pelo ponto $z = 1$ e tem $z = -1$ como ponto interior.

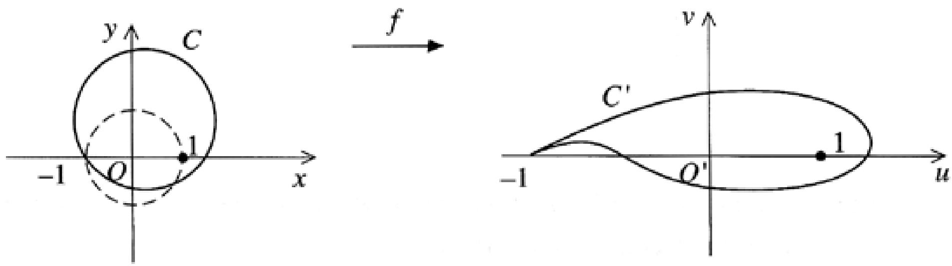
Neste caso, como C não contém inteiramente no seu interior a circunferência $|z| = 1$, a sua imagem C' não contém inteiramente no seu interior o segmento de recta que une os pontos $w = -1$ e $w = 1$

Geometricamente,



4.º caso: A circunferência C tem o seu centro no semiplano $\operatorname{Im} z > 0$, passa pelo ponto $z = -1$ e tem $z = 1$ como ponto interior.

Geometricamente,



As curvas obtidas como imagem das circunferências são usualmente designadas por **perfis de Joukowsky**. A sua forma deixa antever a utilização da transformação de Joukowsky em problemas de aerodinâmica.

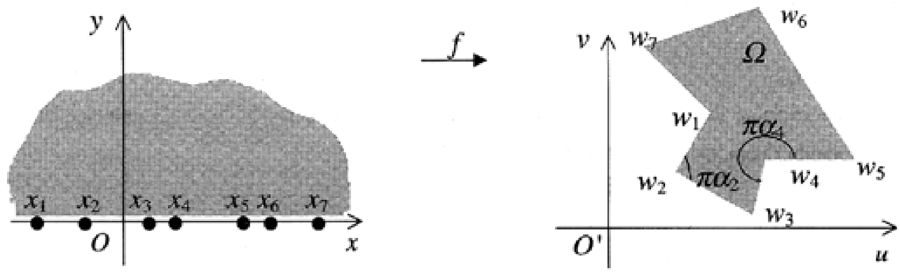
Transformação de Schwarz-Christoffel

Dado no plano dos w um domínio Ω cuja fronteira é uma linha poligonal com vértices $w_1, w_2, \ldots, w_n$ onde os ângulos internos são respectivamente $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_n$, prova-se que uma transformação $w = f(z)$ que aplique bijectivamente o semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ em Ω é tal que

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1 - 1}(z - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - x_n)^{\alpha_n - 1},$$

em que A é uma constante complexa e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são pontos arbitrariamente escolhidos sobre o eixo real do plano dos z, que se aplicam por f respectivamente, nos pontos $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

A transformação $w = f(z)$ é denominada **transformação de Schwarz-Christoffel.**



A constante A está relacionada com a posição e as dimensões do polígono (isto é, do domínio cuja fronteira é uma linha poligonal).

Quando um dos pontos x_i «é infinito», o factor correspondente na expressão

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1 - 1}(z - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - x_n)^{\alpha_n - 1}$$

reduz-se a 1. Com efeito, tomando

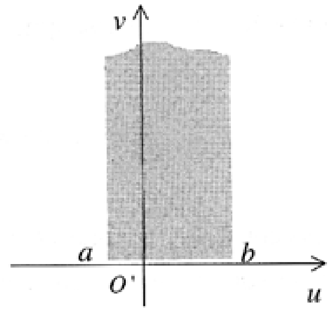
$$A = \frac{K}{(-x_i)^{\alpha_i - 1}},$$

a expressão anterior toma a forma

$$\frac{dw}{dz} = K(z - x_1)^{\alpha_1 - 1}(z - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots \left(\frac{x_i - z}{x_i}\right)^{\alpha_i - 1} \ldots (z - x_n)^{\alpha_n - 1} \text{ e } \lim_{x_i \to \infty}\left(\frac{x_i - z}{x_i}\right)^{\alpha_i - 1} = 1.$$

Tenha-se em conta que os polígonos com algum vértice «no infinito» podem ser considerados como casos limite de polígonos. Por exemplo, a fronteira do conjunto

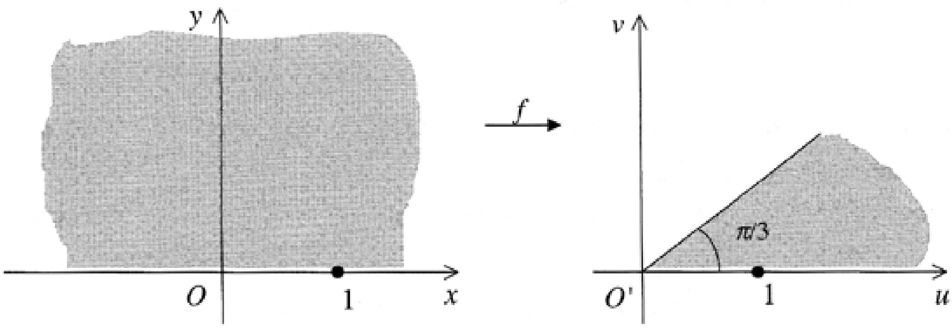
$$\Omega^* = \{w = u + iv \in C: a < u < b\,,\, v > 0\}$$



pode ser considerada como um triângulo com vértices nos pontos $w_1 = a, w_2 = b$ e $w_3 = \infty$ (ver exercício 20 deste capítulo).

Exemplo B.4.

Determine-se uma função f que aplique a região do z–plano indicada na figura no semiplano $\operatorname{Im} z > 0$, transformando O em O' e $z = 1$ em $w = f(1) = 1$.



Utilizando a transformação de Schwarz-Christoffel para definir a função $w = f(z)$, tem-se $\pi\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, logo

$$\frac{dw}{dz} = A z^{\frac{1}{3}-1} = A z^{-\frac{2}{3}}$$

e, assim,

$$f(z) = 3Az^{\frac{1}{3}} + B \text{ com } A, B \in \mathbb{C}\,.$$

Como $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, obtém-se $B = 0$ e $A = \dfrac{1}{3}$.

A transformação que satisfaz a questão proposta é, pois, $f(z) = \sqrt[3]{z}$.

Exercícios resolvidos

1. Caracterize conjuntos de pontos onde as funções seguintes são conformes:

a) $f(z)=\dfrac{z}{2+3z}$, **b)** $g(z)=z^2+2z^3$, **c)** $h(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$.

Resolução:

Pelo teorema A.1. e observações seguintes, uma função analítica é conforme nos pontos onde a sua derivada é diferente de zero. Assim tem-se:

a) A função f é derivável em $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$ e $f'(z)=\dfrac{2}{(2+3z)^2}\neq 0$ em $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$. A função f é assim conforme em $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

b) A função g é derivável em $\mathbb{C}$ e $g'(z)=2z+6z^2\neq 0$ em $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3},0\right\}$. A função g é assim conforme em $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3},0\right\}$.

c) A função h é derivável em $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$ e $h'(z)=\dfrac{-2z}{\left(1+z^2\right)^2}\neq 0$ em $\mathbb{C}\setminus\{-i,0,i\}$. A função h é assim conforme em $\mathbb{C}\setminus\{-i,0,i\}$.

2. Verifique que a transformação $f(z)=z^2$ é conforme no 1º quadrante,

$$D=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\},$$

e determine $f(D)$.

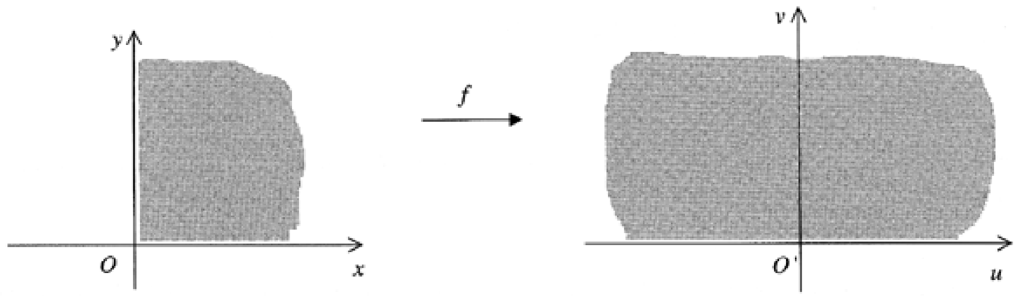
Resolução:

Como a função $f(z)=z^2$ é derivável em $\mathbb{C}$ e $f'(z)=2z\neq 0$ em $D=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Im}z>0\}$, a transformação $f(z)=z^2$ é conforme no 1.º quadrante.

Se $z\in\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Im}z>0\}$, tem-se $z=re^{i\theta}$ com $r>0$ e $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$; então, $w=f(z)=z^2=r^2e^{2i\theta}$.

Como $r^2\in\left]0,+\infty\right[$ e $2\theta\in\left]0,\pi\right[$, pode concluir-se que $f(D)=\{w\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im}w>0\}$.

Geometricamente,



3. Determine a imagem da faixa $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 \le x \le 2\}$ pela função $f(z) = z^2$.

Resolução:

A função $f(z) = z^2$ é conforme na faixa $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 \le x \le 2\}$, uma vez que $f'(z) \neq 0$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $0 \notin \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 \le x \le 2\}$.

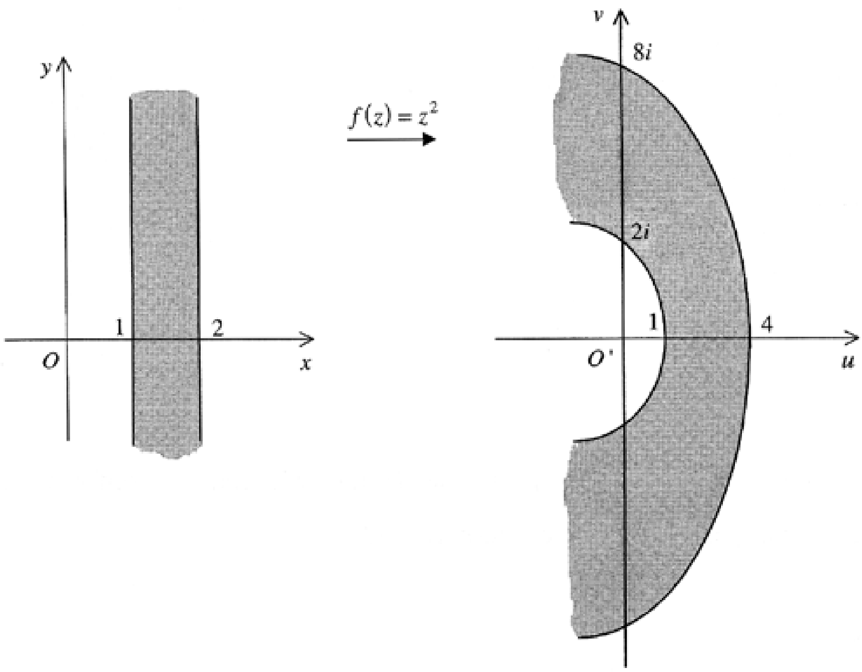
Como $z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i2xy$, tem-se que $w = f(z) = u + iv$ com $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$. Assim, a imagem da recta $x = 1$ é o lugar geométrico dos pontos $w = u + iv$ tais que $u = 1 - y^2$ e $v = 2y$, isto é, tais que $u = -\dfrac{v^2}{4} + 1$, que é uma parábola de eixo horizontal com vértice $w = 1$.

Analogamente, a imagem da recta $x = 2$ é o lugar geométrico dos pontos $w = u + iv$ tais que $u = 4 - y^2$ e $v = 4y$, isto é, tais que $u = -\dfrac{v^2}{16} + 4$, que é uma parábola de eixo horizontal com vértice $w = 4$.

Atendendo a que a imagem do ponto $z = a$, $1 < a < 2$, é $w = a^2$ e $1 < a^2 < 4$, um ponto interior à faixa $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 \le x \le 2\}$ é transformado num ponto interior à região do plano dos w compreendida entre as duas parábolas. A imagem da faixa $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 \le x \le 2\}$ é então a região do plano dos w compreendida entre as parábolas $u = -\dfrac{v^2}{4} + 1$ e $u = -\dfrac{v^2}{16} + 4$, isto é, o conjunto

$$\Omega^* = \left\{ w = u + iv \in \mathbb{C} : -\frac{v^2}{4} + 1 \le u \le -\frac{v^2}{16} + 4,\ v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geometricamente,



4. Qual o subconjunto de $\mathbb{C}$ cuja imagem pela função $f(z)=z^2$ é a faixa

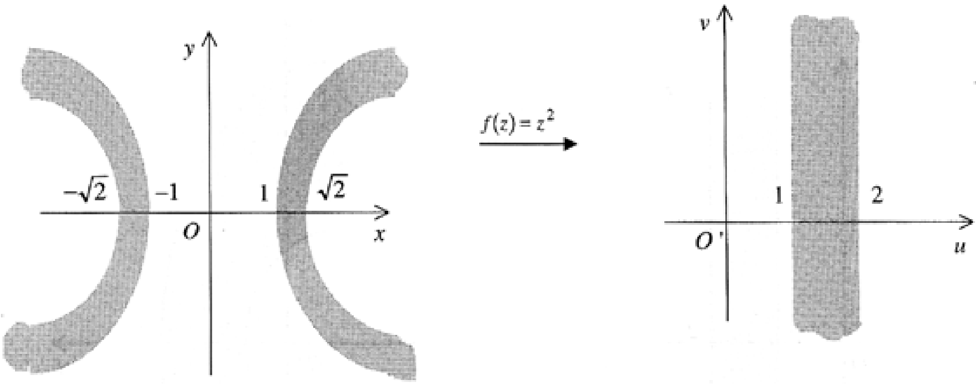
$$\{w=u+iv\in\mathbb{C}:1<u<2\}?$$

Resolução:

Como $z^2=\left(x^2-y^2\right)+i2xy$, tem-se que $w=f(z)=u+iv$ com $u=x^2-y^2$ e $v=2xy$. Então, as hipérboles $x^2-y^2=1$ e $x^2-y^2=2$ têm por imagem respectivamente as rectas $u=1$ e $u=2$.

Tome-se, por exemplo, um ponto $z_0=a$, $1<a<\sqrt{2}$; trata-se de um ponto do plano dos z interior à região entre as duas hipérboles. Como $f(z_0)=a^2$ e $1<a^2<2$, tem-se que $f(z_0)\in\{w=u+iv\in\mathbb{C}:1<u<2\}$, podendo então concluir-se que a região do plano dos z entre as duas hipérboles, isto é, o conjunto $\Omega=\left\{z=x+iy\in\mathbb{C}:1<x^2-y^2<2\right\}$ é transformado por $f(z)=z^2$ na faixa $\{w=u+iv\in\mathbb{C}:1<u<2\}$.

Geometricamente,



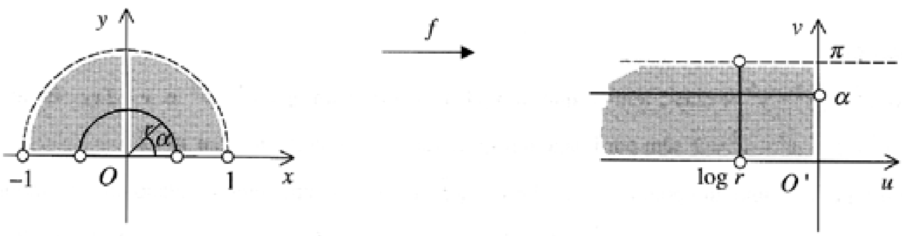
5. Verifique que a transformação $f(z)=\log z$ (ramo principal) é conforme no conjunto $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1,\operatorname{Im}z>0\}$, e determine $f(\Omega)$.

Resolução:

Como a função f é derivável em $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\ ,\operatorname{Im}z>0\}$ e a sua derivada $f'(z)=\dfrac{1}{z}$ não se anula neste conjunto, f é conforme em $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\ ,\operatorname{Im}z>0\}$.

Seja $z=re^{i\theta}$ com $0<r<1$ e $\theta\in\,]0,\pi[$; como $\log z=\log r+i\theta$, tem-se $\log(]0,1[)=]-\infty,0[$.

Sendo o logaritmo real uma função crescente, o conjunto $\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\ ,\operatorname{Im}z>0\}$ é transformado bijectivamente na faixa $\{w:0<\operatorname{Im}w<\pi\ ,\operatorname{Re}z<0\}$.



Note-se que as semicircunferências no plano dos z caracterizadas por $z=re^{i\theta}$ com $0<r<1$ e $\theta\in\,]0,\pi[$ são transformadas em segmentos de recta verticais no plano dos w caracterizados por $\operatorname{Re}w=\log r$ e $0<\operatorname{Im}w<\pi$ e os raios no plano dos z caracterizados por $z=re^{i\alpha}$ com $0<r<1$ são transformados nas semi-rectas horizontais no plano dos w caracterizadas por $\operatorname{Im}w=\alpha$ e $\operatorname{Re}w<0$.

6. Verifique que a transformação $f(z) = \operatorname{sen} z$ é conforme no conjunto

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right\},$$

e determine $f(\Omega)$.

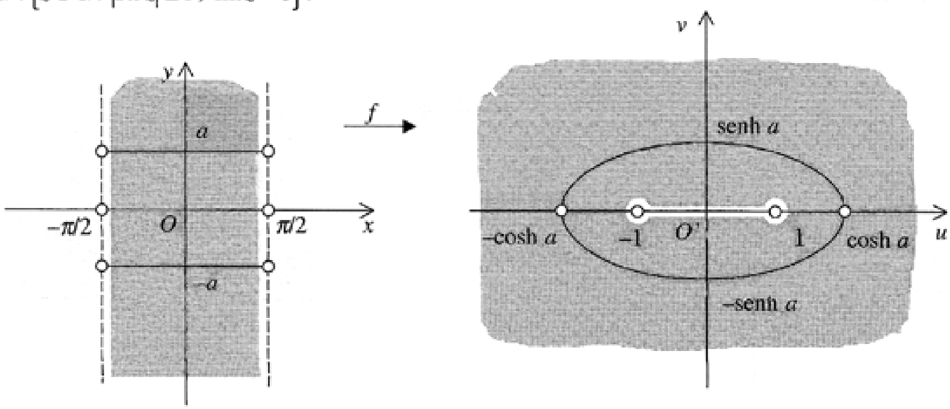
Resolução:

Como a função f é derivável em $\mathbb{C}$ e a sua derivada $f'(z) = \cos z$ anula-se apenas para $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, tem-se que f' não se anula no conjunto $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right\}$, pelo que f é conforme neste conjunto.

Considere-se no conjunto $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right\}$ o segmento constituído pelos pontos $z = x + ia$, com $a > 0$ e $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Atendendo a que $\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$, as imagens dos pontos do segmento descrevem o arco da elipse de semieixos $\cosh a$ e $\operatorname{senh} a$ situado no semiplano $\operatorname{Im} w > 0$.

Analogamente, as imagens dos pontos do segmento $z = x + i(-a)$ descrevem o arco da elipse de semieixos $\cosh a$ e $\operatorname{senh} a$ situado no semiplano $\operatorname{Im} w < 0$.

Se $a = 0$, obtém-se o segmento $z = x$ com $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, cuja imagem por f é o segmento no plano dos w, caracterizado por $\operatorname{Im} w = 0$ e $\operatorname{Re} w \in \left] \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right[=]-1,1[$. Tendo em conta que as funções cosh e senh estão definidas em $\mathbb{R}$, pode concluir-se que a imagem do conjunto $\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right\}$ é $\mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 1,\ \operatorname{Im} z = 0 \right\}$.



7. Determine a imagem por $f(z)=e^z$ dos conjuntos

a) $A=\{z=x+iy\in\mathbb{C}: x\le 1,\ 0\le y\le\pi\}$, **b)** $B=\{z=x+iy\in\mathbb{C}: x\in\mathbb{R},\ 0\le y\le\pi\}$.

Resolução:

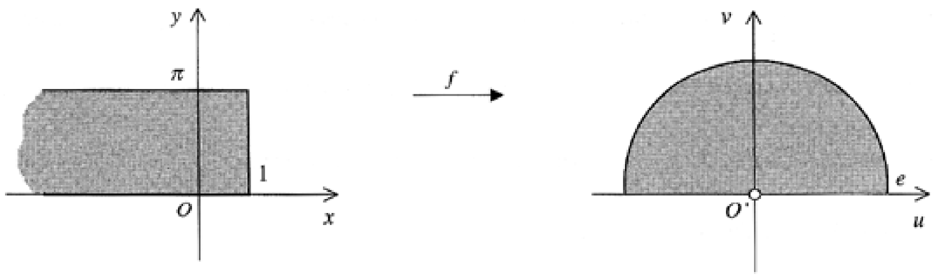
A função $f(z)=e^z$ é conforme em $\mathbb{C}$.

a) Como $w=e^z=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$, tem-se $w=u+iv$ com $u=e^x\cos y$ e $v=e^x\operatorname{sen} y$ e $u^2+v^2=e^{2x}$.

Se $0\le y\le\pi$ tem-se que $0\le\operatorname{sen} y\le 1$, logo $0\le e^x\operatorname{sen} y\le e^x$. Sendo $x\le 1$ conclui-se que, $0\le v\le e$. Tem-se finalmente que

$$f(A)=\left\{w\in\mathbb{C}: 0<u^2+v^2\le e^2,\ 0\le v\le e\right\}.$$

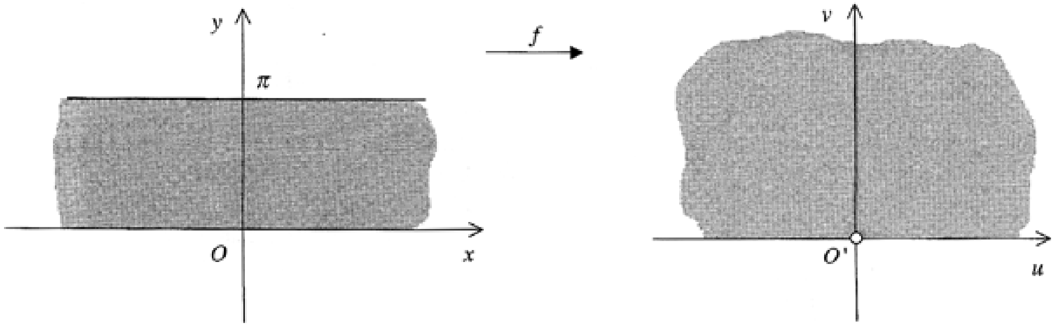
Geometricamente,



Observe-se que a função $f(z)=e^z$ transforma qualquer recta vertical numa circunferência centrada na origem.

b) Conclui-se da alínea anterior que as circunferências $u^2+v^2=e^{2x}$ podem ter um raio tão grande quanto se queira. Assim, $f(B)=\left\{w\in\mathbb{C}: 0<u^2+v^2\le e^{2x},\ x\in\mathbb{R}\right\}$.

Geometricamente,



8. Determine a área do transformado por $f(z)=e^z$ do conjunto

$$A=\{z\in\mathbb{C}:1\le \operatorname{Re} z\le 2, 0\le \operatorname{Im} z\le 4\}.$$

Resolução:

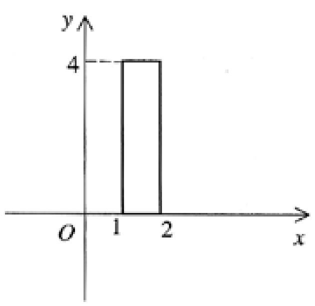
A função $f(z)=e^z$ é conforme em $\mathbb{C}$. Analise-se a imagem por f da fronteira do conjunto A, que é um rectângulo com lados verticais $\operatorname{Re} z=1$ e $\operatorname{Re} z=2$ e lados horizontais $\operatorname{Im} z=0$ e $\operatorname{Im} z=4$.

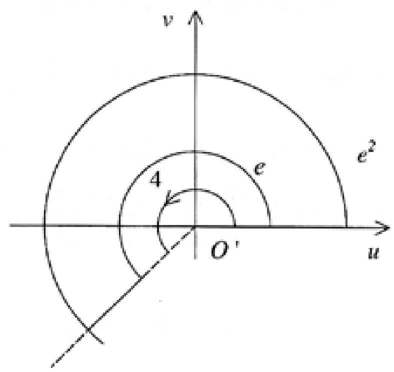
Sendo $w=f(z)=f(x+iy)=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$, tem-se:

– A recta $x=\operatorname{Re} z=1$ é transformada no lugar geométrico dos pontos w tais $w=e^1(\cos y+i\operatorname{sen} y)$, que é a circunferência de centro na origem e raio e. Analogamente, a recta $x=\operatorname{Re} z=2$ é transformada na circunferência de centro na origem e raio e^2.

– A recta $y=\operatorname{Im} z=0$ é transformada no lugar geométrico dos pontos w tais que $w=e^x(\cos 0+i\operatorname{sen} 0)=e^x$, que é o semieixo real positivo. Analogamente, a recta $y=\operatorname{Im} z=4$ é transformada na semi-recta caracterizada por $w=e^x(\cos 4+i\operatorname{sen} 4)$.

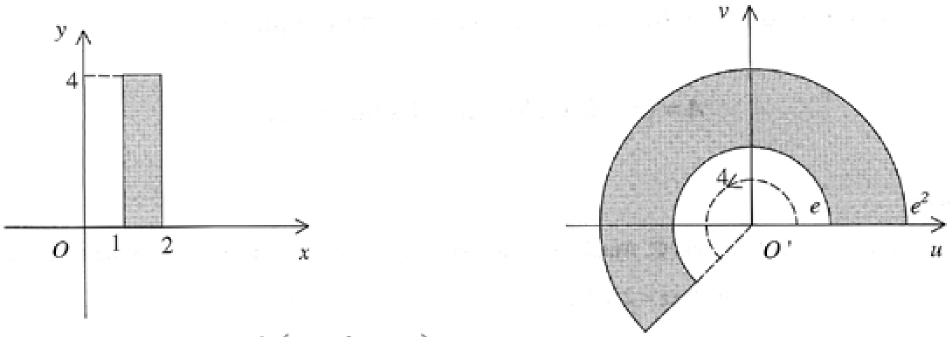
Geometricamente,





O ponto $z_0=\dfrac{3}{2}+i$ é interior a A. Analise-se a posição de $f(z_0)$ relativamente à imagem da fronteira de A representada na figura anterior: tem-se $f\left(\dfrac{3}{2}+i\right)=e^{\frac{3}{2}}(\cos 1+i\operatorname{sen} 1)$ e como $e<e^{\frac{3}{2}}<e^2$ e $0<1<4$, o ponto $f(z_0)$ é interior à imagem da fronteira de A.

Assim, $f(A)=\left\{w\in\mathbb{C}: e\le|w|\le e^2,\ 0\le \arg z\le 4\right\}$,



e a área de $f(A)$ é igual a $\frac{4}{2\pi}\left(\pi\left(e^2\right)^2-\pi e^2\right)=2e^2\left(e^2-1\right)$.

9. Verifique que a transformação inversa de uma trasformação homográfica é homográfica e que a composição de transformações homográficas é ainda uma transformação homográfica.

Resolução:

No teorema B.1. foi demonstrada a injectividade da transformação $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc\neq 0$ em $\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Resolvendo em ordem a w, obtém-se $z=\frac{-dw+b}{cw-a}$ com $(-d)(-a)-bc=ad-bc\neq 0$; a transformação inversa de f, $f^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}$, é pois uma transformação homográfica definida em $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$.

Quanto à composição, se $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc\neq 0$ e $z=f_1(\zeta)=\frac{a_1\zeta+b_1}{c_1\zeta+d_1}$ com $a_1d_1-b_1c_1\neq 0$, então $w=f\left(f_1(\zeta)\right)=\frac{\left(aa_1+bc_1\right)\zeta+\left(ab_1+bd_1\right)}{\left(ca_1+dc_1\right)\zeta+\left(cb_1+dd_1\right)}$ é uma tranformação homográfica, pois

$$\left(aa_1+bc_1\right)\left(cb_1+dd_1\right)-\left(ab_1+bd_1\right)\left(ca_1+dc\right)=(ad-bc)\left(a_1d_1-b_1c_1\right)\neq 0.$$

10. Prove que a imagem do eixo real pela tranformação homográfica $f(z)=\frac{3z+i}{iz+3}$ é uma circunferência.

Resolução:

A imagem por uma transformação homográfica de uma recta só pode ser uma recta ou uma circunferência (ver Secção B). Como numa circunferência não existem três pontos colineares, basta verificar que existem três pontos sobre o eixo real cujas imagens não são colineares.

Tem-se $f(1)=\dfrac{3+i}{i+3}=1$, $f(0)=\dfrac{i}{3}$, $f(-1)=\dfrac{-3+i}{-i+3}=-1$ e, assim, a imagem do eixo real é a circunferência que passa por estes três pontos.

11. Determine as imagens pela transformação $w=f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ dos domínios do plano caracterizados por

a) $\operatorname{Im} z<0$, **b)** $\operatorname{Re} z>0$, **c)** $|z|>1$.

Resolução:

A transformação em questão é uma transformação homográfica com $a=0$, $b=c$ e $d=1$.

a) De $w=\dfrac{1}{z-1}$ deduz-se que $z=1+\dfrac{1}{w}$. Os pontos do eixo real ($\operatorname{Im} z=0$) verificam a equação $z=\overline{z}$, sendo portanto transformados nos pontos do conjunto dos w caracterizados por $\overline{\left(1+\dfrac{1}{w}\right)}=1+\dfrac{1}{w}$.

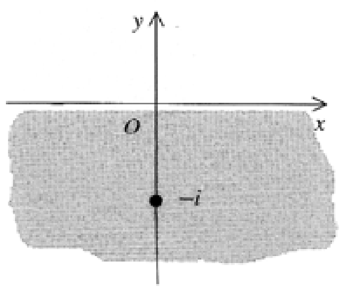
Atendendo a que $\overline{\left(\dfrac{1}{w}\right)}=\dfrac{w}{|w|^2}$, tem-se

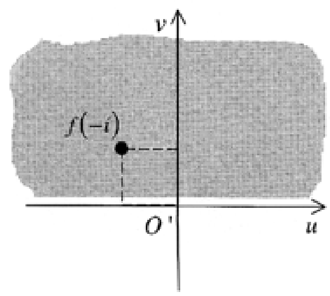
$$\overline{\left(1+\frac{1}{w}\right)}=1+\frac{1}{w} \Leftrightarrow \overline{\left(1+\frac{1}{w}\right)}=1+\frac{1}{w} \Leftrightarrow w^2=\left|w^2\right|.$$

Pondo $w=u+iv$, a igualdade $w^2=\left|w^2\right|$ toma a forma $u^2-v^2+i2uv=u^2+v^2$. Consequentemente, $u\in\mathbb{R}$ e $v=0$. A imagem da recta $\operatorname{Im} z=0$ é pois a recta $\operatorname{Im} w=0$.

Para conhecer a imagem por f do semiplano $\operatorname{Im} z<0$ basta calcular, por exemplo, $f(-i)$ e analisar a sua posição relativamente à recta $\operatorname{Im} w=0$.

Como $f(-i)=\dfrac{1}{-1-i}=\dfrac{-1+i}{2}$, tem-se $\operatorname{Im}\left(f(-i)\right)=\dfrac{1}{2}>0$, concluindo-se que a imagem do semiplano $\operatorname{Im} z<0$ é o semiplano $\operatorname{Im} w>0$.

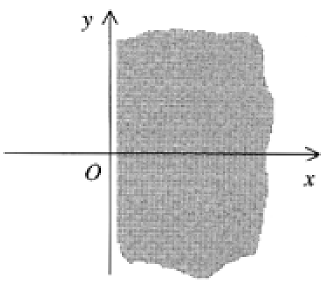


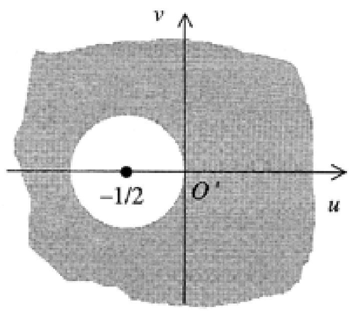


b) Como os pontos do eixo imaginário ($\operatorname{Re} z = 0$) verificam a equação $|z-1| = |z+1|$, de $z = 1 + \frac{1}{w}$ deduz-se que $|z-1| = \left|\frac{1}{w}\right|$ e $|z+1| = \left|2 + \frac{1}{w}\right|$. Então a recta $|z-1| = |z+1|$ é transformada no lugar geométrico dos pontos w, tais que $\left|\frac{1}{w}\right| = \left|2 + \frac{1}{w}\right|$, isto é, tais que $|2w+1| = 1$ ou, ainda, tais que $\left|w - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$. A imagem do eixo imaginário é pois uma circunferência de centro em $w = -\frac{1}{2}$ e raio igual a $\frac{1}{2}$.

Para conhecer a imagem por f do semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ basta calcular, por exemplo, $f(1)$ e analisar a sua posição relativamente à circunferência $\left|w - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}$.

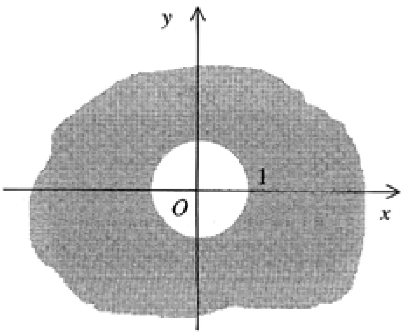
Como $f(1) = \infty$, a imagem de $\operatorname{Re} z > 0$ é o exterior da circunferência em questão.

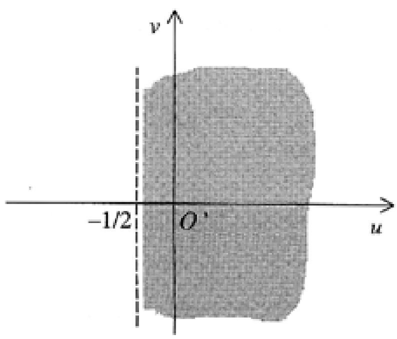




c) A circunferência $|z| = 1$ é transformada no lugar geométrico dos pontos w, tais que $\left|1 + \frac{1}{w}\right| = 1$, isto é, tais que $|w+1| = |w|$. A imagem da circunferência $|z| = 1$ é assim a recta $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$.

Como $f(\infty) = 0$, a imagem do exterior da circunferência $|z| = 1$ é o semiplano $\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$.





12. a) Determine uma transformação homográfica f que aplique a circunferência de centro na origem e raio 1 no plano dos z na recta do plano dos w caracterizada por $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$, de modo que $f(i) = \frac{i-1}{2}$.

b) Determine a imagem do disco $D(0,1)$ pela transformação homográfica obtida na alínea anterior.

Resolução:

a) Conforme se viu em B.2., se a transformação homográfica f é tal que $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ e $f(z_3) = w_3$, tem-se, para todo o z no domínio de f, e sendo $w = f(z)$,

$$(*) \quad \frac{(w_1 - w)(w_3 - w_2)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w)} = \frac{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}.$$

Sejam, por exemplo, $f(1) = -\frac{1}{2}$ e $f(-i) = \frac{-i-1}{2}$. Substituindo em (*), obtém-se

$$\frac{\left(-\frac{1}{2} - w\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - w\right)} = \frac{(1-z)(-i-i)}{(1-i)(-i-z)},$$

isto é,

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + w\right)i}{\frac{i}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - w\right)} = \frac{2i(1-z)}{(1-i)(i+z)},$$

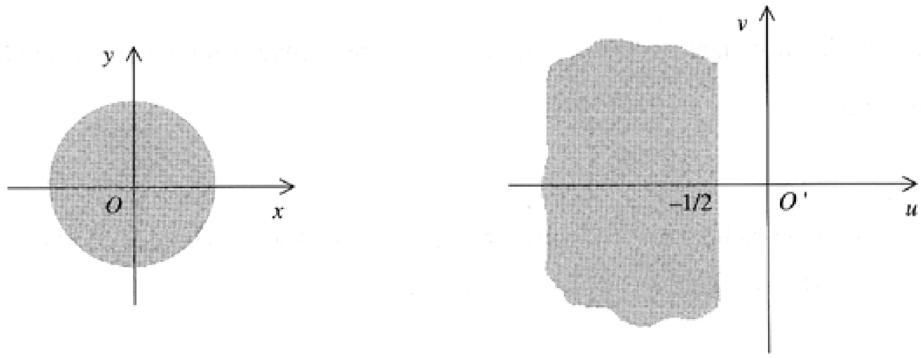
ou, ainda,

$$\frac{(1+2w)i}{1+i+2w} = \frac{i(1-z)}{(1-i)(i+z)}.$$

E, resolvendo em ordem a w, $w = \varphi(z) = -\frac{1}{1+z}$.

A transformação homográfica $f(z) = -\frac{1}{1+z}$ satisfaz o problema proposto.

b) Tome-se um ponto interior à circunferência, por exemplo $z=0$. Como $f(0)=-1\in\left\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w<-\frac{1}{2}\right\}$, tem-se que $f\left(D(0,1)\right)=\left\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w<-\frac{1}{2}\right\}$.

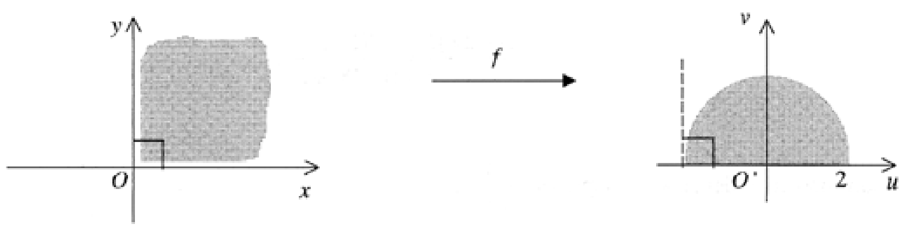


13. Determine uma transformação homográfica f que transforme o primeiro quadrante num domínio limitado por um arco de circunferência de raio igual a 2, estando esse arco de circunferência situado no semiplano Im $w>0$, com a concavidade voltada para baixo.

Resolução:

Atendendo a que a transformação homográfica é conforme, os ângulos são preservados em tamanho e sentido. De acordo com o enunciado, a transformação procurada transforma pontos do semiplano $\operatorname{Im}z>0$ em pontos do semiplano $\operatorname{Im}w>0$ e, assim, pelos exemplos B.2. e B.3. deste capítulo, ela é da forma $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, em que a, b, c e d são números reais, tais que $ad-bc>0$.

Como as rectas $\operatorname{Re}z=0$ e $\operatorname{Im}z=0$ são perpendiculares, a recta $\operatorname{Im}w=0$ e a semicircunferência devem ser perpendiculares, pelo que esta recta passa pelo centro da circunferência.



Como os pontos $z=0$ e $z=\infty$ são tranformados por $w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ respectivamente em $w=\dfrac{b}{d}$ e $w=\dfrac{a}{c}$, tem-se $\frac{a}{c}=2$ e $\frac{b}{d}=-2$. Como se pretende que $ad-bc>0$, tem-se $2cd-(-2cd)=4cd>0$. Fazendo, por exemplo, $c=d=1$, conclui-se que a transformação $f(z)=\frac{2z-2}{z+1}$ satisfaz o problema proposto.

14. Mostre que uma transformação homográfica f é idempotente, isto é, tal que $f\circ f=I$, se e só se $a=-d$.

Resolução:

Seja $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc\neq 0$. Tem-se

$$f\left(f(z)\right)=f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\frac{a\frac{az+b}{cz+d}+b}{c\frac{az+b}{cz+d}+d}=\frac{\left(a^2+bc\right)z+(ab+db)}{(ca+cd)z+\left(cb+d^2\right)}.$$

Se $a=-d$, resulta da igualdade anterior que

$$f\left(f(z)\right)=\frac{\left(a^2+bc\right)z+(ab-ab)}{(-dc+cd)z+\left(cb+a^2\right)}=z,$$

e f é idempotente.

Reciprocamente, se $f\circ f=I$, tem-se $f=f^{-1}$. Pelo exercício 9, tem-se então

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{-dz+b}{cz-a},$$

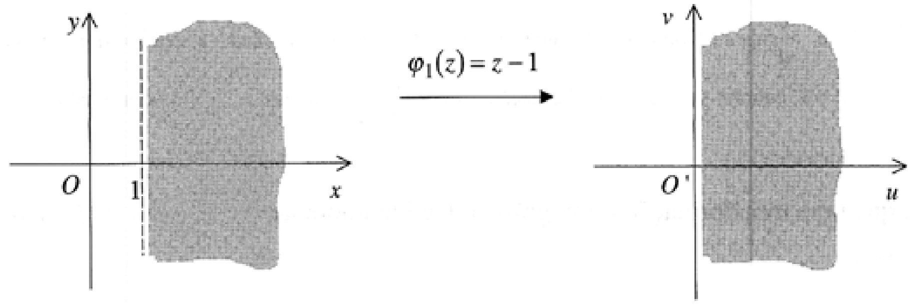
e consequentemente $a=-d$.

15. Determine uma bijecção analítica e conforme entre $D(1,1)$ e $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>1\}$.

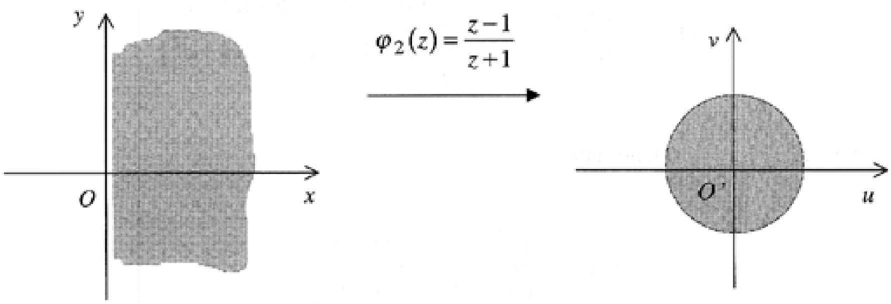
Resolução:

Pretende-se uma transformação conforme f que transforme $D(1,1)$ em $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>1\}$ e tal que f^{-1} transforme $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>1\}$ em $D(1,1)$.

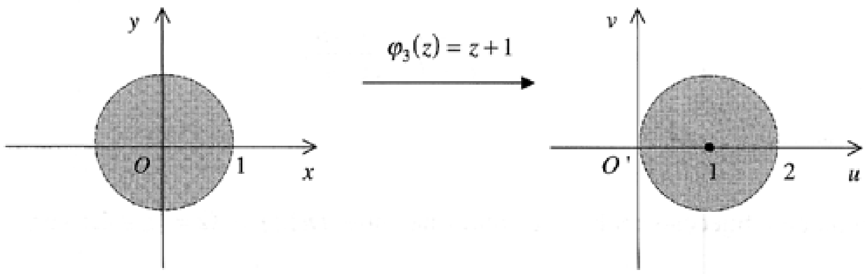
Atenda-se a que $\varphi_1(z)=z-1$ transforma bijectivamente o semiplano caracterizado por $\operatorname{Re}z>1$ no semiplano caracterizado por $\operatorname{Re}w>0$,



Por sua vez, a transformação $\varphi_2(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ aplica bijectivamente o semiplano caracterizado $\operatorname{Re} z > 0$ no disco aberto $D(0,1)$,

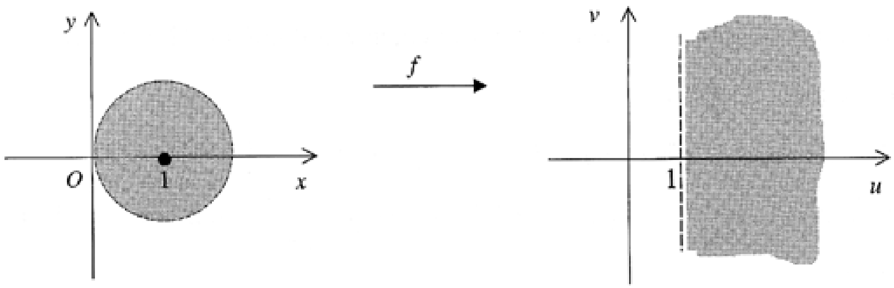


que por sua vez é transformado bijectivamente no disco aberto $D(1,1)$ pela transformação $\varphi_3(z) = z+1$.



Então, a transformação pedida é tal que $f^{-1} = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$.

Como $(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)(z) = (\varphi_3 \circ \varphi_2)(z-1) = \varphi_3\left(\dfrac{z-1-1}{z-1+1}\right) = \dfrac{z-2}{z} + 1 = \dfrac{2z-2}{z}$, tem-se $f^{-1}(z) = \dfrac{2z-2}{z}$, e, consequentemente, $f(z) = \dfrac{2}{z-2}$.



16. Prove que toda a transformação homográfica do tipo $w = f(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z}$ com $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $|\alpha| < 1$, transforma o disco $|z| < 1$ no disco $|w| < 1$.

Resolução:

Atendendo às propriedades do conjugado de um número complexo (ver Capítulo1), tem-se

$$|w|^2 = w\overline{w} = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z}\overline{\left(\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z}\right)} = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z}\,\frac{\overline{\alpha} - \overline{z}}{1 - \alpha\,\overline{z}} = \frac{|\alpha|^2 + |z|^2 - (\alpha\,\overline{z} - \overline{\alpha}\, z)}{1 + |\alpha|^2|z|^2 - (\alpha\,\overline{z} - \overline{\alpha}\, z)}.$$

Se $|z| = 1$ a igualdade anterior reduz-se a $|w|^2 = 1$ e consequentemente $|w| = 1$ e a circunferência $|z| = 1$ é transformada por *f* na circunferência $|w| = 1$. Como o ponto $z_0 = 0$ é interior à circunferência $|z| = 1$ e $|f(z_0)| = |\alpha| < 1$, o interior da circunferência $|z| = 1$ é transformado no interior da circunferência $|w| = 1$.

17. Determine uma aplicação conforme *f* de $D(0,1)$ em $D(0,1)$ tal que $f\left(\dfrac{i}{2}\right) = 0$.

Resolução:

Tendo em conta o exercício anterior, seja $w = f(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z}$, com $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| < 1$.

Tem-se $f\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{\alpha - \frac{i}{2}}{1 - \frac{i\overline{\alpha}}{2}} = \dfrac{2\alpha - i}{2 - i\overline{\alpha}}$, restando determinar α tal que $\dfrac{2\alpha - i}{2 - i\overline{\alpha}} = 0$, isto é, $\alpha = \dfrac{i}{2}$. A transformação $f(z) = \dfrac{\frac{i}{2} - z}{1 + \frac{i}{2} z} = \dfrac{i - 2z}{2 + iz}$ satisfaz o problema proposto.

18. a) Mostre que $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$ aplica conformemente o domínio $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ sobre o disco aberto $D(0,1)$.

b) Defina um difeomorfismo entre Ω e $\Omega^*=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$.

c) Use as alíneas anteriores para concluir que $g(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ é um difeomorfismo entre Ω^* e $D(0,1)$.

Resolução:

a) De $w=f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$ deduz-se que $z=i\dfrac{1+w}{1-w}$. Atendendo a que a recta $\operatorname{Im}z=0$ tem por equação $z=\bar{z}$, a sua imagem é o lugar geométrico dos w tais que $i\dfrac{1+w}{1-w}=\overline{\left(i\dfrac{1+w}{1-w}\right)}$, isto é, tais que $i\dfrac{1+w}{1-w}=-i\dfrac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}$, ou ainda tais que $\dfrac{1+w}{1-w}=-\dfrac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}$. Esta igualdade é equivalente a $(1+w)(\overline{w}-1)=(1+\overline{w})(1-w)$, isto é, $2w\overline{w}=2$ ou ainda $|w|=1$.

A transformação homográfica $w=f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$ transforma assim a recta $\operatorname{Im}z=0$ na circunferência $|w|=1$.

Atendendo a que, por exemplo, o ponto $z_0=i$ pertencente a Ω é transformado em $f(z_0)=0$ que é interior à circunferência $|w|=1$, a imagem por f de Ω é $D(0,1)$.

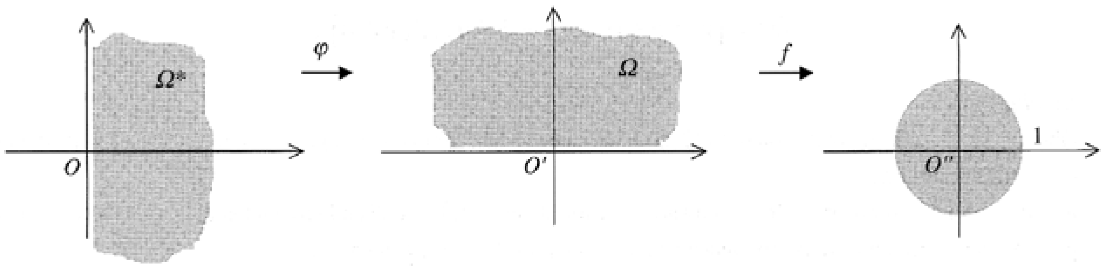
b) Pretende-se definir uma aplicação conforme que aplique o domínio Ω sobre Ω^*. A aplicação $\varphi(z)=ze^{\frac{i\pi}{2}}=zi$, que geometricamente se traduz por uma rotação no sentido directo e amplitude $\dfrac{\pi}{2}$ satisfaz a questão.

c) Note-se que

$$f(\varphi(z))=f(iz)=\frac{iz-i}{iz+i}=\frac{z-1}{z+1}=g(z)$$

e assim a transformação homográfica g aplica conformemente Ω^* sobre $D(0,1)$.

Geometricamente



19. Determine a imagem pela transformação de Joukowsky $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$ de $D(0,1)$.

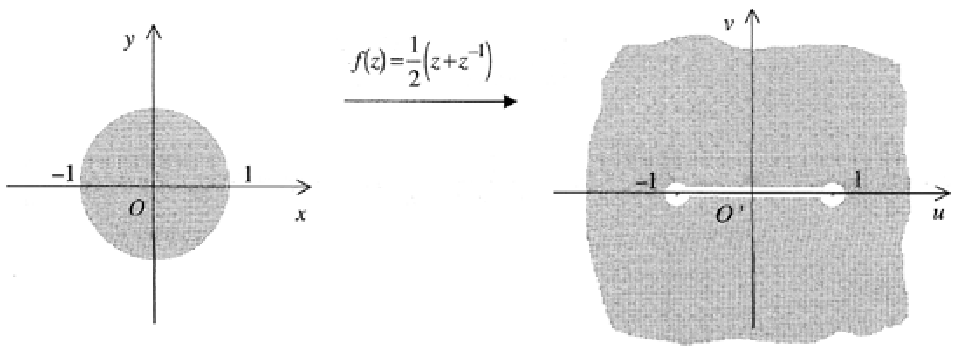
Resolução:

Conforme se viu na Secção B deste capítulo, a imagem pela transformação de Joukowsky $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)$ de uma circunferência de centro na origem e raio r é uma elipse centrada na origem e de semieixos $\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ (horizontal) e $\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$ (vertical). Assim, a imagem da circunferência de centro na origem e raio $r=1$, sendo uma elipse de semieixo vertical nulo, reduz-se ao segmento de recta entre os pontos $w_1=-1$ e $w_2=1$.

Por exemplo, tome-se $z_0=\frac{1}{2}$ que é um ponto interior à circunferência de centro na origem e raio $r=1$; tem-se $f(z_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{5}{4}>1$. Pode assim concluir-se que a imagem de $D(0,1)$ é o conjunto

$$\Omega^*=\mathbb{C}\setminus\left\{w=u+iv\in\mathbb{C}:-1\leq u\leq 1,\ v=0\right\}.$$

Geometricamente,



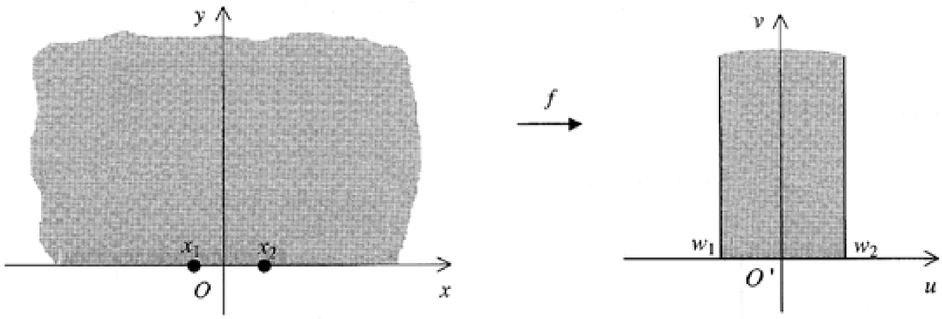
20. Determine uma função f que aplique o semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$ no conjunto

$$\Omega^* = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : -2 \leq u \leq 2, v \geq 0\}.$$

Resolução:

Observe-se que a fronteira do conjunto Ω^* pode ser interpretada como um triângulo (polígono com três lados) com um vértice no infinito.

Recorra-se então à transformação de Schwarz-Christoffel, $w = f(z)$, escolhendo os pontos $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = \infty$ para terem respectivamente como imagem os pontos $w_1 = -2$, $w_2 = 2$ e $w_3 = \infty$.



Como os ângulos internos em $w_1 = -2$ e $w_2 = 2$ são iguais a $\frac{\pi}{2}$, de acordo com a secção B.3 deste capítulo, tem-se então

$$\frac{dw}{dz} = K(z-(-1))^{\frac{1}{2}-1}(z-1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{K}{\sqrt{z^2-1}} = K^* \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Primitivando, resulta que

$$w = K^* \operatorname{arcsen} z + C.$$

Atendendo a que $f(-1) = -2$ e $f(1) = 2$, tem-se

$$\begin{cases} K^* \operatorname{arcsen}(-1) + C = -2 \\ K^* \operatorname{arcsen} 1 + C = 2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $C = 0$ e $K^* = \frac{2}{\operatorname{arcsen} 1} = \frac{4}{\pi}$. A transformação é pois $w = f(z) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arcsen} z$.

Capítulo
9

ALGUNS DESENVOLVIMENTOS COMPLEMENTARES SOBRE FUNÇÕES ANALÍTICAS

A. Princípio do argumento

Este parágrafo é dedicado ao estudo de alguns resultados que complementam o estudo dos zeros das funções analíticas apresentado no Capítulo 5.

Lema A.1.

Seja f uma função analítica sobre e no interior de uma curva de Jordan γ. Suponha-se que f não se anula em γ e que z_0 é o único zero, de f, no interior de γ e que tem multiplicidade k. Então

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi ik.$$

Demonstração:

Atendendo às hipóteses do teorema, tem-se que a função $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ é analítica em $(\gamma \cup \operatorname{int}\gamma) \setminus \{z_0\}$. Se z_0 é um zero de ordem k da função f, tem-se (ver teorema B.3.do Capítulo 5) que:

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z),$$

com $\varphi(z)$ analítica e tal que $\varphi(z) \neq 0$, para qualquer $z \in \gamma \cup \operatorname{int}\gamma$ e, assim,

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1}\varphi(z) + (z - z_0)^k \varphi'(z).$$

Como

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - z_0)^{k-1}\varphi(z) + (z - z_0)^k \varphi'(z)}{(z - z_0)^k \varphi(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \qquad (*)$$

tem-se, por aplicação da fórmula integral de Cauchy, que $\int_\gamma \frac{k}{z - z_0} dz = 2\pi i k$ e, por aplicação do teorema de Cauchy, que $\int_\gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz = 0$ (pois $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ é uma função analítica em $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$).

Então,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{k}{z - z_0} dz + \int_\gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz = 2\pi i k + 0 = 2\pi i k.$$

Observação:

1. Note-se que da igualdade (*), pode concluir-se que z_0 é um pólo simples de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ e

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \to z_0}\left[k + (z - z_0)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right] = k.$$

2. Se a curva γ não fosse simples, o resultado, análogo ao do teorema anterior, seria

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i k I(\gamma, z_0).$$

Recorde-se (ver observação 3 ao teorema A.3. do Capítulo 4) que o integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$ é o índice I da curva γ em relação ao ponto z_0.

Segue-se uma generalização do lema anterior ao caso em que a função tem um número finito de zeros no interior da curva.

Teorema A.1.

Sejam γ uma curva de Jordan e f uma função analítica em $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$. Suponha-se que f não se anula sobre γ e tem um número finito de zeros $z_1, z_2, ..., z_n$ no interior de γ, com multiplicidades, respectivamente, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$. Então

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i N,$$

onde N é o número de zeros de f no interior de γ (cada zero z_i é contado de acordo com a sua multiplicidade, isto é, $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n = N$).

Demonstração:

Aplicando o teorema B.3. do Capítulo 5, tem-se

$$f(z) = (z - z_1)^{\beta_1} (z - z_2)^{\beta_2} ... (z - z_n)^{\beta_n} \varphi(z),$$

onde φ é uma função analítica que não se anula em $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$. Considerando um ramo do logaritmo analítico numa região que contenha $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$, tem-se

$$\log f(z) = \beta_1 \log(z - z_1) + \beta_2 \log(z - z_2) + ... + \beta_n \log(z - z_n) + \log \varphi(z),$$

e derivando ambos os membros obtém-se, para $z \neq z_i$, $i = 1,...n$, que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\log f(z))' = \frac{\beta_1}{z - z_1} + \frac{\beta_2}{z - z_2} + ... + \frac{\beta_n}{z - z_n} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Assim,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{\beta_1}{z - z_1} dz + \int_\gamma \frac{\beta_2}{z - z_2} dz + ... + \int_\gamma \frac{\beta_n}{z - z_n} dz + \int_\gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz.$$

Atendendo a que $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ é analítica em γ e no interior de γ, tem-se, pelo teorema de Cauchy, que

$$\int_\gamma \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = 0$$

e, pela fórmula integral de Cauchy, que

$$\int_\gamma \frac{\beta_i}{z - z_i}dz = 2\pi i\beta_i, \qquad \text{para } i = 1,\ldots n.$$

Então,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = 2\pi iN.$$

Observação:

1. A demonstração deste teorema também pode ser feita por aplicação do teorema dos resíduos à função $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

Com efeito, a função $\frac{f'(z)}{f(z)}$ é analítica em $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma \setminus \{z_1,\ldots,z_n\}$. Se z_i é um zero de multiplicidade β_i da função f, tem-se (ver observação 1 ao lema A.1.) que z_i é um pólo simples de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ e $\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, z_i\right) = \beta_i$.

Aplicando o teorema dos resíduos à função $\frac{f'(z)}{f(z)}$, pode concluir-se que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\sum \operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, z_i\right) = 2\pi i(\beta_1 + \ldots + \beta_n) = 2\pi iN$$

2. Se a curva não é simples, o resultado análogo ao do teorema A.1. é

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n} I(\gamma, z_i)\beta_i.$$

Exemplo A.1.

O integral, $\int_{|z|=2} \frac{3z}{z^2+1} dz$ pode ser calculado por aplicação do teorema anterior. Na verdade, sendo $f(z) = z^2+1$, tem-se que

$$\int_{|z|=2} \frac{3z}{z^2+1} dz = \frac{3}{2} \int_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1} dz = \frac{3}{2} \int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Como f tem, no interior da circunferência $|z| = 2$, os seus dois zeros simples, i e $-i$, conclui-se que

$$\int_{|z|=2} \frac{3z}{z^2+1} dz = \frac{3}{2} 2(\pi i) 2 = 6\pi i.$$

Lema A.2.

Seja f uma função analítica sobre e no interior de uma curva de Jordan γ, excepto num pólo de ordem m. Suponha-se que f não se anula em $\gamma \cup \operatorname{int} \gamma$. Então,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i m.$$

Demonstração:

Seja w_0 um pólo de ordem m de f; tem-se, pelo teorema C.8. do Capítulo 5, que

$$\lim_{z \to w_0} (z - w_0)^m f(z) = c_{-m} \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-m} \frac{1}{(z-w_0)^m} + \ldots + c_{-1} \frac{1}{z - w_0} + c_0 + c_1(z - w_0) + \ldots = \\ &= \frac{1}{(z-w_0)^m} \left(c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-w_0)^{m-1} + c_0(z-w_0)^m + \ldots \right) = \\ &= \frac{1}{(z-w_0)^m} \varphi(z), \end{aligned}$$

onde φ é uma função analítica que não se anula em $D(w_0, r) \setminus \{w_0\}$, com r suficientemente pequeno para que $D(w_0, r) \subset \operatorname{int} \gamma$ (observe-se que $c_{-m} \neq 0$).

Então,

$$f'(z)=\frac{-m}{(z-w_0)^{m+1}}\varphi(z)+\frac{1}{(z-w_0)^m}\varphi'(z),$$

o que implica que

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-m}{z-w_0}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \qquad (*)$$

de onde se conclui que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_{|z-w_0|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_{|z-w_0|=r}\frac{-m}{z-w_0}dz+\int_{|z-w_0|=r}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz=-2\pi i m+0=-2\pi i m$$

(aplicando a fórmula integral de Cauchy no 1.º integral e o teorema de Cauchy no 2.º integral uma vez que $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ é analítica em $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$).

Observação:

1. Da igualdade (*) da demonstração do teorema anterior, pode concluir-se que o ponto w_0 é um pólo simples de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ e

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},w_0\right)=\lim_{z\to w_0}(z-w_0)\frac{f'(z)}{f(z)}=\lim_{z\to w_0}\left(-m+(z-w_0)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)=-m\,.$$

2. Se a curva γ não é simples, o resultado análogo ao teorema anterior é

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=-2\pi i I(\gamma,w_0)m$$

onde w_0 é o pólo, de ordem m, da função no interior de γ.

Teorema A.2.

Seja f uma função meromorfa numa curva de Jordan γ, e no seu interior. Suponha-se que f não se anula em $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$ e que tem um número finito de pólos $w_1,...,w_p$ interiores a γ, com multiplicidades, respectivamente, $\alpha_1,...,\alpha_p$, e seja $P=\alpha_1+...+\alpha_p$. (P é o número de pólos que são contados de acordo com a sua multiplicidade.)

Então,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -2\pi i P.$$

Demonstração:

Como se concluiu na observação 1 ao lema A.2., sendo w_i um pólo, de ordem α_i de f, então w_i é um pólo simples de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ e

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, w_i\right) = -\alpha_i.$$

Aplicando o teorema dos resíduos à função $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ que tem no interior de γ os pólos simples $w_1,...,w_p$, tem-se

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \sum \operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, w_0\right) = 2\pi i(-\alpha_1 - ... - \alpha_p) = -2\pi i P.$$

Teorema A.3. (Princípio do argumento)

Sejam γ uma curva de Jordan e f uma função analítica em $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$ com excepção nos pólos $w_1,...,w_p$, interiores a γ, com ordens, respectivamente $\alpha_1,...,\alpha_p$. Suponha-se que f tem os zeros $z_1,...,z_m$, interiores a γ, com multiplicidades, respectivamente, $\beta_1,...,\beta_m$ e sobre γ a função f não se anula nem tem pólos. Então,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(N-P)$$

onde N é o número de zeros de f no interior de γ e P o número de pólos de f no interior de γ (os zeros e os pólos são contados de acordo com as suas multiplicidades e ordens, isto é, $N=\beta_1+\ldots+\beta_m$ e $P=\alpha_1+\ldots+\alpha_p$).

Demonstração:

As singularidades de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, no interior de γ, são os pólos simples $w_1,\ldots,w_p$ e os zeros $z_1,\ldots,z_m$ de ordens, respectivamente $\beta_1,\ldots,\beta_m$. Então, pela observação 1 ao teorema A.1. e pela observação 2 ao lema A.2., tem-se que

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f},z_i\right)=\beta_i \quad \text{e} \quad \operatorname{res}\left(\frac{f'}{f},w_i\right)=-\alpha_i\,.$$

Aplicando o teorema dos resíduos à função $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, resulta que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)=2\pi i(N-P)\,.$$

Observação:
Se a curva γ não é simples, a igualdade análoga ao Princípio do Argumento é

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i I(\gamma,z_i)-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i I(\gamma,w_i)\right).$$

Exemplo A.2.

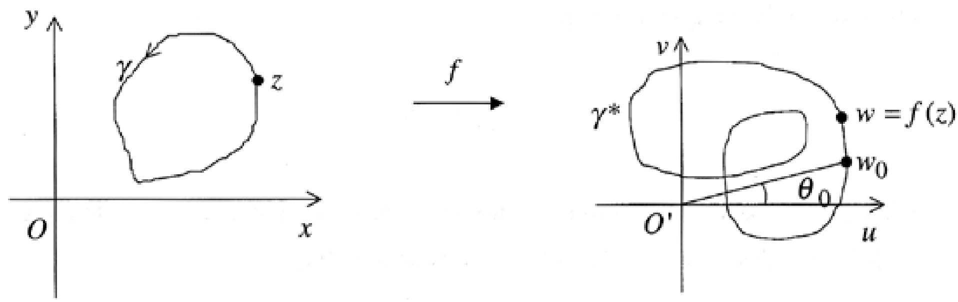
Para calcular $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1-\frac{1}{z^2}}{z+\frac{1}{z}}dz$ utilize-se o teorema anterior. Como $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ tem um pólo simples em $w=0$ e anula-se nos dois pontos (zeros simples) $z=i$ e $z=-i$, o valor do integral é

$$2\pi i(N-P)=2\pi i(2-1)=2\pi i\,.$$

Nas condições do Princípio do Argumento, faça-se uma breve análise deste teorema, sob o ponto de vista geométrico.

Se f não se anula na curva γ, a imagem de γ por f, isto é, $\gamma^* = f(\gamma) = f \circ \gamma$, não passa pela origem do plano das imagens.

Contudo, γ^* pode ter vários pontos de multiplicidade superior a um, isto é, pode intersectar--se várias vezes.



Efectuando no integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ a mudança de variável $w = f(z)$, $dw = f'(z)dz$, tem-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*} \frac{1}{w}dw\ .$$

Uma vez que a origem não pertence a γ^*, é possível considerar em γ^* dois pontos w_0 e w_1 tais que o arco de γ^* que une w_0 a w_1 esteja contido no domínio de analiticidade de algum ramo da função logaritmo. Assim,

$$\int_{w_0}^{w_1} \frac{1}{w}dw = [\log w]_{w_0}^{w_1} = \log w_1 - \log w_0\ ,$$

isto é, o integral é igual à variação da função log w na curva γ^*.

Quando $w_1 = w_0$, tem-se $|w_1| = |w_0|$ e arg w_1 difere de arg w_2 por um múltiplo de 2π, então

$$\log w_1 - \log w_0 = \log|w_1| + i \arg w_1 - (\log|w_0| + i \arg w_0) = i(\arg w_1 - \arg w_0).$$

Chama-se **variação do argumento** de f relativa à curva γ a

$$\Delta_\gamma \arg f = \arg w_1 - \arg w_0 .$$

Conclui-se desta forma que, o integral

$$\int_{\gamma^*} \frac{1}{w} dw$$

é um imaginário puro cujo módulo é um múltiplo de 2π. Recordando a definição de índice de uma curva em relação a um ponto, pode concluir-se ainda que o integral

$$\int_{\gamma^*} \frac{1}{w} dw = 2\pi i I(\gamma^*,0)$$

onde $I(\gamma^*,0)$ é o número de voltas que a curva dá em torno da origem (ver observação 3 ao teorema A.3. do Capítulo 4)

A relação finalmente estabelecida é

$$\int_{\gamma^*} \frac{1}{w} dw = 2\pi i I(\gamma^*,0) = i\Delta_\gamma \arg f .$$

Corolário A.1.

Nas condições do Princípio do Argumento, tem-se $\Delta_\gamma \arg f = 2\pi(N-P)$, isto é, $N-P$ é o número de voltas que a curva γ dá em torno da origem.

Demonstração:

Sendo, por um lado,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i I(\gamma^*,0) = i\Delta_\gamma \arg f .$$

e, por outro lado,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(N-P)$$

tem-se

$$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi(N-P).$$

Observação:
Se γ não é uma curva simples, conclui-se que

$$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i I(\gamma, z_i) + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i I(\gamma, w_i)\right).$$

Corolário A.2.
Seja f nas condições do teorema A.1. Então,

$$N = \frac{\Delta_\gamma \arg f}{2\pi}.$$

Demonstração:
Por um lado, tem-se

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = i\Delta_\gamma \arg f$$

e, por outro lado, o teorema A.1. permite concluir que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i N.$$

Então, $2\pi N = \Delta_\gamma \arg f$, isto é,

$$N = \frac{\Delta_\gamma \arg f}{2\pi}.$$

Teorema A.4. (Teorema de Rouché)

Sejam f e g funções analíticas num domínio Ω simplesmente conexo e γ uma curva de Jordan contida em Ω onde $|g(z)| < |f(z)|$. Então as funções f e $f+g$ têm o mesmo número de zeros no interior de γ.

Demonstração:

Sendo $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$, para $z \in \gamma$, tem-se $|f(z)| > 0$, isto é, f não se anula sobre γ.

Do mesmo modo, para $z \in \gamma$,

$$|f(z) + g(z)| \geq \big||f(z)| - |g(z)|\big| = |f(z)| - |g(z)| > 0$$

e, assim, $f(z) + g(z)$ não se anula em γ. Consequentemente, a função

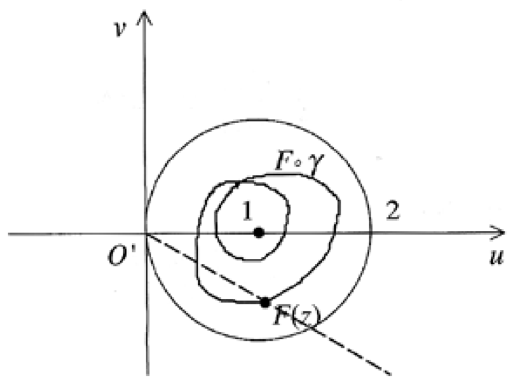
$$F(z) = \frac{f(z) + g(z)}{f(z)} = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

também não se anula nem tem pólos em γ, e verifica o Princípio do Argumento, tendo-se

$$\int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 2\pi i(N - P) = i\Delta_\gamma \arg F,$$

onde N e P são, respectivamente, o número de zeros e de pólos de $F(z)$, no interior de γ.

Note-se que $|F(z) - 1| = \left|1 + \dfrac{g(z)}{f(z)} - 1\right| = \left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$. Então, se $z \in \gamma$, tem-se que $F(z)$ está no interior da circunferência de centro 1 e raio 1 e, assim,



$$\left|\arg F(z)\right| < \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \Delta_\gamma \arg F = 0\,.$$

Conclui-se então que $N - P = 0$, isto é, $N = P$.

Como os pólos de F são os zeros de f e os zeros de F são os zeros de $f + g$, tem-se que o número N de zeros de f é igual ao número P de zeros de $f + g$.

Exemplo A.3.

Considere-se o polinómio $P(z) = z^4 - 4z^2 + 2$ e analise-se o número de zeros no interior da coroa circular $C(0,1,3)$. Sejam γ_1 a circunferência $|z| = 1$ e γ_2 a circunferência $|z| = 2$. Considere-se $f(z) = z^4 - 4z^2$ e $g(z) = 2$; tem-se então que $P(z) = f(z) + g(z)$ e os zeros de f são $z = 0$ (multiplicidade 2), $z = 2$ e $z = -2$.

Note-se que, sobre γ_1,

$$|f(z)| = \left|z^4 - 4z^2\right| \geq \left\|z|^4 - 4\left|z^2\right|\right| = |1 - 4| = 3 > 2 = g(z).$$

Assim, pelo teorema de Rouché, o número de zeros de $P(z)$ no interior de γ_1, $N = 1$, é igual ao número de zeros de f no interior de γ_1, $P = 1$ (somente $z = 1$).

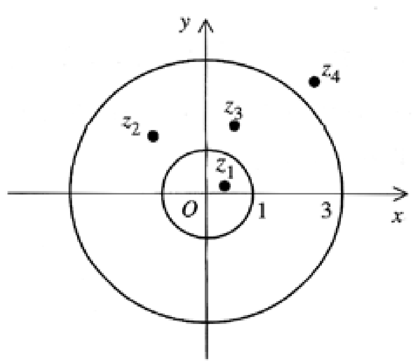
Sobre a circunferência $|z| = 3$, tem-se

$$|f(z)| \geq \left\|z|^4 - 4|z|^2\right| = \left|3^4 - 4.3^2\right| = 45 > |g(z)| = 2\,.$$

Então, $P(z)$ tem o mesmo número de zeros que f no interior de $|z| = 3$, isto é, três zeros. Como já se viu que o polinómio $P(z)$ tem um único zero na circunferência $|z| = 1$, então o referido polinómio tem dois zeros na coroa circular $C(0,1,3)$.

Atendendo a estes resultados, os quatro zeros, z_1, z_2, z_3 e z_4, do polinómio $P(z)$ localizam-se do seguinte modo:

$$|z_1| < 1, \quad 1 < |z_2| < 3, \quad 1 < |z_3| < 3, \quad |z_4| > 3.$$



Exemplo A.4.

Dado o polinómio $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, com $n \geq 1$, $a_k \neq 0$ para $k = 0, \ldots, n$, mostre-se que este polinómio tem exactamente n raízes:

Considere-se $p(z) = f(z) + g(z)$ onde $f(z) = a_n z^n$ e $g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$. Seja γ a circunferência de centro na origem e raio $r(>0)$. Tem-se que

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| = \frac{\left|a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}\right|}{\left|a_n z^n\right|} \leq \frac{|a_0| + |a_1||z| + \ldots + |a_{n-1}||z|^{n-1}}{|a_n||z|^n} = \frac{|a_0| + |a_1|r + \ldots + |a_{n-1}|r^{n-1}}{|a_n|r^n},$$

de onde se conclui que

$$\lim_{r \to +\infty} \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| \leq \lim_{r \to +\infty} \left(\frac{|a_0| + |a_1|r + \ldots + |a_{n-1}|r^{n-1}}{|a_n|r^n}\right) = 0,$$

isto é, para r suficientemente grande, obtém-se $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ e, portanto, $|g(z)| < |f(z)|$ sobre γ. Então, o teorema de Rouché garante que $p(z) = f(z) + g(z)$ e $f(z) = a_n z^n$ têm o mesmo número de zeros no interior de γ, que tem r suficientemente grande, e assim têm o mesmo número de zeros em $\mathbb{C}$. Ora $f(z)$ tem n raízes, logo $p(z)$ também tem n raízes.

B. Prolongamento analítico

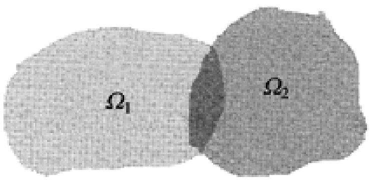
Neste parágrafo aborda-se a possibilidade de dada uma função analítica num domínio ela poder ser prolongada univocamente como função analítica a um domínio que contenha o domínio dado inicialmente. O processo de extensão chama-se **prolongamento analítico**.

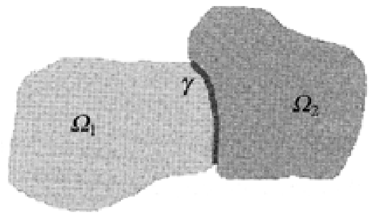
Definição B.1.

Sejam Ω_1 e Ω_2 domínios de $\mathbb{C}$ tais que $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} \neq \varnothing$ e f_1 uma função analítica em Ω_1. Se f_2 é uma função analítica em Ω_2 tal que $f_2(z) = f_1(z)$ para todo o ponto z em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, diz-se que f_2 é um **prolongamento analítico** de f_1 a Ω_2.

Observação:

1. Se f_2 é um prolongamento analítico de f_1, tem sentido considerar uma função f analítica em $\Omega_1 \cup \Omega_2$ tal que $f = f_1$ em Ω_1 e $f = f_2$ em Ω_2.
2. Pode dar-se o caso de $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ e de $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, sendo a intersecção de $\overline{\Omega_1}$ e $\overline{\Omega_2}$ reduzida a uma linha γ (resultante da intersecção das fronteiras de Ω_1 e Ω_2) conforme se ilustra nas figuras seguintes:

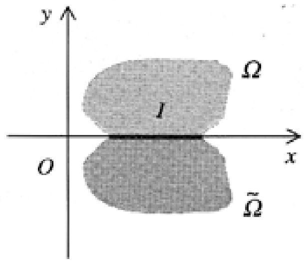




No segundo caso, as funções f_1 e f_2 devem ser analíticas sobre a curva γ.

3. Sendo Ω um domínio que não intersecta o conjunto $\mathbb{R}$ mas cuja fronteira contém um segmento I de $\mathbb{R}$, seja $\tilde{\Omega}$ o conjunto que se obtém de Ω por reflexão relativa a $\mathbb{R}$, isto é $\tilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$ sendo $\varphi(z) = \bar{z}$.

Geometricamente,

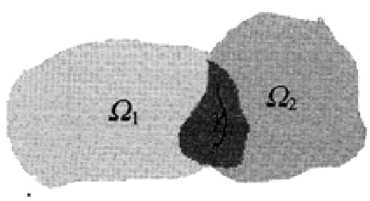


Seja f uma função analítica em Ω, contínua, e tomando valores reais em I. Então a função

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega \cup I \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{se } z \in \tilde{\Omega} \end{cases}$$ é analítica em $\Omega \cup \tilde{\Omega} \cup I$, constituindo um prolongamento analítico de f.

Este resultado é usualmente designado por Princípio da Reflexão de Schwarz. É ainda possível definir reflexões sobre uma linha qualquer.

Suponha-se que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ e seja γ uma linha contida em $\Omega_1 \cap \Omega_2$.



Se f_1 é uma função analítica em Ω_1 e f_2 é uma função analítica em Ω_2 tal que $f_1 = f_2$ sobre γ, será que f_2 é prolongamento analítico de f_1 a Ω_2?

O prolongamento analítico, se existir, é único?

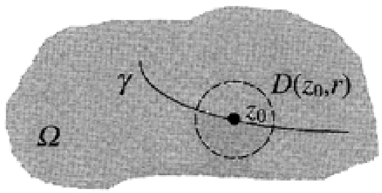
O teorema B.1., cuja demonstração se baseia nos dois lemas seguintes, responde a estas questões.

Lema B.1.

Se f é uma função analítica num domínio Ω que se anula sobre uma linha γ com mais de um ponto, contida em Ω, então f é nula em Ω.

Demonstração:

Tome-se um ponto qualquer z_0 sobre γ e seja $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$.



Como f é uma função analítica em Ω, para todo o ponto z em $D(z_0, r)$ pode escrever-se a série de Taylor de f,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

Uma vez que f é nula sobre γ e z_0 está sobre γ, os coeficientes desta série são nulos e assim $f(z) = 0$ para todo o ponto z em $D(z_0,r)$.

Tomando outra linha γ_1 em $D(z_0,r)$, um ponto z_1 sobre γ_1 e $r_1 > 0$ tal que $D(z_1, r_1) \subset \Omega$, a função f é nula em γ_1 e, repetindo o processo, prova-se que f é nula em $D(z_0,r)$. Continuando o processo, prova-se que f é nula em Ω.

Observação:

O resultado do lema B.1. é uma consequência do teorema dos zeros das funções analíticas.

Lema B.2.

Se f_1 e f_2 são funções analíticas num domínio Ω que coincidem sobre uma linha γ contida em Ω, então f_1 e f_2 coincidem em Ω.

Demonstração:

Basta observar que, se f_1 e f_2 coincidem sobre uma linha γ, então $f = f_1 - f_2$ é nula sobre γ. Pelo lema B.1., a função f é nula em Ω e consequentemente f_1 e f_2 coincidem em Ω.

Teorema B.1.

Sejam Ω_1 e Ω_2 domínios de $\mathbb{C}$ tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ e seja γ uma linha contida em $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Se f_1 é uma função analítica em Ω_1 e f_2 é uma função analítica em Ω_2 tal que $f_1 = f_2$ sobre γ, existe uma só função f analítica em $\Omega_1 \cup \Omega_2$ tal que $f = f_1$ em Ω_1 e $f = f_2$ em Ω_2.

Demonstração:

Pelo lema B.1., se $f_1 = f_2$ sobre γ, tem-se que $f_1 = f_2$ sobre $\Omega_1 \cap \Omega_2$ e consequentemente f_2 é um prolongamento analítico de f_1. Suponha-se que φ é uma função analítica em Ω_2 tal que $\varphi(z) = f_1(z)$ para todo o ponto z em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, isto é, φ é um outro prolongamento analítico de f_1 a Ω_2. Como a linha γ está contida em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, tem-se que $\varphi = f_2$ sobre γ; como a linha está contida em Ω_2 e $\varphi = f_2$ sobre γ, novamente pelo lema B.2., $\varphi = f_2$ em Ω_2. Fica assim provado que o prolongamento analítico f_2 de f_1 a Ω_2, se existir, é único, e consequentemente existe uma só função f analítica em $\Omega_1 \cup \Omega_2$ tal que $f = f_1$ em Ω_1 e $f = f_2$ em Ω_2.

Exemplo B.1.

O teorema B.1. permite concluir que as funções elementares definidas no Capítulo 2 são a única extensão analítica das correspondentes funções reais. A título de exemplo, verifique-se que a função $f(z) = \operatorname{sen} z$ é a única extensão a $\mathbb{C}$ da função seno real. Com efeito, a função f é analítica em $\mathbb{C}$ coincide com a função seno real, que é analítica em $\mathbb{R}$ sobre qualquer linha contida em $\mathbb{R}$. Pelo teorema B.1. a função $f(z) = \operatorname{sen} z$ é então a única extensão analítica da função seno real.

Exemplo B.2.

O lema B.1. é particularmente útil para demonstrar a legitimidade de estender a $\mathbb{C}$ (que é um domínio) resultados válidos em $\mathbb{R}$. Verifique-se, por exemplo, que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$ para todo o z em $\mathbb{C}$. Tome-se a função analítica em $\mathbb{C}$ definida por $f(z) = \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z - 1$ e seja γ uma linha contida em $\mathbb{R}$; tem-se que $f = 0$ sobre a linha γ que está contida em $\mathbb{C}$. Então, pelo lema B.1., $f = 0$ em $\mathbb{C}$.

Exemplo B.3.

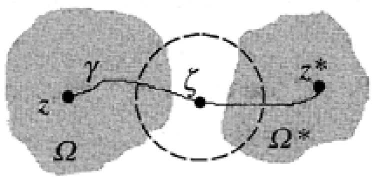
Seja f uma função representada em $D(1,2)$ pela série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{2^{2n+2}}$ e calcule-se $f(4)$. Atendendo a que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(z-1)^2}{2^2}\right)^n = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{(z-1)^2}{4}} = \frac{1}{4-(z-1)^2}$$

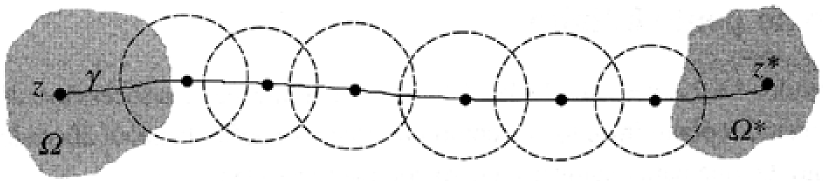
e $f(z) = \frac{1}{4-(z-1)^2}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{-1,3\}$ e é representada em $D(1,2)$ pela série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{2^{2n+2}}$, tem-se que $f(4) = \frac{1}{4-(4-1)^2} = -\frac{1}{5}$.

Suponham-se dados dois domínios Ω e Ω^* tais que $\overline{\Omega}\cap\overline{\Omega^*} = \varnothing$ e seja f uma função analítica em Ω. Como se poderá estender f como função analítica a Ω^*?

Tomem-se $z \in \Omega$ e $z^* \in \Omega$ e uma linha γ unindo z e z^*. Suponha-se que existe $D(\zeta, r)$, com ζ sobre γ, tal que $\Omega \cap D(\zeta,r) \neq \varnothing$ e $\Omega^* \cap D(\zeta,r) \neq \varnothing$, conforme se ilustra na figura.



Suponha-se que existe uma função φ analítica em $D(\zeta,r)$ que coincide com f em $\Omega \cap D(\zeta,r)$. Tem então sentido definir uma função F em $\Omega \cup D(\zeta,r)$ pondo $F = f$ em Ω e $F = \varphi$ em $D(\zeta,r)$. Se existir uma função f^* analítica em Ω^* que coincida com F em $\Omega^* \cap D(\zeta,r)$, essa função constitui um prolongamento analítico de f a Ω^*. Este prolongamento é designado por **prolongamento analítico de f ao longo da linha γ.** Poderá ser necessário, para efectuar um prolongamento analítico de f a Ω^* recorrer a vários pontos ζ_k sobre γ e a discos $D(\zeta_k, r_k)$, conforme se ilustra na figura:

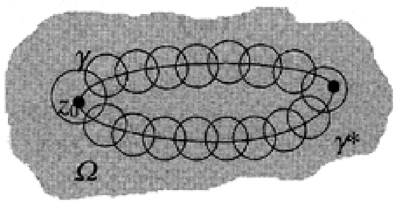


Definição 2.B.

Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$, e f uma função analítica em $D(z_0, r)$. Diz-se que a função **admite prolongamento analítico não restrito** se se puder efectuar um prolongamento analítico de f ao longo de qualquer linha contida em Ω com origem num ponto de $D(z_0, r)$.

■

Põe-se a questão de saber em que condições é que o prolongamento analítico não restrito é independente da linha γ utilizada, isto é, caso se utilize outra linha $\gamma*$(com a mesma origem e extremidade que γ) e discos ao longo de $\gamma*$, será que a função $g*$ resultante do prolongamento de f ao longo da linha β coincide com a função $f*$.



O teorema seguinte, cuja demonstração o leitor poderá encontrar em Rudin.W., *Real and Complex Analysis*, responde a esta questão.

Teorema B.2.

Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$ e f uma função analítica em $D(z_0, r)$ tal que f tem prolongamento analítico não restrito em Ω. Se $f*$ e $g*$ são os prolongamentos analíticos de f ao longo de duas curvas homotópicas γ e $\gamma*$ e com origem z_0, então $f* = g*$.

Se Ω é um domínio simplesmente conexo, existe uma função φ analítica em Ω, tal que $f = \varphi$ em $D(z_0, r)$.

C. Resíduo no ponto infinito

Nos Capítulos 1 e 2, e decorrendo das definições de limite de uma sucessão e de uma função, surgiu naturalmente o ponto infinito ∞, como um ponto «indefinidamente afastado da origem», isto é, um ponto tal que para qualquer número complexo z se tem $|z| < \infty$.

À semelhança do que se faz em $\mathbb{R}$, pode definir-se o conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e nele as operações algébricas:

i) $z + \infty = \infty$, $z - \infty = \infty$ para $z \in \mathbb{C}$,

ii) $z \cdot \infty = \infty$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

iii) $\dfrac{z}{\infty} = 0$ para $z \neq \infty$,

iv) $\dfrac{z}{0} = \infty$ para $z \neq 0$,

v) $\dfrac{\infty}{z} = \infty$ para $z \neq \infty$.

O comportamento de uma função $f(z)$ «no ponto ∞», isto é, quando $|z| \to +\infty$, é estudado por analogia com o comportamento de $F(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ na vizinhança de $w = 0$.

Exemplo C.1.

Sendo $f(z) = \dfrac{2z}{1+2z}$ tem-se

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{2}{w}}{1 + \frac{2}{w}} = \frac{2}{w+2}.$$

Como $F(0) = 1$, ter-se-á que $f(\infty) = 1$.

Definição C.1.

Seja $f(z)$ uma função definida para $|z| \geq r$, com $r \geq 0$. Diz-se que f **é contínua no ponto ∞** quando $F(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ for contínua em $w = 0$, isto é,

$$\forall \delta > 0, \exists L > 0: \ |z| > L > r \Rightarrow |f(z) - f(\infty)| < \delta$$

Definição C.2.

Seja f uma função definida para $|z| \geq r$, com $r \geq 0$. Diz-se que **f é uma função analítica numa vizinhança de ∞**, se $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ for analítica numa vizinhança de $w = 0$.

Ter-se-á então que $F(w) = f(\frac{1}{w}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ para $|w| < \rho$, com $\rho > 0$.

Assim, para $|z| > r = \frac{1}{\rho}$, tem-se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n}.$$

■

Observação:

Quando $a_0 = 0$ tem-se que $F(0) = f(\infty) = 0$, e ∞ diz-se então um zero de f.

a) Se $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$, diz-se que ∞ é um zero simples ou de multiplicidade 1 para f.

b) Se $a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$ e $a_k \neq 0$, diz-se que ∞ é um zero de f com multiplicidade k tendo-se, para $|z| > r$,

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-k-1}}{z^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{z^k}\left(a_{-k} + \frac{a_{-k-1}}{z} + \ldots\right) = \frac{1}{z^k}\varphi(z),$$

onde φ é uma função analítica em ∞ e com $\varphi(\infty) = a_{-k} \neq 0$.

Exemplo C.2.

Seja f uma função tal que

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ se } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ e } f(\infty) = 0.$$

Como $F(w) = f(\frac{1}{w}) = w$ é analítica em $w = 0$, tem-se que $f(z) = \frac{1}{z}$ é analítica em ∞.

Definição C.3.

O ponto ∞ diz-se uma singularidade isolada da função f, se $w = 0$ for uma singularidade isolada de $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$, isto é, se existir $L > 0$ tal que f seja analítica no conjunto $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| > L > r\}$. Assim, atendendo ao desenvolvimento de Laurent de $F(w)$ numa vizinhança de $w = 0$, tem-se

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^n ,$$

com $0 < |w| < \frac{1}{r} = \rho$, ou seja, para $|z| > r > 0$, obtém-se

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n} . \qquad (*)$$

■

Exemplo C.3.

Considere-se a função $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ e faça-se $z = \dfrac{1}{w}$; tem-se

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{w}}$$

Atenda-se a que todos os pontos $w_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$ são singularidades de $F(w)$. Como

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

conclui-se que zero não é uma singularidade isolada de $F(w)$ logo ∞ também não é uma singularidade isolada de f.

Observe-se que, utilizando a mudança de variável $z = \dfrac{1}{w}$ e sendo ∞ uma singularidade isolada de f, ela pode ser classificada como singularidade removível, pólo ou singularidade essencial, conforme $w = 0$ for singularidade removível, pólo ou singularidade essencial para $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Atendendo ao teorema C.8. do Capítulo 5, têm-se os seguintes resultados:

1. Se os coeficientes das potências positivas de z na série (*) forem nulos, diz-se que f tem uma singularidade removível no ponto ∞; pode então definir-se $f(\infty) = a_0$ e estudar f no ponto ∞, como função analítica:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \ldots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \ldots$$

Exemplo C.4.

Considere-se $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+1}$. Então,

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w^2}}{\frac{1}{w^2}+1} = \frac{1}{1+w^2}$$

e

$$\lim_{w \to 0} F(w) = \lim_{w \to 0} \frac{1}{1+w^2} = 1.$$

Assim, $w = 0$ é uma singularidade removível de $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$, pelo que ∞ também é uma singularidade removível para $f(z)$. Atendendo a que

$$F(w) = \frac{1}{1+w^2} = \frac{1}{1-(-w^2)} = 1 - w^2 + w^4 - \ldots,$$

para $|w| < 1$, tem-se

$$f(z) = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \ldots,$$

para $|z| > 1$. Como as potências positivas têm todas coeficientes nulos, ∞ é na verdade uma singularidade removível.

2. Se na série (*) apenas um número finito de coeficientes de potências positivas forem não nulas, isto é, se existe $k > 0$ tal que $a_n = 0$, se $n > k$, então o ponto ∞ diz-se um pólo de ordem k de f:

$$f(z) = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots = z^k \left(a_k + \ldots + \frac{a_{-1}}{z^{k-1}} + \frac{a_0}{z^k} + \ldots \right) = z^k \psi(z),$$

onde $\psi(z)$ é analítica em ∞ e $\psi(\infty) = a_k \neq 0$.

Exemplo C.5.

Sendo $f(z) = \dfrac{z^4}{z^3 - z}$ tem-se

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w^4}}{\frac{1}{w^3} - \frac{1}{w}} = \frac{\frac{1}{w}}{1 - w^2} = \frac{1}{w\left(1 - w^2\right)}.$$

Como

$$\lim_{w \to 0} f\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w \to 0} \frac{1}{w\left(1 - w^2\right)} = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{w \to 0} wf\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w \to 0} \frac{1}{\left(1 - w^2\right)} = 1 \neq 0,$$

tem-se que $w = 0$ é um pólo de 1.ª ordem de $f\left(\frac{1}{w}\right)$. Então, ∞ é um pólo de 1.ª ordem para $f(z)$.
Desenvolva-se $f(z)$ em série de potências numa vizinhança de ∞. Como

$$F(w) = \frac{1}{w(1 - w^2)} = \frac{1}{w} + w + w^3 + \ldots \qquad \text{para } |w| < 1,$$

tem-se

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \ldots \qquad \text{com } |z| > 1.$$

A única potência de expoente positivo com coeficiente diferente de zero é z; logo ∞ é um pólo de 1.ª ordem.

3. Se uma infinidade de potências positivas na série (*) têm coeficientes não nulos, diz-se que ∞ é uma singularidade essencial de f.

Exemplo C.6.

A função $f(z) = e^z$ tem uma singularidade essencial em $z = \infty$, uma vez que $w = 0$ é uma singularidade essencial para $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$ (ver exemplo C.3. do Capítulo 5).

Tendo em conta as considerações anteriores, resulta facilmente que:

Se ∞ é uma singularidade isolada de uma função *f*, então:

(i) ∞ é uma singularidade removível se e só se $|f(z)|$ é uma função limitada para $|z| > r > 0$, isto é,

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{|f(z)|}{|z|} = 0.$$

(ii) ∞ é um pólo de *f* se e só se

$$\lim_{z\to+\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = \infty.$$

(iii) Se ∞ é uma singularidade essencial de *f*, não existe $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ e *f* assume valores arbitrários próximos de qualquer número complexo em qualquer vizinhança de ∞.

Observação:

Prova-se facilmente que ∞ é um zero de multiplicidade *k* para a função $f(z)$, se e só se ∞ é um pólo de ordem *k* de $\dfrac{1}{f(z)}$.

Exemplo C.7.

Considere-se a função $f(z) = \dfrac{z}{z^4 - 1}$. Tem-se que ∞ é um zero de multiplicidade 3 para $f(z)$, pois ∞ é um pólo de 3.ª ordem para $\dfrac{1}{f(z)}$, uma vez que

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z^4 - 1}{z} = z^3 - \frac{1}{z},$$

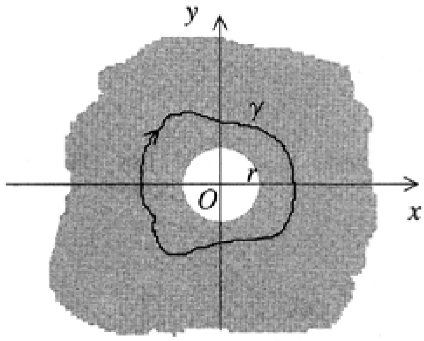
tem-se que ∞ é um pólo de 3.ª ordem (para $n > 3$ os coeficientes das potências de expoente positivo são nulos).

Definição C.4.

Seja *f* uma função analítica para $|z| > r > 0$, isto é, ∞ é uma singularidade isolada de *f*. Chama-se **resíduo de *f* em ∞** e representa-se por $\operatorname{res}(f,\infty)$ ao valor do integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz$$

onde γ é uma curva simples fechada contida no domínio de analiticidade de f, orientada no sentido negativo e tal que, no seu exterior, f não tem qualquer outra singularidade além de ∞.



Observação:

1. Considera-se o sentido negativo na curva γ, porque o ponto ∞ é exterior à curva e esta em relação ao seu exterior é orientada negativamente.

2. O resíduo de f no ∞ é o simétrico do coeficiente de $\frac{1}{z}$ no desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no ponto ∞:

$$\operatorname{res}(f,\infty)=-a_{-1}.$$

Atendendo ao desenvolvimento da função $F(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ em torno do ponto $w=0$, ter-se-á então que o resíduo de f no ∞ é o simétrico do coeficiente de w no desenvolvimento de $F(w)$.

3. Seja γ a circunferência de centro na origem e raio $r>0$. Efectuando no integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz$$

a mudança de variável $z=\frac{1}{w}$, $dz=-\frac{1}{w^2}dw$, obtém-se

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz=\int_{|w|=\frac{1}{r}} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}dw\cdot$$

Conclui-se então que

$$\operatorname{res}(f,\infty) = -\operatorname{res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right),$$

uma vez que os integrais considerados são independentes de r.

Utilizando a função $G(w) = \dfrac{1}{w^2} f\left(\dfrac{1}{w}\right)$, pode assim calcular-se $\operatorname{res}(f,\infty)$.

Exemplo C.8.

Sendo f a função dada no exemplo C.2. tem-se $\operatorname{res}(f,\infty) = -1$.

Exemplo C.9.

Atendendo ao exemplo C.4., tem-se

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{w^n}, \quad 0 < |w| < +\infty$$

e então $\operatorname{res}(e^z,\infty) = -1$.

Exemplo C.10.

Calcule-se o resíduo no ponto ∞ da função $f(z) = \dfrac{z^3}{z^4 - 1}$.

Como, para

$$G(w) = \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} \frac{w}{1 - w^4} = \frac{1}{w(1 - w^4)},$$

$w = 0$ é um pólo simples, tem-se

$$\operatorname{res}(G,0) = \lim_{w \to 0} wG(w) = \lim_{w \to 0} w \frac{1}{w(1 - w^4)} = 1.$$

Assim, atendendo à observação 3 anterior,

$$\operatorname{res}(f,\infty) = -1 .$$

Teorema C.1.

Seja f uma função num domínio Ω que contém uma vizinhança de ∞ e γ uma curva simples fechada contida em Ω, orientada no sentido inverso (de forma a ser positivamente orientada em relação ao seu exterior), e tal que no seu exterior f tem um número finito de singularidades isoladas: $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Então,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left[\sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}(f(z), z_i) + \operatorname{res}(f(z), \infty)\right].$$

Demonstração:

Recomenda-se o estudo desta demonstração em Levinson, N; *Complex variables*.

Exemplo C.11.

Calcule-se $\int_{|z|=3} \frac{z}{z^3-1} dz$.

Com o objectivo de estudar o ponto ∞ como singularidade de f atenda-se a que

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w^3}-1} = \frac{\frac{1}{w}}{\frac{1-w^3}{w^3}} = \frac{w^2}{1-w^3} \quad \text{e} \quad \lim_{w\to 0} f\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w\to 0}\frac{w^2}{1-w^3} = 0,$$

o que significa que ∞ é uma singularidade removível de f. Atendendo ao desenvolvimento em série

$$F(w) = \frac{w^2}{1-w^3} = w^2 + w^5 + w^8 + \ldots,$$

para $|w| < 1$, tem-se

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^8} + \ldots,$$

e $\operatorname{res}(f, \infty) = 0$.

No exterior da circunferência $|z| = 3$, a função $f(z) = \frac{z}{z^3-1}$ não tem outras singularidades além de ∞. Então,

$$\int_{|z|=3} \frac{z}{z^3-1} dz = 2\pi i(\operatorname{res}(f, \infty)) = 0.$$

Teorema C.2.

Seja f uma função cujas singularidades em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ são isoladas e em número finito. Então, a soma dos resíduos relativos a essas singularidades é zero.

Demonstração:

Considere-se a circunferência $|z| = r$ com r suficientemente grande, de forma a que as singularidades z_k ($z_k \in \mathbb{C}$), $k = 1,\ldots,n$, estejam no seu interior. Então, por um lado,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f(z), zk)$$

e, por outro lado

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz = -\operatorname{res}(f(z), \infty).$$

Então, a soma de todos os resíduos é zero.

Exemplo C.12.

Ilustre-se o teorema anterior com a função $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, a função f tem apenas as singularidades $z = 0$ e $z = \infty$. Ora $\operatorname{res}\left(\dfrac{1}{z}, 0\right) = 1$ e, atendendo ao exemplo C.8., tem-se

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{z}, \infty\right) = -1.$$

Assim, $\operatorname{res}\left(\dfrac{1}{z}, 0\right) + \operatorname{res}\left(\dfrac{1}{z}, \infty\right) = 0.$

Capítulo 10

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Salvo indicação em contrário, considera-se nos exercícios deste capítulo o sentido positivo para as linhas fechadas.

1. Sejam a e b números reais e c um número complexo não nulo tais que $|c|^2 > ab$. Caracterize geometricamente o conjunto dos números complexos z que verificam a equação

$$a|z|^2 + cz + \overline{cz} + b = 0.$$

Tópicos para a resolução:

(1) Faça $z = x + iy$ e $c = \alpha + i\beta$ na equação proposta: $a\left(x^2 + y^2\right) + 2\alpha x - 2\beta y + b = 0$.

(2) Discuta a igualdade obtida para os diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.

Resposta:

Se $a = 0$, o conjunto dos números complexos z que verificam a equação $a|z|^2 + cz + \overline{cz} + b = 0$ é, geometricamente, a recta de equação $2\alpha x - 2\beta y + b = 0$.

Se $a \neq 0$, o conjunto dos números complexos z que verificam a equação $a|z|^2 + cz + \overline{cz} + b = 0$ é, geometricamente, a circunferência de equação

$$\left(x+\frac{\alpha}{a}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{a}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2-ab}{a^2}.$$

(Note que $\dfrac{\alpha^2+\beta^2-ab}{a^2}=\dfrac{|c|^2-ab}{a^2}>0$.)

2. Sejam z_1, z_2 e z_3 números complexos que coincidem com os vértices de um triângulo equilátero.
Prove que $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.

Tópicos para a resolução:

(1) Tenha em conta que $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ e verifique que

$$z_2 - z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_3 - z_1) \quad \text{e} \quad z_1 - z_3 = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_2 - z_3).$$

(2) Mostre que $\dfrac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$ e conclua a igualdade pretendida.

3. Mostre que, para quaisquer números complexos z_1, z_2, w_1 e w_2 se tem

a) $|z_1w_1 + z_2w_2|^2 = \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right) - \left(|z_1\overline{w_2} - z_2\overline{w_1}|^2\right)$ (Identidade de Lagrange).

b) $|z_1w_1 + z_2w_2|^2 \leq \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right)$ (Desigualdade de Cauchy).

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Mostre que

$$|z_1w_1 + z_2w_2|^2 = |z_1|^2|w_1|^2 + |z_2|^2|w_2|^2 + z_1\overline{z_2}w_1\overline{w_2} + \overline{z_1}z_2\overline{w_1}w_2$$

e

$$\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)\left(|w_1|^2 + |w_2|^2\right) = |z_1|^2|w_1|^2 + |z_2|^2|w_2|^2 + |z_1|^2|w_2|^2 + |z_2|^2|w_1|^2.$$

(2) Subtraia membro a membro as igualdades anteriores.

b)

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $\left|z_1\overline{w_2} - z_2\overline{w_1}\right|^2 \geq 0$ e utilize a alínea a).

4. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $(\alpha z + \beta)^3 = \gamma$ onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$.

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $\gamma = \gamma\left(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0\right)$ e aplique a fórmula de De Moivre:

$$\alpha z_k + \beta = \sqrt[3]{\gamma}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0,1,2$$

Resposta:

$$z_k = \frac{\sqrt[3]{\gamma}\, e^{i\frac{2k\pi}{3}} - \beta}{\alpha}, \quad k = 0, 1, 2.$$

5. Caracterize geometricamente o subconjunto de $\mathbb{C}$ definido pela condição $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = c$ com $c \in \mathbb{R}^+$.

Tópicos para a resolução:

Faça $z = x + iy$ e calcule $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$.

Resposta:

Se $c = 1$ o subconjunto de $\mathbb{C}$ definido pela condição $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = c$ é, geometricamente, o eixo imaginário.

Para qualquer $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ o subconjunto de $\mathbb{C}$ definido pela condição $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = c$ é, geometricamente, uma circunferência.

6. a) Estude, quanto à convergência absoluta, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^2 i} \operatorname{sen}\left(n^2\right)}{n^2}$.

b) Qual o valor de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n^2 i} \operatorname{sen}\left(n^2\right)}{n^2}$?

a)

Tópicos para a resolução:

Tendo em conta que $\left|\operatorname{sen}\left(n^2\right)\right| \leq 1$ e $\left|e^{n^2 i}\right| = 1$, aplique o critério de comparação à série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{e^{n^2 i}\operatorname{sen}\left(n^2\right)}{n^2}\right|$.

Resposta:

A série é absolutamente convergente.

b)

Tópicos para a resolução:

Aplique a condição necessária de convergência.

Resposta:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n^2 i}\operatorname{sen}\left(n^2\right)}{n^2} = 0.$$

7. Calcule $\lim_{z\to 0}(\cos z)^{1/z^2}$.

Tópicos para a resolução:

Considere o ramo principal da função logaritmo e calcule $\lim_{z\to 0}\left[\frac{\log(\cos z)}{z^2}\right]$ (regra de L´Hospital).

Resposta:

$$\lim_{z\to 0}(\cos z)^{1/z^2} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

8. Considere a função definida em $\mathbb{C}$ por

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z(z-i)} & \text{se } z \neq 0, i \\[2ex] \alpha & \text{se } z = 0 \\[2ex] \beta & \text{se } z = i \end{cases} \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Verifique se existem valores para α e β de forma a que a função f seja:

a) Contínua em $D(0,1)$. **b)** Contínua em $\mathbb{C}$.

a)

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $i \notin D(0,1)$ e calcule $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z(z-i)}$.

Resposta:

Se $\alpha = i$, f é continua em D(0,1) qualquer que seja $\beta \in \mathbb{C}$.

b)

Tópicos para a resolução:

Calcule $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z(z-i)}$.

Resposta:

Não existe $\beta \in \mathbb{C}$ de forma que a função f seja contínua em $\mathbb{C}$ (pois $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z(z-i)} = \infty$).

9. Estude, quanto à analiticidade, a função $f(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{1 + |z|}$, e determine a imagem por f da circunferência de centro na origem e raio igual a 1.

Tópicos para a resolução:

(1) Verifique que a função f só toma valores reais, não sendo, portanto, analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}$ (dado que nesta circunstância as condições de Cauchy-Riemann não se verificam).

(2) Verifique que, se $z = e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$, então $f\left(e^{i\theta}\right) = \cos\theta = u + iv$, com $u = \cos\theta \in [-1,1]$ e $v = 0$.

(3) Conclua que a imagem por f da circunferência de centro na origem e raio igual a 1 é o segmento do eixo real do plano imagem de extremidades $w = -1$ e $w = +1$.

10. a) Mostre que $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$ é uma função harmónica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Determine a função f holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $f(1) = 6 + i$.

c) Calcule $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz$.

a)

Tópicos para a resolução:

Verifique que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

b)

Tópicos para a resolução:

Utilize as condições de Cauchy-Riemann para determinar as funções v harmónicas conjugadas da função u em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e escolha v de forma que $f = u + iv$ seja tal que $f(1) = 6 + i$.

Resposta:

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + x + 1\right).$$

c)

Tópicos para a resolução:

Aplique o teorema de Cauchy.

Resposta:

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = 0.$$

11. Sejam u e v funções de classe C^2 e harmónicas num domínio Ω. Mostre que as funções u e $-v$ são harmónicas conjugadas.

Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que a função $f = u + iv$ é analítica em Ω.

(2) Tome $g = if = -v + iu$ (que também é analítica em Ω) e conclua que u e $-v$ são harmónicas conjugadas.

12. Seja $f(x+iy)=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)-i\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$.

Estude a analiticidade da função f e classifique as suas singularidades.

Tópicos para a resolução:

(1) Verifique que as funções

$$u(x,y)=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad \text{e} \quad v(x,y)=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(2) Verifique a validade das condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(3) Verifique que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x+iy)$.

Resposta:

A função em questão é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e tem uma singularidade essencial em $z=0$.

13. Sejam $f(z)\equiv f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ uma função analítica num domínio Ω de $\mathbb{C}$ e $\gamma:[a,b]\to\Omega$ uma curva simples fechada.

Prove que

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dx=\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dy \quad \text{e} \quad \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}dy=-\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial x}dx\,.$$

Deduza relações análogas envolvendo $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Tópicos para a resolução:

Atenda a que, se f é analítica em Ω, então $f\,'(x+iy)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ para qualquer $x+iy\in\Omega$ e, pelo teorema de Cauchy, $\int_\gamma f\,'(z)dz=0$.

Tendo em conta as condições de Cauchy-Riemann, tem-se também que

$$\int_\gamma \frac{\partial v}{\partial y}dx = -\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad \text{e} \quad \int_\gamma \frac{\partial v}{\partial y}dy = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial y}dx .$$

14. Seja $f(z) = \dfrac{|z|}{1+|z|}$.

a) Estude a analiticidade da função f.

b) Calcule $\int_{|z|=1} f(z)dz$.

a)

Tópicos para a resolução:

Verifique que a função f só toma valores reais, não sendo, portanto, analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

b)

Resposta:

$\int_{|z|=1} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, ie^{i\theta}\, d\theta = 0$.

15. Considere a função $f(x+iy) = \dfrac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) Estude a analiticidade de f em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Prove que $\lim_{r\to 0} \int_{|z|=r} f(z)dz = 0$.

a)

Tópicos para a resolução:

Utilizando as condições de Cauchy-Riemann, conclua que f não é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b)

Tópicos para a resolução:

(1) Verifique que, para qualquer z em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, se tem $|f(z)| = 1$.

(2) Justifique que $\left|\int_{|z=r|} f(z)dz\right| \le 2\pi r$ e conclua que $\lim_{r\to 0} \int_{|z|=r} f(z)dz = 0$.

16. a) Estude quanto à holomorfia a função definida em $\mathbb{C}$ por $f(x+iy)=x^3+iy^2$.

b) Calcule $\int_\gamma f(z)dz$ em que γ é a curva definida por $\gamma(t)=t^2+it^3$ com $t\in[-1,1]$.

a)

Tópicos para a resolução:

Recorrendo às condições de Cauchy-Riemann, verifica-se que estas só são verificadas sobre a parábola de equação $y=\frac{3}{2}x^2$. Assim, não existe um domínio de $\mathbb{C}$, onde a função seja holomorfa.

b)

Resposta:

$\int_\gamma f(z)dz=\frac{2}{3}(-1+i)$.

17. Sejam g e h duas funções reais de variável real de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e seja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que

$$f(x+iy)=e^{-x}\left(sen\,y+g(x)\right)+ie^{-x}\left(\cos y+h(y)\right).$$

Discuta a possibilidade de determinar g e h de forma que, para cada ponto $z_0\in\mathbb{C}$, exista uma série de potências de $(z-z_0)$ que represente a função f numa vizinhança de z_0.

Tópicos para a resolução:

Observe que, dizer que f se pode desenvolver em série de potências de $(z-z_0)$ numa vizinhança de cada $z_0\in\mathbb{C}$, é equivalente a afirmar que f é holomorfa em $\mathbb{C}$. Assim, pondo

$$u(x,y)=e^{-x}\left(\text{sen}\,y+g(x)\right) \quad \text{e} \quad v(x,y)=e^{-x}\left(\cos y+h(y)\right),$$

basta estudar se u e v são de classe C^1 e se verificam as condições de Cauchy-Riemann.

Resposta:

As funções g e h que satisfazem a questão proposta são $g(x)=K\,x$ em que K é uma constante arbitrária e $h(y)=0$.

18. Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ e (f_n) uma sucessão de funções analíticas em Ω. que converge uniformemente para uma função f em cada disco fechado contido em Ω. Prove que:

a) Se a sucessão (f_n) converge uniformemente para uma função f, em cada disco fechado contido em Ω, a função f é analítica em Ω e a sucessão de funções (f_n') converge uniformemente para f' em cada disco fechado contido em Ω.

b) Se a série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em cada disco fechado contido em Ω, a função F definida em Ω por $F(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ é analítica em Ω e $F'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(z)$.

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Tome $z_0 \in \Omega$ e seja r > 0 tal que $D(z_0,r) \subset \Omega$.

(2) Justifique que a função f é contínua em $D(z_0,r)$ (teorema A.2. do capítulo 5).

(3) Utilizando o teorema A.3. do capítulo 5, prove que, para toda a curva fechada γ em $D(z_0,r)$, se tem $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

(4) Aplique o teorema de Morera para concluir que f é analítica em $D(z_0,r)$.

(5) Deduza de (4) que f é analítica em Ω.

(6) Tome r e ρ positivos tais que $\overline{D(z_0,r)} \subset \overline{D(z_0,\rho)} \subset \Omega$ e seja C a fronteira de $\overline{D(z_0,\rho)}$. Usando a fórmula integral de Cauchy para as derivadas deduza que $|f_n'(z)-f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$, para qualquer z em $D(z_0,r)$.

(7) Tenha em conta que $f_n \to f$ uniformemente em $\overline{D(z_0,\rho)}$ para deduzir de (6) que, para todo o ε positivo, existe uma ordem a partir da qual se tem $|f_n'(z)-f'(z)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{(\rho-r)^2}2\pi\rho$ (tenha em conta que, para ζ sobre C e para z em $D(z_0,r)$, se tem $|\zeta - z| \ge \rho - r$).

(8) Conclua que (f_n') converge uniformemente para f' .

b)

Tópicos para a resolução:

Atenda à definição de convergência pontual e uniforme de séries de funções e à alínea a).

19. Prove que a função definida por $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{1}{(n-1)!z^{n+1}} \text{ em } \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Tópicos de resolução:

(1) Considere um disco qualquer fechado $\overline{D}$ contido em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e justifique que existe $r>0$ tal que todos os pontos de $\overline{D}$ são exteriores à circunferência $|z|=r$.

(2) Verifique que a série converge uniformemente em $\overline{D}$ (critério de Weierstrass) e conclua (pelo exercício anterior) que $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e (derivando termo a termo a série) $f'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{(n-1)!z^{n+1}}$ em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

20. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ converge uniformemente nos conjuntos $A_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le r\}$ para $0\le r\le 1$.

Tópicos para a resolução:

Verifique que $\left|\frac{z^n}{n}\right|\le r^n$ em A_r e aplique o critério de Weierstrass.

21. Prove que a função definida por $f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ é analítica em $D(0,1)$ e determine o desenvolvimento em série de $f'(z)$.

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ é uma série de potências cujo raio de convergência é $r = 1$ e assim $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ e $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ são analíticas em $D(0,1)$.

22. Atendendo ao desenvolvimento de Maclaurin da função $\log(1+z)$, obtenha o desenvolvimento de $\log z$ e de $\frac{1}{z}$ em potências de $(z-1)$.

Tópicos para a resolução:

(1) Considerando o ramo principal do logaritmo, deduza que $\log z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1}$ para $|z-1| < 1$.

(2) Justifique que (por derivação termo a termo da série anterior) $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$ com $|z-1| < 1$.

23. Estude a analiticidade da função $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$.

Tópicos para a resolução:

(1) Seja $r > 0$ e tome p tal que $p > 2r$. Prove que $\left|\frac{1}{z^2+n^2}\right| \leq \frac{4}{3n^2}$ para $n \geq p$ e $|z| < r$.

(2) Conclua que a série $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$ converge uniformemente para $|z| < r$ (Critério de Weierstrass).

(3) Tendo em conta que $f(z) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{z^2+n^2} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{z^2+n^2}$, justifique a analiticidade de f para $z \neq in$, $n \in \mathbb{N}$.

24. Estude a analiticidade da função $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ (função zeta de Riemann).

Tópicos para a resolução:

(1) Considere o ramo principal da função logaritmo, note que $n^z = e^{z \log n}$ e deduza que $\left|n^z\right| = n^x$ em que $x = \operatorname{Re} z$.

(2) Tendo em conta que a série real $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ é convergente para $x > 1$, justifique que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ converge uniformemente para $x = \operatorname{Re} z > 1$.

(3) Conclua que a função zeta de Riemann é analítica no conjunto $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$.

25. Considere a função definida por $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)(z-2)}$. Obtenha os seus desenvolvimentos de Laurent válidos nos seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

a) $\{z : 0 < |z| < 1\}$. **b)** $\{z : 1 < |z| < 2\}$. **c)** $\{z : |z| > 2\}$.

a)

Tópicos para a resolução:

Verifique que, se $0 < |z| < 1$, então $\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$ e $\dfrac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$.

Atenda a que $f(z) = \dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{\frac{1}{3}}{z-2} - \dfrac{\frac{1}{3}}{z+1}\right)$.

Resposta:

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=-2}^{+\infty}\left[(-1)^{n+3} - \frac{1}{2^{n+3}}\right]z^n.$$

b)

Tópicos para a resolução:

Verifique que se $1 < |z| < 2$ então $\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$ e $\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$.

Resposta:

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{z^{n+3}} + \dots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2^2 z} - \frac{1}{2^3} - \frac{z}{2^4} - \dots - \frac{z^n}{2^{n+3}} - \dots\right).$$

c)

Tópicos para a resolução:

Verifique que se $|z|>2$ então $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n$ e $\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$.

Resposta:

$$f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=3}^{+\infty}\left[(-1)^{n-2}+2^{n-3}\right]\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

26. a) Justifique que a função $f(z)=\dfrac{\log z}{z-1}$ pode ser prolongada por continuidade ao ponto $z=1$.

(Considere o ramo principal da função logaritmo.)

b) Desenvolva, em série de Taylor, numa vizinhança do ponto $z=1$, a função obtida na alínea anterior como prolongamento de f.

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Verifique que a função f é contínua em $\Omega=\mathbb{C}\setminus\left[\{z=x+iy : x\le 0\wedge y=0\}\cup\{1\}\right]$.

(2) Justifique que a singularidade de f em $z=1$ é removível.

(3) Defina a função $\tilde{f}$ que é o prolongamento por continuidade da função f a $z=1$.

Resposta:

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases}\dfrac{\log z}{z-1} & \text{se} \quad z\in\Omega\\[2ex] 1 & \text{se} \quad z=1\end{cases}$$

b)

Resposta:

$$\tilde{f}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n \text{ com } z\in D(1,1).$$

27. Considere o ramo principal do logaritmo e a função $f(z) = \log(1+z)$.

a) Mostre que a função

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{se } z \in \overline{D(0,r)} \setminus \{0\} \\[2em] f'(0) & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

é holomorfa em $\overline{D(0,r)}$ e conclua que $|f(z)| \le |z| M_r$ onde $M_r > 0$.

b) Mostre que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1+z^n)$ é absolutamente convergente e define uma função F analítica em $D(0,1)$. Calcule $F'(0)$.

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que g é uma função contínua em $\overline{D(0,r)}$ e analítica em $\overline{D(0,r)} \setminus \{0\}$.

(2) Conclua que g é analítica em $\overline{D(0,r)}$.

(3) Justifique que existe $M_r > 0$ tal que $|g(z)| \le M_r$, concluindo assim que $|f(z)| \le |z| M_r$.

b)

Tópicos para a resolução:

Tome r tal que $0 < r < 1$.

(1) Para concluir que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1+z^n)$ é absolutamente convergente em $D(0,1)$ atenda a que $|\log(1+z^n)| \le M_r |z^n|$ (pela alínea a)) e estude a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} M_r |z|^n$.

(2) Justifique (pelo Critério de Weierstrass) que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1+z^n)$ converge uniformemente em $\overline{D(0,r)}$.

(3) Conclua que $F(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log(1+z^n)$ é uma função analítica em $D(0,1)$ e $F'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n z^{n-1}}{1+z^n}$, tendo-se portanto, $F'(0) = 1$.

28. **a)** Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!z^n}$ define uma função $f(z)$ analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Calcule $\int_{|z|=1} f(z)dz$.

a)

Tópicos para a resolução:

Tendo em conta que, para qualquer w em $\mathbb{C}$ se tem $e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}$, faça $w = -\frac{1}{z}$.

Resposta:

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!z^n}$ define a função $f(z) = e^{\frac{-1}{z}} - 1$, analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b)

Tópicos para a resolução:

Uma vez conhecido o desenvolvimento de $f(z)$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, calcule res($f$,0) e aplique o teorema dos resíduos de Cauchy.

Resposta:

$\int_{|z|=1} f(z)dz = -2\pi$.

29. Seja $f(z) = \frac{e^z}{z^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n$. Verifique que $\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = \frac{i\pi}{3}$.

Tópicos para a resolução:

Sejam $g(z) = \frac{e^z}{z^4}$ e $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n$; tem-se que $\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = \int_{|z|=\frac{1}{2}} g(z)dz + \int_{|z|=\frac{1}{2}} h(z)dz$.

(1) Como a função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, utilize um desenvolvimento de Laurent conveniente para esta função para calcular res(g,0) e aplique o teorema dos resíduos de Cauchy. Obtém-se $\int_{|z|=\frac{1}{2}} g(z)dz = \frac{i\pi}{3}$.

(2) Calcule $\int_{|z|=\frac{1}{2}} h(z)dz$ usando o teorema de Cauchy, já que a função $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n$ é holomorfa para $|z| < 1$.

30. Calcule $\int_\gamma \frac{e^z}{k!z^{k+1}}dz$ com $k \in \mathbb{N}$, sendo γ a circunferência unitária. Tendo em conta o resultado obtido determine a soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$.

Tópicos para a resolução:

(1) Use a fórmula integral de Cauchy para as derivadas para provar que

$$\frac{1}{(k!)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{k!z^{k+1}}dz\ ,\quad \forall k\in\mathbb{N}$$

e, consequentemente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\gamma \frac{e^z}{n!z^{n+1}}dz\,.$$

(2) Verifique que a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^z}{n!z^{n+1}}=\frac{e^z}{z}e^{\frac{1}{z}}$ converge uniformemente em todo conjunto compacto contido em $\{z\in\mathbb{C}:|z|>0\}$.

(3) Justifique que $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\int_\gamma \frac{e^z}{n!z^{n+1}}dz\right]=\int_\gamma\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^z}{n!z^{n+1}}\right]dz$.

(4) Deduza, da alínea anterior, que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{e^z e^{1/z}}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=2}\frac{e^{\operatorname{Re} z}}{2iz}dz$.

(5) Conclua que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}=\frac{1}{2}$.

31. Construa a série de Maclaurin da função cosec z.

Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que o ponto $z=0$ é um pólo de primeira ordem de $f(z)=\operatorname{cosec} z=\frac{1}{\operatorname{sen} z}$ e é uma singularidade removível de $g(z)=z\operatorname{cosec} z$.

(2) Conclua que a função $h(z)=\begin{cases} g(z) & \text{se } z\neq 0\\ 0 & \text{se } z=0\end{cases}$ é analítica em $D(0,r)$ com $r<\pi$.

(3) Construa a série de Maclaurin da função $h(z)$ e conclua que

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + \left[\left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{1}{5!}\right]z^3 + \left[\left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{2}{3!5!} + \frac{1}{7!}\right]z^4 + \ldots$$

32. a) Justifique que existem constantes $C_n \in \mathbb{Z}$, com $n \in \mathbb{N}$, tais que $\dfrac{1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n (z-1)^n$ em $D(1,r)$, para um r conveniente. Calcule as constantes C_n e o maior valor de r.

b) Obtenha, a partir de a), o desenvolvimento de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ em $D(1,r)$.

c) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z^2}\,dz$, onde γ é a circunferência de centro em $z_0 = 1$ em $D(1,r)$.

a)

Tópicos para a resolução:

Observe que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1-[-(z-1)]}$ e consequentemente $\dfrac{1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$ se $|z-1| < 1$.

Resposta:

$C_n = (-1)^n$ e $r = 1$.

b)

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $\dfrac{1}{z^2} = -\left(\dfrac{1}{z}\right)'$.

Resposta:

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n (z-1)^{n-1} \text{ se } z \in D(1,1).$$

c)

Tópicos para a resolução:

Aplique o teorema de Cauchy.

Resposta:

$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^2} dz = 0$.

33. a) Prove a identidade em $w \, (w \in \mathbb{C})$,

$$\left(\frac{w^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w^n e^{wz}}{n! z^n} \frac{dz}{z},$$

em que C é uma circunferência centrada na origem.

b) Deduza, da igualdade anterior, a relação

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2w\cos\theta} \, d\theta .$$

a)

Tópicos para a resolução:

Atenda a que em $\mathbb{C}$ $e^{wz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n w^n}{n!}$ para justificar, pela fórmula integral de Cauchy para as derivadas, que $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{wz}}{z^n} dz = \frac{w^n}{n!}$ e conclua a igualdade pretendida.

b)

Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n! z^n}$ converge uniformemente sobre C e calcule a sua soma.

(2) Verifique que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{wz}}{z} e^{\frac{w}{z}} dz$.

(3) Calculando directamente o integral $\int_C \frac{e^{wz}}{z} e^{\frac{w}{z}} dz$, conclua a igualdade pretendida.

34. Seja *f* uma função analítica em $D(0,r)$, $r>0$.

a) Calcule $\int_{|z|=1}\left[2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{f(z)}{z}dz$

b) Use a alínea anterior para provar que $\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 2f(0)+f\,'(0)$.

a)

Tópicos para a resolução:

Aplique a fórmula integral de Cauchy para as derivadas.

Resposta:

$\int_{|z|=1}\left[2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i\left[2f(0)+f\,'(0)\right]$.

b)

Tópicos para a resolução:

Faça $z=e^{i\theta}$ com $\theta\in[0,2\pi]$ e, tendo em conta o resultado obtido em a), deduza a igualdade pretendida.

35. Seja *f* uma função inteira tal que $f(\mathbb{C})\subset D(0,3)$. Justifique que *f* é constante em $\mathbb{C}$.

Tópicos para a resolução:

Justifique que *f* é limitada em $\mathbb{C}$ (tem-se $|f(z)|<3$ em $\mathbb{C}$) e aplique o teorema de Liouville.

36. Seja *f* uma função inteira tal que $f(0)=0$ e $f(i)=i$. Mostre que não existe $M\in\mathbb{R}^+$ tal que $|f(z)|<M, \forall z\in\mathbb{C}$.

Tópicos para a resolução:

Faça um raciocínio por absurdo, aplicando o teorema de Liouville e observando que a função *f* não é constante em $\mathbb{C}$ (pois $f(0)=0\neq f(i)=i$).

37. Seja *f* uma função inteira que não se anula em $\mathbb{C}$. Suponha que existem números reais positivos, M e r, para os quais $|f(z)|>M$ se $|z|\geq r$. Mostre que *f* é constante em $\mathbb{C}$.

Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que a função $g = \frac{1}{f}$ é inteira e limitada em $\mathbb{C}$ (atendendo a que $|f(z)| > M$ para $|z| \geq r$ e a que g é contínua no conjunto compacto $\overline{D(0,r)}$).

(2) Aplique o teorema de Liouville à função g e conclua que f é constante em $\mathbb{C}$.

38. a) Classifique as singularidades da função $f(z) = \frac{e^z - 1}{\operatorname{sen}^2 z}$.

b) Calcule os três primeiros termos do desenvolvimento da função f em potências de z.

c) Calcule $\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{\operatorname{sen}^2 z} dz$ (supondo a circunferência descrita no sentido directo).

a)

Resposta:

$z = 0$ é um pólo simples e $z_n = n\pi$ com $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ são pólos duplos.

b)

Tópicos para a resolução:

Justifique que $f(z) = \frac{e^z - 1}{\operatorname{sen}^2 z} = c_{-1}\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$.

Resposta:

$c_{-1} = 1$, $c_0 = \lim_{z \to 0} \left(z \frac{e^z - 1}{\operatorname{sen}^2 z} \right)'$, $c_1 = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left(z \frac{e^z - 1}{\operatorname{sen}^2 z} \right)''$.

c)

Tópicos para a resolução:

Aplique o teorema dos resíduos de Cauchy.

Resposta:

$\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{\operatorname{sen}^2 z} dz = 2\pi i$.

39. Sejam Ω um domínio cuja fronteira é uma curva de Jordan C e f uma função que não se anula em C.

a) Prove que se f é analítica em $\overline{\Omega}$ e tem m zeros em Ω então $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = m$.

b) Prove que se f é analítica em $\overline{\Omega}$ excepto em m pólos de Ω então $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = -m$.

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Atenda a que $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_m)\varphi(z)$ com $\varphi(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$.

(2) Calcule $f'(z)$ e verifique que $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dfrac{1}{z - z_k} + \dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$.

(3) Conclua, atendendo a que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{dz}{z - z_k} = m$ e $\displaystyle\int_C \dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = 0$.

b)

Tópicos para a resolução:

Considere a função $g = \dfrac{1}{f}$, que tem m zeros, e utilize a alínea anterior.

40. Seja Ω um domínio cuja fronteira é uma curva de Jordan C. Sejam φ e ψ duas funções analíticas em Ω, contínuas sobre C, e verificando as condições seguintes:

(i) φ tem um zero duplo em $z = a \in \Omega$,

(ii) ψ tem n zeros simples em Ω, distintos de a.

Calcule $\displaystyle\int_C \dfrac{1}{z - a}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}dz$.

Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que $f(z) = \dfrac{1}{z - a}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ tem n pólos simples $z_1, \dots, z_n \in \Omega$ e uma singularidade removível em $z = a$ (pois $\lim\limits_{z \to a} f(z) = 0$).

(2) Aplique o teorema dos resíduos de Cauchy.

Resposta:

$$\int_C \frac{1}{z-a}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(z_k)}{(z-z_k)\psi'(z_k)}.$$

41. Sejam f e g funções inteiras e z_0 um zero de ordem $k > 1$ de g.

a) Prove que se, z_0 é um zero de ordem $(k-1)$ de f, então z_0 é um pólo simples para $\dfrac{f}{g}$ e

$$\operatorname{res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{k\,f^{(k-1)}(z_0)}{g^{(k)}(z_o)}.$$

b) Prove que se $k \geq 2$ e z_0 é um zero de ordem $(k-2)$ de f, então z_0 é um pólo de ordem 2 para $\dfrac{f}{g}$ e

$$\operatorname{res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = k\left[\frac{f^{(k-1)}(z_0)}{g^{(k)}(z_o)} - \frac{k-1}{k+1}\frac{g^{(k+1)}(z_0)}{\left(g^{(k)}(z_o)\right)^2}f^{(k-2)}(z_0)\right].$$

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Observe que se z_0 é um zero de ordem $k > 1$ de g, então $g(z) = (z-z_0)^k\psi(z)$ em que ψ é uma função inteira tal que $\psi(z_0) \neq 0$. Analogamente, se z_0 é um zero de ordem $(k-1)$ de f, então $f(z) = (z-z_0)^{k-1}\varphi(z)$ em que φ é uma função inteira tal que $\varphi(z_0) \neq 0$ e assim $\left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)\psi(z)}$.

(2) Conclua que z_0 é um pólo simples para $\dfrac{f}{g}$.

(3) Verifique que $f^{(k-1)}(z_0) = (k-1)!\varphi(z_0)$ e $g^{(k)}(z_0) = k!\psi(z_0)$.

(4) Deduza o resultado pretendido, tendo em conta que

$$\operatorname{res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}.$$

b)

Tópicos para a resolução:

(1) Verifique que, neste caso, se tem $\left(\frac{f}{g}\right)(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^2\psi(z)}$, em que φ e ψ são funções inteiras tais que $\varphi(z_0)\neq 0$ e $\psi(z_0)\neq 0$.

(2) Conclua que z_0 é um pólo duplo para $\frac{f}{g}$.

(3) Deduza o resultado pretendido, tendo em conta que

$$\operatorname{res}\left(\frac{f}{g},z_0\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2\frac{f(z)}{g(z)}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right).$$

42. Considere a função f analítica em $D(z_0,r)$, $r>0$, tal que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

e suponha que existe uma constante M, $0<M<1$, tal que $\left|f^{(n)}(z_0)\right|<M^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Estude a convergência uniforme da série que define a função f.

Tópicos para a resolução:

(1) Verifique que $\left|a_n(z-z_0)^n\right|\leq\frac{M^nr^n}{n!}$ para $z\in D(z_0,r)$.

(2) Conclua (critério de Weierstrass) que a série que define a função f converge uniformemente em $D(z_0,r)$ e atenda a que do estudo das séries de potências decorre que a série que define a função f converge uniformemente em qualquer disco fechado contido em $D(z_0,r)$.

43. Seja $P(z)$ um polinómio complexo de grau n com n raízes simples $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Prove que

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j{}^k}{P'(\alpha_j)}=0,\ k=0,1,\ldots,n-2.$$

Tópicos para a resolução:

Considere a função $g(z)=\dfrac{z^k}{P(z)}$ (cujas singularidades são $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$).

(1) Verifique que existe $M>0$ tal que para $k \le n-2$ e $M>0$ se tem

$$\left|\int_{|z|=r} g(z)dz\right| \le \int_{|z|=r} \frac{M}{|z|^{n-k}}|dz| = \frac{2\pi M}{r^{n-k-1}}$$

e justifique que $\int_{|z|=r} g(z)dz = 0$.

(2) Calcule $\int_{|z|=r} g(z)dz$ pelo teorema dos resíduos (atendendo a que, para r suficientemente grande, todas as singularidades da função g são interiores à circunferência $|z|=r$); obterá $\int_{|z|=r} g(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\alpha_j{}^k}{P'(\alpha_j)}$.

(3) Iguale os resultados obtidos em (1) e (2) e conclua a igualdade pretendida.

44. Sejam $P(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$, $a_0 \ne 0$, um polinómio de grau n com coeficientes complexos, e γ uma curva simples fechada que contem todos os zeros de P no seu interior. Calcule

$$\int_\gamma \frac{zP'(z)}{P(z)}dz \quad \text{e} \quad \int_\gamma \frac{z^2P'(z)}{P(z)}dz.$$

Tópicos para a resolução:

(1) Designando por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ as raízes do polinómio P, decomponha-o em factores.

(2) À custa da derivada de log $P(z)$ verifique que $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \dfrac{1}{z-\alpha_1}+\ldots+\dfrac{1}{z-\alpha_n}$.

(3) Aplique a fórmula integral de Cauchy.

Resposta:

$\int_\gamma \dfrac{zP'(z)}{P(z)}dz = 2\pi i(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)$ e $\int_\gamma \dfrac{z^2P'(z)}{P(z)}dz = 2\pi i(\alpha_1{}^2+\ldots+\alpha_n{}^2)$.

45. Seja *f* uma função analítica no interior e sobre uma curva simples fechada C e $z = a$ um ponto interior a C. Mostre que, se $r > 0$ é tal que a circunferência $|z-a| = \rho$ é inferior a C,

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f\left(a + \rho\, e^{i\theta}\right) d\theta\,,\ n \in \mathbb{N}.$$

Tópicos para a resolução:

Aplique a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n e o teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos para justificar que $\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \int_{|z-a|=1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$.

46. Seja $f : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Considere a circunferência γ de centro z_0 e raio ρ em que $0 < \rho < r$ e um arco γ_α de γ com amplitude α $(\alpha \neq 0)$.

a) Mostre que se *f* é uma função contínua em $D(z_0, r)$ então $\lim\limits_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = i\alpha\, f(z_0)$.

b) Suponha que *f* é analítica em $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, sendo z_0 um pólo simples de *f*. Mostre que

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\alpha} f(z)\,dz = i\alpha \operatorname{res}(f, z_0).$$

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Parametrizando γ_α por $\gamma_\alpha(\theta) = z_0 + \rho\, e^{i\theta}$ com $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + \alpha]$, verifique que

$$\int_{\gamma_\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - i\alpha\, f(z_0) = i\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} \left[f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) - f(z_0)\right] d\theta\,.$$

(2) Atendendo à igualdade anterior e à continuidade de *f* em z_0 ($\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 : |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \frac{\delta}{\alpha}$), prove que para qualquer $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left|\int_{\gamma_\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - i\alpha\, f(z_0)\right| < \delta$ sempre que $|z - z_0| < \varepsilon$ e conclua que $\lim\limits_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = i\alpha\, f(z_0)$.

b)

Tópicos para a resolução:

(1) Defina em $D(z_0,r)$ a função $g(z)=\begin{cases}(z-z_0)f(z) & \text{se } z\neq z_0\\ \operatorname{res}(f,z_0) & \text{se } z=z_0\end{cases}$

Verifique que g é contínua em z_0 e analítica em $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ e, consequentemente, é analítica em $D(z_0,r)$.

(2) Deduza (a partir da alínea a)) que $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\alpha} f(z)\,dz = i\alpha\, g(z_0)$ e infira o resultado pretendido.

47. Seja f uma função inteira tal que $|f(z)|<1+|z|^{\frac{1}{2}}$ para qualquer z em $\mathbb{C}$. Prove que f é constante em $\mathbb{C}$.

Tópicos para a resolução:

(1) Considere $z_0\in\mathbb{C}$ e seja γ a circunferência de centro z_0 e raio $r>0$, parametrizada por $\gamma(t)=z_0+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Mostre que f é limitada sobre γ (tem-se $\left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|<1+\left(|z_0|+r\right)^{\frac{1}{2}}$ para $t\in[0,2\pi]$) e conclua (usando as desigualdades de Cauchy) que $|f'(z_0)|<\dfrac{1+\left(|z_0|+r\right)^{\frac{1}{2}}}{r}$, $r>0$.

(2) Fazendo r tender para infinito, conclua que $f'(z_0)=0$ para qualquer z_0 em $\mathbb{C}$ e, consequentemente f é constante em $\mathbb{C}$.

Observação:

Este resultado pode ser obtido aplicando o teorema de Liouville à função

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z} & \text{se } z\neq 0\\[2ex] f'(0) & \text{se } z=0\end{cases}$$

Basta provar que:

(1) A função g é contínua em $\mathbb{C}$ e analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, logo é inteira.

(2) A função g é limitada em $\mathbb{C}$ (pois $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$ e g é contínua em $\mathbb{C}$).

(3) Existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $f(z)=\alpha z+f(0)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, e $\alpha=0$.

48. a) Seja $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ uma fracção racional, com $P(z)$ e $Q(z)$ polinómios tais que *grau* $P <$ *grau* Q e sem zeros comuns. Mostre que todas as singularidades de $f(z)$ são pólos ($f(z)$ é uma função meromorfa).

b) Mostre que uma função meromorfa não é necessáriamente racional.

a)

Tópicos para a resolução:

As singularidades de $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ são $\left\{z_k \in \mathbb{C}:\ Q(z_k)=0\right\}$.

(1) Verifique se z_k é um zero simples de $Q(z)$, então z_k é um pólo de ordem 1 para $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

(2) Verifique que se z_k é um zero de multiplicidade p de $Q(z)$, então z_k é um pólo de ordem p para $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

b)

Tópicos para a resolução:

Considere, por exemplo, a função $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ que é meromorfa e não é uma fracção racional.

49. a) Obtenha um desenvolvimento de Laurent da função $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^3}$ convergente no conjunto $\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-1|<+\infty\right\}$.

b) Calcule $\int_{|z-1|=r} f(z)\,dz$ com $r\in\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

c) Estabeleça a igualdade $\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta}\cos(r\operatorname{sen}\theta-2\theta)\,d\theta=\pi r^2$.

a)

Tópicos para a resolução:

Justifique a analiticidade da função f em $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ (sendo $z=1$ um pólo de terceira ordem) e a existência do desenvolvimento pedido (pelo teorema de Laurent).

Resposta:

$$f(z)=\sum_{n=-3}^{+\infty}\frac{e\,(z-1)^n}{(n+3)!}\ \text{ par } z\in\Omega\,.$$

b)

Tópicos para a resolução:

Aplique o teorema dos resíduos de Cauchy.

Resposta:

$$\int_{|z-1|=r} f(z)\,dz=\pi\, e\, i\,.$$

c)

Tópicos para a resolução:

(1) Faça na alínea anterior $z=1+r\,e^{i\theta}$ com $\theta\in[0,2\pi]$ e $r>0$, obtendo:

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{r\,e^{i\theta}}}{\left(r\,e^{i\theta}\right)^3}\,i\,r\,e^{i\theta}\,d\theta=\pi\, e\, i\,.$$

(2) Desenvolva o integral do primeiro membro da igualdade anterior e iguale as partes imaginárias para obter a igualdade pedida.

50. Seja $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$.

a) Indique o domínio de analiticidade de f e classifique a sua singularidade.

b) Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função f na vizinhança de $z=1$.

c) Determine $\operatorname{res}(f,1)$.

a)

Resposta:

O domínio de analiticidade de f é $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{1\}$ e $z=1$ é uma singularidade essencial de f (porque não existe o limite de $f(z)$ quando z tende para 1).

b)

Tópicos para a resolução:

Atenda a que

$$\cos w=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{w^{2n}}{(2n)!},\ \forall w\in\mathbb{C}$$

e faça $w = \dfrac{1}{z-1}$, obtendo

$$\cos\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n},\ \forall z \in \Omega\,.$$

(O desenvolvimento anterior, contendo na parte principal uma infinidade de termos não nulos, confirma que $z = 1$ é uma singularidade essencial de f.)

c)

Resposta:

O resíduo de f em $z = 1$ é o coeficiente de $\dfrac{1}{z-1}$. Como no desenvolvimento só figuram potências pares de $\dfrac{1}{z-1}$, tem-se que res $(f,1) = 0$.

51. Seja $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^2+1}$ em que f é uma função inteira tal que $f(-z) = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, e que não se anula em $\mathbb{C}$.

a) Estude as singularidades da função g.

b) Calcule $\int_{|z|=r} g(z)\, dz$ com $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

c) Suponha que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Justifique que f é constante em $\mathbb{C}$.

a)

Resposta:

Os pontos $z = -1$ e $z = i$ são pólos simples de g.

b)

Tópicos para a resolução:

Para $0 < r < 1$ aplique o teorema de Cauchy e para $r > 1$ aplique o teorema dos resíduos.

Resposta:

$\int_{|z|=r} g(z)\, dz = 0$ com $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

c)

Tópicos para a resolução:

Verifique a função é limitada em $\mathbb{C}$ (atenda a que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ e ao teorema de Weierstrass para funções contínuas) e aplique o teorema de Liouville.

52. Sejam f uma função analítica na coroa circular $C(z_0, r, R)$ e tal que $r < \rho < R$. Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + \rho e^{it}\right)\right|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} + 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|^2 \rho^{-2n} .$$

Tópicos para a resolução:

(1) Atenda ao teorema de Laurent para justificar que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \text{para } z \in C(z_0, r, R),$$

onde as duas séries convergem absoluta e uniformemente para $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \le \rho\}$.

(2) Deduza que

$$f\left(z_0 + \rho e^{it}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \rho^{-n} e^{-nti} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n e^{nti} \quad \text{ e } \quad \overline{f\left(z_0 + \rho e^{it}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{b_n} \rho^{-n} e^{nti} + \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} \rho^n e^{-nti}$$

e, consequentemente,

$$\left| f\left(z_0 + \rho e^{ti}\right)\right| = f\left(z_0 + \rho e^{ti}\right) \cdot \overline{f\left(z_0 + \rho e^{ti}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 \rho^{-2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} +$$

+ (série de potências negativas de e^{ti}) + (série de potências positivas de e^{ti}).

(3) Integrando termo a termo as séries obtidas, e tendo em conta que $\int_0^{2\pi} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = 0$, conclua a igualdade pretendida.

53. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} dz$, onde r é tal que $n < r^3 < n+1$ para um certo número natural n.

Tópicos para a resolução

(1) Verifique que a função integranda à analítica excepto nos pontos $z_{k,j} = \sqrt[3]{|k|}\, e^{\frac{2j\pi i}{3}}$ com $k \in \mathbb{Z}$ e $j \in \{0,1,2\}$, que são pólos simples.

(2) Atenda ao teorema dos resíduos.

Resposta:

$$\int_{|z|=r} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}(f,0) + \sum_{\substack{0<|k|<n \\ j=0,1,2}} \operatorname{res}(f, z_{k,j}) \right) = 2n+1.$$

54. Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos t}\,dt$.

Resposta:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

55. Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}\,dt$ com $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Tópicos para a resolução:

Faça $2\cos t = z + \dfrac{1}{z}$ no integral dado e aplique o teorema dos resíduos.

Resposta:

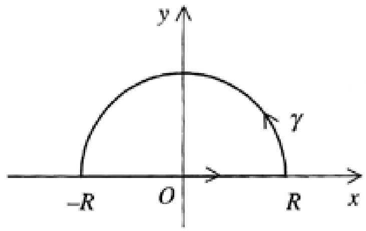
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}\,dt = \frac{19}{108}\pi i.$$

56. Mostre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Tópicos para a resolução:

(1) Tenha em conta que a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$ é par, e consequentemente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$.

(2) Integre a função $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+1}$ ao longo da curva γ, indicada na figura, formada pela justaposição de uma semi-circunferência $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$ com o segmento de recta do eixo real $[-R, R]$. Faça R tender para $+\infty$.



57. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 4} dx$.

Tópicos para a resolução:

Integre a função $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 4}$ ao longo da curva indicada no exercício anterior.

Resposta:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

58. Sendo $f(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}}{1 + e^z}$ e γ o rectângulo de vértices $A(-R,0)$, $B(R,0)$, $C(R,2\pi)$ e $D(-R,2\pi)$, com $R > 0$.

a) Mostre que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{BC} f(z)dz = \lim\limits_{R \to +\infty} \int_{DA} f(z)dz = 0$.

b) Calcule $\int_{\gamma} f(z)dz$.

c) Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1 + e^x} dx$.

a)

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $\left| \int_{BC} f(z)dz \right| \leq \frac{e^{\frac{R}{2}}}{\left| e^R - 1 \right|} 2\pi$ (analogamente para $\int_{DA} f(z)dz$).

b)

Tópicos para a resolução:

Aplique o teorema dos resíduos.

Resposta:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi$$

c)

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $\int_\gamma f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz + \int_{DA} f(z)dz$ e faça R tender para $+\infty$.

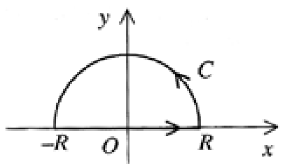
Resposta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x}\,dx = \pi \, .$$

59. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$.

Tópicos para a resolução:

Considere a linha C indicada na figura, formada pela justaposição de uma semi-circunferência $z = R\,e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]$ com um segmento de recta do eixo real $[-R,R]$.



(1) Mediante o cálculo de $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$ e passando ao limite quando R tende para $+\infty$, verifique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} .$$

(2) Mediante o cálculo de $\displaystyle\int_C \frac{z\,e^{iz}}{z^2+1}\,dz$ e passando ao limite quando R tende para $+\infty$, verifique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e} \, .$$

Resposta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx = \frac{2\pi}{e}$$

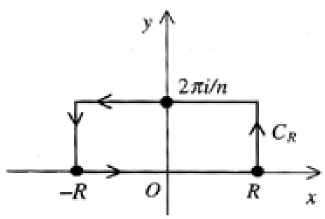
60. Sejam $m,k \in \mathbb{R}$ tais que $m > k > 0$. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^{mx}}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{kx}{m}\right)}.$$

Tópicos para a resolução:

(1) Considere a função $f(z) = \dfrac{e^{kz}}{1+e^{mz}}$ e verifique que as suas singularidades são da forma $z_n = \dfrac{(2n+1)\pi i}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Considere o rectângulo C_r indicado na figura



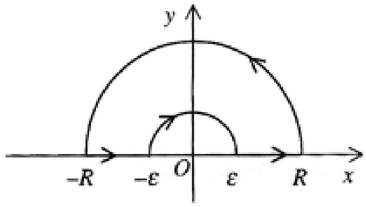
e prove que a única singularidade de f no seu interior é $z_0 = \dfrac{i\pi}{m}$.

(3) Calcule $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{kz}}{1+e^{mz}}\,dz$.

61. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$.

Tópicos para a resolução:

Tenha em conta que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ e integre a função $f(z) = \dfrac{1-e^{i2z}}{z^2}$ ao longo de uma curva como a indicada na figura (formada pela justaposição de segmentos de recta e arcos de circunferência).



Resposta:

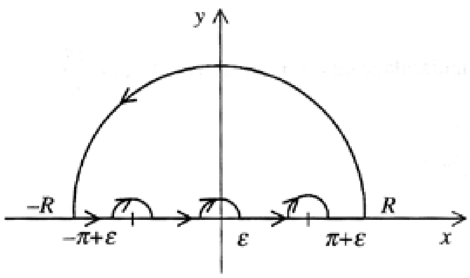
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \pi$$

62. Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x\left(\pi^2 - x^2\right)}\,dx.$

Tópicos para a resolução:

(1) Verifique que a função $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z\left(\pi^2 - z^2\right)}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-\pi, 0, \pi\}$.

(2) Considere a curva orientada C indicada na figura (formada pela justaposição de segmentos de recta e arcos de circunferência) e verifique (usando o teorema de Cauchy) que $\int_C f(z)\,dz = 0$.



(3) Tenha em conta a decomposição do integral $\int_C f(z)\,dz$, resultante de C ser uma justaposição de várias linhas, faça ε tender para zero e R tender para $+\infty$.

Resposta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x\left(\pi^2 - x^2\right)}\,dx = \frac{1}{\pi}.$$

63. Considere a função $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)^3}$ e calcule $\operatorname{res}(f,\infty)$.

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z+1}{z(z-1)^3}=0$.

Resposta:

$\operatorname{res}(f,\infty)=0$.

64. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}\,dz$, usando o resíduo no ponto infinito.

Tópicos para a resolução:

Atenda a que $f(\infty)=0$, $z_0=0$, $z_1=i$ e $z_2=-i$ estão no interior da circunferência $|z|=2$, tendo-se, portanto, $\displaystyle\sum_{n=0}^{2}\operatorname{res}(f,z_k)=\operatorname{res}(f,\infty)$.

Resposta:

$\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}\,dz=-2\pi i$.

65. Seja $f(z)=\dfrac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$.

a) Estude as singularidades de f em $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

b) Calcule $\displaystyle\int_{|z|=2}f(z)\,dz$.

a)

Tópicos para a resolução:

Os pontos $z=0$ e $z=-1$ são singularidades de f em $\mathbb{C}$; $z=0$ é uma singularidade essencial e $z=-1$ é um pólo simples.

Para analisar se existe ou não singularidade no ponto infinito basta observar que $z=0$ é um pólo duplo de $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, logo f tem um pólo no ponto infinito.

b)

Tópicos para a resolução:

(1) Tenha em conta que $z=0$ é um pólo de quarta ordem da função $-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$ e calcule o resíduo de f no ponto infinito:

$$\operatorname{res}(f,\infty)=\operatorname{res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)=\operatorname{res}\left(-\frac{e^z}{z^4(z+1)},0\right)=\frac{1}{3}\ .$$

(2) Atenda a que a função f, além de $z=0$ e de $z=-1$, não tem outras singularidades (finitas) no interior da circunferência $|z|=2$, e conclua que $\int_{|z|=2} f(z)\,dz=\frac{2\pi i}{3}$.

66. Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ e sejam f e g funções analíticas e não nulas em Ω. Suponha que existe em Ω uma sucessão (z_n) convergente para $z^*\in\Omega$ e tal que

$$\frac{f'(z_n)}{f(z_n)}=\frac{g'(z_n)}{g(z_n)}\ ,\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Mostre que existe $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $\frac{f(z)}{g(z)}=\alpha\ ,\ \ \forall z\in\Omega$.

Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que, nas condições dadas, a função $\left(\frac{f}{g}\right)'$ é analítica em Ω e $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_n)=0\ ,\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.

(2) De (1) deduza que o conjunto dos zeros da função $\left(\frac{f}{g}\right)'$ tem um ponto de acumulação z^* em Ω.

(3) Conclua que a função $\left(\frac{f}{g}\right)'$ é nula em Ω e que, consequentemente, $\frac{f}{g}$ é constante em Ω.

67. a) Seja (f_n) uma sucessão de funções complexas inteiras que converge uniformemente em $\mathbb{C}$ para a função nula. Prove que uma infinidade de funções f_n são constantes em $\mathbb{C}$.

b) Prove que o resultado anterior não se mantém se a sucessão (f_n) convergir uniformemente para a função nula em $D(0,r)$ com $r>0$.

a)

Tópicos para a resolução:

Tendo em conta a definição de convergência uniforme, prove que existe uma ordem $p\in\mathbb{N}$ a partir da qual as funções f_n são limitadas em $\mathbb{C}$ e portanto, constantes (teorema de Liouville).

b)

Tópicos para a resolução:

Considere a sucessão de funções $f_n(z)=\dfrac{z}{n}$. Verifique que se trata de uma sucessão de funções que converge uniformemente para a função nula em $D(0,r)$ com $r>0$ e no entanto nenhuma das funções f_n é constante em $D(0,r)$.

68. Seja f uma função analítica e não constante num domínio Ω de $\mathbb{C}$ e seja Ω_0 um subconjunto de Ω, aberto, conexo e limitado. Mostre que se $|f|$ é constante na fronteira de Ω_0 então f tem pelo menos um zero em Ω_0.

Tópicos para a resolução:

(1) Suponha que f não se anula em Ω_0 e prove que existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $f(z)=\alpha$, $\forall z\in\Omega_0$ (isto é, f é constante em Ω_0).

(2) Tome a função $g(z)=f(z)-\alpha$ (que é analítica e nula em Ω_0). Verifique que qualquer ponto de Ω_0 é um ponto de acumulação do conjunto dos zeros da função g e conclua que g é então nula em Ω, o que é absurdo (uma vez que, por hipótese, f é não constante em Ω e, consequentemente, g não é nula em Ω). Então, f tem pelo menos um zero em Ω_0.

69. Sejam f e g funções complexas analíticas em $D(0,2)$, que não se anulam e são tais que

$$f'\left(\frac{1}{n}\right)g\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)g'\left(\frac{1}{n}\right) \text{ para } n\in\mathbb{N}.$$

Mostre que $\dfrac{f}{g}$ é uma função constante em $D(0,2)$.

Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que $\frac{f}{g}$ é uma função analítica em $D(0,2)$ e verifique que $\left(\frac{f}{g}\right)'\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

(2) Atenda à continuidade de $\left(\frac{f}{g}\right)'$ para concluir que não é um seu zero isolado em $D(0,2)$ e, consequentemente,

$\left(\frac{f}{g}\right)'(z)=0$ em $D(0,2)$ (teorema dos zeros), e deduza o resultado pretendido.

70. a) Seja f uma função complexa analítica em $D(0,1)$ e tal que $f\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$ para $n\in\mathbb{N}$. Prove que f é nula em $D(0,1)$.

b) Analise se o resultado anterior se mantém válido quando a condição for substituída por $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=0$ para $n\in\mathbb{N}$.

a)

Tópicos para a resolução:

Justifique que o conjunto dos zeros de f tem um ponto de acumulação $(f(0)=0)$ e aplique o teorema dos zeros.

b)

Tópicos para a resolução:

Use a função $f(z)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{z-1}\right)$ para verificar que, nas novas condições, o resultado anterior não se mantém.

71. Seja f uma função não constante e analítica no exterior do disco unitário com centro na origem.

Para $\rho>1$ seja $M(\rho)=\max\limits_{|z|=\rho}|f(z)|$.

Prove que:

a) $M(\rho)=\max\limits_{|z|\geq\rho}|f(z)|$

b) $M(\rho)$ é uma função estritamente crescente (em ρ).

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Faça a mudança de varável $\xi = \frac{1}{z}$ (obtendo-se $M(\rho) = \max\limits_{|\xi|=\frac{1}{\rho}} \left| f\left(\frac{1}{\xi}\right) \right|$).

(2) Aplique o princípio do módulo máximo a $|f|$ sobre $|\xi| = \frac{1}{\rho} < 1$ e conclua.

b)

Tópicos para a resolução:

Considere a mudança de variável efectuada na alínea anterior, tenha em conta que se $\rho_1 > \rho_2 > 1$ então $\left\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \leq \frac{1}{\rho_1}\right\} \subset \left\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \leq \frac{1}{\rho_2}\right\}$ e atenda a que *f* é não constante. Aplicando novamente o princípio do módulo máximo, conclua que $M(\rho_1) < M(\rho_2)$.

72. Sendo $f(z) = \left(1 + \frac{2}{z^2 - 1}\right)^2$, determine a imagem por f do quarto de círculo

$$\Omega = \left\{ z = \rho e^{i\theta} :\ 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

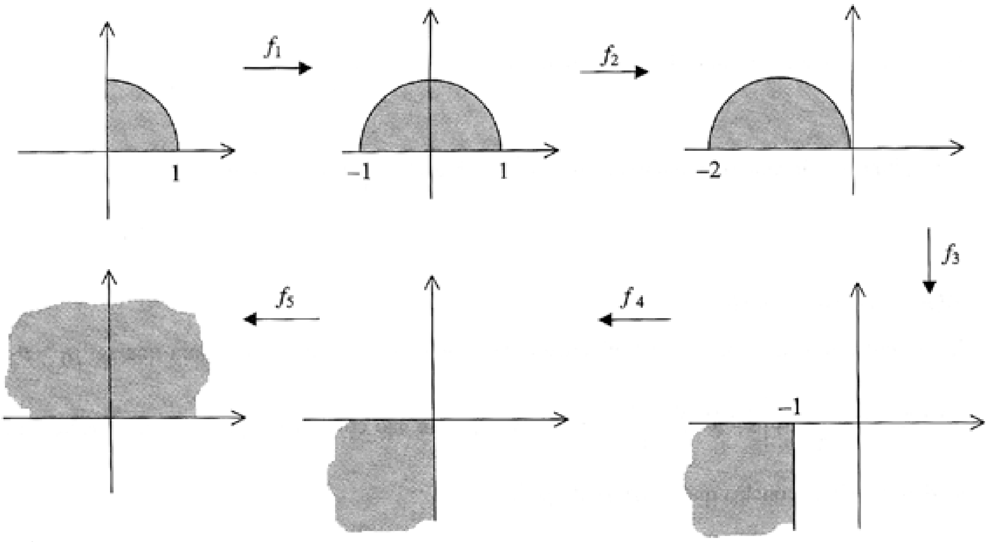
Tópicos para a resolução:

(1) Justifique que é conforme em Ω.

(2) Decomponha a função *f* na composição das seguintes funções:

$$f_1(z) = z^2,\ f_2(z) = z^2 - 1,\ f_3(z) = \frac{2}{z^2 - 1},\ f_4(z) = 1 + \frac{2}{z^2 - 1},\ f_5(z) = \left(1 + \frac{2}{z^2 - 1}\right)^2.$$

(3) Aplique sucessivamente $f_1, \dots, f_5$ ao conjunto em questão:



Resposta:

$$f\left(\left\{z = \rho e^{i\theta} : \ 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}\right) = \{w : \operatorname{Im} w \ge 0\}.$$

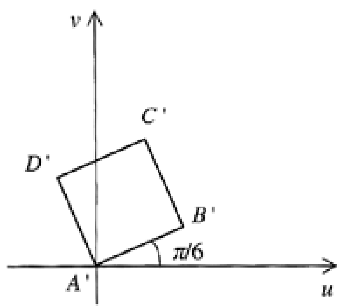
73. Determine o transformado por $f(z) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ do triângulo de vértices $z_0 = 0, z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$.

Tópicos para a resolução:

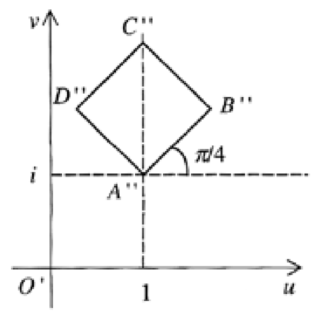
Atenda a que a transformação dada é conforme em $\mathbb{C}$ e da forma $w = f(z)$ com $c = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pelo que o triângulo sofrerá uma rotação de amplitude $\dfrac{\pi}{4}$.

74. Determine uma aplicação $w = f(z)$ que transforme o quadrado de vértices $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$ nos seguintes quadrados de lado igual a 1:

a)



b)



Tópicos para a resolução:

Na alínea a) o quadrado sofreu uma rotação no sentido positivo de amplitude $\frac{\pi}{6}$ e na alínea b) sofreu uma translação e uma rotação de amplitude $\frac{\pi}{4}$.

Resposta:

a) $f(z)=az$ com $a=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

b) $f(z)=az+b$ com $a=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $b=1+i$.

75. Seja $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ uma função tal que $f(z)=\frac{i}{z}$.

a) Justifique que *f* é conforme em todos os pontos do seu domínio.

b) Determine a imagem por *f* das rectas verticais e das rectas horizontais.

c) Determine a imagem por *f* da linha definida por $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

d) Determine $f\left(\left\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:\operatorname{Re} z>0,\, 0<\operatorname{Im} z<2\right\}\right)$.

a)

Tópicos para a resolução:

Basta atender a que *f* é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $f'(z)=\frac{-i}{z^2}\neq 0$ para todo o z em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Observação:

Como $\arg f'(z)=-\frac{\pi}{2}-2\arg z\,(\text{mod}\,2\pi)$, a transformada de cada curva por *f* sofre uma rotação de $-\frac{\pi}{2}-2\arg z$; o coeficiente de ampliação linear é $|f'(z)|=\frac{1}{|z|^2}$.

b)

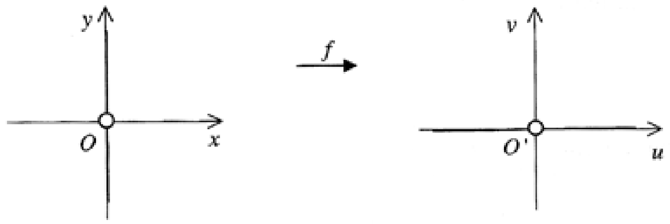
Tópicos para a resolução:

Fazendo $z=x+iy$, tem-se que $w=f(x+iy)=\frac{y}{x^2+y^2}+i\frac{x}{x^2+y^2}=u+iv$.

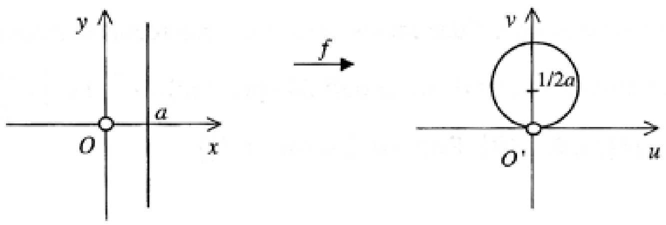
(1) Determine as imagens das rectas $x=a$ (isto é, do conjunto dos pontos z da forma $z=a+iy$ com $y\in\mathbb{R}$) distinguindo os casos $a=0$ e $a\neq 0$ (não esquecendo que $z=0$ não pertence ao domínio da função).

Resposta:

A imagem por f da recta $x = 0$ privada da origem (eixo imaginário do plano dos $z = x + iy$ privado da origem) é a recta $v = 0$ privada da origem (eixo real do plano dos $w = u + iv$, privado da origem).



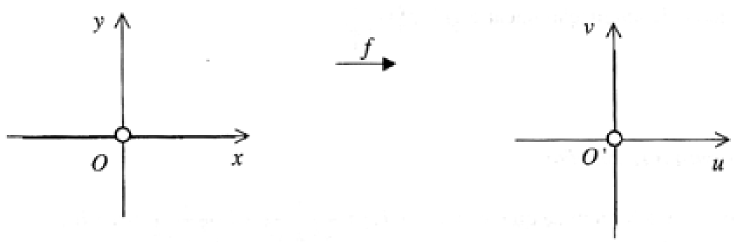
A imagem da recta $x = a$ com $a \neq 0$ é formada pelo conjunto dos pontos $w = u + iv$ tais que $u^2 + \left(v - \frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a^2}$ (basta verificar que $u^2 + v^2 - \frac{v}{a} = 0$), isto é,



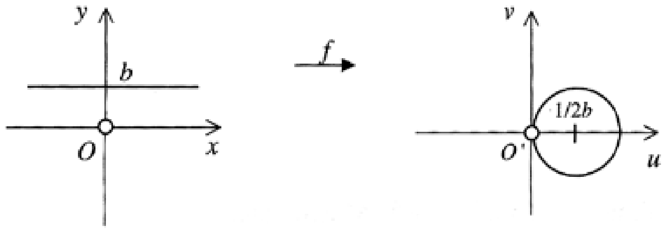
(2) Determine as imagens das rectas $y = b$ (isto é, do conjunto dos pontos z da forma $z = x + ib$ com $x \in \mathbb{R}$) distinguindo os casos $a = 0$ e $a \neq 0$ (não esquecendo que $z = 0$ não pertence ao domínio da função).

Resposta:

A imagem por f da recta $y = 0$ privada da origem (eixo real do plano dos $z = x + iy$ privado da origem) é a recta $u = 0$ privada da origem (eixo imaginário do plano dos $w = u + iv$, privado da origem).



A imagem da recta $y = b$ com $b \neq 0$ é formada pelo conjunto dos pontos $w = u + iv$ tais que $\left(u - \frac{1}{2b}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4b^2}$ (basta verificar que $u^2 + v^2 - \frac{u}{b} = 0$), isto é,



c)

Tópicos para a resolução:

A linha dada é o arco da circunferência de centro na origem e raio igual a 1 situado no primeiro quadrante.

(1) Verifique que $f\left(e^{it}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right),\ t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

(2) Conclua que a imagem pretendida é o mesmo arco de circunferência (no plano dos w) mas descrito no sentido inverso.

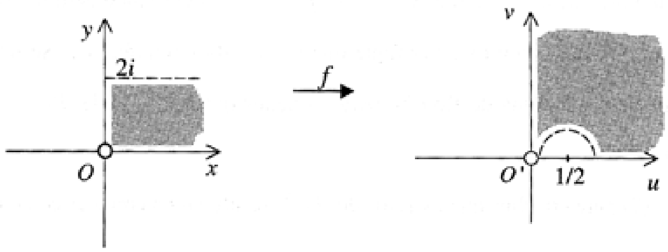
d)

Tópicos para a resolução:

Verifique que se $w=\frac{i}{z}=u+iv$ então $z=\frac{v}{u^2+v^2}+i\frac{u}{u^2+v^2}$ e assim $x>0$ se e só se $v>0$ e $0<y<2$ se e só se $0<u<2u^2+v^2$.

Resposta:

$$f\left(\{z=x+iy\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:x>0,\,0<y<2\}\right)=\left\{w=u+iv\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:u>0,v>0,\left(u-\frac{1}{4}\right)^2+v^2>\frac{1}{16}\right\}.$$



76. Determine a transformação homográfica f tal que $f(i)=\infty$, $f(0)=1$, e $f(\infty)=-i$.

Tópicos para a resolução:

Faça $z_1=i,\ z_2=0,\ z_3=\infty,\ w_1=\infty,\ w_2=1,\ w_3=-i$ e atenda à forma a que se reduz a "razão cruzada" quando $w_1=\infty$ e $z_3=\infty$, isto é, $\frac{w_3-w_2}{w_3-w}=\frac{z_1-z}{z_1-z_2}$.

Resposta:

$f(z) = \dfrac{z+1}{1+iz}$.

77. Considere o polinómio $P(z) = z^4 - z + 5$. Mostre que:

a) $P(z)$ não tem raízes reais nem raízes imaginárias puras.

b) As raízes de $P(z)$ situam-se na coroa circular $C\left(0,1,\sqrt{3}\right)$.

a)

Tópicos para a resolução:

(1) Mostre que não existe um número real x tal que $P(x) = x^4 - x + 5 = 0$ (verifique, por exemplo, que a função $P(x)$ toma o valor mínimo para $x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ e $P\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right) > 0$)

(2) Mostre que não existe um número real y tal que $P(iy) = (iy)^4 - iy + 5 = 0$ (pois se existisse $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^4 - iy + 5 = 0$ ter-se-ia $y^4 + 5 = iy$, o que nunca se verifica).

b)

Tópicos para a resolução:

(1) Considere a circunferência $|z| = \sqrt{3}$ e a função $g(z) = z^4$ (que tem um zero, com multiplicidade 4, para $z = 0$) e verifique que sobre esta circunferência se tem $\left|P(z) - g(z)\right| < \left|g(z)\right|$. Aplique o teorema de Rouché e conclua que os zeros de $P(z)$ estão no interior da circunferência $|z| = \sqrt{3}$.

(2) Considere a circunferência $|z| = 1$ e a função $h(z) = -5 + z$ (cujo único zero é $z = 5$ que não pertence ao interior da circunferência $|z| = 1$) e verifique que sobre esta circunferência se tem $\left|P(z) - h(z)\right| < \left|h(z)\right|$. Aplique novamente o teorema de Rouché para concluir que os zeros de $P(z)$ não estão no interior da circunferência $|z| = 1$.

(3) Atenda a (1) e (2) para concluir que os zeros de $P(z)$ se situam na coroa circular $C\left(0,1,\sqrt{3}\right)$.

78. Mostre que existe um e um só ponto z tal que $|z| < 1$ e que verifique a equação $z e^{2-z} = 1$.

Tópicos para a resolução:

(1) Atendendo a que a igualdade $ze^{2-z}=1$ é equivalente à igualdade $z-\dfrac{1}{e^{2-z}}=0$, considere as funções $f(z)=z$ e $g(z)=-\dfrac{1}{e^{2-z}}$ e mostre que $|g(z)|<|f(z)|$ para $|z|=1$.

(2) Conclua o resultado, aplicando o teorema de Rouché.

79. Mostre que a equação $a\,z^n-e^z=0$ com $n\in\mathbb{N}$ e $a\in\mathbb{C}$ tal que $|a|>e$, tem n raízes em $D(0,1)$.

Tópicos para a resolução:

(1) Considere as funções $f(z)=a\,z^n$ e $g(z)=-e^z$ e verifique que $|g(z)|<e<|f(z)|$ para z em $D(0,1)$.

(2) Aplique o teorema de Rouché para concluir que $f+g$ e f têm o mesmo número de zeros (isto é, n zeros) em $D(0,1)$.

80. Seja f uma função analítica em $\overline{D(0,1)}$ e tal que $|f(z)|<1$ se $|z|=1$. Mostre que f tem um e um só ponto fixo em $D(0,1)$, isto é, existe um único ponto $\tilde{z}\in D(0,1)$ tal que $f(\tilde{z})=\tilde{z}$.

Tópicos para a resolução:

(1) Uma vez que se pretende concluir que a equação $f(z)-z=0$ tem uma única raiz em $D(0,1)$, considere a função $g(z)=-z$ e mostre que $|f(z)|<|g(z)|$ para $|z|=1$.

(2) Aplique o teorema de Rouché para concluir que $f(z)+g(z)=f(z)-z$ tem uma única raíz em $D(0,1)$, que é o ponto fixo de f em $D(0,1)$.

Apêndice 1

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS E TOPOLÓGICAS

Neste apêndice recordam-se algumas definições de estruturas algébricas e topológicas.

1. Seja E um conjunto não vazio. Chama-se **operação binária** em E a qualquer aplicação de $E \times E$ em E.

2. Chama-se **sistema algébrico** a um par constituído por um conjunto E e uma sucessão finita de operações em E, $(E, (\perp_1, \dots, \perp_n))$ e diz-se que as operações $\perp_1, \dots, \perp_n$ definem uma **estrutura algébrica** em E.

3. Sejam (E, ∇) e $(F, \perp)$ dois sistemas algébricos. Diz-se que uma aplicação $\varphi : E \to F$ é um **homomorfismo** de (E, ∇) em $(F, \perp)$ se $\varphi(x \nabla y) = \varphi(x) \perp \varphi(y)$, $\forall\, x, y \in E$.
Um homomorfismo de (E, ∇) em si próprio diz-se um **endomorfismo** de (E, ∇).
Um homomorfismo φ de (E, ∇) em $(F, \perp)$ em que φ seja uma aplicação bijectiva diz-se um **isomorfismo** de (E, ∇) sobre $(F, \perp)$.

4. Seja G um conjunto não vazio e "#" uma operação binária definida em G, verificando as seguintes condições:
(i) G é fechado para a operação "#" [$\forall\, a,b \in G,\ a \# b \in G$];
(ii) a operação "#" é associativa [$\forall\, a,b,c \in G,\ a \# (b \# c) = (a \# b) \# c$];

(iii) a operação "#" tem elemento identidade (ou elemento neutro) [$\exists\ u \in G : \forall\ a \in G$, $a \# u = u \# a = a$];

(iv) existe elemento recíproco de cada elemento de G [$\forall\ a \in G, \exists\ s \in G$: $a \# s = s \# a = u$].

Diz-se então que o sistema algébrico $(G,\#)$ é um **grupo**. Se a operação "#" verificar também a propriedade comutativa [$\forall\ a,b \in G, a \# b = b \# a$], $(G,\#)$ é um **grupo comutativo** (ou **abeliano**). Para os grupos usa-se geralmente a notação multiplicativa "·" (grupo multiplicativo) ou a notação aditiva "+" (grupo aditivo). O elemento identidade de um grupo multiplicativo (resp. aditivo) representa-se por 1 (resp. 0). Se G é um grupo multiplicativo (resp. aditivo), o recíproco de $a \in G$ representa-se por a^{-1} (resp. $-a$) e designa-se por inverso (resp. simétrico) de a.

5. Chama-se **anel** a um sistema algébrico $(K,+,\cdot)$ com duas operações, adição e multiplicação, tal que:

(i) $(K, +)$ é um grupo comutativo;

(ii) A multiplicação é associativa e é distributiva em relação à adição, à direita e à esquerda; [$\forall\ a,b,c \in K$, $(a \cdot b)c = a \cdot (b \cdot c)$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot c + a \cdot c$].

6. Chama-se **corpo** a um sistema algébrico $(K,+,\cdot)$ com duas operações, adição e multiplicação, tal que:

(i) $(K, +)$ é um grupo comutativo;

(ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo comutativo;

(iii) A multiplicação é distributiva em relação à adição; [$\forall\ a, b, c \in K$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$]. Um corpo é assim um anel com elemento $1 \neq 0$, tal que todos os seus elementos diferentes de 0 são invertíveis.

7. Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo. Chama-se **espaço vectorial** sobre K um conjunto V onde se define uma adição, de forma que $(V,+)$ é um grupo comutativo, e uma aplicação de $K \times V$ em V, que a cada par (λ,x) faz corresponder um elemento de V, que se representa por λx, verificando as seguintes propriedades:

(i) $\forall\ \lambda \in K,\ \forall\ x,y \in V,\ \lambda\,(x+y) = \lambda x + \lambda\, y$;

(ii) $\forall\ \lambda,\mu \in K,\ \forall\ x \in V,\ (\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x$;

(iii) $\forall\ \lambda,\mu \in K,\ \forall\ x \in V,\ (\lambda \cdot \mu)\, x = \lambda\,(\mu x)$;

(iv) $\forall\ x \in V,\ 1\, x = x$.

Os elementos de K são usualmente designados por escalares e os elementos de V por vectores.

Um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) chama-se espaço vectorial real (resp. complexo). O elemento neutro de V chama-se origem.

8. Um conjunto S, não vazio, diz-se **ordenado** quando nele é possível definir uma relação binária "$<$" verificando as propriedades seguintes:

(i) $\forall\, a,b \in S,\ a < b \vee b < a \vee a = b$ (tricotomia);

(ii) $\forall\, a,b,c \in S,\ a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (transitividade).

A relação "$<$" designa-se **relação de ordem** em S.

9. Um corpo $(K, +, \cdot)$ onde está definida uma relação de ordem "$<$" diz-se um **corpo ordenado** quando forem verificadas as seguintes propriedades:

(i) $\forall\, a,b,c \in K,\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$;

(ii) $\forall\, a,b,c \in K,\ a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

Estas propriedades traduzem a compatibilidade da relação de ordem com as operações de corpo.

10. Seja V um espaço vectorial real e seja n a aplicação $n : V \to [0, +\infty[$ verificando as seguintes propriedades:

(i) $\forall\, u \in V,\ n(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

(ii) $\forall\, k \in \mathbb{R},\ u \in V,\ n(ku) = |k|\ n(u)$;

(iii) $\forall\, u,v \in V,\ n(u+v) \leq n(u) + n(v)$ (desigualdade triangular).

À aplicação n chama-se **norma** em V e (V, n) diz-se um espaço vectorial normado.

11. Seja S um conjunto não vazio e seja d a aplicação $d : S \times S \to [0, +\infty[$ verificando as seguintes propriedades:

(i) $\forall\, a,b \in S,\ d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$;

(ii) $\forall\, a,b \in S,\ d(a,b) = d(b,a)$ (simetria);

(iii) $\forall\, a,b,c \in S,\ d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ (desigualdade triangular).

À aplicação d chama-se **distância** ou **métrica** em S e (S, d) diz-se um **espaço métrico**.

Se S é um espaço vectorial normado com a norma n, a aplicação $d : S \times S \to [0, +\infty[$ definida por $d(a,b) = n(a-b)$ é uma métrica em S, que é chamada **métrica associada** à norma n. Assim, todo o espaço vectorial normado é também um espaço métrico.

Apêndice 2

SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS

Recordam-se neste apêndice os principais resultados sobre sucessões (x_n) de números reais.

Definições

1. Diz-se que a sucessão (x_n) **converge** para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (e escreve-se $\lim x_n = a$ ou $x_n \to a$) se

$$\forall \ \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow x_n \in V_\delta(a) .$$

Diz-se que (x_n) é convergente quando converge para $a \in \mathbb{R}$, isto é, quando tem limite finito.

2. Uma sucessão (x_n) é **limitada** se o conjunto dos seus termos é um conjunto limitado ou, de uma forma equivalente, se $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leq M$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$.

3. Seja (x_n) uma sucessão e considere-se uma aplicação injectiva de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, $k \to n(k)$. A sucessão (y_k) em que $y_k = x_{n(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, é uma **subsucessão** (x_n) de. Chama-se **sublimite** de (x_n) ao limite de uma sua subsucessão.

4. Uma sucessão (x_n) diz-se **crescente** se $x_n \leq x_{n+1}, \forall \ n \in \mathbb{N}$, e **decrescente** se $x_n \geq x_{n+1}, \forall \ n \in \mathbb{N}$. Se as desigualdades anteriores são estritas a sucessão diz-se, respectivamente, estritamente crescente e estritamente decrescente; (x_n) diz-se monótona quando é crescente ou decrescente e estritamente monótona quando é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

5. Uma sucessão (x_n) diz-se sucessão **de Cauchy** se

$$\forall\, \delta>0 \ \ \exists\, p \in \mathbb{N}: m,n \in \mathbb{N},\ m > n \geq p \Rightarrow |\, x_n - x_m \,| < \delta.$$

6. Chama-se **limite superior** de uma sucessão (x_n) ao maior dos seus sublimites e **limite inferior** de (x_n) ao menor dos seus sublimites. Representa-se, respectivamente, por $\overline{\lim}\ (x_n)$ e $\underline{\lim}\ (x_n)$ o limite superior e o limite inferior de (x_n).

7. Chama-se **progressão aritmética** de razão r, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a uma sucessão (x_n) tal que

$$x_{n+1} = x_n + r.$$

Tem-se $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n\,(x_1 + x_n)/2$.

8. Chama-se **progressão geométrica** de razão r, $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, a uma sucessão (x_n) tal que

$$x_{n+1} = x_n \cdot r.$$

Tem-se $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (x_1 - x_{n+1})/(1 - r)$.

Teoremas

1. O limite de uma sucessão, quando existe, é único.

2. O limite de uma sucessão convergente não se altera quando se modifica um número finito dos seus termos.

3. O limite de uma sucessão constante é a própria constante.

4. Se (x_n) converge para $a \in \overline{\mathbb{R}}$, então qualquer sua subsucessão também converge para a.

5. Se (x_n) e (y_n) são sucessões tais que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ com $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se:
   (i) Se $a < b$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p \Rightarrow x_n < y_n$;
   (ii) Se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y_n$ a partir da ordem p, então $a \leq b$;
   (iii) $(x_n + y_n)$ é convergente e $\lim (x_n + y_n) = a + b$;

(iv) $(-x_n)$ é convergente e $\lim(-x_n) = -a$;

(v) $(x_n\, y_n)$ é convergente e $\lim(x_n\, y_n) = a\, b$;

(vi) $|x_n|$ é convergente e $\lim |x_n| = |a|$;

(vii) Se $y_n \neq 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, então (x_n / y_n) é convergente e $\lim(x_n/y_n) = a / b$.

6. As propriedades algébricas dos limites podem ser alargadas aos casos dos limites não finitos se adoptarmos as convenções seguintes:

(i) $(+\infty) + a = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$;

(ii) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;

(iii) $(-\infty) + a = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$;

(iv) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;

(v) $\infty \cdot a = \infty$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(vi) $a/\infty = 0$;

(vii) $a/0 = \infty$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

As restantes situações são consideradas indeterminações pois dependem das sucessões envolvidas.

7. Sucessões enquadradas

Sejam (a_n), (b_n) e (x_n) sucessões tais que, a partir de uma certa ordem, se tem $a_n \leq x_n \leq b_n$. Se $a_n \to c$ e $b_n \to c$, então $x_n \to c$.

8. Sucessões monótonas

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

9. Princípio de Cauchy–Bolzano

Uma sucessão de números reais é convergente se e só se é de Cauchy.

10. O produto de uma sucessão limitada por um infinitésimo é um infinitésimo, isto é, se (x_n) é limitada e $y_n \to 0$ então $(x_n\, y_n) \to 0$.

11. Seja (x_n) uma sucessão de números reais positivos.

Se existe $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$, então $\lim \sqrt[n]{x_n} = L$.

12. Se (x_n) é uma sucessão de números reais tal que $\lim x_n = +\infty$, então a sucessão de termo geral $y_n = \left(1 + \dfrac{k}{x_n}\right)^{x_n}$, $k \in \mathbb{R}$, é convergente e $\lim y_n = e^k$.

Apêndice 3

SÉRIES NUMÉRICAS REAIS

Recordam-se neste apêndice os principais resultados sobre séries numéricas reais.

1. A série $\sum u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$, $u_n \in \mathbb{R}$, é **convergente** se e só se a sucessão (S_n) das suas somas parciais $(S_n = u_0 + \ldots + u_n)$ é convergente. Chama-se **soma** da série a $S = \lim S_n$ e escreve-se $\sum u_n = S$. Uma série que não é convergente diz-se divergente.

2. Se $\sum u_n$ converge então $\lim u_n = 0$ (condição necessária de convergência).

3. $\sum ar^n$, $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}$ diz-se uma série **geométrica** de razão r e tem-se:

– Se $|r| < 1$, a série é convergente e a sua soma é $S = \dfrac{a}{1-r}$.

– Se $|r| \geq 1$, a série é divergente.

4. Se o termo geral da série admitir uma decomposição da forma $\sum u_n = \sum \left(\alpha_n - \alpha_{n+p}\right)$, $p \in \mathbb{N}$ a série diz-se **redutível** ou de **Mengoli**:

– Se a sucessão (α_n) é convergente, a série é convergente e a sua soma é

$$S = \left(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p\right) - p\left(\lim \alpha_n\right).$$

– Se a sucessão (α_n) é divergente, a série é divergente.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, diz-se uma **série de Dirichlet**. Tem-se:

– Se $p > 1$, a série é convergente.

– Se $p \leq 1$, a série é divergente.

6. Se $\sum u_n = S$ e $c \in \mathbb{R}$ então $\sum cu_n = cS$; se $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ então $\sum cu_n$ e $\sum u_n$ são da mesma natureza (isto é, ou ambas são convergentes ou ambas são divergentes).

7. Se $\sum u_n = S_1$ e $\sum v_n = S_2$ então $\sum \left(u_n + v_n\right) = S_1 + S_2$.

8. Se $\sum u_n$ converge e $\sum v_n$ diverge então $\sum \left(u_n + v_n\right)$ diverge.

9. A modificação de um número finito de termos de uma série não lhe altera a natureza.

10. Séries de termos não negativos

(i) **Critério da comparação**

Seja $\sum u_n$ uma série de termos não negativos.

– Se uma outra série $\sum v_n$, $v_n \geq 0$, é convergente e $u_n \leq v_n$ para $n \geq p, p \in \mathbb{N}$, então a série $\sum u_n$ também é convergente.

– Se outra série $\sum z_n$, $z_n \geq 0$ é divergente e $u_n \geq z_n$ para $n \geq p, p \in \mathbb{N}$, então a série $\sum u_n$ também é divergente.

(ii) **Critério da comparação** (Teste do Limite)

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos, tais que $0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < +\infty$, então

$\sum a_n$ e $\sum b_n$ têm a mesma natureza, isto é, são ambas convergentes ou ambas divergentes.

(iii) **Critério da razão**

Seja $\sum u_n$, $u_n > 0$ e suponha-se que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Então,

– Se $l < 1$, a série é convergente.

– Se $l > 1$, a série é divergente.

Se $l = 1$ pode concluir-se que a série $\sum u_n$ é divergente se $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tender para 1 por valores não inferiores a 1.

(iv) **Critério da raíz**

Seja $\sum u_n$, $u_n \geq 0$ e suponha-se que $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$. Então,

– Se $l < 1$, a série é convergente.

– Se $l > 1$, a série é divergente.

– Se $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1^+$, a série é divergente.

(v) **Critério do integral**

Seja $f:[1,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função decrescente e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f(n) = u_n$. Então, a série $\sum u_n$ e o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ têm a mesma natureza, isto é, são ambos convergentes ou ambos divergentes.

11. $\sum u_n$ diz-se uma **série absolutamente convergente** quando $\sum |u_n|$ é uma série convergente.

12. Se $\sum |u_n|$ é convergente, então $\sum u_n$ também é convergente, isto é, uma série absolutamente convergente é convergente.

13. Uma série $\sum u_n$ convergente cuja série dos módulos $\sum |u_n|$ seja divergente, diz-se **simplesmente** ou **condicionalmente convergente**.

14. Se $\sum u_n$ converge absolutamente e (v_n) é uma sucessão limitada, então $\sum u_n v_n$ converge absolutamente.

15. A série $\sum (-1)^n u_n$ onde u_n tem sinal constante designa-se por **série alternada**.

16. Critério de Leibniz

Se $\lim u_n = 0$ e (u_n) é uma sucessão decrescente a partir de certa ordem, então a série $\sum (-1)^n u_n$ é convergente.

17. Se $\sum u_n$ é uma série absolutamente convergente, então qualquer reordenação dos seus termos conduz a uma série absolutamente convergente com a mesma soma.

18. Teorema de Riemann: Seja $\sum u_n$ é uma série simplesmente convergente. Então,

(i) Existem reordenações dos termos da série $\sum u_n$ de modo que a série resultante seja divergente.

(ii) Dado um número real A é possível reordenar os termos da série $\sum u_n$ de modo que a nova série tenha soma igual a A.

19. Dadas as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ define-se **produto de Cauchy** das duas séries como sendo a série $\sum w_n$ onde $w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0$.

Se $\sum u_n$ e $\sum v_n$ convergem absolutamente, então $\sum w_n$ também converge absolutamente.

Se a convergência não for absoluta $\sum w_n$ poderá ser divergente.

Apêndice

4

LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DEFINIDAS NUM ABERTO DE $\mathbb{R}^n$

Recordam-se neste apêndice alguns resultados sobre limites e continuidade de funções definidas num aberto de $\mathbb{R}^n$.

1. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, $A=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ um ponto não exterior a Ω e $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$. Diz-se que o **limite de f quando X tende para A** é L, $L=(l_1,\dots l_p)\in\mathbb{R}^p$, e escreve-se $\lim\limits_{X\to A} f(X)=L$, se

$$\forall\delta>0,\ \exists\varepsilon>0: X\in\Omega \text{ e } \|X-A\|<\varepsilon \Rightarrow \|f(X)-L\|<\delta.$$

Demonstram-se as propriedades seguintes:

(i) O limite, se existe, é único;

(ii) Se $\lim\limits_{X\to A} f(X)=L$ e $\lim\limits_{X\to A} g(X)=L'$ tem-se $\lim\limits_{X\to A}(f\pm g)(X)=L\pm L'$, $\lim\limits_{X\to A}(f.g)(X)=L\cdot L'$ e $\lim\limits_{X\to A}\left(\dfrac{f}{g}\right)(X)=\dfrac{L}{L'}$ se $L'\neq 0$;

(iii) Se $\lim\limits_{X\to A} f(X)=B$ e $\lim\limits_{Y\to B} g(Y)=C$ então $\lim\limits_{X\to A}(g\circ f)(X)=\lim\limits_{X\to A} g(f(X))=C$.

2. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, $D \subset \Omega$ e $A \in \overline{D}$. Chama-se **limite de f no ponto A relativo ao subconjunto D**, ao limite em A da restrição de f a D.

Para as funções $f: \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é importante para o cálculo de $\lim\limits_{X \to A} f(X)$ considerar o caso em que D é uma recta que passa pelo ponto A. Atendendo à unicidade do limite, se existirem limites diferentes segundo duas rectas diferentes que passam pelo ponto A, pode concluir-se que não existe o limite em questão.

3. Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, $A \in \Omega$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$. Diz-se que f é **contínua** em A se $\lim\limits_{X \to A} \left[f(X) - f(A)\right] = 0$. Se f é contínua em todos os pontos de Ω, diz-se que f é contínua em Ω.

Demonstram-se as propriedades seguintes:

(i) Se f e g são funções contínuas num ponto $A \in \Omega$, $f \pm g, f \cdot g$ e f/g (se $g(A) \neq 0$) são funções contínuas em A;

(ii) A composição de funções contínuas é uma função contínua.

Salientem-se ainda os seguintes resultados válidos para funções contínuas definidas em $\mathbb{R}^n$.

4. Uma função é contínua se e só se a imagem de qualquer conjunto aberto (fechado) é um conjunto aberto (fechado)

5. A imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto e, consequentemente, fechado.

6. **Teorema de Weierstrass**: Uma função real contínua num conjunto compacto tem máximo e mínimo.

7. A imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é um conjunto conexo.

Apêndice

5

FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS NUM ABERTO DE $\mathbb{R}^n$

Neste apêndice recordam-se alguns resultados sobre funções diferenciáveis num aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definições

1. Sejam E e F espaços normados quaisquer, $f: A \subseteq E \to F$ e $a \in \operatorname{int} A$. A função f diz-se **diferenciável em *a*** se existe uma aplicação linear contínua $\xi: E \to F$ tal que

$$f(a+h) - f(a) = \xi(h) + \alpha(h) \ \text{ em que } \ \|\alpha(h)\| = o(\|h\|).$$

A aplicação ξ denomina-se **diferencial de *f* no ponto *a*** e escreve-se $\xi = df(a)$. (Nos números 3 e 4 deste apêndice analisamos ξ qundo $E = \mathbb{R}^n$ e $F = \mathbb{R}^m$, sendo m e n números naturais.)

2. Sejam m e n números naturais, $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dados $v \in \mathbb{R}^n$ e $a \in U$ chama-se **derivada $f'_v(a)$ de *f* no ponto *a* segundo o vector *v*** ao limite, caso exista,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m.$$

Se $f=(f_1, f_2,\dots, f_m)$ e $f'_{i,v}(a)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f_i(a+tv)-f(a)}{t}$ existe $f'_v(a)$ se e só se existem $f'_{i,v}(a)$, $\forall i=1, 2,\dots, m$.

Seja $\{e_1,\dots,e_n\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Tomando $v=e_i$, $f'_v(a)$ é a **derivada parcial de f em ordem a x_i no ponto a**, e escreve-se $f'_{x_i}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Se $f=(f_1, f_2,\dots, f_m)$ tem-se $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a),\dots,\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\right)$.

Definem-se por indução as **derivadas parciais de ordem $p\in\mathbb{N}$,** pondo

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_p}}(x)=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_p}}\right)(x).$$

A função $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ diz-se de classe C^p em U, e escreve-se $f\in C^p(U)$, se existem e são contínuas as derivadas parciais de ordem p.

3. Sejam $m=1$, U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f\colon U\to\mathbb{R}$; chama-se **gradiente** de f no ponto $a\in U$ ao vector $\operatorname{grad} f(a)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$. Tem-se neste caso $df(a)=\xi(h)=\operatorname{grad} f|\, h$.

Teoremas

1. Seja U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $f\colon U\to\mathbb{R}^m$, $f=(f_1, f_2,\dots, f_m)$, e $a\in U$. Se f é diferenciável em a então:

(i) f é contínua em U;

(ii) $\exists f'_v(a)=df(a)(v)=A(v)$, $\forall v\in\mathbb{R}^n$;

(iii) $\exists\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, $\forall i=1,\dots,m$ e $\forall j=1,\dots,n$ e a aplicação linear $\xi=df(a)$ é representada, nas bases canónicas, pela matriz Jacobiana de f no ponto a, $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]$.

2. Seja U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ e $a \in U$. Se $f = (f_1, \ldots, f_n)$, f é diferenciável em a se e só se todas as funções f_i forem diferenciáveis em a, como funções de $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}$.

3. **Teorema dos acréscimos finitos**: Seja U um aberto convexo de $\mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em U e tal que $\|df(x)\| \leq M$, $\forall x \in U$. Então, $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$, $\forall a, b \in U$.

4. Seja U um conjunto aberto convexo de $\mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em U e tal que $df(x) = 0$, $\forall x \in U$. Então f é constante em U.

   Demonstra-se que se U é um conjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^n$ e $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em U, tal que $df(x) = 0$, $\forall x \in U$, então f é constante em U. (Basta atender a que se U é um aberto conexo de $\mathbb{R}^n$ quaisquer dois dos seus pontos podem ser unidos por uma poligonal contida em U.).

5. **Teorema de Schwarz**: Seja U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Se $f \in C^2(U)$ então
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \forall\ i, j \in \mathbb{N},\ \forall\, a \in U.$$

6. Seja U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f\colon U \to \mathbb{R}$. Se $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\forall x \in U$, $i = 1, \ldots, n$, e $n-1$ destas derivadas parciais são contínuas em a, então f é diferenciável em a.

7. Se $f \in C^1(U)$ então f é diferenciável em U.

8. Sejam $m = n = 1$. Tem-se neste caso $\xi(h) = hf'(a)$, em que $f'(a)$ é a derivada de f no ponto a.

Apêndice 6

SUCESSÕES E SÉRIES DE FUNÇÕES

Recordam-se neste apêndice alguns resultados sobre sucessões e séries de funções.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ seja $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. A sucessão de funções (f_n) **converge num ponto** $x \in D$ se a sucessão numérica $\left(f_n(x)\right)$ é convergente.

2. A sucessão de funções (f_n) **converge pontualmente** em D se a sucessão $\left(f_n(x)\right)$ é convergente, qualquer que seja $x \in D$. Definindo $f : D \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \lim f_n(x)$, diz-se que a sucessão (f_n) converge pontualmente para f em D.

3. A sucessão de funções (f_n) **converge uniformemente** em D para a função f se

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \sup_{x \in D} \left| f_n(x) - f(x) \right| < \delta .$$

Diz-se neste caso que f é o **limite uniforme** da sucessão de funções (f_n).

A **sucessão de funções** (f_n) é **uniformemente de Cauchy** em D se

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : m, n \geq p \Rightarrow \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \delta.$$

Para sucessões de funções demonstra-se que:

— Uma a sucessão de funções é uniformemente de Cauchy em D se e só se é uniformemente convergente em D.

— Se a sucessão de funções (f_n) converge uniformemente em D para a função f, se $a \in \overline{D}$ e se, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe $\lim_{x \to a} f_n(x) \in \mathbb{R}$, então também existe $\lim_{x \to a} f(x)$ e tem-se

$$\lim \left[\lim_{x \to a} f_n(x) \right] = \lim_{x \to a} \left[\lim f_n(x) \right].$$

— Se as funções (f_n) são contínuas em D e se a sucessão (f_n) converge uniformemente para uma função f em D então f é contínua em D.

— Se (f_n) é uma sucessão de funções integráveis em $[a,b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que converge uniformemente neste intervalo para uma função f, então f é integrável em $[a,b]$ e tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b f_n(x)dx.$$

— Seja (f_n) uma sucessão de funções deriváveis em $[a,b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Se, para um certo ponto $c \in [a,b]$, a sucessão numérica $(f_n(c))$ é convergente e se a sucessão das funções derivadas $\left(f'_n\right)$ converge uniformemente para uma função g em $[a,b]$ então a sucessão (f_n) converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função f derivável, tal que $f' = g$.

— Se (f_n) é uma sucessão de funções primitiváveis em $[a,b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ que converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função f, então uma sucessão das primitivas das funções f_n, caso seja convergente nalgum ponto $c \in [a,b]$, converge uniformemente em $[a,b]$ para uma primitiva da função f.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ seja $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. A série de funções $f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge pontualmente** em D se a sucessão (S_n) das suas somas parciais (isto é $S_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$) converge pontualmente em D.

A função limite da sucessão (S_n) é a soma da série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

2. A série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge uniformente** em D se a sucessão (S_n) das suas somas parciais converge uniformemente em D.

É condição necessária, mas não suficiente, para que uma série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ seja uniformemente convergente em D que a sucessão (f_n) seja uniformemente convergente para zero.

Para séries de funções demonstra-se que:

— Se a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em D para a função f, se $a \in \overline{D}$ e se, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe $\lim_{x \to a} f_n(x) \in \mathbb{R}$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$ e tem-se

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

— A soma de uma série de funções contínuas, que converge uniformemente, em D é uma função contínua em D.

— Se (f_n) é uma sucessão de funções integráveis em $[a,b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tal que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente neste intervalo, então a soma da série é uma função integrável em $[a,b]$ e tem-se

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n \,.$$

— Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ uma série de funções deriváveis em $[a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$. Se para um certo ponto $c \in [a,b]$ a série numérica $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(c)$ é convergente, e se a série das funções derivadas $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente para uma função g em $[a,b]$, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a,b]$ e a sua soma é uma função *f* derivável em [a,b], tal que $f' = g$.

— Se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é uma série de funções primitiváveis em $[a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$ que converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função *f*, então uma série de primitivas das funções f_n, caso seja convergente nalgum ponto $c \in [a,b]$, converge uniformemente em $[a,b]$ para uma primitiva da função *f*.

— Critério de Weierstrass para a convergência uniforme: Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma série de funções tal que, a partir de certa ordem, se tem $|f_n(x)| \le u_n, \forall\, x \in D$ e $u_n \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{N}$. Se a série de termos não negativos $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ for convergente, então a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ é uniformemente convergente em *D*.

3. Designam-se por **séries de potências** as séries de funções da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ com $a_n \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. A $R = \overline{\lim} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ chama-se **raio de convergência** de série. Tem-se:

(i) a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ é absolutamente convergente se $|x - x_0| < R$;

(ii) a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ é divergente se $|x-x_0|>R$.

Observe-se que se existe $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ então $R=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

4. Seja f uma função indefinidamente diferenciável num intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$ e $x_0\in I$. Chama-se **série de Taylor** de f em x_0 à série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Se $x_0=0$, a série designa-se por **série de Maclaurin**.

5. Seja f uma função indefinidamente diferenciável num intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$ e $x_0\in I$. A função f diz-se **analítica** em x_0 se ela é a soma da sua série de Taylor numa vizinhança de x_0.

Para séries de potências demostra-se que:

— Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ tem raio de convergência $R>0$, ela converge uniformemente em cada intervalo fechado contido em $]x_0-R,x_0+R[$.

— Se $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ em $]x_0-R,x_0+R[$ então também se tem neste intervalo $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$.

— Seja f uma função indefinidamente diferenciável num intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$ e $x_0\in I$. É condição necessária e suficiente para que f seja analítica em x_0 que

$$\lim\left[f(x)-\left(1+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)\right]=0$$

para x numa vizinhança de x_0.

BIBLIOGRAFIA

Ablowitz, M, J. e Fokas, A. S. *Complex Variables: Introduction and Applications*, Cambridge University Press, 1997

Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1979

Ávila, G., *Variáveis Complexas e Aplicações*, Livros Técnicos e Científicos Editora Lt.da, Rio de Janeiro, 1990

Bajpai, A.C., Mustoe, L. R. e Walker, D., *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Ltd., 1978

Burkell, R. B., *An Introduction to Classical Complex Analysis*, Vol. I, Birkhauser Verlag Basel und Stuttgart, 1979

Churchill, R. V. e Brown, J. W., *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill International Editions, 1990

Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1973

Courant, R., *Differential and Integral Calculus*, Blackie & Son Limited, London, 1937

Escané, J. M., Masson et Cie., Editeurs, Paris, 1972

Figueira, M. S. R. *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, Textos de Matemática, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências de Lisboa, Departamento de Matemática, 1996

Flanigan, F. J., *Complex Variables, Harmonic and Analytic Functions* Dover Publications, Inc. New York

Hauser Jr., A. A. *Complex Variables with Physical Aplications*, Simon & Schuster, Inc. New York, 1971

Kaplan, W., *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.

Kaplan, W., *Introduction to Analytic Functions*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1966

Lindelof, E., *Le Calcul des Résidus et ses Applications a la Théorie des Fonctions*, Chelsea Publishing Company, 1947

Macrobert, T. M., *Functions of a Complex Variable*, McMillan and Co., Limited, London,1947

Marknshevich, A., *Teoria de las Functiones Analíticas*, I, II Editorial Mir, 1978

Marknshevich, A., *Complex Numbers and Conformal Mappings*, Mir Publishers, Moscow, 1982

Marsden, J. E., *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1975

Motteler, Z. C., Intext Educational Publishers, New York, 1975

Osgood, W. F., *Functions of Real and Complex Variables*, Ph. D., LL. D. Chelsea Publishing Company, New York, 1935

Paliouras, J. D., *Complex Variables for Scientists and Engineers*, MacMillan Publishing Co., Inc., New York, 1975

Pennisi, Lovis L., *Elements of Complex Variables*, Rinehart, H. e Winston, Chicago

Priestley, H. A., *Introduction to Complex Analysis,* Clarendon Press-Oxford, 1985

Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970

Santos Guerreiro. J. *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora, 1989

Simões de Abreu, A. H., *Números e Variáveis Complexas-Teoria e Aplicações*, Associação de Estudantes do Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 1977

Spiegel, M. R., *Theory and Problems of Complex Variables* Schaum's Outline Series, McGraw--Hill, USA, 1971

Smimov V. I. *A Course of Higher Mathematics vol. III-Part two*, Pergamon Student Editions, 1964

Sveshnikov, A., e Tikhonov, A., *The Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir Publishers, 1978

Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970

Wilf, H. S., *Mathematics for the Physical Sciences*, Ph. D. Dover Publications, Inc. New York, 1962

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

L

M

N

P

R

S

T

V

W

Z