SUR LE DEMI-ANNEAU DES NOMBRES NATURELS

Par

M.ª L. NORONHA GALVÃO et A. ALMEIDA COSTA

Dédié à Monsieur le Professeur Sarmento de Beires pour son 70ᵉ anniversaire

1) **Introduction** — Bien que la théorie des demi-anneaux, qu'on doit à H. S. Vandiver |1|, ait été poursuivie par beaucoup d'autres algébristes, nous nous bornons à attirer l'attention sur les travaux |2| et |3| de l'un des auteurs, car le lecteur y trouvera les éléments qu'il faudra connaître pour la compréhension de ce qui suivra.

Nous nous proposons de résoudre le problème de la détermination complète des idéaux premiers et semi-premiers du demi-anneau $\mathfrak{N}$ des nombres naturels, et, en conséquence, de donner l'expression du radical de Baer-McCoy-Levitzki d'un idéal quelconque.

2) **Idéaux. Condition de chaîne ascendante** — Soit $n \in \mathfrak{N}$; alors nous représenterons par $[n]$ l'idéal engendré par n; et, si

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{x}$ sont des idéaux de $\mathfrak{N}$, nons écrirons $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{x}]$ pour signifier la somme de ces idéaux.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal. Si q est le nombre naturel le plus petit contenu en $\mathfrak{a}$, on aura $[q] = q\,\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{a}$. Tout autre élément de $\mathfrak{a}$ qui n'appartient pas à $q\,\mathfrak{N}$ est de l'une des formes $q\,n + 1, q\,n + 2, \ldots, q\,n + (q-1)$, où $n \geqq 1$. On a ce

THÉORÈME 1: — *Si q est le plus petit nombre naturel appartenant à un idéal $\mathfrak{a}$ et si $\mathfrak{a}$ contient un élément $q\,n + k$, avec $o < k \leqq q - 1$, tout élément $q\,n' + k$, avec $n' > n$, appartient aussi à $\mathfrak{a}$.* En effet, $q\,n' + k = q\,(n' - n) + (q\,n + k)$.

COROLLAIRE 1: — *Tout idéal $\mathfrak{a}$ est engendré par un nombre fini d'éléments.* Si $\mathfrak{a} = [q]$ l'affirmation est démontrée. S'il n'en est pas ainsi, soient $q\,n_1 + r_1, q\,n_2 + r_2, \ldots, q\,n_t + r_t$, avec $r_i < q$, $(i = 1, 2, \ldots, t)$, d'autres éléments de $\mathfrak{a}$ qui appartiennent à $[q]$. Alors, en supposant qu'on a pris tous les r_i possibles et que les n_i correspondants sont minimaux, l'idéal $\mathfrak{a}$ est engendré exactement par les nombres $q, q\,n_1 + r_1, \ldots, q\,n_t + r_t$: $\mathfrak{a} = [[q], [q\,n_1 + r_1], \ldots, [q\,n_t + r_t]]$.

COROLLAIRE 2: — *En prenant $n_o \in \mathfrak{N}$, l'idéal $\mathfrak{a} = \{x \in \mathfrak{N} / x \geqq n_o\}$ est engendré par les nombres naturels $n_o, n_o + 1, \ldots, 2\,n_o - 1$.*

COROLLAIRE 3: — *Toute chaîne ascendante d'idéaux de la forme $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots$ est finie.*

En tant qu'un cas particulier de ce dernier corollaire, considérons un idéal $\mathfrak{a}_o \supset [2]$. Alors $\mathfrak{a}_o$ contient un nombre impair i_o. Si i_o est en outre le plus petit nombre impair contenu en $\mathfrak{a}_o$, pour tout autre nombre impair $i \in \mathfrak{a}_o$, on a $i = i_o + 2k$, ce qui nous donne $i \in [[2], [i_o]] = \mathfrak{a}_o$. Un idéal proprement plus grand que $\mathfrak{a}_o$ devra contenir un nombre impair $i_1 < i_0$, ce qui nous donnera $[2] \subset \mathfrak{a}_o \subset [[2], [i_1]] = \mathfrak{a}_1$. En poursuivant le raisonnement, on vérifie qu'en effet tout chaîne ascendante d'idéaux qui commence par l'idéal [2] est finie.

3) **Sur les idéaux premiers et semi-premiers** — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal. Il peut se faire qu'il existe un nombre premier q tel que $\mathfrak{a} = [q]$. Alors $\mathfrak{a}$ est un idéal premier. S'il n'en est pas ainsi, supposons $q \in \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} \neq [q]$; nous allons reconnaître que $\mathfrak{a}$ contient des éléments de la forme $q\,n + r$, où r prend toutes les valeurs $1, 2, \ldots, q - 1$. Par hypothèse, il existe un élément $q\,n_o + r \in \mathfrak{a}$, avec $r \leqq q - 1$. Soit $m_i = 1, 2, \ldots, q - 1$ et prenons $(q\,n_o + r)\,m_i$. Tous ces éléments appartiennent à $\mathfrak{a}$. En posant $r\,m_i = q\,h_i + k_i$, nous avons $(q\,n_o + r)\,m_i = q\,(n_o\,m_i + h_i) + k_i$, où k_i est un des nombres $1, 2, \ldots, q - 1$ (il peut arriver qu'on ait simplement $r\,m_i = k_i$). Les k_i sont tous différents, car de deux relations $r\,m_i = q\,h_i + k_i, r\,m_j = q\,h_j + k_i$ résulterait $r\,(m_j - m_i) = q\,(h_j - h_i)$, ce qui est faux. Donc:

THÉORÈME 2: — *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{N}$ et si le nombre premier q appartient à $\mathfrak{a}$, alors ou la relation $\mathfrak{a} = [q]$ est valable ou bien $\mathfrak{a}$ contient des éléments de la forme $q\,n + r$, où r prend toutes les valeurs $1, 2, \ldots, q - 1$.*

COROLLAIRE 4: — *L'idéal $\mathfrak{a} \neq [q]$ du théorème contient tous les nombres naturels qui suivent un certain nombre naturel.* Les éléments $q, q\,n_1 + 1, \ldots, q\,n_{q-1} + (q - 1)$, pour certains n_i qu'on fixera (il peut arriver qu'on ait simplement i au lieu de $q\,n_i + i$), appartiennent à $\mathfrak{a}$. Supposons N maximum parmi les n_i fixés. Nous allons reconnaître que $\mathfrak{a}$ contient tous les nombres égaux ou plus grands que $q\,N$. En laissant $q\,N$ de côté, soit $M > q\,N$ et posons $M = q\,s + r$, avec $s \geqq N, r \leq q - 1$. Alors $M = (q\,s - q\,n_r) + (q\,n_r + r) = q\,(s - n_r) + (q\,n_r + r)$ est une somme de deux éléments qui appartiennent à $\mathfrak{a}$, donc $M \in \mathfrak{a}$ [éventuellement le terme $q\,(s - n_r)$ n'existe pas].

THÉORÈME 3: — *Les seuls idéaux premiers de $\mathfrak{N}$ (différents de $\mathfrak{N}$) sont les idéaux engendrés par un nombre premier ainsi que l'idéal $\mathfrak{a}_o = [[2], [3]]$.* Soit $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{N}$ un idéal premier. Prenons l'élément minimum qu'il contient. Ce nombre q est premier, car autrement nous aurions $q = b\,c$, où b et c seraient des nombres naturels plus petits que q et différents de 1. Du fait que $bc \in \mathfrak{a}$, on tirerait $b \in \mathfrak{a}$ ou $c \in \mathfrak{a}$, ce qui est faux. De cette manière, ou bien $a = [q]$ ou $\mathfrak{a} = [[q], [q n_1 + 1], \ldots, [q n_{q-1} + (q-1)]]$. L'idéal $\mathfrak{a} \neq [q]$ contient tous les nombres égaux ou supérieurs à un certain nombre naturel n_0. Si $n_0 = q$, on sait, d'après le corollaire 2, que $\mathfrak{a} = [[q], [q+1], \ldots, [2q-1]]$. Alors, si $q > 2$, l'élément $(q-1)^2 \in \mathfrak{a}$, donc $q - 1 \in \mathfrak{a}$, ce qui donne une contradiction. On aura par conséquent $n_0 = q = 2$ et $\mathfrak{a} = [[2], [3]]$. Si $n_0 \neq q$ on ne peut pas avoir $n_0 = q + 1$, donc on peut trouver un élément maximum $y > q$ tel que $y \notin \mathfrak{a}$. Il existera une puissancs $y^N \in \mathfrak{a}$, ce qui entraîne $y \in \mathfrak{a}$. Cet absurde montre que l'hypothèse $n_0 \neq q$ ne peut pas se réaliser. Le théorème est démontré, puisque $[[2], [3]]$ est un idéal premier.

En ce qui concerne les idéaux semi-premiers, on peut dire que, au dehors des idéaux premiers (parmi lesquels l'idéal vide et $\mathfrak{N}$ lui-même) les seuls idéaux semi-premiers sont les idéaux engendrés par un produit d'un nombre fini de nombres premiers distincts.

Remarque : — Puisque $\mathfrak{N}$ est commutatif, il en est de même de parler d'idéaux premiers (semi-premiers) on d'idéaux complètement premiers (complètement semi-premiers).

4) **Radical d'un idéal** — En introduisant les p-systèmes, on définit le radical d'un idéal $\mathfrak{a}$ en tant que l'ensemble $B(\mathfrak{a})$ des éléments $x \in \mathfrak{N}$ tels que tout p-système contenant x a une intersection non vide avec $\mathfrak{a}$. Alors on sait que $B(\mathfrak{a})$ est l'idéal semi-premier minimal appartenant à $\mathfrak{a}$ ou l'intersection de tous les idéaux premiers diviseurs de $\mathfrak{a}$ (ou aussi l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$).

Supposons que $\mathfrak{a}$ contient un nombre premier q et qu'on a $\mathfrak{a} = [q]$. Dans ce cas $B(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a} \neq [q]$, compte tenu du théorème 3, on a $B(\mathfrak{a}) = [[2], [3]]$. Ensuite, soit $\mathfrak{a}$ un idéal, qui

ne contient pas un nombre premier. En décomposant les générateurs en facteurs premiers, les nombres premiers qui figurent en toutes les décompositions définissent tous les idéaux premiers qui contiennent $\mathfrak{a}$ et l'idéal intersection de ces idéaux premiers constitue le radical. Mais, s'il n'existe pas des diviseurs communs des générateurs, alors, sous la condition $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{N}$ le radical est aussi $[[2], [3]]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. S. Vandiver — «*On some simple types of semi-rings*», Am. Math. Monthly, n.° 46, 1939, págs. 22-26.

[2] A. Almeida Costa — «*Sur la théorie générale des demi-anneanx*, I», Paris, Séminaire Dubreil-Pisot, 1960-1961, exposé n.° 24.

[3] A. Almeida Costa — «*Sur les anneaus demi-premiers*», Rev. Fac. Ci. Lisboa, vol. VII, 1958, págs. 89-104.