μ-SYSTÈMES ET π-SYSTÈMES D'IDÉAUX

PAR

A. ALMEIDA COSTA

1) Introduction — Dans un anneau arbitraire $\mathfrak{S}$, on désigne par *μ-système* un ensemble $\mathfrak{M}$ d'idéaux dans les conditions suivantes: les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, appartenant à $\mathfrak{M}$, étant donnés, il existe un idéal $\mathfrak{g}$, de $\mathfrak{S}$, tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b} \in \mathfrak{M}$. Cette définition, quoiqu'elle se rapporte à des idéaux, est suggérée par celle des m-systèmes, introduite dans [1] pour des élements. Un ensemble $\mathfrak{P}$, d'idéaux de $\mathfrak{S}$, est dit un *π-système,* si, l'idéal $\mathfrak{c} \in \mathfrak{P}$ étant donné, il existe un idéal $\mathfrak{g}$, de $\mathfrak{S}$, tel que $\mathfrak{c}\mathfrak{g}\mathfrak{c} \in \mathfrak{P}$. Cette définition, quoiqu'elle se rapporte à des idéaux, est suggérée par celle des p-systèmes, introduite en [2] pour des éléments. Un μ-système est un π-système.

Moyennant une précaution essentielle dans le choix des μ-systèmes e des π-systèmes, on montrera, dans le § 2, qu'il devient possible d'obtenir les résultats les plus importants de [1] et [2], avec l'usage systématique de tels systèmes. Dans le § 3, le procédé nous amenera aussi à la théorie du radical dans les termes suivantes: un ideal $\mathfrak{a}$ étant donné, si son radical $\mathfrak{r}$ est défini comme l'ensemble union des idéaux $\mathfrak{n}$ pour lesquels tout le π-système (tout le μ-système), choisi avec la précaution déjà signalée, qui contient $\mathfrak{n}$ contient aussi un sous-idéal de $\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{r}$ est un idéal, précisément l'intersection de tous les idéaux demi-premiers (idéaux premiers) minimaux appartenant $\mathfrak{a}$.

2) μ-systèmes et idéaux premiers. π-systèmes et idéaux demi-premiers — Aux caractérisations des idéaux premiers, données dans [1], pag. 825, on ajoute la suivante, qui nous sera utile:

Théorème 1: *Pour que $\mathfrak{p}$ soit un idéal premier de $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{b}\equiv 0(\mathfrak{p})$ implique soit $\mathfrak{a}\equiv 0(\mathfrak{p})$ soit $\mathfrak{b}\equiv 0(\mathfrak{p})$.* $\mathfrak{S}$ lui-même, étant un idéal premier, vérifie la condition du théorème. En supposant $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{S}$, on voit immédiatement, en vertu de la première définition de [1], que la condition est nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, nous allons l'admettre et prendre $a\mathfrak{S}b\equiv 0(\mathfrak{p})$, où a et b sont des élements de $\mathfrak{S}$. Alors, (x) désignant, en général, l'idéal de $\mathfrak{S}$ engendré par $x\in\mathfrak{S}$, on aura $(a)\mathfrak{S}(b)\equiv 0(\mathfrak{p})$, par conséquent $(a)\equiv 0(\mathfrak{p})$ ou bien $(b)\equiv 0(\mathfrak{p})$, c'est-à-dire: $a\equiv 0(\mathfrak{p})$, $b\equiv 0(\mathfrak{p})$. Le théorème s'établit maintenant, compte tenu de la troisième caractérisation indiquée dans [1].

Dans le même ordre d'idées, nous ajouterons aux théorèmes caractéristiques des idéaux demi-premiers donnés par l'auteur dans [2], § 2, cet autre

Théorème 1': *Pour que $\mathfrak{r}$ soit un idéal demi-premier, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{a}\equiv 0(\mathfrak{r})$ implique $\mathfrak{a}\equiv 0(\mathfrak{r})$.* $\mathfrak{S}$ lui--même, étant un idéal demi-premier, vérifie la condition du théorème. En supposant $\mathfrak{r}\neq\mathfrak{S}$, on voit immédiatement que la condition est nécessaire, en vertu de la caractérisation suivante d'un idéal demi-premier, donné dans [2]: $\mathfrak{r}$ est demi-premier, si et seulement si $\mathfrak{b}^2\equiv 0(\mathfrak{r})$ entraîne $\mathfrak{b}\equiv 0(\mathfrak{r})$. Pour vérifier la suffisance indiquée dans le théorème, admettons la condition en question et posons $a\mathfrak{S}a\equiv 0(\mathfrak{r})$. Alors, on a aussi $(a)\mathfrak{S}(a)\equiv 0(\mathfrak{r})$, $(a)\equiv 0(\mathfrak{r})$, $a\in\mathfrak{r}$, ce qui achève la démonstration, compte tenu du corollaire 2, de [2], § 2.

Cela posé, soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque. Représentons avec $C(\mathfrak{a})$ la totalité des idéaux de $\mathfrak{S}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathfrak{a}$. Nous avons le

Théorème 2: *Pour que l'idéal $\mathfrak{p}$ soit premier, il faut et il suffit que l'ensemble $C(\mathfrak{p})$ soit un μ-système.* Supposons $\mathfrak{p}$ premier et prennons $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in C(\mathfrak{p})$. Alors, $\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{b}\not\equiv 0(\mathfrak{p})$, donc, avec $\mathfrak{g}=\mathfrak{S}$, on a $\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{b}\in C(\mathfrak{p})$. Inversement, si $\mathfrak{p}$ est un idéal et $C(\mathfrak{p})$ un μ-système, supposons $\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{b}\equiv 0(\mathfrak{p})$. Si on avait $\mathfrak{a}\not\equiv 0(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{b}\not\equiv 0(\mathfrak{p})$, il existirait $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b}\in C(\mathfrak{p})$, en contradition avec $\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{b}\equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{b})\equiv 0(\mathfrak{p})$.

De même, soit $\mathfrak{a}$ un idéal quelconque. Nous représenterons maintenant avec $C'(\mathfrak{a})$ la totalité des idéaux qui ne sont pas contenus dans $\mathfrak{a}$. On peut donner l'énnoncé suivant:

Théorème 2': *Pour que l'idéal $\mathfrak{r}$ soit demi-premier, il faut et il suffit que l'ensemble $C'(\mathfrak{r})$ soit un π-système.* Si $\mathfrak{r}$ est demi-premier, prennons $\mathfrak{c}\in C'(\mathfrak{r})$. Alors, $\mathfrak{c}\mathfrak{S}\mathfrak{c}\not\equiv 0(\mathfrak{r})$, donc, avec $\mathfrak{a}=\mathfrak{S}$, on a $\mathfrak{a}\mathfrak{S}\mathfrak{b}\in C(\mathfrak{r})$. Inversement, si $\mathfrak{r}$ est un idéal et $C'(\mathfrak{r})$ un π-système, supposons $\mathfrak{c}\mathfrak{S}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{r})$. Si on avait $\mathfrak{c}\not\equiv 0(\mathfrak{r})$, il existirait $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{c}\mathfrak{g}\mathfrak{c}\in C'(\mathfrak{r})$, en contradiction avec $\mathfrak{c}\mathfrak{g}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{c}\mathfrak{S}\mathfrak{c})\equiv 0(\mathfrak{r})$.

Les deux démonstrations qu'on vient de faire n'excluent pas les hypothèses $\mathfrak{p}=\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{r}=\mathfrak{S}$, puisqu'un système vide d'idéaux doit être considéré soit un μ-système soit un π-système.

Un système multiplicatif d'idéaux, c'est à dire un système fermé relativement au produit, est un μ-système et un π-système. Comme cas particulier de système multiplicatif, nous pouvons fixer le système $\{\mathfrak{b},\mathfrak{b}^2,\mathfrak{b}^3,\ldots\}$, formé par les différentes puissances d'une idéal $\mathfrak{b}$. Mais pourtant un π-système n'est pas en général un μ-système. Cependant, il est facile de construire un μ-système contenu dans un π-système. Le procédé est le même que nous avons indiqué dans [2], § 3. Soit $\mathfrak{P}$ le π-système et prenons $\mathfrak{y}_0 \in \mathfrak{P}$. Pour un certain idéal $\mathfrak{s}_0$, on a $\mathfrak{y}_0 \mathfrak{s}_0 \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{y}_1 \in \mathfrak{P}$; puis, pour un certain idéal $\mathfrak{s}_1$, on a $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}_2$, etc.. La suite $\{\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots\}$ est un μ-système, ce qu'on peut reconnaître de la façon suivante: $\mathfrak{y}_0 \mathfrak{s}_0 \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{y}_1$; $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}_2$; $\mathfrak{y}_0 \mathfrak{s}_0 \mathfrak{y}_0 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{y}_0 \mathfrak{s}_0 \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{y}_2$; $\mathfrak{y}_2 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}_3$; etc..

Il nous sera aussi utile la convention que nous allons faire. Supposons $\mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{b}_\mu$ l'ensemble union d'idéaux $\mathfrak{b}_\mu$, de $\mathfrak{S}$. Le symbole $C(\mathfrak{g}) = C'(\mathfrak{g})$ signifiera également l'ensemble complémentaire de l'ensemble des idéaux contenus dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h}$ a une définition analogue à celle de $\mathfrak{g}$ et si $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h}$, il est clair que $C(\mathfrak{h}) \subseteq C(\mathfrak{g})$. L'égalité $C(\mathfrak{g}) = C(\mathfrak{h})$ implique $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

Les considérations qu'il nous reste encore à faire dans ce § rentrent dans le même ordre d'idées. Quelques fois on les développera avec des μ-systèmes, d'autres avec des π-systèmes.

Soient $\mathfrak{a}_0$ un idéal e $\mathfrak{P}_0$ un π-système tel que: 1) $\mathfrak{P}_0$ ne contient aucun sousidéal de $\mathfrak{a}_0$; 2) l'ensemble union U_0 des idéaux qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}_0$ ne contient aucun idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$; alors, parmi les π-systèmes, dans les mêmes conditions, qui contiennent $\mathfrak{P}_0$, il y a un π-système maximum. En fait, si nous considérons un système ordonné $\{\mathfrak{P}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de tels systèmes, chacun d'eux ayant un U_λ correspondant, dont la définition est semblable à celle de U_0, l'ensemble union $\mathfrak{P} = \bigcup \mathfrak{P}_\lambda$ est encore un π-système qui contient $\mathfrak{P}_0$, qui ne contient aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}_0$ et tel que l'ensemble union $U \subseteq U_\lambda$ (λ quelconque), des idéaux n'appartenant pas à $\mathfrak{P}$, ne contient aucun idéal $\mathfrak{m}$ appartenant à $\mathfrak{P}$.

Il convient de souligner le résultat qu'on vient de justifier. Ainsi:

Théorème 3': *Si, dans un anneau arbitraire $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{a}_0$ est un idéal et $\mathfrak{P}_0$ est un π-système tel que:* 1) *$\mathfrak{P}_0$ ne contient aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}_0$;* 2) *l'ensemble union U_0, des idéaux n'appartenant pas à $\mathfrak{P}_0$, ne contient aucun idéal appartenant à $\mathfrak{P}_0$, ce qui entraîne $\mathfrak{P}_0 = C'(U_0)$; alors, parmi les π-systèmes, dans les mêmes conditions, qui contiennent $\mathfrak{P}_0$, il y a un π-système maximum $\mathfrak{P} = C'(U)$, U étant supposé l'ensemble union des idéaux n'appartenant pas à $\mathfrak{P}$.*

À côté de ce thèorème 3', et d'un théorème analogue 3 (relatif à des μ-systèmes), on doit mettre deux nouveaux thèorèmes 4 et 4'. Le théorème 4, en correspondance avec le lemme 4, de [1], le théorème 4' se plaçant à côté du théorème 8, de [2]. Nous ne donnerons que l'énnoncé et la démonstration du

Théorème 4: *Dans un anneau arbitraire $\mathfrak{S}$, soient $\mathfrak{M}_0$ un μ-système et $\mathfrak{a}_0$ un idéal sans sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}_0$. Supposons encore que l'ensemble union U_0, des idéaux n'appartenant pas à $\mathfrak{M}_0$, ne contient aucun idéal appartenant à $\mathfrak{M}_0$, ce qui donne $\mathfrak{M}_0 = C(U_0)$. Alors, tout idéal maximum $\mathfrak{q}$, parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ et ne contiennent aucun idéal appartenant à $\mathfrak{M}_0$, est un idéal premier.* $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{a}_0$ étant donnés, l'ensemble des idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}_0$ et ne contiennent aucun sous-idéal appartenant à $\mathfrak{M}_0$ forme un système partiellement ordonné non vide. Si on prend, dans ce système, un ensemble ordonné $\{\mathfrak{q}_\lambda\}_{\lambda \in L}$, l'idéal engendré par les $\mathfrak{q}_\gamma$, qui en est l'ensemble union $\bigcup \mathfrak{q}_\lambda = \mathfrak{V}$, ne contient aussi aucun sous-idéal $\mathfrak{g} \in \mathfrak{M}_0$, comme nous allons le montrer: chaque $\mathfrak{q}_\lambda$ est contenu dans U_0, donc $\mathfrak{V} \subseteq U_0$; alors, un sous-idéal contenu dans $\mathfrak{V}$ será contenu dans U_0 et n'appartient pas à $\mathfrak{M}_0$. Le principe de Zorn peut être appliqué. Supposons donc $\mathfrak{q}$ l'idéal maximum indiqué dans le théorème. Si $\mathfrak{q}$ n'était pas premier, il existiraient des idéaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ tels que $\mathfrak{b}\mathfrak{S}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{b})$, avec $\mathfrak{b}\not\equiv 0(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{c}\not\equiv 0(\mathfrak{q})$. Les idéaux $(\mathfrak{q},\mathfrak{b})\supset\mathfrak{q}$, $(\mathfrak{q},\mathfrak{c})\supset\mathfrak{q}$ contiendraient sousidéaux $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ appartenant à $\mathfrak{M}_0$, donc il existirait $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{m}_1\mathfrak{g}\mathfrak{m}_2\in\mathfrak{M}_0$. Puisqu'on a $\mathfrak{m}_1\mathfrak{g}\mathfrak{m}_2\subseteq$ $\subseteq(\mathfrak{q},\mathfrak{b})\mathfrak{g}(\mathfrak{q},\mathfrak{c})\subseteq(\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{c},\mathfrak{q})$, on ne pourrait pas avoir $\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{c}\equiv$ $\equiv 0(\mathfrak{q})$. Ce résultat est en contradiction avec les congruences $\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{c}\equiv 0(\mathfrak{b}\mathfrak{S}\mathfrak{c})\equiv 0(\mathfrak{q})$.

Nous allons terminer ce §, en faisant rapport de deux propositions qu'on doit comparer avec celles qui, ayant un énnoncé analogue, son donnés par le lemme 5, de [1], et le théorème 9, de [2]. Bien que nous nous bornerons au théorème 5', le théorème qu'on devrait désigner par théorème 5 est facilement sous-entendu par le lecteur.

Théorème 5': *Pour que l'ensemble union $\mathfrak{x}$ de certains idéaux soit un idéal demi-premier minimum appartenant à $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que $C'(\mathfrak{x})$ soit un π-système maximum parmi les π-systèmes qui ne contiennent aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$ et sont de la forme $\mathfrak{P}=C'(U)$.* Nous commencerons par admettre que $\mathfrak{x}$ et $C'(\mathfrak{x})$ réalisent les conditions de l'énnoncé. Parmi les idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$ et ne contiennent aucun idéal appartenant à $C'(\mathfrak{x})$ il y en a un qui est maximum et demi-premier. On parvient à cette conclusion, car les conditions du théorème 4', semblables à celles du théorème 4, sont vérifiés avec $\mathfrak{x}=U_0$, $C'(U_0)=$ $=\mathfrak{P}_0=C'(\mathfrak{x})$. En désignant par $\mathfrak{y}$ l'idéal maximum en question, on a $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{y}\subseteq\mathfrak{x}$. Alors, $C'(\mathfrak{y})\supseteq C'(\mathfrak{x})$ est un π-système de la même forme que ceux dont il est question. La propriété de maximum admise pour $C'(\mathfrak{x})$ nous amène à $C'(\mathfrak{y})=C'(\mathfrak{x})$, donc à $\mathfrak{x}=\mathfrak{y}$. Cela nous montre que $\mathfrak{x}$ est un idéal demi-premier. L'existence d'un idéal demi-premier

$\mathfrak{x}_1$ tel que $\mathfrak{x}\supset\mathfrak{x}_1\supseteq\mathfrak{a}$ serait aussi en contradiction avec la propriété de maximum de $C'(\mathfrak{x})$.

En passant à l'autre partie du théorème, supposons $\mathfrak{x}$ un idéal demi-premier appartenant à $\mathfrak{a}$. L'inclusion $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{x}$ nous montre que $C'(\mathfrak{x})$ est un π-système sans aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$ et appartenant à la famille convenable des π-systèmes. En désignant par $\mathfrak{P}_1$ un π-système maximum parmi ceux qui contiennent $C'(\mathfrak{x})$ et ne contiennent aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$, toutefois maximum d'accord avec le théorème 3', considérons l'ensemble union $U_1=\mathfrak{x}_1$ des idéaux qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}_1$. Nous savons qu'on a $\mathfrak{P}_1=$ $=C'(\mathfrak{x}_1)$, avec $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{x}_1\subseteq\mathfrak{x}$, et que $\mathfrak{x}_1$ et $C'(\mathfrak{x}_1)$ sont dans les conditions indiquées dans le théorème; donc, compte tenue de la partie déjà démontrée, $\mathfrak{x}_1$ est un idéal demi-premier appartenant à $\mathfrak{a}$. On arrive à $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_1$, $C'(\mathfrak{x})=C'(\mathfrak{x}_1)$, d'où la conclusion que $C'(\mathfrak{x})$ a les propriétés désirées.

3) La théorie du radical—Toutes les théories du radical examinées dans [2] nous ont amené au radical de McCoy [1]. Si on remplace maintenant, par exemple, la définition du radical de $\mathfrak{a}$, donnée dans [2], § 5, par la suivante: le radical $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{a}$, est l'ensemble union des idéaux $\mathfrak{n}$ tels que tout π-système de la forme $\mathfrak{P}=C'(U)$ qui contient $\mathfrak{n}$ contient aussi sous-idéal de $\mathfrak{a}$; alors, on peut développer une théorie en relation avec celle qu'on a fait dans [2]. Les résultats sont les mêmes. Dès lors nous avons la proposition dont voici l'énnoncé:

Théorème 6': *Le radical $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{a}$, est un idéal, précisement l'intersection de tous les idéaux demi-premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$.*

Nous commençons par la remarque suivante: tout idéal demi-premier qui contient $\mathfrak{a}$ contient aussi l'idéal $\mathfrak{r}$. En fait, si $\mathfrak{y}$ est un tel idéal, supposons $\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{r}$ un sous-idéal de $\mathfrak{r}$ dans les conditions ci-dessus soulignées et tel que $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{y}$. Alors $C'(\mathfrak{y})$ est un π-système qui contient $\mathfrak{n}$, donc, qui contient sous-idéal de $\mathfrak{a}$. Cela ne peut pas avoir lieu, puisqu'on a $\mathfrak{y} \supseteq \mathfrak{a}$. Il en résulte $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{y}$, comme on le veut. Maintenant nous pouvons affirmer que l'intersection indiquée dans le théorème contient en effet le radical $\mathfrak{r}$. En la désignant par $\cap \mathfrak{y}_\beta, (\beta \in B)$, prenons ensuite un sous-idéal $\mathfrak{s} \not\subseteq \mathfrak{r}$; nous allons reconnaître qu'on a aussi $\mathfrak{s} \not\subseteq \cap \mathfrak{y}_\beta$. L'hypothèse $\mathfrak{s} \not\subseteq \mathfrak{r}$ nous amène à l'existence d'un ensemble $\mathfrak{P} = C'(U)$, qui est un π-système contennant $\mathfrak{s}$ mais qui ne contient aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$. Ayant égard au thèorème 3', il existera un système $\mathfrak{P}_1 = C'(U_1)$ maximum, lequel contiendra $\mathfrak{P}$ et ne contiendra aucun sous-idéal de $\mathfrak{a}$. Alors, en vertu du théorème 5', U_1 est un idéal demi-premier minimum appartenant à $\mathfrak{a}$; d'autre part, puisque $\mathfrak{s} \in \mathfrak{P}_1$, on aura $\mathfrak{s} \not\subseteq U_1 = \mathfrak{y}_\lambda, (\lambda \in B)$, donc, $\mathfrak{s} \not\subseteq \cap \mathfrak{y}_\beta$, et le théorème est démontré.

Dans [2], on a posé $\mathfrak{r} = \phi_1(\mathfrak{a})$. Nous savons comme d'ailleurs on a aussi vu dans [1], que, en remplaçant, dans la définition de radical, les π-systèmes, de la forme $\mathfrak{P} = C'(U)$, par des μ-systèmes, de la forme $\mathfrak{M} = C(U)$, on définit un radical $\phi_2(\mathfrak{a}) = \phi_1(\mathfrak{a})$. L'égalité est entraîné par le fait que $\phi_2(\mathfrak{a})$ est égal à l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$. Lorsque $\mathfrak{a}$ est un nilidéal, les deux intersections en question sont égales à l'intersection des idéaux radicaux minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$ (ou nilidéaux demi-premiers minimaux appartenant à $\mathfrak{a}$). En particulier, lorsqu'on a $\mathfrak{a} = (0)$, toutes les intersections dont il est question représentent le radical inférieu de Baer, considéré dans [3]. Ce résultat, du à Levitzki, a été établi par cet auteur dans [4]. On trouve dans [2] une manière différente d'arriver à cette même conclusion.

Remarque: L'existence des radicaux $\phi_1(\mathfrak{a})$ e $\phi_2(\mathfrak{a})$, ayant égard aux définitions, peut être établie trés facilment. D'un côté, il existent toujours des μ-systèmes de la forme $\mathfrak{M} = C(U)$, (et, partant, des π-systèmes de la forme $\mathfrak{P} = C'(U)$). Il suffit de prendre pour $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ l'ensemble de la totalité des idéaux de l'anneau. Alors, est $\mathfrak{M}_0 = C(U_0) = \mathfrak{P}_0 = C'(U_0)$, où U_0 est l'ensemble vide. D'autre côté, si on considère $\mathfrak{a}$, pour tout μ-système, de la forme $\mathfrak{M}_0 = C(U)$, qui contient $\mathfrak{a}$, tel que $\mathfrak{M}_0$, il y a sous-idéal de $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ lui-même) qui appartient à $\mathfrak{M}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1]–N. H. McCoy, *Prime ideals in general rings*, «American Journal of Mathematics», vol. LXXI, 1949, pgs. 823-833.

[2]–A. Almeida Costa, *Sur les anneaux demi-premiers* «Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa», 2.ª série, A-Ciências Matemáticas, vol. VII, 1959, pgs. 89-104.

[3]–R. Baer, *Radical ideals*, «American Journal of Mathematics», vol. LXV, 1943, pgs. 537-568.

[4]–J. Levitzki, *Prime ideals and the lower radical*, «American Journal of Mathematics», vol. LXXIII, 1951, pgs. 25-29.

Lisboa, Centro de Matemáticas Aplicadas
ao Estudo da Energia Nuclear, Agosto de 1958.