

os elementos desta álgebra de Boole, e verifica-se facilmente (a partir das condições acima e das definições já dadas) que aquêl cálculo de complexos é o de um grupo topológico relativamente a êste fecho se, e só se,  $\overline{XUY} = \overline{XU} \overline{Y}$ ,  $\overline{\overline{X}} = X$ ,  $\overline{X \cdot Y^{-1}} \subset \overline{X} \cdot \overline{Y^{-1}}$  quaisquer que sejam  $X$  e  $Y$  e  $\overline{\overline{X}} = X$  quando  $X$  é um átomo (complexo de um único elemento de  $G$ )<sup>6)</sup>. (Demonstra-se agora, imediatamente, por exemplo, que se  $X$  é um sub-grupo  $\overline{X}$  também é um sub-grupo: De facto, se  $X \neq 0$  é  $\overline{X} \neq 0$  e se  $X \cdot X^{-1} \subset X$  é  $\overline{X} \cdot \overline{X^{-1}} \subset \overline{X \cdot X^{-1}} \subset \overline{X}$ ).

Esta formulação, que se nos afigura simples, significa de certo modo, uma algebrização da noção do grupo topológico, e tem, porventura, inte-

<sup>6)</sup> António Monteiro, et Hugo Ribeiro, *Les fonctions continues et les espaces partiellement ordonnés*, Portugaliae Mathematica, vol. 4, 1945, Lisboa.

resse no estabelecimento de alguns resultados da sua teoria geral. Sabe-se por exemplo, que a estrutura topológica dum grupo topológico é sempre a dum espaço regular<sup>7)</sup>. E êste resultado deve poder obter-se facilmente se se recorre à caracterização que António Monteiro deu dos espaços regulares<sup>7)</sup>. Afigura-se-nos ainda que, com leves modificações, as três primeiras condições apontadas para o cálculo dos complexos dum grupo topológico, se verificam ainda noutros cálculos muito distintos (e que eias são especialmente interessantes no cálculo das relações binárias). Procuraremos detalhar esta observação num novo artigo.

1943, Setembro, Zürich

<sup>7)</sup> António Monteiro, *La notion de fermeture et les axiomes de séparation*, Portugaliae Mathematica, vol. 2, 1941, Lisboa, p. 290 ou Anais da Fac. Ciências do Pôrto, tomo 26, 1941, Pôrto, p. 185.

## ÁLGEBRA MODERNA

por A. Almeida Costa

Em seguimento da exposição feita nos cursos do *Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto* sobre *Grupos e Anéis*, seria útil, nos termos da memória fundamental de E. Steinitz (*Algebraische Theorie der Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 137, págs. 167 a 308, 1910), continuar o tratamento das ampliações algé-

bricas dos corpos comutativos, expôr o teorema fundamental relativo à existência dum tipo de equivalência de corpo algèbricamente fechado, ampliação dum corpo dado, e dar os teoremas relativos às ampliações transcendententes (Os cursos referidos inserem todo o conteúdo da memória citada, até págs. 249).

## FÍSICA TEÓRICA

por A. Almeida Costa

Tem interêsse justificar os raciocínios que vão seguir-se, utilizando simultâneamente dados experimentais e métodos da Análise Matemática.

Consideremos um átomo composto de um núcleo e de  $f+1$  electrões. Na ausência de campo exterior, a função de força é

$$U = \sum_{\lambda=1}^{f+1} \frac{Ze^2}{r_{0\lambda}} - \sum_{\substack{i < k \\ i \neq 0}}^{f+1} \frac{e^2}{r_{ik}},$$

onde  $Ze$  representa a carga do núcleo,  $r_{im}$  a distância entre as partículas de índices  $i$  e  $m$ , e onde o índice zero se refere ao núcleo. A equação de *Schrödinger* correspondente é

$$\left( - \sum_0^{f+1} \frac{\hbar^2}{2\mu_\lambda} \Delta_\lambda - \sum_1^{f+1} \frac{Ze^2}{r_{0\lambda}} + \sum_{\substack{i < k \\ i \neq 0}}^{f+1} \frac{e^2}{r_{ik}} \right) \psi = E\psi.$$

Introduzindo as coordenadas  $x_0, \dots$  do centro de gravidade e as coordenadas relativas  $x_\lambda - x_0 = x'_\lambda, \dots$ , têm lugar as igualdades

$$x_\lambda = x_0 + x'_\lambda, \dots, \quad x_0 = x_0 - \frac{\mu_1 x'_1 + \dots}{\mu_0}, \dots$$

Por elas se verifica que  $U$  depende unicamente das coordenadas relativas. Nas novas coordenadas, a equação de *Schrödinger* escreve-se

$$\left[ - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_0 - \sum_1^{f+1} \frac{\hbar^2}{2\mu_\lambda} \Delta'_\lambda + \frac{\hbar^2}{2M} \left( \sum_1^{f+1} \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} \right)^2 + \dots - U \right] \psi = E\psi,$$

$$(M = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{f+1}).$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes (onde se suprimem as linhas):

$$- \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_0 \psi_0 = E_0 \psi_0,$$

$$\left\{ -\sum_1^{l+1} \frac{\hbar^2}{2\mu_\lambda} \Delta_\lambda + \frac{\hbar^2}{2M} \left( \sum_1^{l+1} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right)^2 + \dots - U \right\} \psi = E\psi.$$

Nesta última, vamos desprezar a quantidade  $\frac{1}{\mu_0}$  em face de  $\frac{1}{\mu_\lambda}$  (ou  $\frac{\mu}{\mu_0}$  em face da unidade). Sendo

$$(u_0 + u_1 + \dots) x_i = \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \dots, \dots,$$

obtem-se, na mesma ordem de aproximação,

$$x_i = x_0, \dots, r_{0\lambda} = \sqrt{x_0^2 + \dots} = \sqrt{x_\lambda^2 + \dots} = r_\lambda.$$

A equação em causa torna-se na seguinte:

$$(1) \quad \left( -\sum_1^{l+1} \frac{\hbar^2}{2\mu_\lambda} \Delta_\lambda - \sum_1^{l+1} \frac{Ze^2}{r_\lambda} + \sum_{\substack{i < k \\ i \neq 0}} \frac{e^2}{r_{ik}} \right) \psi + \left( -\frac{\hbar^2}{2\mu_{l+1}} \Delta_{l+1} - \frac{Ze^2}{r_{l+1}} + \sum_{i=1}^{l+1} \frac{e^2}{r_{i,l+1}} \right) \psi = E\psi.$$

Pondo de parte as variações de  $E$ , e  $\psi$ , o nosso problema é um problema de núcleo fixo e de electrões móveis em torno desse núcleo, que pode supor-se na origem das coordenadas.

Vamos escrever (1) sob a forma

$$(2) \quad (A+B)\psi + (A'+B')\psi = E\psi,$$

com

$$A = -\sum_1^{l+1} \frac{\hbar^2}{2\mu_\lambda} \Delta_\lambda - \sum_1^{l+1} \left( \frac{Ze^2}{r_\lambda} - \Phi_\lambda \right) = -\sum_1^{l+1} \frac{\hbar^2}{2\mu_\lambda} \Delta_\lambda - \sum_1^{l+1} V_\lambda \left( \frac{1}{r_\lambda} \right),$$

$$B = \sum_{\substack{i < k \\ i \neq 0}} \frac{e^2}{r_{ik}} - \sum_1^{l+1} \Phi_\lambda = -\sum_1^{l+1} \frac{Ze^2}{r_\lambda} + \sum_{\substack{i < k \\ i \neq 0}} \frac{e^2}{r_{ik}} + \sum_1^{l+1} V_\lambda \left( \frac{1}{r_\lambda} \right),$$

$$A' = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{l+1}} \Delta_{l+1} - \left( \frac{Ze^2}{r_{l+1}} - \Phi_{l+1} \right) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{l+1}} \Delta_{l+1} - V_{l+1} \left( \frac{1}{r_{l+1}} \right),$$

$$B' = \sum_{i=1}^{l+1} \frac{e^2}{r_{i,l+1}} - \Phi_{l+1} = -\frac{Ze^2}{r_{l+1}} + \sum_{i=1}^{l+1} \frac{e^2}{r_{i,l+1}} + V_{l+1} \left( \frac{1}{r_{l+1}} \right).$$

A equação (2) parte-se agora em

$$(3) \quad (A+B)\psi_1 = E_1\psi_1,$$

$$(4) \quad (A'+B')\psi_2 = E_2\psi_2.$$

A equação (3) respeita aos  $f$  primeiros electrões. O seu tratamento supõe-se ter sido feito do modo seguinte: estudou-se  $A\psi = E\psi$ , que respeita ao sistema dos referidos  $f$  electrões postos em frente do núcleo com «protecção» (Abschirmung); em seguida, sob a forma de «perturbação», introduziu-se  $B$  = acção mútua - protecção.

Admitindo que os espectros aos quais se supõe aplicável a doutrina em desenvolvimento (espectros hidrogenoides dos alcalinos) se explicam supondo fixos  $E_1$  e  $\psi_1$  (estado fundamental), somos levados à equação (4). Podemos dizer, em primeiro lugar, que ao sistema, de estado determinado, constituído pelos  $f$  primeiros electrões, se juntou o electrão de ordem  $f+1$ , sob o qual actua um campo central com «protecção», tudo regulado pela equação

$$(A+B)\psi + A'\psi = E\psi;$$

e, em segundo lugar, que o resto da acção mútua, entre o electrão de ordem  $f+1$  e a «carcassa» do núcleo e dos  $f$  primeiros electrões, é introduzida pelo operador  $B'$ .

A equação  $A'\psi_2 = E_2\psi_2$  corresponde ao problema usual dum electrão em frente dum núcleo, sob a acção duma força do tipo  $\varphi(r)$ , que não é uma força de Coulomb. Se não existisse a «protecção»  $\Phi_{l+1}$ , os valores próprios constituiriam um sistema discreto:

$$E'_{2,1}; E'_{2,2} = E'_{2,3} = E'_{2,4} = E'_{2,5}; E'_{2,6} = \dots = E'_{2,l+1}; \dots$$

Por simplicidade, escreveremos  $N = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + 1$  e poremos

$$E'_{2,N} = E'_{2,N+1} = \dots = E'_{2,N+n^2-1} = E_N.$$

O valor próprio  $E_N$  tem uma degenerescência de grau  $n^2$ . A intervenção de  $\Phi_{l+1}$  diminue essa degenerescência, pois  $E_N$  desdobra-se nos valores próprios

$$(5) \quad E(n,0), E(n,1), \dots, E(n,l), \dots, E(n,n-1),$$

onde a  $E(n,l)$  corresponde um degenerescência de grau  $2l+1$ . O cálculo dos valores (5) faz-se determinando as raízes  $\zeta$  duma equação da forma

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \zeta & \dots & b_{1,n^2} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n^2,1} & \dots & b_{n^2,n^2} - \zeta \end{vmatrix} = 0,$$

que quasi se reduz à forma

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\zeta & b_{12} & \dots & b_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22}-\zeta & \dots & b_{2i} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ii}-\zeta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0-\zeta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0-\zeta \end{vmatrix} = 0,$$

onde  $i=l(l-1)+1$ , e  $l$  se supõe grande. Os  $b_{ik}$  correspondentes a valores grandes de  $l$  seriam, pois, nulos, facto que justificaria a tendência do

espectro dos hidrogenoides para o espectro do hidrogénio, quando  $l$  aumenta.

A intervenção de  $B'$  alteraria os níveis da energia mas não a degenerescência.

Finalmente, «responsabilizando» o electrão de valência pelo fenómeno de Zeeman proveniente da intervenção dum campo magnético uniforme (não muito intenso), o efeito correspondente poderia então tratar-se como se houvesse um único electrão num campo central, mesmo para o cálculo das intensidades luminosas (probabilidades de transição em que intervém o número quântico magnético  $m$ ).

## MOVIMENTO MATEMÁTICO

### JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

A «Gazeta de Matemática» tem o prazer de comunicar aos seus leitores a criação da *Junta de Investigação Matemática*, acontecimento da maior importância para o desenvolvimento e orientação do movimento matemático português contemporâneo.

Publicamos a seguir a acta da fundação da Junta que teve lugar no dia 4 de Outubro de 1943; nela se apresentam os objectivos a alcançar dispensando qualquer outro comentário.

Atendendo à necessidade de :

- 1.º — Promover o desenvolvimento da investigação matemática ;
- 2.º — Realizar trabalhos de investigação necessários à economia da nação e ao desenvolvimento das outras ciências ;
- 3.º — Sistematizar e coordenar a inquirição científica dos matemáticos portugueses ;

4.º — Vincular o movimento matemático português com o dos outros países e em especial com o dos países ibero-americanos ;

5.º — Despertar na juventude estudiosa portuguesa o entusiasmo pela investigação matemática e a fé na sua capacidade criadora ;

resolvem os signatários promover a criação duma Junta de Investigação Matemática convidando a ingressar nela todos aquêles a quem o empreendimento interesse.

A. de Mira Fernandes  
António A. Monteiro  
Ruy Luís Gomes

A «Gazeta de Matemática» aprovando, evidentemente, esta iniciativa põe as suas páginas ao serviço da Junta e pede a todos os que por ela se interessam para comunicarem a sua adesão à «Junta de Investigação Matemática». — Redacção da «Gazeta de Matemática» — Lisboa.

### ¿ O QUE É A «PORTUGALIAE MATHEMATICA»?

por Hugo Ribeiro

(bolseiro do I. A. C. em Zürich)

A «Portugaliae Mathematica» tem sido repetidamente anunciada na nossa «Gazeta». Os nossos leitores sabem já que se trata de uma revista de colaboração internacional editada por António Monteiro, a única revista portuguesa que publica, exclusivamente, trabalhos originaes de Matemática. Mas é tempo de dar a seu respeito algumas informações mais e, em especial, de procurar

explicar ao público largo e interessado, que é já o dos leitores da «Gazeta», como serve ela o desenvolvimento dos estudos matemáticos e a importância que a sua publicação tem para os estudiosos portugueses do presente e do futuro. É o que, rapidamente, procuro fazer nas linhas que seguem as quais, em parte, desenvolvem o prefácio de António Monteiro no primeiro volume da revista.